บทที่ 2

หลักการหาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

2.1 วิธีการประมาณที่ตั้งแหล่งกำเนิดสัญญาณจากการวัดมุมทิศ

การพัฒนาและศึกษาวิจัยงานทางด้านการประมาณที่ตั้งแหล่งกำเนิดสัญญาณ เป็นงานที่ได้มีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง ทั้งนี้เพื่อเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพของระบบ สำหรับวิธีการประมาณที่ตั้งแหล่งกำเนิดสัญญาณจากการวัดมุมทิศ [4] แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ การใช้เครื่องหาทิศทางสัญญาณแบบเคลื่อนที่ และ การใช้เครื่องหาทิศทางสัญญาณแบบอยู่กับที่ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

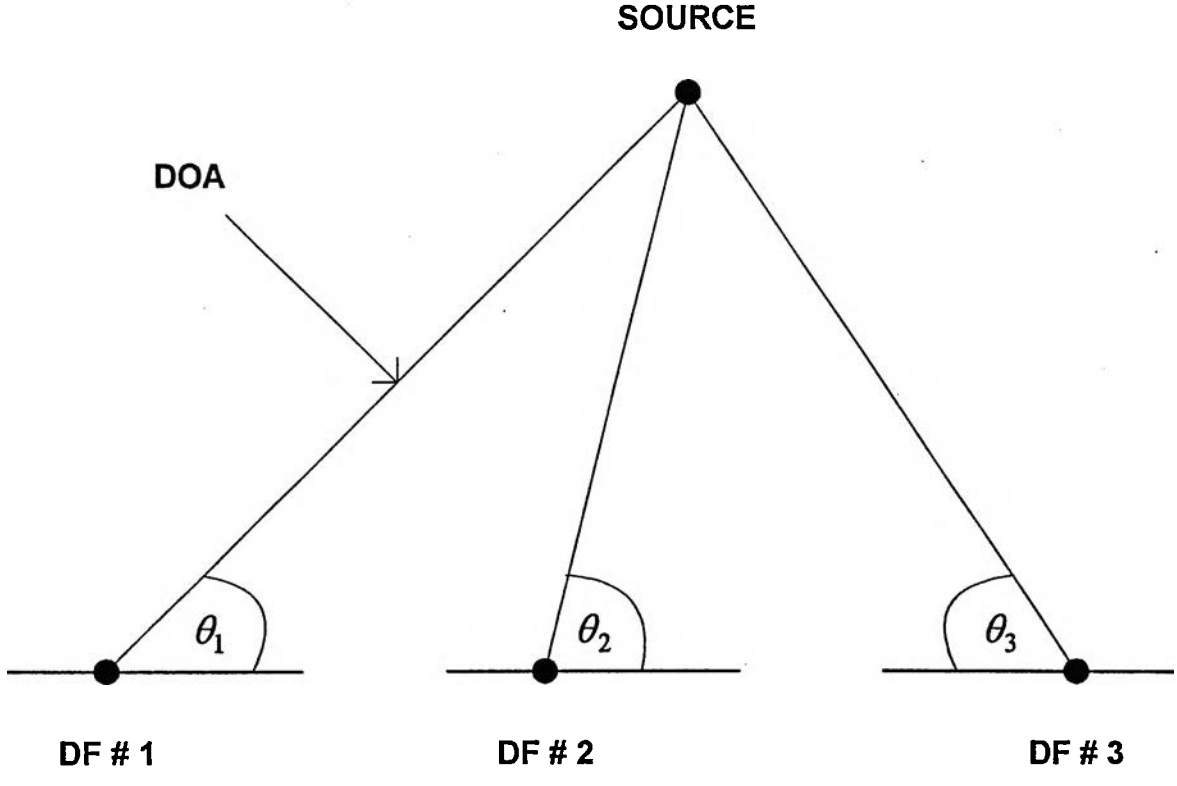
2.1.1 การใช้เครื่องหาทิศทางสัญญาณแบบเคลื่อนที่ (Moving Observer)

วิธีการนี้จะใช้เครื่องหาทิศทางสัญญาณจำนวน 1 เครื่อง ติดตั้งไว้บนอากาศยาน ซึ่งในทางปฏิบัติเราจะต้องรู้ตำแหน่งของเครื่องหาทิศทางสัญญาณ แล้วทำการวัดตำแหน่งของแหล่งกำเนิดสัญญาณขณะที่อากาศยานทำการบินตาม เส้นทางการบินเป็นแนวเส้นตรง (Trajectory of Airplane) โดยจะกำหนดให้มีการวัดตั้งแต่ 2 ครั้งหรือมากกว่านั้น หรืออาจกำหนดให้มีการวัดทุก ๆ กี่วินาทีก็แล้วแต่จะมีการกำหนดขึ้น ซึ่งมุมทิศที่วัดออกมาได้นั้นจะใช้วิธีการเล็งสกัดกลับ (Triangulation)

2.1.2 การใช้เครื่องหาทิศทางสัญญาณแบบอยู่กับที่ (Multiple Fixed Observer)

วิธีการนี้เป็นการหาที่ตั้งแหล่งกำเนิดสัญญาณที่ต้องใช้เครื่องหาทิศทางสัญญาณที่ตั้งอยู่กับที่อย่างน้อย 2 เครื่องขึ้นไป แล้วทำการวัดจากเครื่องหาทิศทางสัญญาณแต่ละเครื่องไปยังแหล่งกำเนิดสัญญาณ ในลักษณะเรียงลำดับโดยที่มีเครื่องหาทิศทางสัญญาณตัวหนึ่งเป็นตัวหลัก โดยเราจะทราบตำแหน่งของแหล่งกำเนิดสัญญาณได้โดยการใช้วิธีการเล็งสกัดกลับ (Triangulation) ซึ่งก็คือ การลากเส้นตรงไปตามมุมทิศที่วัดได้ จากเครื่องหาทิศทางสัญญาณไปยังที่ตั้งแหล่งกำเนิดสัญญาณ เส้นตรงนี้เรียกว่า เส้นมุมทิศ (Line of Bearing: LOB) หรือเรียกอีกอย่างว่า Direction of Arrival: DOA จุดที่เส้น DOA ตัดกัน คือ ตำแหน่งที่ตั้งของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

การประมาณหาที่ตั้งแหล่งกำเนิดสัญญาณจากการวัดมุมทิศ (Bearing Angle Measurements) เป็นการหาโดยการวัดมุมทิศที่ได้จากการรู้ตำแหน่งที่ตั้งของ เครื่องหาทิศทางสัญญาณ ที่เรียกว่า "Triangular" ดังจะแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การหาตำแหน่งที่ตั้งของแหล่งกำเนิดสัญญาณจากการวัดมุมทิศโดยวิธีการเล็งสกัดกลับ (Triangulation)

จากหลักการดังกล่าวจะพบว่า ถ้าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณเกิดความคลาดเคลื่อน เมื่อนำมาใช้ในการหาตำแหน่งที่ตั้งของแหล่งกำเนิดสัญญาณก็จะทำให้เกิดความผิดพลาดขึ้น ดังนั้นในการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณจากในอดีต จึงได้เริ่มทำการศึกษา วิจัย คิดค้น ระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณชนิดต่าง ๆ โดยจะพิจารณาถึง เครื่องหาทิศทางสัญญาณ ด้วยการเริ่มต้นนำการใช้ประสิทธิภาพในการรับสัญญาณของสายอากาศแบบต่างๆ มาใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวอย่างต่อเนื่องมาโดยตลอด

ต่อมาเมื่อเริ่มมีการพัฒนา ค้นคว้า เกี่ยวกับงานทางด้านกรรมวิธีประมวลผลสัญญาณ ด้วยการใช้ กรรมวิธีประมวลผลสัญญาณในลักษณะ **Array Signal Processing** ซึ่งเป็นอีกสาขาหนึ่ง ในการศึกษา **การประมวลผลสัญญาณดิจิตอล (Digital Signal Processing: DSP)** ด้วยการนำเอาวิธีการต่าง ๆ ทางด้าน การประมวลผลสัญญาณดิจิตอล มาใช้ประมวลผลของสัญญาณ ในลักษณะของ array แล้วนำมาประยุกต์ใช้กับ หลักการประมาณ

ค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณเพื่อให้ได้ผลที่ถูกต้อง และมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น จึงได้มีการค้นคว้า พัฒนา วิธีการประมวลผลของสัญญาณในลักษณะต่าง ๆ ให้นำมาใช้กับระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณมาโดยตลอด ในที่นี้จะแบ่งประเภทของ ระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณชนิดต่าง ๆ ตามลักษณะของ การประมวลผลสัญญาณ ได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ดังต่อไปนี้

2.2 ระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณแบบแอนะลอก

2.2.1 ระบบที่ใช้การหมุนสายอากาศสภาพเจาะจงทิศสูง (High Directivity) [5]

สายอากาศจะมีคุณสมบัติข้อหนึ่ง คือ ความสามารถในการรับสัญญาณวิทยุจะขึ้นอยู่กับ สภาพเจาะจงทิศ (Directivity) ของแหล่งกำเนิดสัญญาณ สายอากาศอาจจะถูกออกแบบให้รับได้ดีในทุกทิศทางเท่า ๆ กัน เช่น สายอากาศแบบไดโพล (Dipole) หรือ อาจจะถูกออกแบบให้รับได้ดีในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง เช่น สายอากาศแบบไดโพลพับ (Folded Dipole) หรือ สายอากาศแบบยากิ (Yagi Antenna) สายอากาศแบบหลังนี้ เรียกว่ามีสภาพเจาะจงทิศสูง (High Directivity) สำหรับสายอากาศที่มีสภาพเจาะจงทิศสูงนี้เราสามารถนำมาออกแบบระบบเครื่องมือหาทิศทางของสัญญานวิทยุได้ หลักการก็คือ การหมุนสายอากาศสภาพเจาะจงทิศสูงรอบตัว 360 องศา ทิศทางใดที่สามารถรับสัญญาณได้ดีก็คือ ทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ ระบบเครื่องหาทิศในยุคแรก ๆ จะใช้การหมุนสายอากาศที่มีสภาพเจาะจงทิศสูงนี้ โดยระบบทางกล และส่วนแสดงผลจะใช้ระบบเสียงพร้อมกับ มาตรแสดงความแรงของสัญญาณที่ได้รับ

2.2.2 ระบบ ADCOCK / WATSON-WATT [5],[6]

ADCOCK เป็นนักวิทยาศาสตร์ที่คิดค้น สายอากาศแบบแอดค็อก ส่วน WATSON-WATT เป็นผู้ที่นำ สายอากาศแบบแอดค็อก มาพัฒนาเป็น ระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณวิทยุ สายอากาศแบบแอดค็อก จะมี **แบบรูปการแผ่พลังงาน (radiation pattern)** อยู่ในระนาบเดี่ยว (x-y plane) ในการรับสัญญาณวิทยุจากทิศทางต่าง ๆ เป็นรูปเลข 8

สายอากาศแบบแอดค็อก จะประกอบด้วย สายอากาศแบบไดโพลจำนวน 2 ชุด ติดตั้งอยู่ใกล้ ๆ กัน ตามปกติสายอากาศไดโพลจะมี แบบรูปการแผ่พลังงานเป็นวงกลม คือ รับสัญญาณได้ดีเท่ากันในทุก ๆ ทิศทางอยู่ในระนาบเดี่ยว แต่เมื่อนำ Dipole 2 ชุดมาตั้งใกล้ ๆ กัน แบบรูปการแผ่พลังงาน จะกลายเป็นรูปเลข 8

สำหรับ เครื่องหาทิศทางสัญญาณวิทยุระบบ ADCOCK/ WATSON-WATT จะประกอบด้วยสายอากาศแอดค็อก จำนวน 2 ชุด และ สายอากาศอ้างอิง (Reference Antenna) อีก 1 ชุด โดยที่ เครื่องหาทิศทางสัญญาณวิทยุระบบ ADCOCK/ WATSON-WATT จะนำเอาความแรงของสัญญาณจากสายอากาศแอดค็อกทั้ง 2 ชุด มาพิกัดบนแกน x และแกน y ของกราฟ เนื่องจากสภาพเจาะจงทิศของสายอากาศแอดค็อก เป็นรูปเลข 8 ทำให้ไม่สามารถจะรู้ได้ว่า สัญญาณมาจากทางด้านบวกหรือด้านลบของแกน สาเหตุนี้เองจึงต้องมีสายอากาศอ้างอิงอีก 1 ชุด เพื่อทำการเปรียบเทียบ สัญญาณจาก สายอากาศแอดค็อก กับ สัญญาณจากสายอากาศอ้างอิง จะทำให้เราทราบว่า สัญญาณมาจากทางด้านบวกหรือด้านลบของแกน

ในทางปฏิบัติแล้วจะใช้ความแรงของ สัญญาณจากสายอากาศแอดค็อก ที่เปรียบเทียบกับความแรงของสัญญาณจากสายอากาศอ้างอิงแล้วป้อนให้กับแกน x และแกน y ของจอหลอดรังสีแคโทด (Cathode Ray Tube: CRT) แบบวงกลม ซึ่งที่ขอบของจอหลอดรังสีแคโทดจะมีสเกลบอกองศา ภาพในจอหลอดรังสีแคโทดจะเป็นเส้นตรงหรือวงรีแคบ ๆ เกือบเป็นเส้นตรง ชี้ไปยังองศาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณวิทยุ

การใช้ สายอากาศแบบแอดค็อก เพื่อหาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณวิทยุอีกวิธีหนึ่ง ก็คือ การใช้ **มาตรชี้ทิศ (goniometer)** ร่วมกับ สายอากาศแบบแอดค็อก มาตรชี้ทิศ คือ ขดลวด (pick-up coil) รับสัญญาณที่หมุนได้รอบตัว 360 องศา และในขณะที่หมุนเพื่อรับสัญญาณ จะมีตัวแสดงผลที่แสดงความแรงของสัญญาณในทิศทางที่กำลังรับสัญญาณอยู่ โดยมากตัวแสดงผลจะเป็น จอหลอดรังสีแคโทดแบบวงกลม มีสเกลบอกองศา เหมือนกับตัวแสดงผลของ ระบบ ADCOCK / WATSON-WATT ที่กล่าวแล้วขั้นต้น เมื่อมีการแพร่กระจายของสัญญาณคลื่นวิทยุในทิศทางใด บนจอหลอดรังสีแคโทดจะมีเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางของจอ ชี้ไปในทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณวิทยุ

เครื่องหาทิศทางสัญญาณวิทยุ ระบบ ADCOCK/goniometer นี้ นิยมใช้หาทิศทางสัญญาณวิทยุในย่าน HF โดยใช้สายอากาศแอดค็อกหลาย ๆ ชุดตั้งเรียงกันเป็นวงกลม โดยมีมาตรชี้ทิศหมุนเพื่อรับสัญญาณจากสายอากาศแอดค็อกต่าง ๆ เพื่อบอกทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

2.2.3 ระบบ Pseudo-Doppler Effect [5],[6]

เครื่องหาทิศทางสัญญาณระบบ Pseudo-Doppler Effect จะใช้หลักการของ **ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ (Doppler Effect)** คือ เมื่อสายอากาศเคลื่อนที่เข้ามาหาแหล่งกำเนิดสัญญาณ จะทำให้ความถี่ที่รับได้สูงกว่า แต่เมื่อสายอากาศเคลื่อนที่ออกห่างจากแหล่งกำเนิดสัญญาณแล้ว จะทำให้ความถี่ที่รับได้ต่ำกว่า ความถี่ที่

แหล่งกำเนิดสัญญาณแพร่กระจายออกมา เครื่องหาทิศทางสัญญาณระบบ Pseudo-Doppler Effect จะมีสายอากาศเรียงตัวเป็นวงกลม ภาคความถี่วิทยุ (Radio Frequency: RF) ของเครื่อง จะกวาดรับสัญญาณจากสายอากาศแต่ละชุดทำให้ดูเสมือนกับว่าสายอากาศชุดเดียวหมุนเป็นวงกลม และการเคลื่อนที่ของสายอากาศเป็นวงกลมนั้นจะทำเกิดปรากฏการณ์ดอปเพลอร์ (Doppler Effect) ขึ้น และการเลื่อนความถี่แบบดอปเพลอร์ (Doppler Shift) นี้ จะสอดคล้องกับทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ ดังนั้นเมื่อทำการวัดการเลื่อนความถี่แบบดอปเพลอร์ได้ ก็จะนำมาหาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

2.3 ระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณแบบดิจิตอล

2.3.1 ระบบเครื่องมือวัดใช้หลักการแทรกสอด (Interferometer) [5],[6],[7]

เครื่องหาทิศทางสัญญาณ ระบบเครื่องมือวัดใช้หลักการแทรกสอด (Interferometer) ใช้การ หาผล**ต่างเฟส (phase difference)** ของสัญญาณ จากสายอากาศ 2 ชุด ที่ตั้งใกล้ ๆ กัน จากผลต่างของเฟสที่ได้ จะนำมาใช้ในการคำนวณหาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ ในการหาผลต่างเฟสสามารถทำได้โดยใช้วิธีการคำนวณหา สหสัมพันธ์ข้าม (Cross Correlation) ของสัญญาณในโดเมนเวลา (time domain) หรือใช้การคำนวณผลการแปลงฟูริเยร์ (Fast Fourier Transform: FFT) ของสัญญาณในโดเมนความถี่ (frequency domain)

2.2 ระบบ Phase Array [5],[6],[8]

การหาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณโดยใช้ระบบ Phase Array ก็จะมีลักษณะเหมือนกับ ระบบเครื่องมือวัดใช้หลักการแทรกสอด (Interferometer) แต่จะใช้สายอากาศจำนวนที่มากกว่า 2 ชุดขึ้นไปมาติดตั้งอยู่กับที่ ใกล้ ๆ กันเรียงกันเป็นลักษณะของ **สายอากาศแถวลำดับ (Antenna Array)** สัญญาณจากสายอากาศแต่ละชุดจะมีเฟสที่แตกต่างกัน สัญญาณจากสายอากาศแต่ละชุดจะถูกแปลงจาก สัญญาณแอนะลอก เป็นสัญญาณดิจิตอล แล้วจะถูกส่งไปยังส่วนประมวลผลเพื่อหาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณต่อไป

จากข้างต้นที่ได้กล่าวมานั้น ระบบเครื่องหาทิศทางของสัญญาณในแบบแอนาลอก ได้แก่ ระบบที่ใช้การหมุนสายอากาศสภาพเจาะจงทิศสูง (High Directivity) , ระบบ ADCOCK / WATSON-WATT และ ระบบ Pseudo-Doppler Effect จะเป็น การประมวลสัญญาณแบบแอนาลอก โดยที่จะนำเอาคุณสมบัติในการรับสัญญาณของสายอากาศมาใช้ในการออกแบบ ระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณ

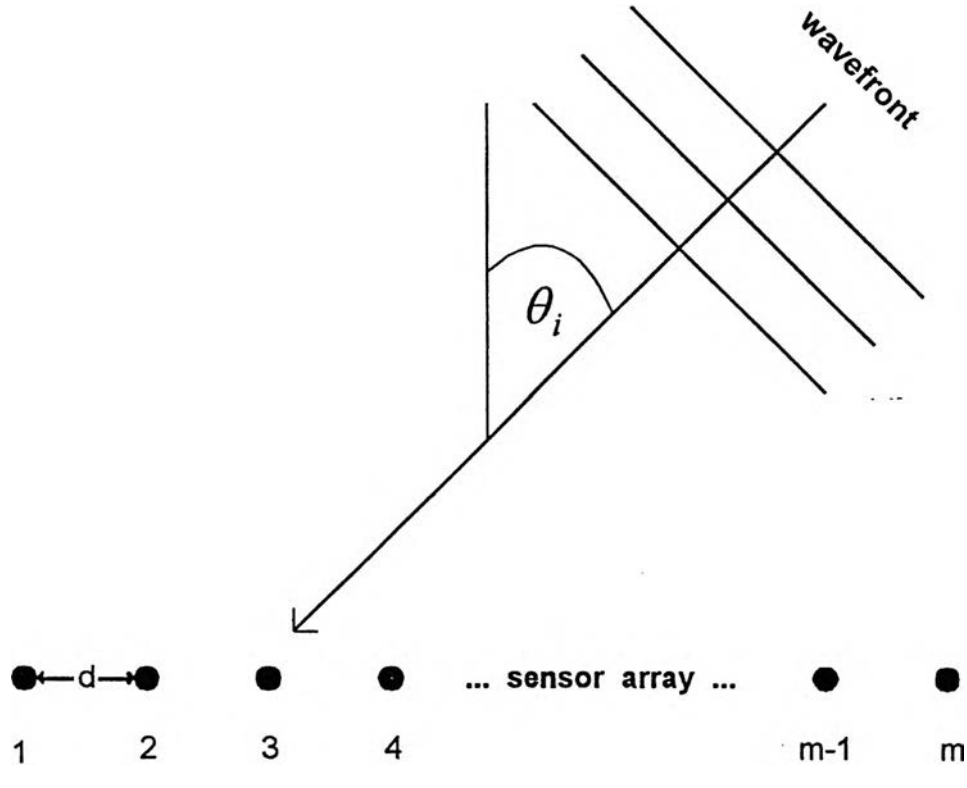
เนื่องจากในปัจจุบันความก้าวหน้าในการศึกษาทางด้านกรรมวิธีประมวลผลสัญญาณดิจิตอล ทำให้มีการนำมาประยุกต์ใช้ประโยชน์ในงานทางด้านการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ นั้นคือ ระบบเครื่องหาทิศทางของสัญญาณแบบดิจิตอล ได้แก่ ระบบเครื่องมือวัดใช้หลักการแทรกสอด (Interferometer) และระบบ Phase Array ซึ่งจะเป็นการประมวลผลสัญญาณแบบดิจิตอล

สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จึงได้ทำการศึกษาและวิจัย งานทางด้านการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ โดยพิจารณาเฉพาะในระบบของเครื่องหาทิศทางสัญญาณแบบดิจิตอล ด้วยการนำเสนอวิธีการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณต่าง ๆ ด้วยวิธีที่นิยมใช้กัน ได้แก่ วิธีบีมฟอร์มเมอร์ (Beamformer Method) และ วิธีการประมาณพันธะเชิงเส้น (Linear Prediction Method) ซึ่งวิธีการดังกล่าวจะนำไปใช้ใน เครื่องหาทิศทางสัญญาณในระบบ Phase Array และจะทำการศึกษา วิธีผลการแปลงฮิลแบร์ต (Hilbert Transforms Method) มาพัฒนาใช้กับแหล่งกำเนิดสัญญาณทางทหาร ด้วยการตั้งสมมุติฐาน กำหนดให้สัญญาณทางทหารมีคุณลักษณะเป็น รูปแบบของสัญญาณพัลส์ไซนูซอยด์ นำมาใช้ในการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ เพื่อนำผลมาใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาและออกแบบระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณ ที่จะนำไปใช้ประโยชน์ในภารกิจทางด้านการข่าวกรองทางการทหารของกองทัพต่อไป

2.4 การหาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

จากที่กล่าวมาแล้ว สำหรับการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณนั้น เครื่องหาทิศทางสัญญาณ (Direction Finder) ที่ติดตั้งอยู่กับที่ จะประกอบด้วย ตัวตรวจรู้ (sensor) หรือ สายอากาศหาทิศทาง (direction finder antenna) จะมีลักษณะที่เป็นอิสระต่อกัน และ กำหนดให้เรียงต่อกันเป็นแถวในลักษณะที่เรียกว่า **แถวลำดับเชิงเส้นสม่ำเสมอ (Uniform Linear Array: ULA)** ใช้สำหรับการตรวจวัดค่าสัญญาณที่แพร่กระจายออกมาจากแหล่งกำเนิดสัญญาณ โดยสัญญาณที่วัดค่าได้ในสายอากาศหาทิศทางแต่ละตัว จะมีลักษณะเหมือนกับ การชักตัวอย่างสัญญาณ (sampling) ในทางเวลา จะสามารถหาได้เป็นสัญญาณที่วัดค่าออกมาได้เป็นชุด ตามจำนวนของเครื่องตรวจวัดสัญญาณ โดยที่แต่ละชุดจะสะสมในรูปของข้อมูลตามเวลา ซึ่งจะเรียกว่าเป็นข้อมูลที่เกิดจากการ snapshot ของสัญญาณ [9]

2.4.1 แบบจำลองของสัญญาณ (Signal Model) [10]



รูปที่ 2.2 ทิศทางของสัญญาณที่มาตกกระทบ สายอากาศแถวลำดับเชิงเส้นสม่ำเสมอ (Uniform Linear Array) ในทิศทาง θ_i

สำหรับปัญหาการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ ด้วยการประมวลผลในลักษณะ Array Signal Processing สามารถที่จะสมมุติฐาน กำหนดให้ $y_m(t)$ เป็น สัญญาณที่วัดค่าได้จากสายอากาศตัวที่ m ในสายอากาศแต่ละตัว จะประกอบด้วย $S(t)$ เป็น สัญญาณจริงซึ่งมีรูปแบบที่เหมือนกัน และสัญญาณรบกวน $n_m(t)$ ที่เกิดขึ้นในสายอากาศแต่ละตัวเป็นอิสระต่อกันทางสถิติ (statistical independent) [8] ดังนั้นสามารถแสดงแบบจำลองนี้ได้ตามสมการที่ (2.1)

$$y_m(t) = S(t) + n_m(t) \qquad (2.1)$$

กำหนดให้ $\underline{y}(t)$ เป็น เวกเตอร์ของข้อมูลที่ได้จากการ snapshot ณ เวลา t จากแนวสายอากาศที่มีระยะ d ระหว่างสายอากาศ ดังนั้น

$$\underline{y}(t) = [\, y_1(t) \quad y_2(t) \quad \cdots \quad y_m(t) \,]^T \qquad (2.2)$$

2.4.2 แบบจำลองของสัญญาณไซนูซอยด์ (Sinusoid Signal Model) [10]

จากสมมุติฐานตามสมการที่ (2.1) เมื่อนำมาใช้ใน การสร้างแบบจำลองของสัญญาณไซนูซอยด์ โดยการกำหนดให้ แหล่งกำเนิดสัญญาณที่เกิดขึ้นอยู่ในสนามไกล (far field) การแพร่กระจายของหน้าคลื่น (wavefront) ที่ผ่านแนวสายอากาศ จะมีรูปแบบลักษณะเป็นคลื่นระนาบ (planewave) และ กำหนดให้ในแต่ละแหล่งกำเนิดสัญญาณ มีการแพร่กระจายของสัญญาณอยู่ในแถบแคบ (narrow band) จะมีคุณลักษณะเพียงความถี่เดียว ω_c ดังนั้น

$$S_i(t) = a_i(t)\cos\left(\omega_c t + \phi_i(t)\right) \qquad (2.3)$$

เมื่อ a_i เป็น แอมพลิจูดของสัญญาณไซนูซอยด์ที่ i

ϕ_i เป็น เฟสของสัญญาณไซนูซอยด์ที่ i

ω_c เป็น ความถี่คลื่นพาห์ของสัญญาณไซนูซอยด์

สมการที่ (2.3) สัญญาณจะอยู่ในรูปโคไซน์ (cosine form) ดังนั้นสำหรับในการนำไปใช้หาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ จะต้องทำการวิเคราะห์ให้อยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อน (complex form) แสดงได้ตามสมการที่ (2.4)

$$x_i(t) = a_i(t) e^{j(\omega_c t + \phi_i(t))} \quad (2.4)$$

เมื่อ $j = \sqrt{(-1)}$

จากสมมุติฐานของสัญญาณในแถบความถี่แคบ (narrow band) จะไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงมากในขณะที่สัญญาณแพร่กระจายผ่านสายอากาศ จึงทำให้สามารถสมมุติฐานได้ตามสมการที่ (2.5) [4]

$$x_i(t + \tau_m(\theta_i)) \approx a_i(t)\ e^{j(\omega_c(t+\tau_m(\theta_i))+\phi_i)} \quad (2.5)$$

เมื่อ $\tau_m(\theta_i)$ เป็นเวลาประวิงในการแพร่กระจายคลื่นที่สายอากาศตัวที่ m จากสายอากาศอ้างอิง

กำหนดให้สมการที่ (2.5) เป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นผลที่ได้จาก แหล่งกำเนิดสัญญาณจำนวน L ณ สายอากาศตัวที่ m ที่เวลา t จะสามารถอธิบายได้ตามสมการที่ (2.6)

$$\begin{aligned} y_m(t) &= \sum_{i=1}^{L} x_i(t + \tau_m(\theta_i)) + n_m(t) \\ &= \sum_{i=1}^{L} a_i(t)\, e^{j(\omega_c(t+\tau_m(\theta_i))+\phi_i)} + n_m(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ให้ L เป็น จำนวนแหล่งกำเนิดสัญญาณในแถบแคบ

ให้ θ_i เป็น ทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณที่ i ดังแสดงในรูปที่ 2.2

โดยสัญญาณรบกวน (noise) ที่เกิดขึ้น ที่สายอากาศจะสมมุติให้เป็น spatial uncorrelated complex white noise นั่นคือ

$$E\{n_l(t) n_m^*(t)\} = \begin{cases} \sigma_n^2 & if \quad l = m \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (2.7)$$

เมื่อ σ_n^2 เป็นค่าความแปรปรวน (variance) ของกำลังของสัญญาณรบกวน

จากที่กล่าวมาแล้ว เป็นแบบจำลองของแหล่งกำเนิดสัญญาณไซนูซอยด์ (Sinusoid Signal Source) ซึ่งได้แสดงถึงข้อมูลของการแพร่กระจายสัญญาณ ทั้งในเชิงระยะทาง (space) และเชิงเวลา (time) ที่วัดค่าได้ในระบบเครื่องหาทิศทางสัญญาณ เมื่อได้มีการนำไปใช้ร่วมกับ กรรมวิธีประมวลผลสัญญาณในลักษณะของ Array ผลที่ได้รับก็คือ สามารถที่จะประมาณหาค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณได้

2.5 หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.5.1 วิธีการประมาณค่าเวลาประวิง (Delay Time Estimation Method) [5]

เป็นวิธีที่ใช้ประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ สำหรับเครื่องหาทิศทางสัญญาณระบบเครื่องมือวัดใช้หลักการแทรกสอด (Interferometer) ด้วยการหาค่าผลต่างของเฟส (phase difference) ของสัญญาณที่วัดได้จากสายอากาศ 2 ชุด ที่ตั้งอยู่ใกล้ ๆ กัน สามารถทำการคำนวณได้ด้วยการหาเวลาประวิงที่เกิดขึ้น จากสายอากาศ ด้วยการใช้ **ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ข้าม (Cross correlation Function)** ของสัญญาณในโดเมนเวลา (Time Domain) จากสมการที่ (2.8)

$$C(\tau)=\sum_{t=0}^{N} x_1(t)x_2(t+\tau) \qquad (2.8)$$

เมื่อ $C(\tau)$ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ข้าม (Crosscorrelation Function) ของสัญญาณ

τ คือ เวลาประวิง (delay time)

$x_1(t)$ คือ สัญญาณที่วัดค่าจากสายอากาศชุดที่ 1 ที่เวลา t

$x_2(t)$ คือ สัญญาณที่วัดค่าจากสายอากาศชุดที่ 2 ที่เวลา t

t คือ ดรรชนีเวลา (time index)

N คือ จำนวนข้อมูลที่ได้จากการ snapshot สัญญาณจากสายอากาศ

เมื่อหาค่า ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ข้าม ของสัญญาณที่วัดค่าจากสายอากาศตัวที่ 1 และ สายอากาศตัวที่ 2 ได้แล้ว ก็จะสามารถหาค่าเวลาประวิงได้ โดยการพิกัดค่าของ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ข้าม $C(\tau)$ และ การประวิงเวลา τ เป็นแกน y และแกน x ตามลำดับ ระยะระหว่างจุดเริ่มต้นถึงจุดสูงสุด ของ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ข้าม $C(\tau)$ คือ เวลาประวิงที่นำมาใช้หาค่าผลต่างของเฟส (ϕ)

เวลาประวิงที่หามาได้ด้วยการใช้ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ข้ามในโดเมนเวลา ตามสมการที่ (2.8) จะนำมาใช้ในการหาค่าผลต่างของเฟส (ϕ) และสามารถนำมาคำนวณหาทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณได้จากสมการที่ (2.9)

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{\phi\lambda}{2\pi d}\right) \qquad (2.9)$$

เมื่อ θ เป็น ทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

ϕ เป็น ค่าผลต่างของเฟส

λ เป็น ความยาวคลื่นของสัญญาณ

d เป็น ระยะระหว่างสายอากาศ 2 ชุด

2.5.2 วิธีบีมฟอร์มเมอร์ (Beamformer Method) [10]

การประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ ด้วย **วิธีบีมฟอร์มเมอร์ (Beamformer Method)** เป็นแนวความคิดที่เกิดขึ้นมานานแล้ว ในการนำมาใช้ประมวลผลของสัญญาณเพื่อหาค่ามุมทิศของแหล่งกำเนิดสัญญาณ จะอยู่บนหลักการที่ว่า สัญญาณที่วัดค่าได้จากสายอากาศแต่ละตัว จะมีค่าผลต่างเฟสที่แตกต่างกันจากสายอากาศอ้างอิง เพราะช่วงเวลาประวิงที่เกิดจากการแพร่กระจายของสัญญาณ จะขึ้นอยู่กับทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ ดังนั้น เมื่อทำการเลื่อนเฟสของสัญญาณจากสายอากาศแต่ละตัวอย่างเหมาะสม แล้วนำสัญญาณมารวมกัน ผลรวมของสัญญาณจะแสดงสเปกตรัมขึ้นมา และสเปกตรัมนั้นจะแสดงความสัมพันธ์กับทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณจากหลักการดังกล่าวทำให้ วิธีบีมฟอร์มเมอร์ ยังมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า **delay-sum beamformer** สามารถหาได้จากสมการที่ (2.10)

$$P_{BF}(\theta)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left|\underline{d}^{H}\,\underline{y}(t)\right|^{2}=\left|\underline{d}^{H}\,\hat{R}\,\underline{d}\right| \qquad (2.10)$$

เมื่อ $P_{BF}(\theta)$ คือ สเปกตรัมของบีมฟอร์มเมอร์ที่แสดงทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

$\hat{R}$ คือ ค่าประมาณของ spatial correlation matrix ของสัญญาณ

H คือ สังยุคเชิงซ้อนและทรานส์โพสของเมตริกซ์ (complex conjugate transpose matrix)

$$\hat{R}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\underline{y}(t)\underline{y}(t)^{H}=\frac{1}{N}YY^{H} \qquad (2.11)$$

$\underline{y}(t)$ คือ เวกเตอร์ข้อมูลที่ได้จากการ snapshot ณ เวลา t

Y คือ เมตริกซ์ของเวกเตอร์ข้อมูลที่ได้จาก snapshot

$$Y=[\ \underline{y}(1)\ \ \underline{y}(2)\ \ \ldots\ \ \underline{y}(N)\ ] \qquad (2.12)$$

$\underline{d},\underline{d}(\theta)$ คือ normalized steering vector

$$\underline{d},\underline{d}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{m}}[\ 1\ \ e^{j\omega_c\tau_2(\theta)}\ \ e^{j\omega_c\tau_3(\theta)}\ \ \ldots\ \ e^{j\omega_c\tau_m(\theta)}\ ]^{T} \qquad (2.13)$$

$\tau_m(\theta)$ คือ ช่วงเวลาประวิงระหว่างจุดอ้างอิง กับ สายอากาศตัวที่ m^{th} เมื่อสายอากาศตัวแรกคือ จุดอ้างอิง สามารถหาได้จากสมการที่ (2.14)

$$\tau_m(\theta)=\frac{(1-m)d}{c}\sin(\theta) \qquad (2.14)$$

c คือ ความเร็วของสัญญาณที่แพร่กระจายผ่านตัวกลาง

d คือ ระยะห่างระหว่างสายอากาศแต่ละตัว

วิธีบีมฟอร์มเมอร์ ยังสามารถที่จะหาได้จากการใช้ **ผลการแปลงฟูริเยร์อย่างเร็ว (Fast Fourier Transform: FFT)** [10] มาคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพ จากสมการที่ (2.15)

$$P_{BF}(\theta)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left|Y(\theta,t)\right|^2 \qquad (2.15)$$

เมื่อ $Y(\theta,t)$ คือ ผลการแปลงฟูริเยร์อย่างเร็วของ เวกเตอร์ข้อมูลที่ได้จากการ snapshot

สำหรับการคำนวณหาสเปกตรัมของบีมฟอร์มเมอร์จะแสดงทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณนั้น มุมทิศที่เกิดขึ้นเราสามารถเห็นได้จาก จุดสูงสุด (peak location) จะมีลักษณะเปรียบเทียบได้กับ การประมาณหาสเปกตรัมที่แสดงความถี่สัญญาณ ด้วยวิธี Periodogram ที่มีใช้ในงานทางด้าน การวิเคราะห์สเปกตรัม (Spectrum Analysis) ของการวิเคราะห์อนุกรมเวลา

2.5.3 วิธีการประมาณพันธะเชิงเส้น (Linear Prediction Method) [10]

วิธีการประมาณพันธะเชิงเส้นเป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวาง หรือมีชื่อเรียกอีกอย่างว่า Autoregressive Modeling : AR ได้มีการพัฒนาและนำไปใช้สำหรับการแก้ปัญหาในเรื่องเกี่ยวกับ การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (time series analysis) เพื่อจะนำไปสู่การประมาณสเปกตรัม (Spectral Estimation) เนื่องจากความถูกต้องในการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ของค่าความผิดพลาดในการประมาณ สำหรับนำไปประยุกต์ใช้ประโยชน์กับงานทางด้านต่าง ๆ

หลักการของวิธีการประมาณพันธะเชิงเส้นที่อยู่บนสมมุติฐานที่ว่า ข้อมูลที่ได้รับในปัจจุบันจะสามารถหาได้จาก การประมาณข้อมูลในอดีตในแบบเชิงเส้น ให้ $x(n)\,;n=0,1,\ldots,N$ เป็นอนุกรมเวลา เมื่อ n เป็นดรรชนีเวลา การประมาณหาค่า $x(n)$ ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ $\hat{x}(n)$ สามารถหาได้จากสมการที่ [11]

$$\hat{x}(n)=-\sum_{k=1}^{p}a_k x(n-k) \qquad (2.16)$$

เมื่อ a_k คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณพันธะเชิงเส้น (Linear Prediction Coefficient) และ $k=1,2,3,\ldots,P$ ดังนั้น

$$e(n)=x(n)-\hat{x}(n) \qquad (2.17)$$

$e(n)$ คือ ค่าความผิดพลาดในการประมาณ (prediction error)

สำหรับในการหาสเปกตรัมด้วยวิธีการประมาณพันธะเชิงเส้น จะใช้สัญลักษณ์ $P_{LP}(\omega)$ สามารถหาได้ ด้วยการใช้ผลการแปลง Z (Z transform) [10] ในสมการที่ (2.16) แล้วนำมาแทนลงในสมการที่ (2.17) ซึ่งจะสามารถแสดงได้ตามสมการที่ (2.18)

$$x(z)+\sum_{k=1}^{P}a_k x(z)z^{-k}=1 \qquad (2.18)$$

ดังนั้น

$$x(\omega)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{P}a_i e^{-jk\omega}}=\frac{1}{\underline{d}^H(\omega)\underline{a}} \qquad (2.19)$$

เมื่อ $\underline{d}(\omega)=[1 \quad e^{j\omega} \quad e^{j2\omega} \quad \ldots \quad e^{jp\omega}]^T$

$\underline{a} \;=[1 \quad a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_p]^T$

P = อันดับการประมาณพันธะเชิงเส้น

จากสมการที่ (2.19) จะนำมาใช้สำหรับ การหาสเปกตรัมของสัญญาณด้วย การประมาณพันธะเชิงเส้น สามารถแสดงได้จากสมการที่ (2.20)

$$P_{LP}(\omega)=\left|x(\omega)\right|^2=\frac{1}{\left|\underline{d}^H(\omega)\underline{a}\right|^2} \qquad (2.20)$$

เมื่อ $\underline{d}(\omega)$ = frequency - scanning vector

$\underline{a}$ = เวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณพันธะเชิงเส้น

H = สังยุคเชิงซ้อนและทรานโพสของเมตริกซ์ (complex conjugate transpose matrix)

จากสมการที่ (2.20) จะเป็นการนำวิธีการประมาณพันธะเชิงเส้นมาใช้ เพื่อนำไปสู่การหาสเปกตรัมของสัญญาณ สำหรับในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของ การประมาณพันธะเชิงเส้นมีหลายวิธี ได้แก่ Autocorrelation Method , Covariance Method เป็นต้น [11] ที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะนำขั้นตอนกรรมวิธีของ Burg Algorithm และ Levinson Algorithm มาใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณพันธะเชิงเส้น เพื่อที่จะสามารถนำสเปกตรัมที่ได้จากขั้นตอนกรรมวิธีดังกล่าว มาทำการเปรียบเทียบกัน

จากที่กล่าวมาข้างต้น ในการหาสเปกตรัมของสัญญาณด้วยวิธีการประมาณพันธะเชิงเส้น จะสามารถนำมาประยุกต์ใช้ ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับ การประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณซึ่งสามารถทำได้ โดยใช้การเปรียบเทียบกันระหว่าง ข้อมูลของอนุกรมเวลา (time series) และข้อมูลของการ snapshot จากสายอากาศ (space series) แสดงได้ตามตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 การเปรียบเทียบกันระหว่างข้อมูลของอนุกรมเวลา (time series) กับข้อมูลการ snapshot จากสายอากาศ (space series)

Time Series	Antenna Array (Space Series)
Time (sec)	Distance (m)
Sampling Interval (sec)	Distance between sensor (m)
Frequency (cycle/sec)	Wavenumber (cycle/m) (contains DOA information)

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากตารางที่ 2.1 จะเห็นได้ว่าใน ทางอนุกรมเวลา (time series) จะนำข้อมูลมาใช้ใน การหาสเปกตรัมของสัญญาณ ซึ่งจะแสดงถึงความถี่ ทำนองเดียวกันข้อมูลของ snapshot จากสายอากาศ (space series) ที่วัดค่าได้ก็สามารถที่นำมาใช้แสดงให้เห็นถึง **Wavenumber (cycle/m)** ซึ่งจะประกอบด้วยข้อมูลของทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ เราสามารถที่จะเห็นได้จาก **จุดสูงสุด (peak location)** จะแสดงทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ ที่ได้ จากการนำวิธีการประมาณพันธะเชิงเส้นมาประยุกต์ใช้ [10] สามารถแสดงได้ตามสมการที่ (2.21)

$$P_{LP} = \frac{1}{\left| \underline{d}^{H}(\theta)\ \underline{a} \right|^{2}} \qquad (2.21)$$

เมื่อ $\underline{d}(\theta)$ = steering vector ที่มีข้อมูลทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

$\underline{a}$ = เวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณพันธะเชิงเส้น

H = สังยุคเชิงซ้อนและทรานโพสของเมตริกซ์ (complex conjugate transpose matrix)

อัลกอริธึมที่ใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณพันธะเชิงเส้น

2.5.3.1 Levinson Algorithm [2],[11]

เมื่อ $x(n)$ เป็น ข้อมูลที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex data) การประมาณหาฟังก์ชันอัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation function estimate: ACF) โดยใช้ Blackman-Tukey Spectral Estimation [2] หาได้จากสมการที่ (2.22)

$$\hat{r}_{xx}(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1-k}x^{*}(n)x(n+k) & for \quad k=0,1,\ldots,N-1\\ \hat{r}_{xx}^{*}(k) & for \quad k=-(N-1),-(N-2),\ldots,-1\end{cases} \qquad (2.22)$$

ใช้ Levinson Algorithm ทำการคำนวณหาเซตของค่าพารามิเตอร์ $\{a_1(1),\rho_1\},\{a_2(1),a_2(2),\rho_2\}$ $,\ldots,\{a_p(1),a_p(2),\ldots,a_p(p),\rho_p\}$ ได้ดังนี้

เมื่อ $k=1$

$$a_1(1)=-\frac{r_{xx}(1)}{r_{xx}(0)}$$

$$\rho_1=\left(1-|a_1(1)|^2\right)r_{xx}(0)$$

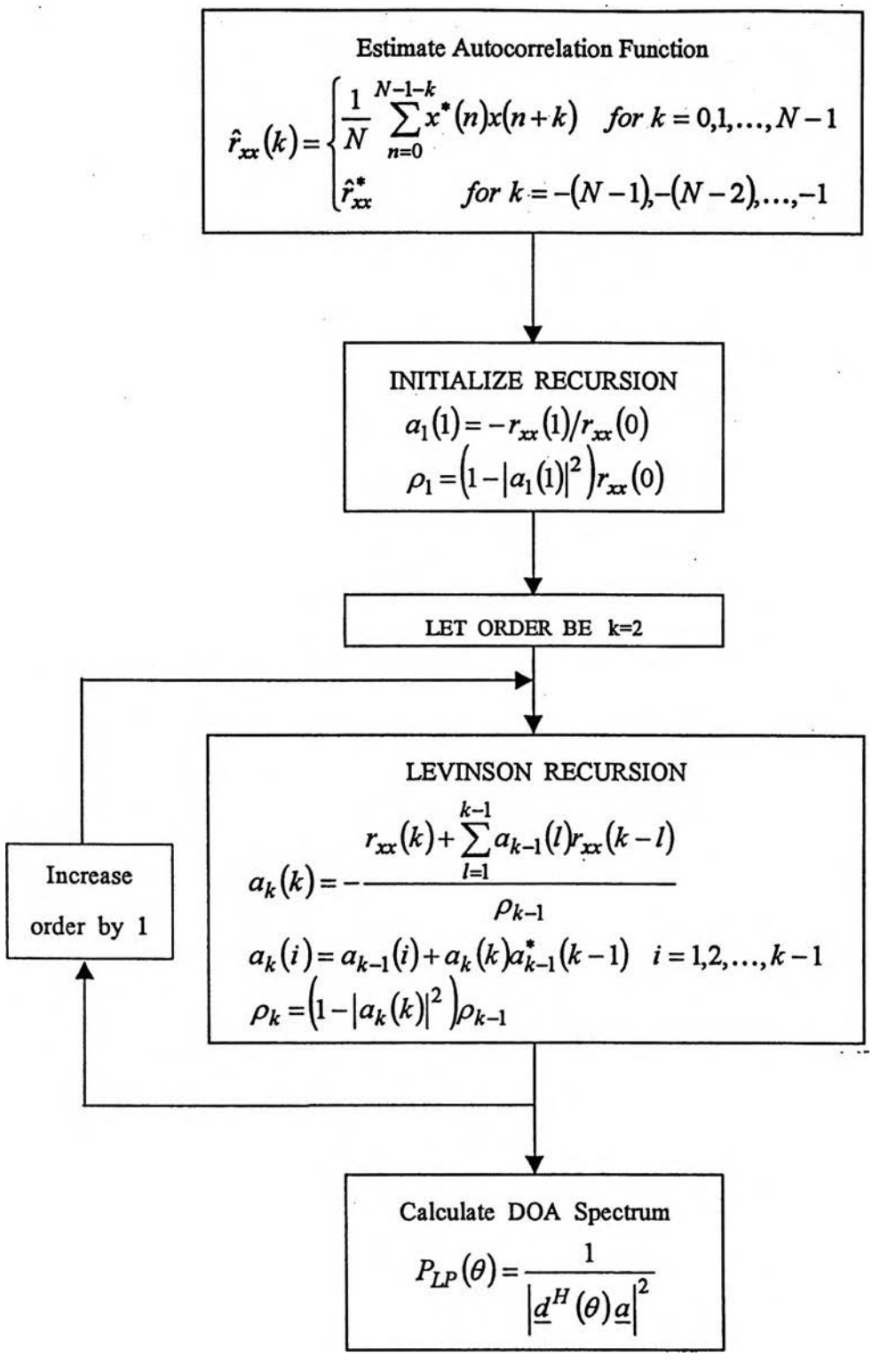
และ เมื่อ $k=2,3,\ldots,p$

$$a_k(k)=-\frac{r_{xx}(k)+\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}a_{k-1}(l)r_{xx}(k-l)}{\rho_{k-1}}$$

$$a_k(i)=a_{k-1}(i)+a_k(k)a_{k-1}^{*}(k-i) \qquad i=1,2,\ldots,k-1$$

$$\rho_k=\left(1-|a_k(k)|^2\right)\rho_{k-1}$$

สำหรับเซตของค่าพารามิเตอร์ $\{a_p(1),a_p(2),\ldots,a_p(p),\rho_p\}$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณพันธะเชิงเส้น ด้วย Levinson Algorithm ที่จะนำมาใช้ใน การประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ สามารถแสดงขั้นตอนกรรมวิธีได้ดังนี้



รูปที่ 2.3 ขั้นตอนกรรมวิธีของ Levinson recursion algorithm สำหรับนำมาใช้ในการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

2.5.3.2 Burg Algorithm [2],[11]

เมื่อ $x(n)$ เป็น ข้อมูลที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex data) ทำการประมาณหาค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณพันธะเชิงเส้นด้วย Burg Algorithm ได้ดังนี้

$$\hat{r}_{xx}(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 \qquad (2.23)$$

$$\hat{\rho} = \hat{r}_{xx}(0)$$

$$\hat{e}_0^f(n) = x(n) \qquad n = 1,2,\ldots,N-1$$

$$\hat{e}_0^b(n) = x(n) \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

สำหรับ $k = 1,2,\ldots,p$

$$\hat{k}_k = \frac{-2\sum_{n=k}^{N-1}\hat{e}_{k-1}^f(n)\,\hat{e}_{k-1}^b(n-1)^*}{\sum_{n=k}^{N-1}\left[\left|\hat{e}_{k-1}^f(n)\right|^2 + \left|\hat{e}_{k-1}^b(n-1)\right|^2\right]}$$

$$\hat{\rho}_k = \left(1 - \left|\hat{k}_k\right|^2\right)\hat{\rho}_{k-1}$$

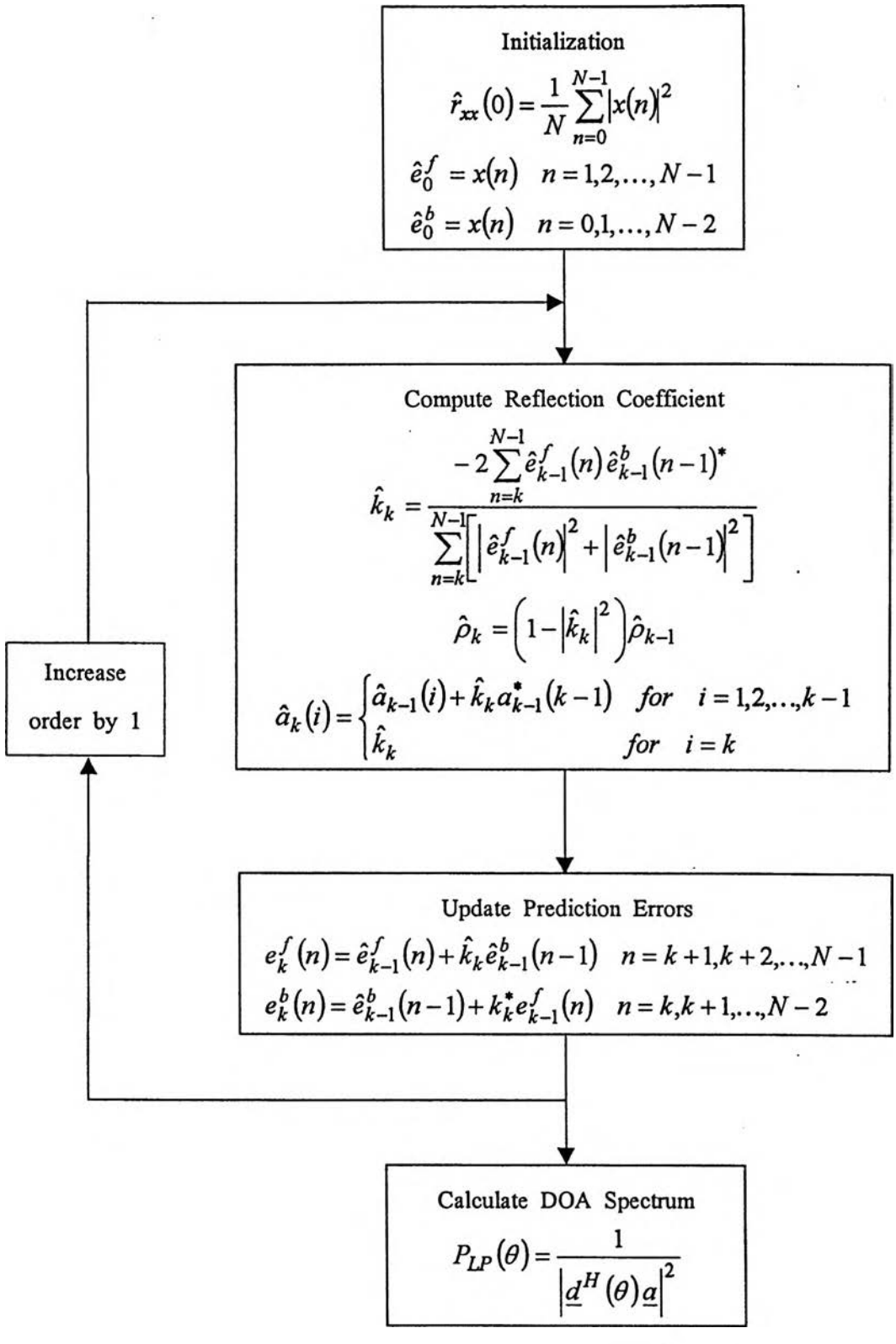
$$\hat{a}_k(i) = \begin{cases} \hat{a}_{k-1}(i) + \hat{k}_k a_{k-1}^*(k-1) & for \quad i = 1,2,\ldots,k-1 \\ \hat{k}_k & for \quad i = k \end{cases}$$

$\left(if \quad k = 1, \hat{a}(1) = \hat{k}_1\right)$

$$e_k^f(n) = \hat{e}_{k-1}^f(n) + \hat{k}_k\hat{e}_{k-1}^b(n-1) \qquad n = k+1,k+2,\ldots,N-1$$

$$e_k^b(n) = \hat{e}_{k-1}^b(n-1) + k_k^* e_{k-1}^f(n) \qquad n = k,k+1,\ldots,N-2$$

สำหรับเซตของค่าพารามิเตอร์ $\{a_p(1), a_p(2),\ldots,a_p(p), \rho_p\}$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการประมาณพันธะเชิงเส้นด้วย Burg Algorithm ที่จะนำมาใช้ในการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ สามารถแสดงขั้นตอนกรรมวิธีได้ดังนี้



รูปที่ 2.4 ขั้นตอนกรรมวิธีของ Burg Algorithm สำหรับนำมาใช้ในการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณ

2.5.4 วิธีผลการแปลงฮิลแบร์ต (Hilbert Transform Method) [13]

วิธีผลการแปลงฮิลแบร์ต (Hilbert Transform Method) เป็นวิธีหนึ่งที่ได้มีการนำไปใช้ประโยชน์เกี่ยวกับงานทางด้านกรรมวิธีประมวลผลสัญญาณ โดยเฉพาะในเรื่องของ การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (Time Series Analysis) ด้วยการใช้หลักการของสัญญาณวิเคราะห์ (Analytic Signal: $\psi(t)$) สัญญาณวิเคราะห์จะอยู่ในรูปแบบของ $\psi(t)=u(t)+jv(t)$ ดังนั้น ผลการแปลงฮิลแบร์ตจะสามารถหาได้จากสมการที่ (2.24)

$$v(t)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\eta)}{t-\eta}d\eta \qquad (2.24)$$

กำหนดให้ P คือ principal value ในการวิเคราะห์หาความถี่ของสัญญาณด้วยวิธีผลการแปลงฮิลแบร์ตก็จะเป็นการหาสัญญาณวิเคราะห์ (Analytic Signal: $\psi(t)$) สัญญาณวิเคราะห์ที่ได้นั้น จะนำมาใช้หาความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าแอมพลิจูดขณะเวลาหนึ่ง (Instantaneous Amplitude: $A(t)$) กับ ค่าเฟสขณะเวลาหนึ่ง (Instantaneous Phase: $\varphi(t)$) ด้วยการเปลี่ยนพิกัดในรูปแบบ rectangular(u,v) ให้อยู่ในรูปแบบ polar (A,φ) ได้จากสมการที่ (2.25)

$$\psi(t)=u(t)+jv(t)=A(t)e^{i\varphi(t)} \qquad (2.25)$$

เมื่อกำหนดให้ $A(t)$ เป็น ฟังก์ชันค่าแอมพลิจูดขณะเวลาหนึ่ง และ $\varphi(t)$ เป็น ฟังก์ชันค่าเฟสขณะเวลาหนึ่ง หาได้จากสมการที่ (2.26) และ (2.27) ตามลำดับ

$$A(t)=\sqrt{u^2(t)+v^2(t)} \qquad (2.26)$$

$$\varphi(t)=\tan^{-1}\frac{v(t)}{u(t)} \qquad (2.27)$$

จากสมการที่ (2.26) และ (2.27) ฟังก์ชัน $A(t)$ และ ฟังก์ชัน $\varphi(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา จะนำมาใช้หา ค่าความถี่ขณะเวลาหนึ่ง (Instantaneous Frequency: $F(t)$) ของ สัญญาณวิเคราะห์ $\psi(t)$ จากการหาอนุพันธ์เวลา (time derivative) จากสมการที่ (2.28)

$$\dot{\varphi}(t)=\Omega(t)=2\pi F(t) \qquad (2.28)$$

เมื่อ $\Omega(t)$ เป็น ค่าความถี่เชิงมุมขณะเวลาหนึ่ง (Instantaneous Angular Frequency) จากสมการที่ (2.27) และ (2.28) ดังนั้น

$$\Omega(t) = \frac{d}{dt}\tan^{-1}\frac{v(t)}{u(t)} = \frac{u(t)\dot{v}(t) - v(t)\dot{u}(t)}{u^2(t) + v^2(t)} \qquad (2.29)$$

จากสมการที่ (2.24) จะเห็นได้ว่า เมื่อนำผลการแปลงฮิลแบร์ตมาใช้ในการหาสัญญาณวิเคราะห์ $\psi(t)$ จะสามารถ นำสัญญาณวิเคราะห์ $\psi(t)$ ที่ได้นั้น มาใช้ในการหาค่าความถี่เชิงมุมขณะเวลาหนึ่ง $\Omega(t)$ ได้จากสมการที่ (2.29) ค่าความถี่เชิงมุมขณะเวลาหนึ่งที่ได้นั้นจะมีคุณลักษณะที่เป็น local ของสัญญาณ [14]

เมื่อพิจารณาถึงวิธีการต่างๆ ที่นำเสนอมา ได้แก่ วิธีบีมฟอร์มเมอร์ และ วิธีการประมาณพันธะเชิงเส้น ซึ่งจะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ใน การหาค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณให้ได้นั้น จะเห็นได้ว่าเป็นวิธีการที่นำเอาหลักการของการวิเคราะห์อนุกรมเวลามาใช้ใน การประมาณสเปกตรัม (Spectral Estimation) นั้น สเปกตรัมที่เกิดขึ้นจะแสดงความถี่ของสัญญาณ และข้อมูลที่นำมาใช้กับวิธีการดังกล่าวจะเป็นข้อมูลที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex data) แต่ในทางการปฏิบัติงานจริงนั้น สัญญาณที่วัดค่าได้จากเครื่องหาทิศทางสัญญาณจะเป็นสัญญาณจริง (real signal) การนำไปใช้หาค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณจะต้องทำการวิเคราะห์ให้อยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อน จากเหตุผลดังกล่าว ในงานวิจัยนี้จึงได้ทำการศึกษาวิธีผลการแปลงฮิลแบร์ต ซึ่งเป็นวิธีที่ได้มีการนำข้อมูลที่เป็นสัญญาณจริงมาใช้หาสัญญาณวิเคราะห์ซึ่งจะแสดงความถี่เชิงมุมขณะเวลาหนึ่งของสัญญาณได้ มาประยุกต์ใช้ประโยชน์สำหรับงานการประมาณค่าทิศทางการมาถึงของแหล่งกำเนิดสัญญาณต่อไป