

## บทที่ 4

### แนวทางการกำหนดเงื่อนไขการออกแบบเชิงเวลา

ในบทนี้จะกล่าวถึงแนวทางการกำหนดเงื่อนไขเชิงเวลา ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 เงื่อนไขใหญ่ๆด้วยกันคือ เงื่อนไขสัญญาณออกและเงื่อนไขสัญญาณควบคุม เงื่อนไขสัญญาณออกได้แก่ ค่าผิดพลาดของระบบและขนาดความกว้างแถบความถี่ ความกว้างแถบความถี่เป็นค่าที่สามารถระบุลักษณะเชิงเวลาของระบบได้ เช่น ช่วงเวลาขึ้นและช่วงเวลาเข้าที่ ดังนั้นหากเราประกันขนาดความกว้างแถบความถี่ของระบบ เราบอกได้ว่าระบบจะมีสมรรถนะเชิงเวลาที่ดี เงื่อนไขสัญญาณออกนี้จะกล่าวถึงแนวทางในการกำหนดฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะ ที่ได้จากการสังเกตลักษณะผลตอบเชิงเวลาและผลตอบเชิงความถี่ของระบบอันดับสอง เพื่อให้ระบบมีสมรรถนะเชิงเวลาที่ดีได้ สำหรับเงื่อนไขสัญญาณควบคุม คือ ข้อจำกัดของสัญญาณตัวขับเร็ว ในการควบคุมโดยทั่วไป ข้อจำกัดของสัญญาณตัวขับเร็วอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้ระบบมีสมรรถนะที่เลวหรืออาจทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ เราจึงจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขสัญญาณควบคุม เพื่อประกันเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ ในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการกำหนดรูปแบบปัญหา สำหรับการออกแบบตัวควบคุมให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเชิงเวลาทั้งสองเงื่อนไข

#### 4.1 เงื่อนไขสัญญาณออก

จากความสัมพันธ์ระหว่างส่วนกลับของฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะ และฟังก์ชันความไวตั้งสมการ (2.6) เราพิจารณาสมรรถนะคงทนของระบบได้ดังนี้

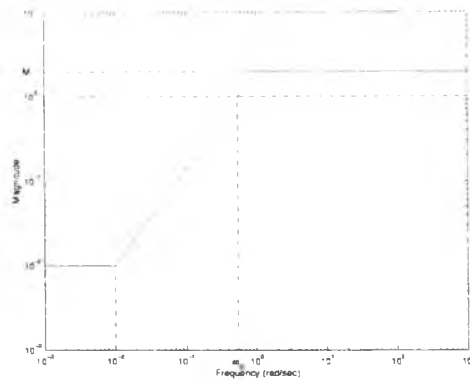
$$|S_p(j\omega)| < \gamma/w_p(j\omega), \quad \forall \omega \quad (4.1)$$

เมื่อ  $\gamma$  มีค่าเท่ากับหนึ่ง ความกว้างแถบความถี่ของระบบประมาณเป็นความถี่ที่เส้นเชิงกำกับ (asymptote) ของส่วนกลับของฟังก์ชันความไวตัดกับหนึ่งดังรูปที่ 4.1 เราสามารถกำหนดสมรรถนะของระบบได้ โดยการกำหนดค่าพารามิเตอร์ของฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะดังนี้ [27]

$$w_p(s) = \frac{1}{M} \frac{\tau_c s + M}{\tau_c s + E}, \quad \tau_c = 1/\omega_B \quad (4.2)$$

โดย  $E$  คือค่ามากที่สุดของค่าผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวของระบบ,  $\omega_B$  คือความกว้างแถบความถี่ต่ำที่สุดของระบบ,  $M$  คือขนาดของสัญญาณรบกวนสูงสุดที่สามารถเข้ามารบกวนระบบในบริเวณความถี่สูง

การเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะโดยใช้แนวทางนี้ สามารถกำหนดลักษณะบางประการของระบบได้ มีหลักการเข้าใจง่าย และรับประกันค่าผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวและความกว้างแถบความถี่ของระบบ ความกว้างแถบความถี่ที่กว้างจะแสดงลักษณะผลตอบเชิงเวลาที่ดีหรือช่วงเวลาขึ้นและช่วงเวลาเข้าที่เร็ว อย่างไรก็ตามแนวทางการเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะนี้เป็นเพียงการกำหนดสมรรถนะของระบบ



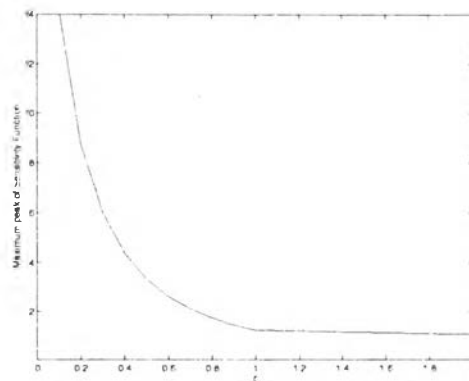
รูปที่ 4.1: เส้นเชิงกำกับของส่วนกลับของฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะ

อย่างคร่าว ๆ เราสามารถปรับเปลี่ยนค่าต่างๆหรือเพิ่มอันดับของฟังก์ชันนำหน้า เพื่อปรับปรุงให้สมรรถนะของระบบดีขึ้น

## 4.2 การเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะโดยสังเกตจากระบบอันดับสอง

จากสมการ (4.1) จะเห็นว่าฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะเป็นตัวกำหนดขอบเขตของขนาดฟังก์ชันความไว ดังนั้นเราอาจกำหนดลักษณะผลตอบเชิงเวลาและเชิงความถี่ของระบบได้จาก การเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะให้สอดคล้องกับลักษณะบางประการของฟังก์ชันความไว เริ่มจากการประมาณระบบใดๆ เป็นระบบอันดับสองด้วยขั้วเด่น (dominant pole) จากนั้นจะพิจารณาฟังก์ชันความไวของระบบอันดับสอง แทนระบบอันดับใดๆ โดยฟังก์ชันถ่ายโอนวงรอบของระบบอันดับสองมีค่าเป็น  $\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s)$ , ฟังก์ชันความไวเต็มเต็มมีค่าเป็น  $\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$  และฟังก์ชันความไวมีค่าเป็น  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s)/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$  มีขั้วของระบบวงปิดที่  $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j$  เราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบเชิงความถี่และผลตอบเชิงเวลาของระบบอันดับสอง โดยแปรค่า  $\omega_n$  และ  $\zeta$  จากฟังก์ชันความไวของระบบอันดับสอง เราได้ข้อสังเกต 4 ข้อ ดังนี้

ข้อสังเกตที่ 1 กำหนดให้  $\omega_n = 1$  จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\zeta$  และขนาดมากที่สุดของฟังก์ชันความไวดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2: ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\zeta$  และขนาดมากที่สุดของฟังก์ชันความไว

จากรูปที่ 4.2 บอกได้ว่าถ้าระบบใดมีขนาดมากที่สุดของฟังก์ชันความไวสูง ระบบนั้นจะมีส่วนพ่วงเกินสูงด้วย อย่างไรก็ตามข้อสังเกตนี้เป็นเพียงการจำลองระบบอันดับสองเท่านั้น ถ้าพิจารณาระบบที่มีขั้วและศูนย์มากขึ้น [35, หน้า 543-556] เราไม่สามารถประกันส่วนพ่วงเกินของระบบ ด้วยการกำหนดขนาดมากที่สุดของฟังก์ชันความไวเป็นตัวเลขที่ชัดเจนได้

**ข้อสังเกตที่ 2** เราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความกว้างแถบความถี่ กับช่วงเวลาเข้าที่และช่วงเวลานขึ้นของระบบอันดับสองดังนี้ [35, 36]

$$S(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \quad (4.3)$$

หากกำหนดให้  $\omega_n = 1$

$$S(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\zeta\omega}{1 - \omega^2 + j2\zeta\omega} \quad (4.4)$$

$$|S(j\omega)| = \left[ \frac{\omega^4 + 4\zeta^2\omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

พิจารณาขนาดของฟังก์ชันความไวที่ความกว้างแถบความถี่

$$\left[ \frac{\omega^4 + 4\zeta^2\omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.6)$$

$$\left[ \frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2}{\omega^4 + 4\zeta^2\omega^2} \right] = 2 \quad (4.7)$$

แก้สมการหา  $\omega$  ได้คำตอบดังนี้

$$\omega^2 = -(2\zeta^2 + 1) \pm \sqrt{(2\zeta^2 + 1)^2 + 1} \quad (4.8)$$

เนื่องจาก  $\omega$  เป็นค่าจริงบวกเสมอ ดังนั้นคำตอบจะมีแค่คำตอบเดียว นั่นคือ

$$\omega = \left[ \sqrt{(2\zeta^2 + 1)^2 + 1} - (2\zeta^2 + 1) \right]^{1/2} \quad (4.9)$$

หาก  $\omega_n$  ไม่เท่ากับ 1 จะได้ว่า

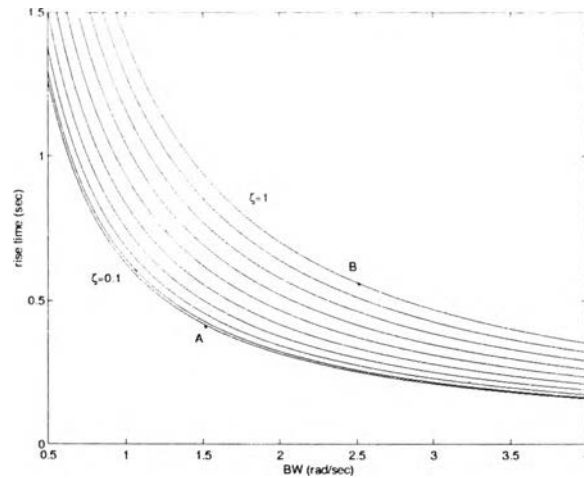
$$BW = \omega_n \left[ \sqrt{(2\zeta^2 + 1)^2 + 1} - (2\zeta^2 + 1) \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

เมื่อ  $BW$  คือความกว้างแถบความถี่ พิจารณากรณีที่  $0 < \zeta < 1$  ช่วงเวลานขึ้นจะสัมพันธ์กับความกว้างแถบความถี่ดังนี้

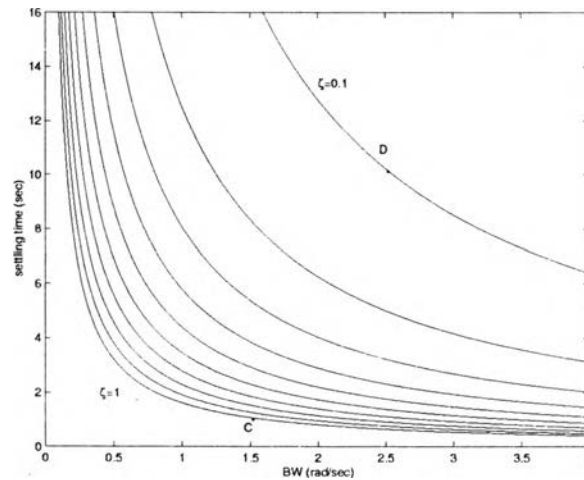
$$\begin{aligned} t_r &= \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \\ &= \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{BW} \left[ \sqrt{(2\zeta^2 + 1)^2 + 1} - (2\zeta^2 + 1) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

และช่วงเวลาเข้าที่สัมพันธ์กับความกว้างแถบความถี่ดังนี้

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{4}{\zeta\omega_n} \\ &= \frac{4}{\zeta BW} \left[ \sqrt{(2\zeta^2 + 1)^2 + 1} - (2\zeta^2 + 1) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.12)$$



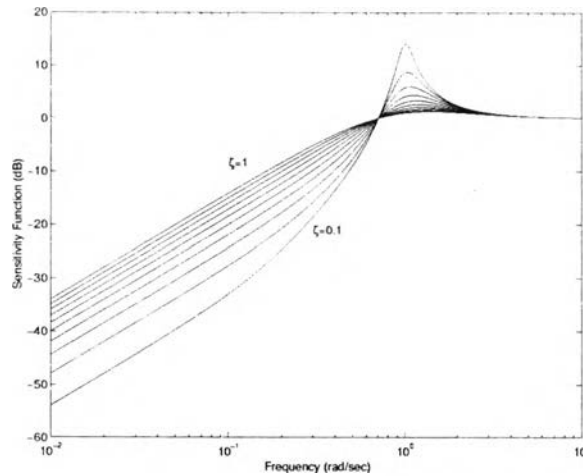
รูปที่ 4.3: ความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาขึ้นกับความกว้างแถบความถี่และ  $\zeta$



รูปที่ 4.4: ความสัมพันธ์ระหว่างช่วงเวลาเข้าที่กับความกว้างแถบความถี่และ  $\zeta$

จะสังเกตว่าหากความกว้างแถบความถี่กว้างขึ้น จะทำให้ระบบมีช่วงเวลาเข้าที่และช่วงเวลาขึ้นเร็ว อย่างไรก็ตามช่วงเวลาที่ทั้งสองขึ้นกับ  $\zeta$  ด้วย ทำให้บางระบบที่มีความกว้างแถบความถี่กว้าง มีช่วงเวลาเข้าที่หรือช่วงเวลาขึ้นช้า ดังเช่นรูปที่ 4.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้างแถบความถี่และช่วงเวลาขึ้น ระบบ A มีความกว้างแถบความถี่เป็น 1.5 เรเดียนต่อวินาที และระบบ B มีความกว้างแถบความถี่เป็น 2.5 เรเดียนต่อวินาที เราคาดว่าระบบ B จะมีช่วงเวลาขึ้นที่เร็วกว่าระบบ A จากรูปที่ 4.3 แสดงให้เห็นว่าระบบ A มีช่วงเวลาขึ้น 0.4 วินาที เร็วกว่าระบบ B มีช่วงเวลาขึ้น 0.6 วินาที เป็นผลมาจากค่า  $\zeta$  ของสองระบบแตกต่างกันและรูปที่ 4.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้างแถบความถี่และช่วงเวลาเข้าที่ หากกำหนดให้ ระบบ C มีความกว้างแถบความถี่เป็น 1.5 เรเดียนต่อวินาที และระบบ D มีความกว้างแถบความถี่เป็น 2.5 เรเดียนต่อวินาที เราคาดว่าระบบ D จะมีช่วงเวลาเข้าที่ที่เร็วกว่า จากรูปที่ 4.4 แสดงให้เห็นว่า ระบบ C มีช่วงเวลาเข้าที่ 1.1 วินาที เร็วกว่าระบบ D มีช่วงเวลาขึ้น 10.4 วินาที ซึ่งเป็นผลมาจากระบบมีค่า  $\zeta$  ต่างกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เราไม่สามารถประกันช่วงเวลาเข้าที่และช่วงเวลาขึ้นได้จาก

ความกว้างแถบความถี่ของระบบ แต่อย่างไรก็ตามจากสมการที่ (4.12) และ (4.11) แสดงให้เห็นถึงแนวโน้มว่า ถ้าความกว้างแถบความถี่ของระบบใดมาก ก็จะมีช่วงเวลาเข้าที่และช่วงเวลาขึ้นเร็วหรือระบบมีผลตอบเชิงเวลาที่ดีนั่นเอง



รูปที่ 4.5: ฟังก์ชันความไวเมื่อแปรค่า  $\zeta$

ข้อสังเกตที่ 3 พิจารณาฟังก์ชันความไวเมื่อแปรค่า  $\zeta$  ดังรูปที่ 4.5 จะสังเกตว่าความชันของฟังก์ชันความไวในบริเวณความถี่ความถี่มีค่าสูงกว่า 20 dB/dec เมื่อ  $\zeta$  มีค่าน้อยกว่า 1 และจะมีความชันสูงขึ้นถ้า  $\zeta$  มีค่าลดลง นั่นคือถ้าต้องการให้ระบบตอบสนองเร็วและมีสัณฐานพุ่งเกิน ควรพยายามให้ฟังก์ชันความไวมีความชันมากกว่า 20 dB/dec ในบริเวณความถี่ความถี่ เพื่อทำให้ช่วงเวลาเข้าที่และช่วงเวลาขึ้นเร็ว

ข้อสังเกตที่ 4 พิจารณาขั้วของฟังก์ชันถ่ายโอนวงรอบของระบบอันดับสอง พบว่ามีขั้วที่จุดกำเนิดอยู่หนึ่งตัว ดังนั้นค่าผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวจึงเป็นศูนย์ จากรูป 4.5 พิจารณาความชันของฟังก์ชันความไวในบริเวณความถี่ต่ำมีค่าประมาณ 20 dB/dec ซึ่งเป็นผลจากขั้วที่จุดกำเนิดนั่นเอง และสังเกตได้ว่าความชันของฟังก์ชันความไวไม่เปลี่ยนแปลงในบริเวณความถี่ต่ำ ไม่ว่า  $\zeta$  จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ตาม สำหรับระบบที่มีความชันในบริเวณความถี่ต่ำเป็น 40 dB/dec หมายความว่า ระบบมีขั้วที่จุดกำเนิดหรือใกล้จุดกำเนิด 2 ตัว การที่ระบบมีขั้วที่จุดกำเนิด 2 ตัว จะทำให้ผลตอบของระบบนี้มีช่วงเวลาขึ้นและช่วงเวลาเข้าที่ช้าลง

จากข้อสังเกตทั้ง 4 ข้อ เราสามารถใช้เป็นแนวทางในการเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะ เริ่มต้นจากการกำหนดลักษณะบางประการของฟังก์ชันความไว เช่น ความกว้างแถบความถี่ ขอบเขตบนของฟังก์ชันความไวความชันของฟังก์ชันความไวในบริเวณความถี่ต่ำและบริเวณความถี่ความถี่ ข้อสังเกตที่ 1 และ 2 สรุปได้ว่าเราไม่สามารถประกันส่วนพุ่งเกิน ช่วงเวลาขึ้นและช่วงเวลาเข้าที่ที่ได้จากการกำหนดขอบเขตบนของฟังก์ชันความไว หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าเราไม่สามารถประกันผลตอบดังกล่าวจากการกำหนดฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะ อย่างไรก็ตามผลตอบดังกล่าวเกี่ยวข้องกับความถี่ความถี่ ซึ่งเราสามารถประกันความถี่ความถี่ของระบบจากการกำหนดฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะได้ โดยเลือกตามสมการ (4.2) จากข้อสังเกตที่ 3 หากเราต้องการให้ระบบมีส่วนพุ่งเกินเล็กน้อย หรือทำให้

ช่วงเวลาเข้าที่และช่วงเวลาขึ้นเร็วขึ้น เราต้องกำหนดให้ขนาดของฟังก์ชันความไวบริเวณความถี่กว้างแถบความถี่ที่มีความชันเกิน 20 dB/dec ดังนั้นเราจึงกำหนดอันดับของฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะให้มากกว่าหนึ่งอันดับ ในที่นี้เราเลือกอันดับ 2 เนื่องจากการเลือกอันดับที่สูงขึ้นจะมีตัวอิสระมากขึ้นยากต่อการกำหนดค่า และจากข้อสังเกตที่ 4 ได้ว่า ฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะควรมีขั้วที่จุดกำเนิดหรือใกล้จุดกำเนิดเพียงหนึ่งตัว เพื่อให้ระบบมีค่าผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวเป็นศูนย์และมีสมรรถนะที่ดี ที่กล่าวมาข้างต้นเราสามารถสรุปขั้นตอนการเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะได้ดังนี้

#### ขั้นตอนในการเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะ

1. กำหนดให้ฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะที่เลือกเป็น

$$w_p(s) = \frac{1}{M} \frac{\tau_c s + M}{(\tau_c s + E)(ks + 1)} \quad (4.13)$$

2. เลือกค่า  $M$ ,  $\omega_n$  และ  $E$  ซึ่งเป็นค่าในอันดับแรกของฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะตามสมการ (4.2)
3. ออกแบบตัวควบคุม เพื่อหาความถี่ความถี่ของระบบโดยประมาณ
4. เลือกค่า  $k$  โดยให้ความชันเฉพาะบริเวณความถี่ความถี่ที่ประมาณได้จากขั้นตอนที่ 3 มีค่าสูงกว่า 20 dB/dec เล็กน้อย เพื่อปรับปรุงผลตอบเชิงเวลา  
ข้อควรระวัง หากความชันบริเวณนี้มากเกินไป จะทำให้ระบบมีส่วนพ่วงเกินมาก
5. เลือกค่า  $\omega_n$  ใหม่ เนื่องจากการเพิ่มขั้วในฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะ ให้ความถี่ความถี่ความถี่ลดลง
6. ออกแบบตัวควบคุม และคำนวณผลตอบของสัญญาณออกของระบบ หากผลตอบที่ได้ไม่เป็นที่พอใจให้กลับไปขั้นตอนที่ 4 เพื่อเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะที่เหมาะสม

ถึงแม้ว่าขั้นตอนนี้จะไม่สามารถรับประกันสมรรถนะเชิงเวลาเป็นตัวเลขที่ชัดเจน แต่อย่างไรก็ตาม ขั้นตอนดังกล่าวเป็นแนวทางในการเลือกฟังก์ชันนำหน้าสมรรถนะที่ทำให้ระบบมีผลตอบเชิงเวลาที่ดี

### 4.3 เงื่อนไขสัญญาณควบคุม

พิจารณาสัญญาณออก  $u(t)$  ของระบบดังรูปที่ 2.8 โดยให้สัญญาณอ้างอิงเป็นสัญญาณขั้นมีขนาดเท่ากับ  $r_0$  จะได้ความสัมพันธ์ในโดเมนความถี่ดังนี้

$$u(s) = K(s)S_p(s)\frac{r_0}{s} \quad (4.14)$$

จากทฤษฎีการจำกัดของสัญญาณควบคุม [37] หาก  $K(s)S_p(s)$  สอดคล้องเงื่อนไขดังนี้

1.  $K(s)S_p(s) \in \mathbf{RH}_2$  โดย  $\mathbf{RH}_2$  คือเซตของฟังก์ชันถ่ายโอนตรรกยะเสถียรโดยแท้ (strictly proper stable rational transfer function)
2. ผลตอบสนองต่ออิมพัลส์เป็นค่าบวกหรือลบเครื่องหมายเดียวสำหรับ  $t > 0$  หรือมีเฟสต่ำสุด

- 3. ความกว้างแถบความถี่จำกัด
- 4. ค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์

จะได้ว่า

$$|u(t)| \leq r_0 \|K(j\omega)S_p(j\omega)\|_\infty, \quad \forall t > 0 \tag{4.15}$$

ข้อสังเกต ในกรณีที่  $K(s) \in \mathbf{RH}_2$  และ  $S_p(s)$  มาจากระบบที่มีเสถียรภาพคงทนจะได้ว่า  $K(s)S_p(s) \in \mathbf{RH}_2$  และมีความกว้างแถบความถี่จำกัด ในกรณีที่ระบบไม่มีขั้วทางขวาและตัวควบคุมไม่มีศูนย์ทางขวาจะได้ว่า  $K(s)S_p(s)$  มีเฟสต่ำสุด

จากสมการ (4.15) หากเราต้องการประกันสัญญาณควบคุม  $u$  ให้มีขนาดไม่เกิน  $u_0$  สำหรับเวลา  $t$  ใดๆ

$$|u(t)| \leq r_0 \|K(j\omega)S_p(j\omega)\|_\infty \leq u_0 \tag{4.16}$$

ซึ่งเปรียบเทียบกับเงื่อนไข

$$|w_u(j\omega)K(j\omega)S_p(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega \tag{4.17}$$

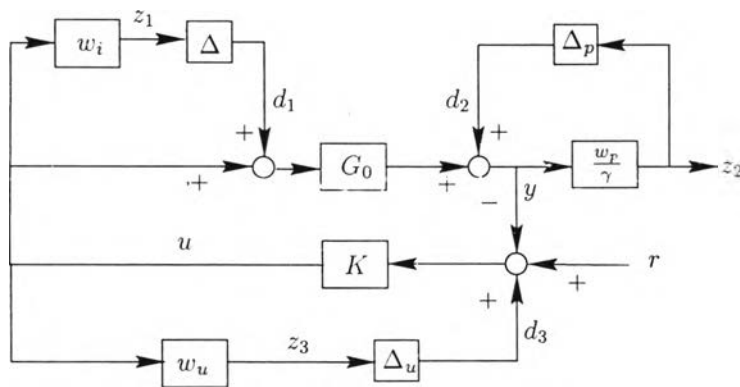
โดยที่  $w_u = r_0/u_0$  หากพิจารณากรณีที่เลวที่สุดจะได้เงื่อนไขทางสัญญาณควบคุมดังนี้

$$|w_u K(j\omega)S(j\omega)| + |w_i T(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega \tag{4.18}$$

$$\| |w_u K(j\omega)S(j\omega)| + |w_i T(j\omega)| \|_\infty \leq 1 \tag{4.19}$$

เนื่องจากเงื่อนไขทางสัญญาณควบคุมดังสมการ (4.19) เป็นเงื่อนไขสมรรถนะของระบบเช่นเดียวกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนในสมการ (2.7) จึงขอเรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขสมรรถนะสัญญาณควบคุม

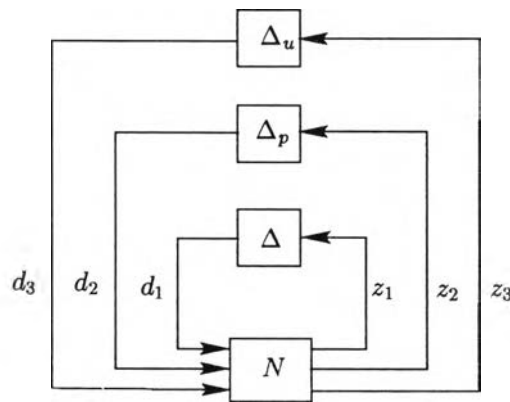
#### 4.4 การออกแบบตัวควบคุมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนทั้งสองเงื่อนไข



รูปที่ 4.6: ระบบควบคุมวงปิด เมื่อแทนการรบกวนสองตำแหน่งด้วยความไม่แน่นอน

การออกแบบตัวควบคุมให้สอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนและสมรรถนะสัญญาณควบคุม เรา จะเริ่มจากการพิจารณารูปที่ 2.8 ซึ่งเป็นระบบที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมให้สอดคล้องกับเงื่อนไข สมรรถนะคงทน เมื่อเราต้องการตัวควบคุมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนสองเงื่อนไข เราจะเพิ่มการ ครอบงำของสัญญาณรบกวนอีกหนึ่งสัญญาณดังรูปที่ 4.6 เมทริกซ์  $N$  ที่ประกอบด้วยเงื่อนไขสมรรถนะ คงทนทั้งสองเงื่อนไขจะสอดคล้องกับรูปที่ 4.7 เนื่องจากตัวควบคุมที่มาจากวิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้ มีความอนุรักษ์สูง ไม่เหมาะในการควบคุมระบบที่มีเงื่อนไขมากมาย ดังนั้นเราจึงใช้วิธีการสังเคราะห์หามิว ในการออกแบบตัวควบคุมเพื่อให้ระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนทั้งสองเงื่อนไข โดยเงื่อนไข สมรรถนะคงทนเมื่อพิจารณาจากค่ามิวเป็นดังนี้

$$\mu_{\tilde{\Delta}}(N) < 1 \quad (4.20)$$



รูปที่ 4.7: แผนภาพกรอบแสดงโครงสร้าง  $N\Delta$  เมื่อระบบมีความไม่แน่นอน 3 บล็อก

เมื่อ

$$N = \begin{bmatrix} w_i T & w_i K S & w_i K S \\ \frac{w_p}{\gamma} G_0 S & \frac{w_p}{\gamma} S & \frac{w_p}{\gamma} T \\ w_u T & w_u K S & w_u K S \end{bmatrix}, \tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_p & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_u \end{bmatrix}$$

ตัวควบคุมที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (4.20) จะสอดคล้องกับเงื่อนไขเสถียรภาพคงทน เงื่อนไขสมรรถนะคง ทนและเงื่อนไขสมรรถนะสัญญาณควบคุมดังสมการ (2.4), (2.7), (4.19) โดยเราสามารถพิสูจน์ได้ ดังนี้ กำหนดให้

$$N_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} a & b & g \\ c & d & h \\ e & f & i \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Delta}_2 = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \hat{\Delta}_3 = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 \end{bmatrix}$$



จะพิสูจน์ว่า  $\mu_{\hat{\Delta}_3}(N_3) \geq \mu_{\hat{\Delta}_2}(N_2)$  จากนิยามค่ามิวตั้งสมการ (3.7)

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{\Delta}_2}^{-1} &= \min_{\hat{\Delta}_2} \left\{ k_m \left| \det \begin{bmatrix} 1 - k_m a \Delta_1 & -b \\ -c & 1 - k_m d \Delta_2 \end{bmatrix} \right| = 0 \right\} \\ &= \min_{\hat{\Delta}_2} \left\{ k_m \left| \det \begin{bmatrix} 1 - k_m a \Delta_1 & -b \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \right| = 0 \right\}\end{aligned}$$

เมื่อ  $x_1$  เป็นค่าที่เกิดจากการดำเนินการตามแถว (row operation)

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{\Delta}_2}^{-1} &= \min \begin{cases} k_1 = k_m \text{ ที่มาจาก } 1 - k_m a \Delta_1 = 0 \\ k_2 = k_m \text{ ที่มาจาก } x_1 = 0 \end{cases} \\ &= \min\{k_1, k_2\}\end{aligned}\quad (4.21)$$

จากนิยามค่ามิวตั้งสมการ (3.7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{\Delta}_3}^{-1} &= \min_{\hat{\Delta}_3} \left\{ k_m \left| \det \begin{bmatrix} 1 - k_m a \Delta_1 & -b & -g \\ -c & 1 - k_m d \Delta_2 & -h \\ -e & -f & 1 - k_m i \Delta_3 \end{bmatrix} \right| = 0 \right\} \\ &= \min_{\hat{\Delta}_3} \left\{ k_m \left| \det \begin{bmatrix} 1 - k_m a \Delta_1 & -b & -g \\ 0 & x_1 & * \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} \right| = 0 \right\}\end{aligned}$$

เมื่อ  $x_2$  เป็นค่าที่เกิดจากการดำเนินการตามแถว

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{\Delta}_3}^{-1} &= \min \begin{cases} k_1 = k_m \text{ ที่มาจาก } 1 - k_m a \Delta_1 = 0 \\ k_2 = k_m \text{ ที่มาจาก } x_1 = 0 \\ k_3 = k_m \text{ ที่มาจาก } x_2 = 0 \end{cases} \\ \mu_{\hat{\Delta}_3}^{-1} &= \min\{k_1, k_2, k_3\} \\ &= \min\{\mu_{\hat{\Delta}_2}^{-1}, k_3\}\end{aligned}\quad (4.22)$$

จากสมการ (4.22) จะได้ว่า

$$\mu_{\hat{\Delta}_3} \geq \mu_{\hat{\Delta}_2}\quad (4.23)$$

หากกำหนดให้

$$\begin{aligned}N_2 &= \begin{bmatrix} w_i T & w_i K S \\ \frac{w_p}{\gamma} G S & \frac{w_p}{\gamma} S \end{bmatrix} \\ N_3 &= \begin{bmatrix} w_i T & w_i K S & w_i K S \\ \frac{w_p}{\gamma} G S & \frac{w_p}{\gamma} S & \frac{w_p}{\gamma} T \\ w_u T & w_u K S & w_u K S \end{bmatrix}\end{aligned}$$

หมายความว่า  $\mu_{\hat{\Delta}_3}(N_3) \geq \mu_{\hat{\Delta}_2}(N_2)$  และจากสมการ (3.17) จะได้ว่า

$$\mu_{\hat{\Delta}_3} \geq |w_i T| + \left| \frac{w_p}{\gamma} S \right|\quad (4.24)$$

ซึ่งคือเงื่อนไขสมรรถนะคงทน ในทำนองเดียวกันถ้า

$$N_2 = \begin{bmatrix} w_i T & w_i K S \\ w_u T & w_u K S \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับสมการข้างต้น ซึ่งคือเงื่อนไขสมรรถนะสัญญาณควบคุม

$$\mu_{\Delta_3} \geq |w_i T| + |w_u K S| \quad (4.26)$$

เมื่อรวมสมการ (4.24) และ (4.26) เข้าด้วยกัน ได้ว่า

$$\mu_{\Delta_3} \geq \max \left\{ |w_i T| + \left| \frac{w_p}{\gamma} S \right|, |w_i T| + |w_u K S| \right\} \quad (4.27)$$

จากสมการ (4.27) สามารถกล่าวได้ว่า ถ้า  $\mu_{\Delta_3}$  มีขนาดน้อยกว่าหนึ่ง ระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนทั้งสองเงื่อนไข และเนื่องจากการที่ระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทน จะรับประกันเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนด้วย ดังนั้นเราสามารถพิสูจน์ได้แล้วว่า ตัวควบคุมที่ได้จากวิธีการสังเคราะห์หมีที่ทำให้ค่ามีน้อยกว่า 1 จะทำให้ระบบสอดคล้องกับเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนและเงื่อนไขสมรรถนะคงทนทั้งสองเงื่อนไข

#### 4.5 สรุป

ในบทนี้เรากล่าวถึงแนวทางการเลือกฟังก์ชันน้ำหนักสมรรถนะของระบบ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนดังสมการ (2.7) โดยการสังเกตลักษณะผลตอบเชิงความถี่และผลตอบเชิงเวลาของระบบอันดับสอง จากนั้นเราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณควบคุมกับระบบและกำหนดเงื่อนไขสมรรถนะสัญญาณควบคุม เพื่อให้เราสามารถออกแบบตัวควบคุมที่ประกันขนาดสัญญาณตัวขับไว้ได้ หัวข้อสุดท้ายเป็นการจัดรูปแบบปัญหาการออกแบบตัวควบคุมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสมรรถนะคงทนทั้งสองเงื่อนไข เนื่องจากวิธีการควบคุมเอชอินฟินิตี้เป็นวิธีที่มีความอนุรักษ์มาก การออกแบบตัวควบคุมที่มีเงื่อนไขหลายเงื่อนไขจะทำให้ระบบมีสมรรถนะที่เลว ดังนั้นในการออกแบบตัวควบคุมที่สอดคล้องเงื่อนไขสมรรถนะคงทนทั้งสองเงื่อนไข เราจะใช้วิธีการสังเคราะห์หมีในการออกแบบเท่านั้น