บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความนำ

ในการวิเคราะห์โครงสร้าง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์เป็นวิธีหนึ่งที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาและได้มีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง การที่จะได้คำตอบที่เข้าใกล้ค่าแม่นตรงมากที่สุดขึ้นอยู่กับการเลือกชนิดของชิ้นส่วนและวิธีการที่นำมาใช้ในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนส โดยในช่วงแรกของการพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์นั้นเริ่มต้นด้วยการใช้สนามของตัวแปรเพียงสนามเดียว (single field formulation) ได้แก่ แบบจำลองสอดคล้อง (compatible model) ใช้สนามการกระจัดเป็นตัวแปร และ แบบจำลองสมดุล (equilibrium model) ใช้สนามความเค้นเป็นตัวแปร หลังจากนั้นเมื่อได้มีการศึกษาอย่างละเอียดมากขึ้นจึงได้มีการให้ความสนใจใช้สนามของตัวแปรหลายสนาม (multifield formulation) อันนำมาซึ่งการพัฒนาแบบจำลองพันธุ์ทาง (hybrid model) และ แบบจำลองผสม (mixed model) ทั้งนี้เพื่อให้ได้คำตอบของความเค้นที่ถูกต้องมากขึ้น รายละเอียดของวิธีการที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้นสามารถสรุปคร่าวๆได้ดังนี้

1.1.1 แบบจำลองสอดคล้อง (Compatible Model)

สมมติสนามของตัวแปรเป็นสนามของการกระจัด (assumed displacements) และหาเมตริกซ์สติฟเนสโดยใช้หลักของพลังงานศักย์ต่ำสุด (Principle of Minimum Potential Energy) เมื่อแก้สมการแล้วจะได้คำตอบในรูปของการกระจัดที่จุดต่อต่างๆ จากนั้นนำการกระจัดเหล่านั้นไปหาแรงภายในต่อไป

1.1.2 แบบจำลองสมดุล (Equilibrium Model)[1]

การสร้างเมตริกซ์สติฟเนสโดยวิธีนี้ ใช้หลักของพลังงานศักย์เติมเต็มต่ำสุด (Principle of Minimum Complementary Potential Energy) และการสมมติความเค้นซึ่งสมดุลภายในชิ้นส่วน หมายถึงฟังก์ชันของความเค้นจะต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล และแรงที่บริเวณขอบจะต้องมีความสมดุลระหว่างชิ้นส่วน ดังนั้นความยุ่งยากที่เกิดขึ้นคือ การเลือกสมมติสนามของความเค้นที่จะต้องทำให้เกิดความสมดุลภายในชิ้นส่วน

1.1.3 แบบจำลองพันธุ์ทาง (Hybrid Model)

เป็นวิธีที่เสนอโดย เพียน(Pian)[2] โดยหาเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนด้วยหลักของพลังงานศักย์เติมเต็มต่ำสุด (Principle of Minimum Complementary Potential Energy) สำหรับสนามของตัวแปรแบ่งเป็นสองสนามคือ สนามการกระจัดสอดคล้องที่บริเวณขอบของชิ้นส่วน และสนามของความเค้นที่เป็นไปตามสมการสมดุล จากนั้นกำจัดตัวแปรในส่วนของสนามความเค้นให้อยู่ในรูปของตัวแปรการกระจัด แล้วนำไปหาคำตอบ พบว่าคำตอบที่

ได้มีค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนไม่มากเกินไปเหมือนคำตอบที่ได้จากแบบจำลองการกระจัดสอดคล้อง และคำตอบของความเค้นมีความถูกต้องมากขึ้น

ต่อมาได้ปรับปรุงการหาเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนโดยใช้หลักของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์(Hellinger-Reissner Principle) เพื่อทำให้การสมมติสนามของความเค้นไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล ทำให้การเลือกฟังก์ชันเพื่อประมาณสนามของความเค้นได้ง่ายขึ้น และยังสามารถเพิ่มการกระจัดภายในในรูปของฟังก์ชันฟองสบู่(bubble function) เพื่อแก้ปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือน(shear locking)

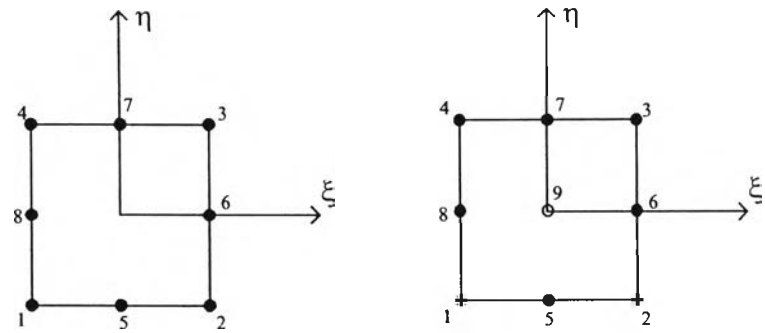
1.1.4 แบบจำลองผสม (Mixed Model)

ในแบบจำลองนี้ใช้สนามของตัวแปรมากกว่าหนึ่งสนาม โดยทั่วไปสนามของตัวแปรจะใช้สนามของการกระจัด สนามของความเค้น และสนามของความเครียด ส่วนการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสในกรณีที่มีสนามของตัวแปรสองสนามใช้หลักของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ และถ้ามีสนามของตัวแปรสามสนามใช้หลักของฮู-วาชิสุ (Hu-Washizu Principle) โดยฟังก์ชันที่สมมติของแต่ละสนามมีความอิสระต่อกัน และในระหว่างขั้นตอนการสร้างเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน ตัวแปรอื่นๆจะถูกลดรูปโดยวิธีสถิตย์ (static condensation) จนเหลือสนามของการกระจัดเป็นตัวแปรสุดท้าย แล้วนำไปหาคำตอบ

1.1.5 แผ่นรับแรงดัด (Plates in Bending)

ในช่วงเริ่มต้นของการพิจารณาปัญหาเกี่ยวกับแผ่นรับแรงดัดจะเป็นไปตามทฤษฎีแผ่นบางของเคอร์ชอฟฟ์(Kirchhoff) ซึ่งมีลักษณะสำคัญคือ ไม่พิจารณาความเครียดเฉือนแนวดิ่ง (transverse shear strain) และมีความต้องการความต่อเนื่องในระดับ C^1-continuity ทำให้เกิดอุปสรรคในการเลือกฟังก์ชันสัณฐานที่เหมาะสม ต่อมาได้มีการปรับปรุงสมมติฐานโดยไรส์เนอร์-มินด์ลิน (Reissner-Mindlin) ทำให้พัฒนาไปสู่การพิจารณาการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับแผ่นหนา โดยรวมผลของความเครียดเฉือนแนวดิ่งเข้าไปด้วยและลดระดับความต่อเนื่องให้อยู่ในระดับ C^0-continuity คือที่จุดต่อระหว่างชิ้นส่วน การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งระหว่างจุดต่อจะต้องมีความต่อเนื่อง แต่ค่ามุมหมุนที่เกิดขึ้นนั้นไม่จำเป็นต้องต่อเนื่อง แต่ในแผ่นพื้นหนาจะมีปัญหาเกิดขึ้นเมื่อความหนามีค่าลดลงจนเข้าใกล้แผ่นบางคือการยึดเนื่องจากแรงเฉือนยังผลให้ชิ้นส่วนมีสติฟเนสมาก ผลเฉลยที่ได้จึงมีค่าไม่ถูกต้อง วิธีการหนึ่งที่นำมาแก้ปัญหาคือ การเลือกลดการอินทิเกรต (selective reduced integration) [6],[7] โดยจะใช้การอินทิเกรตในอันดับต่ำสำหรับพจน์ของแรงเฉือน

1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา



(ก) (ข)

● ระดับขั้นความเสรีประกอบด้วยการกระจัดและมุมหมุนทั้งสองทิศทาง

○ ระดับขั้นความเสรีประกอบด้วยมุมหมุนทั้งสองทิศทางเท่านั้น

รูปที่ 1.2.1 (ก) PLAT8 ในพิกัดธรรมชาติ ξ และ η

1.2.1 (ข) PLAT8H ในพิกัดธรรมชาติ ξ และ η [8],[9]

ลีและวอง(Lee และ Wong)[8] ได้ศึกษาวิธีวิเคราะห์แผ่นพื้นรับแรงดัดตามทฤษฎีแผ่นของมินด์ลิน โดยสร้างชิ้นส่วนขึ้นมาสองชนิด ชิ้นส่วนแรกคือ PLAT8 เป็นชิ้นส่วนที่มี 8 จุดต่อ ในหนึ่งจุดต่อมีสามระดับขั้นความเสรี(degree of freedom) คือการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและมุมหมุนทั้งสองทิศทาง สนามของตัวแปรที่ใช้มีสองสนาม คือ สนามการกระจัดและสนามความเครียดเฉือนแนวดิ่ง โดยสมมติสนามความเครียดเฉือนแนวดิ่งด้วยฟังก์ชันพหุนามอย่างเป็นอิสระต่อกัน ชิ้นส่วนที่สองคือ PLAT8H เป็นชิ้นส่วนที่นำมาจากการพัฒนาของฮิวส์(Hughes)[9] ซึ่งมีการสมมติสนามของตัวแปรในลักษณะเดียวกับ PLAT8 แต่จะเพิ่มจุดต่อที่เก้าตรงกึ่งกลางชิ้นส่วนโดยจุดต่อที่เพิ่มขึ้นนี้มีเพียงสองระดับขั้นความเสรีคือมุมหมุนทั้งสองทิศทางเท่านั้น แล้วกำจัดออกในภายหลังจนสุดท้ายเหลือ 8 จุดต่อเหมือนเดิม และทั้งสองชิ้นส่วนใช้หลักการของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ดัดแปร (Modified Hellinger-Reissner Principle) เหมือนกันในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนส ในการเลือกฟังก์ชันที่ใช้ประมาณสนามของความเครียดเฉือนแนวดิ่ง ผู้วิจัยทั้งสองได้ทดลองแปรเปลี่ยนจำนวนพจน์ของความเครียดเฉือนแนวดิ่งขึ้นมาสามลักษณะดังนี้

1. 8α คือ

$$\gamma_{xz} = \alpha_1+\alpha_2\xi+\alpha_3\eta+\alpha_4\xi\eta$$
$$\gamma_{yz} = \alpha_5+\alpha_6\xi+\alpha_7\eta+\alpha_8\xi\eta \quad (1.2.1)$$

2. 6α คือ

$$\gamma_{xz} = \alpha_1+\alpha_2\xi+\alpha_3\eta$$
$$\gamma_{yz} = \alpha_4+\alpha_5\eta+\alpha_6\xi \quad (1.2.2)$$

3. 5α คือ

$$\gamma_{xz} = \alpha_1+\alpha_2\xi+\alpha_3\eta$$
$$\gamma_{yz} = \alpha_4+\alpha_3\xi+\alpha_5\eta \quad (1.2.3)$$

โดยที่ $\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$ = เวกเตอร์ของความเครียดเฉือน

α = เวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ในการสมมติความเครียดเฉือน

พบว่าชิ้นส่วนชนิด PLAT8-5α หมายถึงชิ้นส่วน PLAT8 ที่มีพจน์ของความเครียดเฉือนแนวดิ่ง 5 พจน์ ดังสมการที่ (1.2.3) และชิ้นส่วน PLAT8H-5α และ 6α ไม่เกิดปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือน ส่วนชิ้นส่วน PLAT8-6α และ PLAT8H-8α จะให้คำตอบที่มีความผิดพลาดสูงเมื่อชิ้นส่วนเริ่มบิดเบี้ยวจนไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยม ปัญหาที่สำคัญคือชิ้นส่วนทั้งสองชนิดที่มีความเครียดเฉือนแนวดิ่ง 5 พจน์ และ 6 พจน์จะมีปัญหาในเรื่องเกิดรูปแบบปลอมของการกระจัด (spurious kinematic modes) เมื่อแผ่นพื้นมีที่รองรับเพียงแค่ที่มุมทั้งสี่เท่านั้น แต่ถ้าใช้พจน์ของความเครียดเฉือนแนวดิ่ง 8 พจน์จะไม่เกิดปัญหาดังกล่าว

หลังจากที่ได้พัฒนาวิธีแบบจำลองความเค้นสมมติพันธุ์ทาง เพียนและคณะ[10],[11] ได้พัฒนาการสร้างสมการสำหรับชิ้นส่วนไม่สอดคล้อง (incompatible elements) โดยใช้หลักของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ และให้ชื่อว่าไฟไนต์เอเลเมนต์พันธุ์ทาง/ผสม (hybrid/mixed finite elements) ทั้งนี้กำหนดให้การสมมติความเค้นไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล แต่ใช้การเพิ่มการกระจัดภายในเป็นตัวดูณลากรองจ์ การกระจัดจึงแบ่งได้เป็นสองส่วนคือ การกระจัดสอดคล้อง u_c (compatible displacement part) และส่วนเพิ่มการกระจัดภายใน u_λ (additional internal displacement) จากการใช้วิธีนี้พบว่ามีความยืดหยุ่นในการนำมาสร้างสมการ และข้อดีที่พบคือ ไม่เกิดการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัด ชิ้นส่วนมีความยืนยง (invariance) มีประสิทธิภาพเมื่อนำมาใช้กับคอมพิวเตอร์สติฟเนสไม่มากจนเกินไป และให้ค่าความเค้นที่ถูกต้อง

ซาลีบและชาง(Saleeb และ Chang)[14] ได้เสนอแนวทางในการเลือกประมาณฟังก์ชันของการกระจัดและความเค้น โดยใช้ฟังก์ชันประมาณพหุนามลากรองจ์ (Lagrange polynomial interpolation function) ในการประมาณฟังก์ชันของการกระจัด และได้เสนอแนวทางในการเลือกฟังก์ชันการประมาณความเค้นโดยมีข้อพิจารณาดังนี้คือ

1. รูปแบบการเคลื่อนที่จลนะ (kinematic deformation mode) โดยจำนวนพารามิเตอร์ที่สมมติขึ้นสำหรับความเค้น m จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนระดับขั้นความเสรีของชิ้นส่วน n ลบด้วยจำนวนรูปแบบการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งเกร็ง r (rigid body mode) กล่าวคือพารามิเตอร์ของความเค้นหนึ่งรูปแบบจะต้องสอดคล้องกับรูปแบบของการเคลื่อนที่หนึ่งรูปแบบ ($m \geq n-r$)

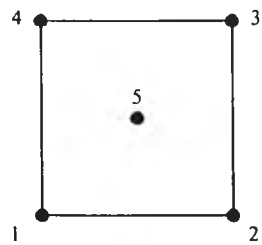
2. ในการเลือกสมมติฟังก์ชันการประมาณของความเค้น จะเลือกให้เกิดความสมดุลหรือไม่ก็ได้

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

	อันดับ	จำนวนพจน์
1	0	1
$x \quad y$	1	3
$x^2 \quad xy \quad y^2$	2	6
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	3	10
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$	4	15
$\vdots$		

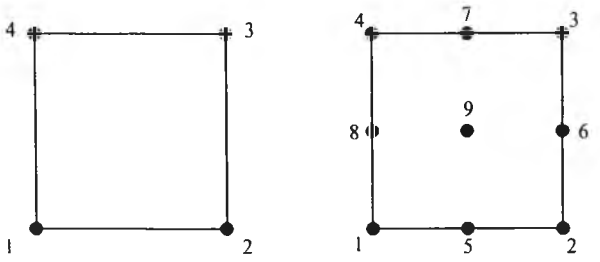
รูปที่ 1.2.2 สามเหลี่ยมของปาสคาล(Pascal triangle)

3. ในการเลือกฟังก์ชันของความเค้น จะต้องทำให้ชิ้นส่วนมีความยืนยง วิธีการหนึ่งคือถ้าเลือกฟังก์ชันของความเค้นเป็นตัวแปรในพิกัดหลัก (global coordinates) จำนวนพจน์ในฟังก์ชันพหุนามของความเค้นจะต้องมีความบริบูรณ์ (completeness) คืออันดับของฟังก์ชันที่ใช้จะเป็นตัวกำหนดจำนวนพจน์ซึ่งต้องครบถ้วนตามที่กำหนดไว้โดยสามเหลี่ยมของปาสคาลในรูปที่ 1.2.2



รูปที่ 1.2.3 ชิ้นส่วน HMPL5

นอกจากนี้ ซาลีบและชาง ได้เสนอชิ้นส่วน HMPL5 ดังรูปที่ 1.2.3 เป็นชิ้นส่วนที่มี 5 จุดต่อ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์พันธุ์ทาง/ผสม (hybrid/mixed finite element method) ที่เคยเสนอโดยเพียน[10],[11] ในหนึ่งจุดต่อแต่ละจุดมีสามระดับขั้นความเสรีคือ การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและมุมหมุนทั้งสองทิศทาง สมมติการกระจัดให้มีความสอดคล้องโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามของลากรองจ์ และสมมติหน่วยแรงเค้นคัดกับหน่วยแรงเค้นเฉือนโดยไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการสมดุล และขณะสร้างเมตริกซ์สติฟเนสสำหรับชิ้นส่วนก็จะกำจัดตัวแปรในพจน์ของความเค้นออกไป จะได้เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนที่มีสองพจน์คือเมตริกซ์สติฟเนสจากจากแรงคัดและเมตริกซ์สติฟเนสจากจากแรงเฉือน อนึ่งผู้วิจัยได้ปรับปรุงชิ้นส่วน HMPL5 โดยเปลี่ยนฟังก์ชันของความเค้นจากเดิมให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงเส้นสองแกน(bi-linear) แล้วนำไปตรวจสอบประสิทธิภาพต่อไป



รูปที่ 1.2.4 ชิ้นส่วนฟังก์ชันฟองสบู่ 4 จุดต่อ และ 9 จุดต่อ

พินสกีและจัสติ (Pinsky และ Jasti)[20] ได้เสนอวิธีอีกวิธีหนึ่งที่สามารถใช้ป้องกันปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือนได้ คือการใช้ฟังก์ชันฟองสบู่ (bubble function) ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับการเพิ่มการกระจัดภายในที่เสนอโดยเพียน การกระจัดจะสมมติเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งเป็นระดับขั้นความเสรีที่จุดต่อตามปกติ และส่วนที่สองเป็นฟังก์ชันฟองสบู่ที่สมมติขึ้นโดยไม่ขึ้นกับตัวแปรอื่น ส่วนความเค้นจะสมมติ 5 พจน์คือ การสมมติแรงคัดสามพจน์ได้แก่ M_x M_y M_{xy} และแรงเฉือนสองพจน์คือ Q_x และ Q_y ทั้งนี้จำนวนพจน์ที่ใช้ในฟังก์ชันของความเค้นและฟังก์ชันฟองสบู่ขึ้นอยู่กับจำนวนจุดต่อในชิ้นส่วน โดยชิ้นส่วน 4 จุดต่อใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันความเค้น 20 พจน์ จำนวนพจน์ของฟังก์ชันฟองสบู่ 9 พจน์ และชิ้นส่วน 9 จุดต่อใช้จำนวนพจน์ของฟังก์ชันความเค้น 46 พจน์ จำนวนพจน์ของฟังก์ชันฟองสบู่ 11 พจน์ ชิ้นส่วนที่ได้สามารถแก้ปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือนได้ ผู้วิจัยได้ปรับปรุงฟังก์ชันฟองสบู่โดยเปลี่ยนรูปแบบของฟังก์ชันและจำนวนพจน์เพื่อให้มีประสิทธิภาพในการคำนวณยิ่งขึ้น

ในปี 1998 อายัดและคณะ(Ayad et al.)[22] ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือนของแผ่นรับแรงดัดตามทฤษฎีของไรส์เนอร์-มินด์ลิน โดยใช้การถ่ายทอดแรงเฉือนแบบผสม (Mixed Shear Projected , MiSP) และสร้างเป็นชิ้นส่วน MiSP4 ซึ่งมี 4 จุดต่อ โดยใช้หลักการของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ในการสร้างเมตริกซ์สติฟเนส และใช้สนามของโมเมนต์และแรงเฉือนเป็นสนามของตัวแปร ส่วนการประมาณความเครียดเฉือนในแนวดิ่งอยู่ในรูปของความเครียดสัมผัสที่ขอบ(edge tangential strain) จากนั้นนำไปสร้างเป็นเมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการกระจัดได้ แล้วจึงนำไปหาเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนในที่สุด

ในการวิเคราะห์แผ่นหนาหรือแผ่นรับแรงโดยทฤษฎีของมินด์ลิน ซึ่งรวมผลของความเครียดเฉือนแนวดิ่ง(transverse shear strain) ในการคำนวณ ดังนั้นคำตอบด้านความเค้นจึงมีความสำคัญ การใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์แบบการกระจัดสอดคล้องจะให้คำตอบด้านความเค้นที่ไม่ถูกต้องเพียงพอ จึงนำแบบจำลองผสมมาใช้ในการหาเมตริกซ์สติฟเนส หลักการแปรผันที่ใช้เป็นหลักของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์ และหลักของเฮลลิงเกอร์-ไรส์เนอร์คัดแปร ตัวแปรที่ใช้มีสนามของการกระจัด สนามของความเค้นและสนามของความเครียด ศึกษาการสร้างชิ้นส่วนที่สร้างขึ้นด้วยวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์แบบผสม รวมทั้งตรวจสอบประสิทธิภาพของแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งแต่ละวิธีสามารถแก้ปัญหาการยึดเนื่องจากแรงเฉือน และไม่ก่อให้เกิดรูปแบบการเคลื่อนที่ปลอมของการกระจัด

1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. ศึกษาวิธีการสร้างสมการแบบผสมที่มีการพัฒนาขึ้นมา โดยพิจารณาถึงหลักการและแนวความคิดในการสร้างสมการของชิ้นส่วน เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละวิธี

2. ปรับปรุงและแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนและพัฒนาประสิทธิภาพของชิ้นส่วนให้ดีขึ้น

1.4 ขอบข่ายของการทำงาน

1. ศึกษาเฉพาะระเบียบวิธีไฟไนต์เอเลเมนต์แบบผสม (mixed finite element method)
2. วัสดุที่ใช้มีพฤติกรรมยืดหยุ่นเชิงเส้น (linearly elastic)
3. เป็นวัสดุที่เหมือนกันทิศทาง (isotropic material)
4. พิจารณาการวิเคราะห์ในสภาวะสถิตย์ (static)