บทที่ 2

ทฤษฎีการคำนวณความสว่างภายนอกอาคาร

การคำนวณแสงสว่างในพื้นที่นั้น สามารถคำนวณได้ทั้ง วิธีคิดทีละจุดและวิธีลูเมน ซึ่งวิธีคิดทีละจุดนี้มีข้อดีคือ จะให้ผลลัพธ์ที่มีรายละเอียดและความแม่นยำมากกว่าวิธีลูเมน สามารถใช้ตรวจสอบความสม่ำเสมอ หรือตรวจสอบความสว่างที่จุดใดๆ ที่ต้องการได้ สิ่งสำคัญที่จะต้องคำนึงถึงคือ ปริมาณแสง และคุณภาพของแสงบนพื้นที่

การคำนวณค่าความสว่างบนพื้นสนามหรือบนพื้นระนาบเอียงใดๆ ด้วยวิธีคิดทีละจุดนี้จะต้องอาศัยปัจจัยสำคัญ 4 อย่างคือ

1) การกระจายค่าความเข้มส่องสว่างของโคมฉายในหน่วยแคนเดลาต่อฟลักซ์ส่องสว่างของหลอดไฟ 1000 ลูเมน โดยจัดทำเป็นข้อมูลการกระจายความเข้มส่องสว่างของโคมแต่ละแบบ โดยระนาบมุมที่ใช้แสดงข้อมูลการกระจายค่าความเข้มส่องสว่างจะเป็นระบบ H-V หรือระบบ C-γ ก็ได้

2) ฟลักซ์ส่องสว่างของหลอดไฟ เนื่องจากหลอดไฟแต่ละขนาดจะให้ฟลักซ์ส่องสว่างไม่เท่ากัน

3) ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของตำแหน่งของโคมฉาย และจุดที่ต้องการคำนวณค่าความสว่าง

4) รายละเอียดของระนาบ คือพื้นที่ที่ต้องการคำนวณนั้นเป็นระนาบดิ่ง ระนาบนอน หรือระนาบเอียง

2.1 โคมฉาย

ดวงโคมที่ใช้สำหรับการออกแบบแสงสว่างภายนอกอาคารแบ่งออกเป็น 2 ชนิด ด้วยกันคือ

1) ไม่สามารถเปลี่ยนทิศของการฉายได้ (Fixed Aiming) เช่น โคมไฟถนน

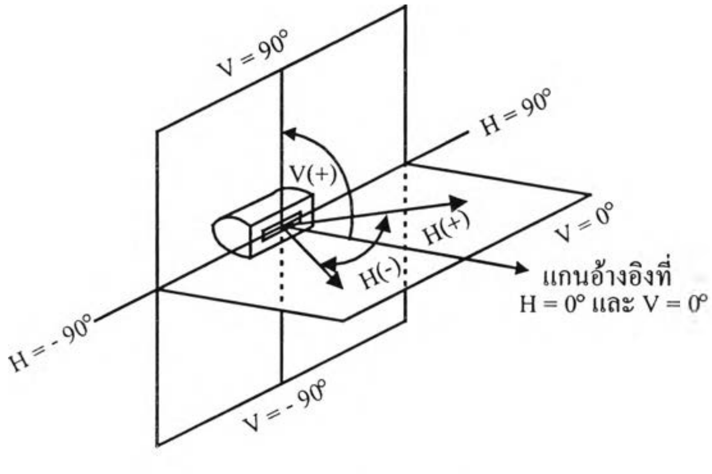
2) สามารถปรับทิศของการฉายได้ (Aiming) เช่น โคมฉาย (Floodlight)

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอการใช้โคมฉายในการส่องสว่างพื้นที่ มีลักษณะการกระจายแสงไปในทิศทางที่จำกัดไม่กระจายทั่วทั้งบริเวณ ดังนั้นในการติดตั้งจำเป็นต้องเล็งโคมฉายไปยังพื้นที่ที่ต้องการส่องสว่าง

2.1.1 ข้อมูลการกระจายแสงของโคมฉาย

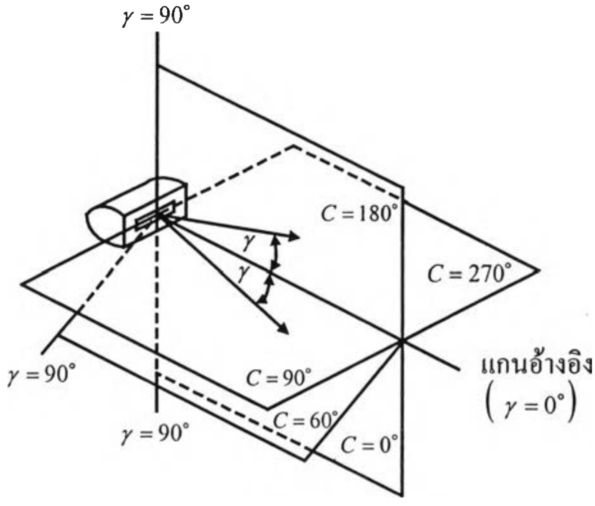
การกระจายค่าความเข้มส่องสว่างของโคมฉาย จะจัดทำเป็นข้อมูลการกระจายความเข้มส่องสว่างเทียบกับฟลักซ์ส่องสว่างของหลอดไฟ 1000 ลูเมน ระนาบมุมที่ใช้แสดงข้อมูลนั้นจะเป็นระบบ H-V หรือ ระบบ C-γ ก็ได้

1) ระบบ H-V มีลักษณะการแบ่งระนาบตามแนวนอนของโคมฉายเป็นระนาบย่อยๆ จาก V_{-90} ถึง V_{90} โดยกำหนดให้ระนาบที่ตั้งฉากกับหน้าของโคมฉายเป็นระนาบ V_0 และในแต่ละระนาบของ V จะมีลักษณะการกระจายแสงในมุม H จากมุม –90° ถึง 90° ซึ่งแสดงลักษณะการกระจายแสงตามระบบ H-V ดังรูปที่ 2-1



รูปที่ 2-1 ระนาบมุมในระบบ H-V

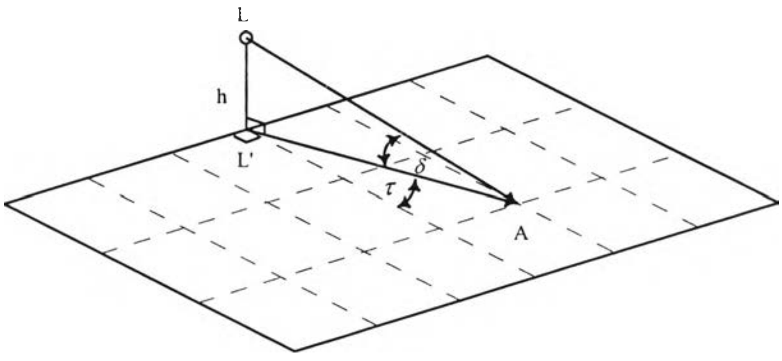
2) ระบบ C-γ ระบบ C-γ นี้เป็นการแบ่งระนาบย่อยๆ โดยหมุนรอบแกนอ้างอิงที่ตั้งฉากกับหน้าของโคมฉาย จาก C_0 ถึง C_{360} โดยมาตรฐาน CIE กำหนดระนาบที่ตั้งฉากกับหลอดในแนวดิ่งลงเป็น C_0 และในแต่ละระนาบ C จะมีลักษณะการกระจายแสงในมุม γ ตั้งแต่ 0° ถึง 180° ซึ่งลักษณะการกระจายแสงตามระบบ C-γ แสดงดังรูปที่ 2-2



รูปที่ 2-2 ระนาบมุมในระบบ C-γ

2.1.2 ลักษณะการติดตั้งโคมฉาย

การติดตั้งโคมฉายบนเสาไฟส่องสว่างพื้นที่ เพื่อให้ได้จุดเล็งตามที่กำหนดนั้นเป็นสิ่งที่ค่อนข้างยุ่งยาก การติดตั้งโคมฉายอาจจะใช้กล้องติดตั้งที่ตัวโคมฉายแล้วเล็งโคมฉายไปยังจุดที่ต้องการโดยอาศัยกล้องที่ติดตั้งนั้นซึ่งการติดตั้งจะกระทำบนเสาโดยตรง หรือจะใช้วิธีทำการปรับโคมฉายโดยอาศัยมุมเล็ง (δ) และมุมหัน (τ) เป็นตัวกำหนดเพื่อให้ได้จุดเล็งที่ต้องการ ดังรูปที่ 2-3



รูปที่ 2-3 การปรับตั้งโคมฉาย โดยอาศัยมุมเล็ง (δ) และ มุมหัน (τ)

2.2 การคำนวณค่าความสว่างด้วยวิธีลูเมน

เป็นวิธีการคำนวณความสว่างที่ให้ผลลัพธ์เป็นค่าความสว่างเฉลี่ย สามารถประมาณจำนวนของดวงโคมที่จะใช้ติดตั้งในพื้นที่ โดยในการคำนวณจะหาปริมาณฟลักซ์ส่องสว่างทั้งหมดที่ตกลง

บนพื้นที่นั้นๆ แล้วหารด้วยขนาดของพื้นที่ ซึ่งต้องพิจารณาถึงค่า MF (Maintenance Factor) และค่า CBU (Coefficient of Beam Utilization) ด้วย มีสมการพื้นฐานที่ใช้ในการคำนวณ ดังนี้

$$Eav = \frac{n \times BL \times CBU \times MF}{A} \tag{2.1}$$

โดยที่ Eav คือ ค่าความสว่างเฉลี่ย (ลักซ์)

n คือ จำนวนโคม (โคม)

BL คือ ฟลักซ์ส่องสว่างในลำแสง (ลูเมน)

CBU คือ สัมประสิทธิ์การใช้ประโยชน์แสงของลำแสง (Coefficient of Beam Utilization)

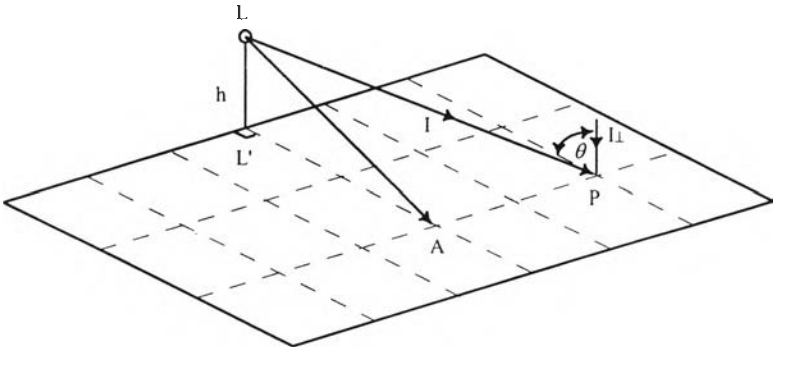
MF คือ ตัวประกอบการบำรุงรักษา

A คือ พื้นที่ (ตารางเมตร)

ค่าสัมประสิทธิ์การใช้ประโยชน์แสงของลำแสงจะขึ้นอยู่กับแบบของโคมฉาย และลักษณะการติดตั้งโคมฉาย

2.3 การคำนวณค่าความสว่างด้วยวิธีคิดทีละจุด

วิธีคิดทีละจุดเป็นการคำนวณค่าความสว่างที่จุดต่างๆ บนพื้นที่ ทำให้ทราบค่าความสว่างสูงสุดและต่ำสุด ค่าความสว่างเฉลี่ย และค่าความสม่ำเสมอของความสว่างได้ การคำนวณค่าความสว่างที่จุดใดๆ พิจารณาได้จากรูปที่ 2-4



รูปที่ 2-4 การคำนวณค่าความสว่างแบบคิดทีละจุด

ค่าความสว่างที่จุด P บนพื้นราบสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.2)

$$E_P = \frac{I\perp}{LP^2} \tag{2.2}$$

โดยที่ E_P คือ ความสว่างบนพื้นระนาบที่จุด P (ลักซ์)

$I\perp$ คือ ความเข้มส่องสว่างที่ตั้งฉากกับระนาบตรงจุด P (แคนเดลา)

LP คือ ระยะห่างจากโคมฉายถึงจุดที่ต้องการคำนวณค่าความสว่าง (เมตร)

$$I\perp = I\cos\theta$$

และ $\cos\theta = \dfrac{LL'}{LP}$

แทนค่าลงในสมการที่ (2.2) จะได้

$$E_P = I \times \frac{LL'}{LP^3} \tag{2.3}$$

หรือ $$E_P = I \times \frac{h}{LP^3} \tag{2.4}$$

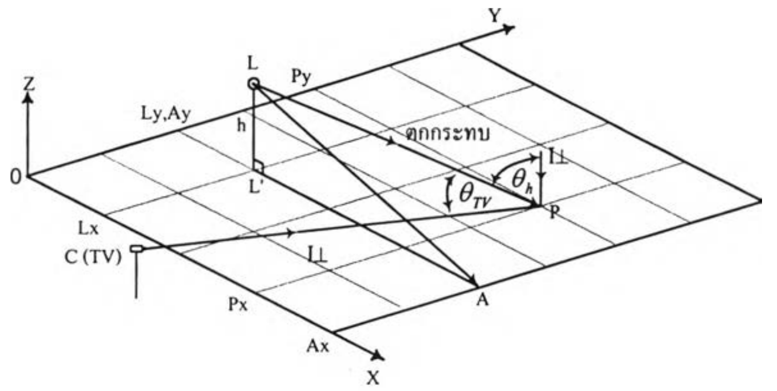
โดยที่ h คือ ความสูงของโคมฉายเหนือพื้นระนาบที่ผ่านจุด P (เมตร)

อย่างไรก็ตามการคำนวณหาความสว่างบนพื้นราบ จะใช้สมการที่ (2.5) แทนเพื่อให้สามารถประยุกต์ใช้ในการคำนวณความสว่างบนระนาบรูปแบบอื่นๆ เช่น ระนาบดิ่งหรือระนาบเอียงได้ด้วย

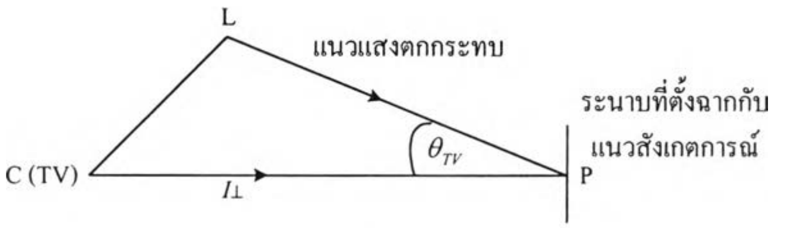
$$E_h = \frac{I(H,V)cos\theta_h}{LP^2} = \frac{I(C,\gamma)cos\theta_h}{LP^2} \tag{2.5}$$

เมื่อ θ_h คือ มุมระหว่างแนวแสงตกกระทบจุด P กับแนวดิ่ง

ถ้ามีการติดตั้งกล้องเพื่อถ่ายภาพกิจกรรมต่างๆ บนพื้นที่คำนวณ ก็จะต้องจัดแสงเพื่อให้ได้ความสว่างบนพื้นที่คำนวณพอเพียงกับการถ่ายภาพ การคำนวณความสว่างที่จุด P บนระนาบที่ตั้งฉากกับแนวสังเกตการณ์ พิจารณาได้จากรูปที่ 2-5



(ก)



(ข)

รูปที่ 2-5 (ก) และ (ข) การคำนวณค่าความสว่างบนระนาบที่ตั้งฉากกับแนวสังเกตการณ์

ความสว่างบนระนาบที่ตั้งฉากกับแนวสังเกตการณ์ พิจารณาจากการทำมุมของแนวลำแสงที่พุ่งออกจากโคมมาตกกระทบวัตถุหรือที่จุดใดๆ บนพื้นที่คำนวณกับแนวตั้งฉาก ดังรูปที่ 2-5 (ข) ซึ่งมุม θ_{TV} คำนวณโดยใช้กฎของสามเหลี่ยม พิจารณาจาก ΔLPC จะได้

$$\cos\theta_{TV} = \frac{LP^2 + CP^2 - LC^2}{2 \times LP \times CP} \tag{2.6}$$

ดังนั้นสามารถคำนวณความสว่างบนระนาบที่ตั้งฉากกับแนวสังเกตการณ์ ได้ดังสมการที่ (2.7)

$$E_{TV} = \frac{I(H,V)\cos\theta_{TV}}{LP^2} = \frac{I(C,\gamma)\cos\theta_{TV}}{LP^2} \tag{2.7}$$

เมื่อ θ_{TV} คือ มุมระหว่างแนวแสงตกกระทบจุด P กับแนวระหว่างจุดสังเกตกับจุด P

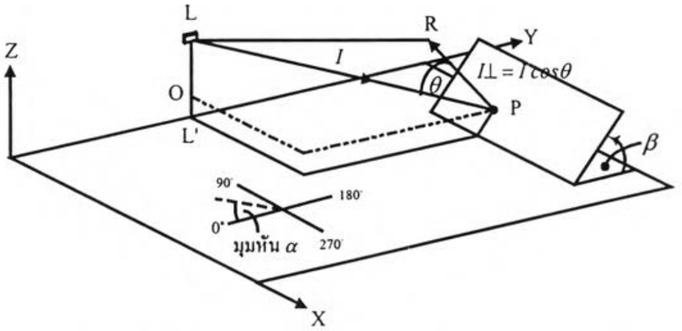
นอกจากการหาความสว่างทั้ง 2 กรณีที่กล่าวไปแล้ว ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอถึงการหาความสว่างบนระนาบเอียงอีกกรณีหนึ่ง

การคำนวณความสว่างบนพื้นที่โดยทั่วไป ไม่ได้มีลักษณะเป็นระนาบนอนเพียงอย่างเดียวเท่านั้น บางครั้งอาจมีการจัดวางวัตถุที่อยู่ในลักษณะเอียงทำมุมองศาต่างๆ กับพื้น ยกตัวอย่างเช่น อัฒจันทร์ การคำนวณหาความสว่างบนระนาบเอียงนี้จะใช้หลักการเดียวกับบนระนาบนอนโดยหาค่าความสว่างที่มีทิศตั้งฉากกับพื้นที่คำนวณ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากสมการพื้นฐานการคำนวณความสว่างที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ดังสมการที่ (2.8)

$$E = \frac{I\perp}{LP^2} = \frac{I\cos\theta}{LP^2} \tag{2.8}$$

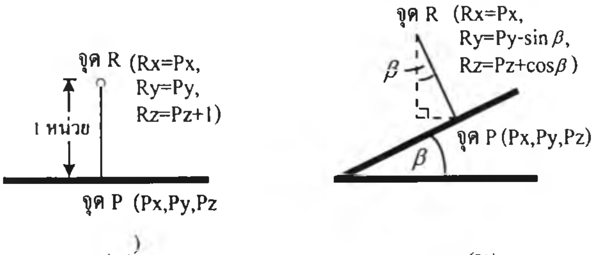
โดยที่ $I\perp$ คือ ความเข้มส่องสว่างที่ตั้งฉากกับระนาบ (แคนเดลา)

และ θ คือ มุมระหว่างเส้นตั้งฉากกับระนาบเอียงและแนวแสงที่ตกกระทบจุดนั้น ซึ่งมุม θ นี้จะแปรเปลี่ยนไปตามขนาดความเอียงของระนาบ (มุม β)



รูปที่ 2-6 รูปประกอบการคำนวณความสว่างบนระนาบเอียง

จากรูปที่ 2-6 เป็นรูปแสดงการคำนวณความสว่างบนระนาบเอียง โดยพื้นที่คำนวณเอียงทำมุม β กับแนวระดับ ให้ RP ยาว 1 หน่วยและตั้งฉากกับระนาบเอียงที่จุด P



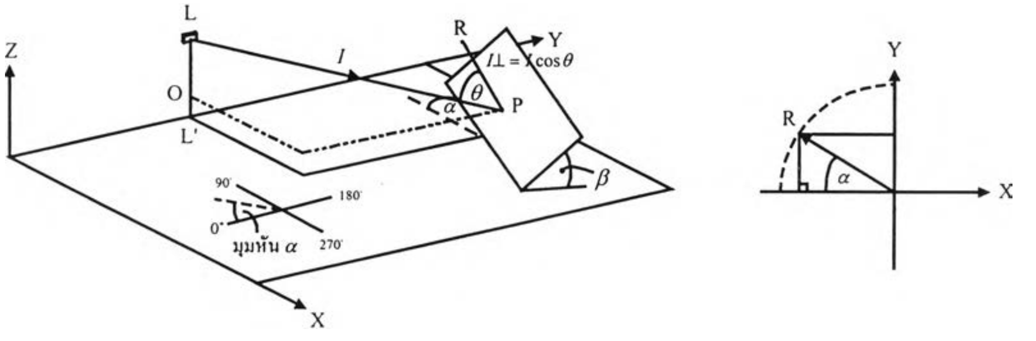
รูปที่ 2-7 รูปประกอบการคำนวณพิกัดของจุด R

จากรูปที่ 2-7 (ก) กำหนดให้พื้นที่คำนวณอยู่ในแนวระนาบ จะได้พิกัดของจุด R ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} Rx &= Px \\ Ry &= Py \\ Rz &= Pz + 1 \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

ถ้าให้พื้นที่คำนวณมีลักษณะเอียงทำมุม β กับแนวระดับ ดังรูปที่ 2-7 (ข) พิกัดของจุด R จะมีค่าเท่ากับ

$$\left.\begin{aligned} Rx &= Px \\ Ry &= Py - \sin\beta \\ Rz &= Pz + \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$



รูปที่ 2-8 รูปประกอบการคำนวณพิกัดของจุด R
ในกรณีที่พื้นเอียงมีทิศทางหันซ้ายหรือขวา

ในกรณีที่พื้นเอียงมีทิศทางหันซ้ายหรือขวาเป็นมุม (α) กับแกนระดับของ X และ Y ดังรูปที่ 2-8 สามารถหาพิกัดของจุด R ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} Rx &= Px - \sin\beta\sin\alpha \\ Ry &= Py - \sin\beta\cos\alpha \\ Rz &= Pz + \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad (2.11)$$

ดังนั้นมุม θ สามารถคำนวณหาได้โดยใช้กฎของสามเหลี่ยม พิจารณาจาก ΔLPR ดังรูปที่ 2-6 จะได้

$$\cos\theta = \frac{LP^2 + RP^2 - LR^2}{2 \times LP \times RP} \quad (2.12)$$

ค่าความเข้มส่องสว่างของโคมฉายที่ตกบนจุดคำนวณ จะขึ้นอยู่กับลักษณะการกระจายความเข้มส่องสว่าง ลักษณะการติดตั้งโคมฉาย และตำแหน่งจุดที่จะคำนวณ โดยข้อมูลการกระจาย

ความเข้มส่องสว่างของโคมฉายนั้น ผู้ผลิตโคมอาจจะแสดงข้อมูลการกระจายความเข้มส่องสว่าง โดยใช้ระนาบมุมในระบบ H-V หรือระบบ C-γ ก็ได้

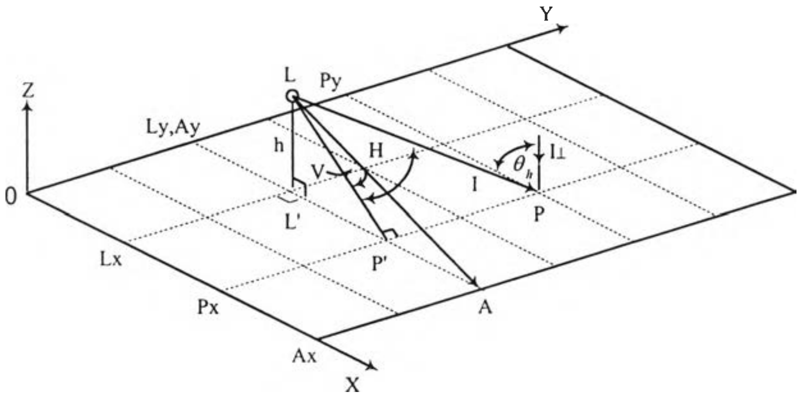
2.4 การคำนวณในระบบ H-V

มีการคำนวณได้ 2 กรณี ด้วยกันคือ

- กรณีที่มุมหัน (τ) เป็นศูนย์
- กรณีที่มุมหัน (τ) ไม่เป็นศูนย์

ซึ่งสามารถอธิบายรายละเอียดของการคำนวณทั้ง 2 กรณี ได้ดังนี้

2.4.1 กรณีที่มุมหัน (τ) เป็นศูนย์



รูปที่ 2-9 การคำนวณหาค่ามุม H และมุม V กรณีมุมหันเป็นศูนย์

กำหนดให้

θ_h คือ มุมที่จุด P ที่กระทำกันระหว่าง เส้นที่ลากจาก L ถึง P กับเส้นที่ลากตั้งฉากกับระนาบ (องศา)

τ คือ มุมหันของโคมฉาย (องศา)

δ คือ มุมเล็งของโคมฉายที่ทำกับแนวระดับ (องศา)

P คือ จุดที่ต้องการหาค่าความสว่าง

L คือ จุดที่ติดตั้งโคมฉายบนเสา

A คือ จุดเล็งของโคมฉาย

h คือ ความสูงของโคมฉาย (เมตร)

L′ คือ จุดติดตั้งโคมที่พื้นระนาบ

Px, Py, Pz คือ โคออร์ดิเนตของจุดที่ต้องการคำนวณหาค่าความสว่าง

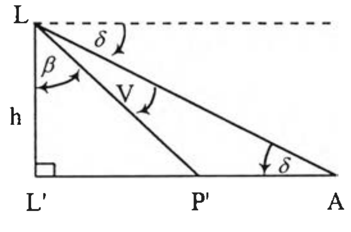
Ax, Ay, Az คือ โคออร์ดิเนตของจุดเล็งของโคมฉาย

Lx, Ly, Lz คือ โคออร์ดิเนตของจุดติดตั้งโคม

พิจารณาจากรูปที่ 2-9 และรูปที่ 2-10 จะได้ว่า

$$\Delta LL'A \quad => \quad \sin\delta = \frac{LL'}{LA} = \frac{Az - Lz}{\sqrt{(Ax - Lx)^2 + (Az - Lz)^2}} \tag{2.13}$$

$$\Delta LP'P \quad => \quad \sin H = \frac{PP'}{LP} = \frac{|Py - Ly|}{\sqrt{(Px - Lx)^2 + (Py - Ly)^2 + (Pz - Lz)^2}} \tag{2.14}$$



รูปที่ 2-10 แสดงการหามุม V

โดยที่ มุม δ จะมีค่าติดลบเนื่องจากเล็งต่ำกว่าแนวระดับ

และ มุม V มีค่าติดลบเพราะจุด P′ อยู่ต่ำกว่าแนวเล็ง

ดังนั้น $\beta + (-V) + (-\delta) = 90°$

$$\beta = V + (90° + \delta)$$

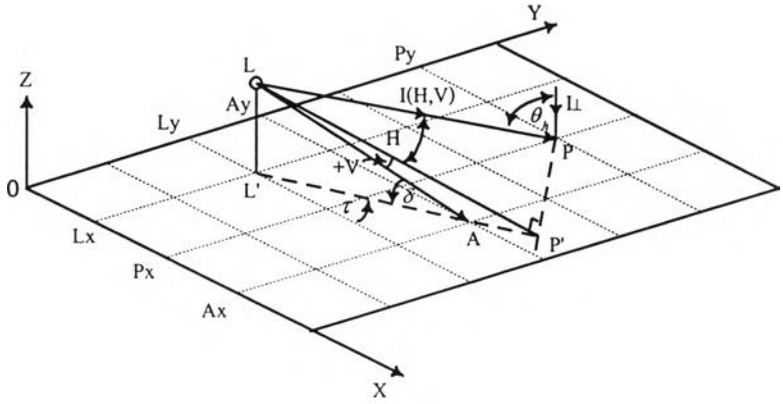
พิจารณาที่ ΔLL′P′จะได้

$$\tan\beta = \frac{L'P'}{LL'} = \frac{Px - Lx}{Lz - Pz} \tag{2.15}$$

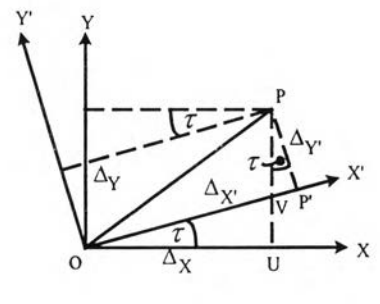
$$V = \tan^{-1}\left(\frac{Px - Lx}{Lz - Pz}\right) - (90 + \delta) \tag{2.16}$$

2.4.2 กรณีที่มุมหัน (τ) ไม่เป็นศูนย์

จากรูปที่ 2-9 เมื่อหันโคมฉายไปเป็นมุม τ องศา จากแนวตั้งฉากกับขอบสนามจะทำให้แนวที่กำหนดมุม H = 0 ° หันไปเป็นมุม τ องศาด้วย การคำนวณค่ามุม H และมุม V จึงทำได้โดยการหมุนระนาบ XY ไปเป็นมุม τ องศา กลายเป็นระนาบ X′Y′ ดังแสดงในรูปที่ 2-11 แล้วคำนวณมุม H และ มุม V ในเทอมของ ΔX′ และ ΔY′ ดังนี้



(ก)



(ข)

รูปที่ 2-11 (ก) และ (ข) การคำนวณหาค่ามุม H และมุม V กรณีมุมหันไม่เป็นศูนย์

$$H = \sin^{-1} \frac{\Delta Y'}{\sqrt{(\Delta X')^2 + (\Delta Y')^2 + (\Delta Z')^2}} \tag{2.17}$$

$$V = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta X'}{\Delta Z'}\right) - (90 + \delta) \tag{2.18}$$

ทำการเปลี่ยน $\Delta X'$, $\Delta Y'$ และ $\Delta Z'$ ให้อยู่ในเทอมของ ΔX, ΔY และ ΔZ

1) $\Delta Z' = \Delta Z$

2) พิจารณา ΔOUV และ $\Delta PP'V$ จะได้

$$\Delta X' = OP' = OV + VP'$$

$$= \frac{\Delta X}{\cos\tau} + (\Delta Y - \Delta X \tan\tau)\sin\tau$$

$$= \frac{\Delta X}{\cos\tau} + \Delta Y \sin\tau - \Delta X \frac{\sin^2\tau}{\cos\tau}$$

$$\therefore \quad \Delta X' = \Delta X \cos\tau + \Delta Y \sin\tau \tag{2.19}$$

3) พิจารณา ΔPP'V จะได้

$$\Delta Y' = PV \cos\tau$$

$$= (\Delta Y - \Delta X \tan\tau)\cos\tau$$

$$\therefore \ \Delta Y' = \Delta Y \cos\tau - \Delta X \sin\tau \tag{2.20}$$

นอกจากนี้จะได้

$$OP^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 = (\Delta X')^2 + (\Delta Y')^2 \tag{2.21}$$

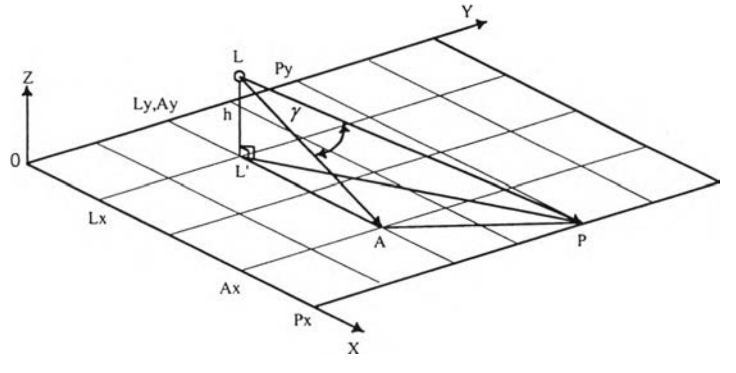
แทนค่าสมการที่ (2.19) ถึง (2.21) ในสมการที่ (2.17) และ (2.18) จะได้มุม H และ มุม V ดังนี้

$$H = \sin^{-1}\left(\frac{\Delta Y \cos\tau - \Delta X \sin\tau}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}}\right) \tag{2.22}$$

$$V = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta X \cos\tau + \Delta Y \sin\tau}{\Delta Z}\right) - (90 + \delta) \tag{2.23}$$

2.5 การคำนวณในระบบ C-γ

2.5.1 กรณีที่มุมหัน (τ) เป็นศูนย์

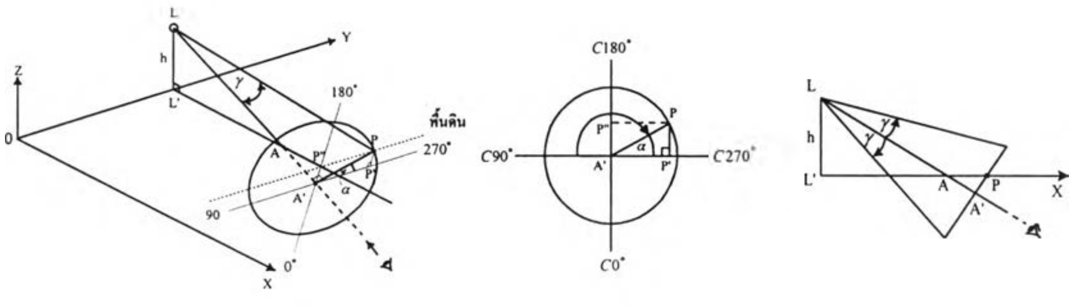


รูปที่ 2-12 การคำนวณมุม γ ในกรณีมุมหันเท่ากับศูนย์

จากรูปที่ 2-12 พิจารณาที่ ΔLAP สามารถหามุม γ ได้จากสมการที่ (2.24)

$$\cos\gamma = \frac{LP^2 + LA^2 - AP^2}{2 \times LP \times LA} \tag{2.24}$$

สำหรับการคำนวณมุม C นั้นเนื่องจากมีมุมเล็งเข้ามาเกี่ยวข้องทำให้ระนาบมุม C ที่จุดเล็งและจุดคำนวณไม่ตั้งฉากกับพื้นที่ ดังนั้นจึงต้องลากเส้นต่อจากเส้น LA จนกระทั่งตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากจากจุด P ที่จุด A′ แล้วสร้างเป็นรูปกรวยโดยให้จุด A′ เป็นจุดศูนย์กลางดังรูปที่ 2-13



รูปที่ 2-13 การคำนวณมุม C ในกรณีมุมหันเท่ากับศูนย์

จากรูปที่ 2-13 เมื่อพิจารณาวงกลมซึ่งถูกแบ่งออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆกัน โดยกำหนดมุม C ดังรูป จะสามารถคำนวณมุม C ได้ดังนี้

$$C = 270^\circ - \alpha \qquad \text{(กรณีนี้เท่านั้น)} \tag{2.25}$$

พิจารณา ΔA′P′P จะได้

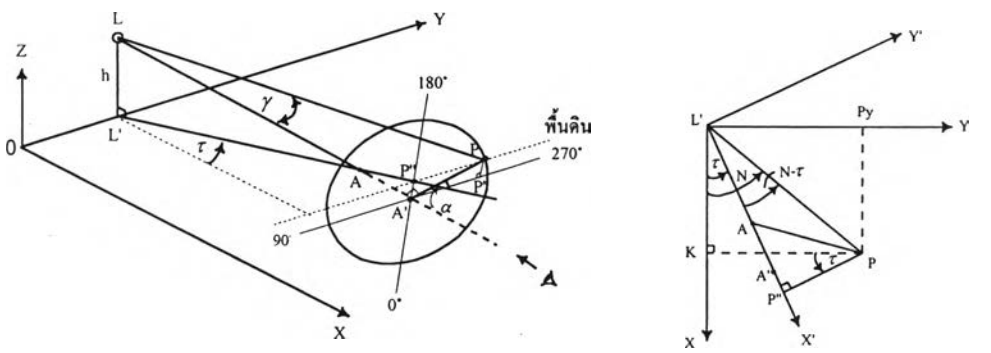
$$PA' = LP\sin\gamma$$

$$P'A' = PP'' = Py - Ay = Py - Ly$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{P'A'}{PA'}\right) \tag{2.26}$$

$$\therefore\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{Py - Ly}{LP\sin\gamma}\right) \tag{2.27}$$

2.5.2 กรณีที่มุมหัน (τ) ไม่เป็นศูนย์



(ก) *(ข)*

รูปที่ 2-14 (ก) และ (ข) การคำนวณมุม C และมุม γ ในกรณีมุมหันไม่เท่ากับศูนย์

การคำนวณมุม γ จะคำนวณโดยวิธีเดียวกับในกรณีมุมหันเท่ากับศูนย์ดังสมการที่ (2.24)

$$\tau = \tan^{-1}\frac{Ay - Ly}{Ax - Lx} \tag{2.28}$$

จากรูป 2-14 (ข) พิจารณา $\Delta L'P''P$ และ $\Delta L'KP$

$$L'P = \sqrt{(Px - Lx)^2 + (Py - Ly)^2} \tag{2.29}$$

$$N = \tan^{-1}\left(\frac{PK}{L'K}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{Py - Ly}{Px - Lx}\right] \tag{2.30}$$

$$PP'' = L'P\sin(N - \tau) \tag{2.31}$$

แทนค่าในสมการที่ (2.26)

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{L'P\sin(N - \tau)}{LP\sin\gamma}\right) \tag{2.32}$$