บทที่ 2

ข้อมูลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้สนใจศึกษา การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อการพยากรณ์ ในสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย เมื่อความคลาดเคลื่อนสุ่มในสมการถดถอยมีอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง ในบทนี้ ขั้นต้นจะกล่าวถึง ลักษณะทั่วไปของความคลาดเคลื่อน และขั้นต่อไปจะกล่าวถึงรายละเอียดของวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นลำดับต่อไป

2.1 คุณสมบัติของความคลาดเคลื่อน

การวิจัยนี้ สนใจศึกษาค่าความคลาดเคลื่อนมีสหสัมพันธ์กัน โดยกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ เป็นอัตตถดถอยอันดับที่หนึ่ง (first order autoregressive process)

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \quad ,t = 1, 2, \ldots, n$$

โดยที่ $|\rho| < 1$ และ u_t คือค่าความคลาดเคลื่อนสุ่ม และมีข้อตกลงเบื้องต้นของ u_t คือ มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ มีความแปรปรวนคงที่และไม่มีความแปรปรวนร่วม

พิจารณา

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \quad ,t = 1, 2, \ldots, n$$

จากนี้จะได้ว่า

$$\varepsilon_{t-1} = \rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}$$

แทนค่าใน ε_t จะได้

$$\varepsilon_t = \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}) + u_t$$

$$= \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

และสามารถแทนค่า ε_{t-2} ในเทอมของ $\rho\varepsilon_{t-3} + u_t$

จะได้ $$\varepsilon_t = \rho^3\varepsilon_{t-3} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

และทำในลักษณะเดิมจะได้ว่า

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s}$$

พิจารณา ε_t จะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับความคลาดเคลื่อนสุ่ม ในช่วงเวลาก่อนหน้านี้ พิจารณา $0 < \rho < 1$ จะทำให้ ε_t มีความสัมพันธ์กับความคลาดเคลื่อนในเทอมก่อนหน้าลดน้อยลงเรื่อยๆ

2.1.1 ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน

$$\text{จาก}\quad \varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s}$$

$$= u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \ldots$$

จะพบว่า

$$E[\varepsilon_t] = E[u_t] + \rho E[u_{t-1}] + \rho^2 E[u_{t-2}] + \ldots$$

จากข้อตกลงเบื้องต้นของ u_t จะได้ $E[u_t] = 0 \quad ,t = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $E[\varepsilon_t] = 0 \quad ,t = 1, 2, \ldots, n$

2.1.2 ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

$$\text{จาก}\quad \varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s u_{t-s}$$

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_t^2] &= E[u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \ldots]^2 \\ &= E[(u_t^2 + \rho^2 u_{t-1}^2 + \rho^4 u_{t-2}^2 + \ldots) + \\ &\qquad (2\rho u_t u_{t-1} + 2\rho u_t u_{t-2} + \ldots)] \end{aligned}$$

แต่ $E[u_t^2] = \sigma^2$ และ $E[u_t u_{t-s}] = 0 \ , \ s = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น}\quad E[\varepsilon_t^2] &= (\sigma^2 + \rho^2\sigma^2 + \rho^4\sigma^2 + \rho^6\sigma^2 + \ldots) + (0 + \ldots + 0) \\ &= \sigma^2/(1 - \rho^2) \quad , |\rho| < 1 \end{aligned}$$

และฉะนั้น

$V(\varepsilon_t) = \sigma^2/(1 - \rho^2)$ เป็นค่าคงที่

2.2 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

ในการวิจัยครั้งนี้จะเสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธีคือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น และวิธีการแปลงข้อมูลโดยใช้ผลต่างอันดับที่หนึ่ง ซึ่งมีรายละเอียดแต่ละวิธีเป็นดังนี้

2.2.1 วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS)

หลักการของวิธีนี้คือ ประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด

พิจารณารูปแบบความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad , t = 1, 2, \ldots, n$

วิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะหาค่า β_o และ β_1 ที่ทำให้

$$Q = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \beta_o - \beta_1 X_t)^2 = \sum_{t=1}^{n} (\varepsilon_t)^2$$

มีค่าต่ำสุด

ค่าของ β_o และ β_1 ที่ทำให้ Q ต่ำสุด แทนด้วย b_o และ b_1 เป็นค่าที่สอดคล้องสมการ

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \beta_o}\right|_{\beta_o=b_o,\beta_1=b_1} = -2\sum_{t=1}^{n} Y_t + 2b_o n + 2b_1 \sum_{t=1}^{n} X_t = 0 \quad ---(1)$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \beta_1}\right|_{\beta_o=b_o,\beta_1=b_1} = -2b_1 \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t + 2b_o \sum_{t=1}^{n} X_t + 2b_1 \sum_{t=1}^{n} X_t^2 = 0 \quad ---(2)$$

จากนี้แก้สมการ(1) และ (2) จะได้

$$b_1 = \frac{\left[n \sum_{t=1}^{n} X_t Y_t - \sum_{t=1}^{n} X_t \sum_{t=1}^{n} Y_t \right]}{\left[n \sum_{t=1}^{n} X_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} X_t \right)^2 \right]}$$

$$b_o = \bar{Y} - b_1 \bar{X}$$

และดังนั้น สมการพยากรณ์ค่า Y_t คือ

$$\hat{Y}_t = b_o + b_1 X_t$$

2.2.2 <u>วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่เป็นเชิงเส้น</u> (Nonlinear Least Squares Method)

พิจารณารูปแบบความสัมพันธ์สมการถดถอย เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตดสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง

รูปแบบความสัมพันธ์

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \quad , \ t = 1, 2, \ldots, n$$

ซึ่ง $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_t + u_t$

จากนี้ได้ด้วยว่า

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$$

$$\rho Y_{t-1} = \rho\alpha + \rho\beta X_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1 - \rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$$

และ

$$\sum_{t=2}^{n} u_t^2 = \sum_{t=2}^{n} [Y_t - \rho Y_{t-1} - \alpha(1 - \rho) - \beta(X_t - \rho X_{t-1})]^2$$

ให้ $\phi = \alpha(1 - \rho)$ และ $Q = \sum_{t=2}^{n} u_t^2$

เพราะฉะนั้น

$$Q = \sum_{t=2}^{n} [Y_t - \rho Y_{t-1} - \phi - \beta(X_t - \rho X_{t-1})]^2$$

จากนี้ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดที่ทำให้ Q มีค่าต่ำสุด หาค่า (ρ,ϕ,β) แทนด้วย $(\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{\beta})$ เป็นค่าที่สอดคล้องสมการ ดังนี้

$$g_1(\rho,\phi,\beta) = \left.\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right|_{(\rho,\phi,\beta) = (\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{\beta})} = 0$$

$$= \sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}Y_t - \hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}Y_t - \hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_tY_{t-1} + 2\hat{\rho}\hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}Y_{t-1}$$

$$- \hat{\rho}\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}^2 - \hat{\phi}\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1} + \hat{\phi}\hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} + \hat{\beta}^2\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}X_t$$

$$- \hat{\rho}\hat{\beta}^2\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2 \qquad \ldots (1)$$

$$g_2(\rho,\phi,\beta) = \left.\frac{\partial Q}{\partial \phi}\right|_{(\rho,\phi,\beta) = (\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{\beta})} = 0$$

$$= \sum_{t=2}^{n} Y_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1} - \hat{\phi}(n-1) - \hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_t + \hat{\rho}\hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} \qquad \ldots (2)$$

$$g_3(\rho,\phi,\beta) = \left.\frac{\partial Q}{\partial \beta}\right|_{(\rho,\phi,\beta) = (\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{\beta})} = 0$$

$$= \sum_{t=2}^{n} X_tY_t - \hat{\rho}\sum_{t=2}^{n} (X_{t-1}Y_t + X_tY_{t-1}) + \hat{\rho}^2\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}Y_{t-1}$$

$$- \hat{\phi} \sum_{t=2}^{n} X_t + \hat{\rho}\hat{\phi} \sum_{t=2}^{n} X_{t-1} - \hat{\beta} \sum_{t=2}^{n} X_t^2 + 2\hat{\rho}\hat{\beta} \sum_{t=2}^{n} X_{t-1}X_t$$

$$- \hat{\rho}^2\hat{\beta} \sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2 \qquad \ldots (3)$$

จากสมการ (1), (2), และ (3) ไม่สามารถจะแก้สมการหาค่าของพารามิเตอร์ได้โดยตรง จำเป็นต้องใช้วิธีการประมาณ ในการวิจัยครั้งนี้ ใช้วิธีเชิงตัวเลขที่เรียกว่าวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) มาใช้ในการประมาณค่า (ρ,ϕ,β) ให้เป็น $(\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{\beta})$

วิธีนิวตัน-ราฟสัน จะเริ่มด้วยการกระจาย g_1, g_2, และ g_3 เป็นอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series) รอบจุด (ρ_o,ϕ_o,β_o) และใช้ค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นค่าเริ่มต้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ (ρ,ϕ,β) จากนั้น จะเข้าสู่กรรมวิธีปรับค่าประมาณ ซึ่งจะลู่เข้าสู่ค่าคงที่ $(\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{\beta})$ เป็นค่าประมาณพารามิเตอร์

พิจารณาการกระจายอนุกรมเทเลอร์ ของฟังก์ชัน g_1, g_2, และ g_3 รอบจุด (ρ_o,ϕ_o,β_o)

$$g_1(\rho,\phi,\beta) = g_1(\rho_o,\phi_o,\beta_o) + g_{11}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\rho-\rho_o) + g_{12}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\phi-\phi_o) + g_{13}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\beta-\beta_o) + R$$

$$g_2(\rho,\phi,\beta) = g_2(\rho_o,\phi_o,\beta_o) + g_{21}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\rho-\rho_o) + g_{22}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\phi-\phi_o) + g_{23}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\beta-\beta_o) + R$$

$$g_3(\rho,\phi,\beta) = g_3(\rho_o,\phi_o,\beta_o) + g_{31}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\rho-\rho_o) + g_{32}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\phi-\phi_o) + g_{33}(\rho_o,\phi_o,\beta_o)(\beta-\beta_o) + R$$

ซึ่ง

$$g_{j1}(\rho_o,\phi_o,\beta_o) = \left.\frac{\partial g_j(\rho,\phi,\beta)}{\partial \rho}\right|_{(\rho,\phi,\beta) = (\rho_o,\phi_o,\beta_o)}$$

$$g_{j2}(\rho_o,\phi_o,\beta_o) = \left.\frac{\partial g_j(\rho,\phi,\beta)}{\partial \phi}\right|_{(\rho,\phi,\beta) = (\rho_o,\phi_o,\beta_o)}$$

$$g_{j3}(\rho_o,\phi_o,\beta_o) = \left.\frac{\partial g_j(\rho,\phi,\beta)}{\partial \beta}\right|_{(\rho,\phi,\beta) = (\rho_o,\phi_o,\beta_o)}$$

จะได้

$$g_{11}(\rho,\phi,\beta) = 2\hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}Y_{t-1} - \sum_{t=2}^{n} Y_{t-1}^{2} - \hat{\beta}^{2}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^{2}$$

$$g_{12}(\rho,\phi,\beta) = -\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1} + \hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}$$

$$g_{13}(\rho,\phi,\beta) = -\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}Y_{t} - \sum_{t=2}^{n} X_{t}Y_{t-1} + 2\hat{\rho}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}Y_{t-1}$$

$$+ \hat{\phi}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} + 2\hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}X_{t} - 2\hat{\rho}\hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^{2}$$

$$g_{21}(\rho,\phi,\beta) = -\sum_{t=2}^{n} Y_{t-1} + \hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}$$

$$g_{22}(\rho,\phi,\beta) = -n + 1$$

$$g_{23}(\rho,\phi,\beta) = -\sum_{t=2}^{n} X_{t} + \hat{\rho}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}$$

$$g_{31}(\rho,\phi,\beta) = -\sum_{t=2}^{n} (X_{t-1}Y_{t} + X_{t}Y_{t-1}) + 2\hat{\rho}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}Y_{t-1}$$

$$+ \hat{\phi}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} + 2\hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}X_{t} - 2\hat{\rho}\hat{\beta}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^{2}$$

$$g_{32}(\rho,\phi,\beta) = -\sum_{t=2}^{n} X_{t} + \hat{\rho}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}$$

$$g_{33}(\rho,\phi,\beta) = -\sum_{t=2}^{n} X_{t}^{2} + 2\hat{\rho}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}X_{t} - \hat{\rho}^{2}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^{2}$$

จากการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะกำหนดให้ $g_1(\rho,\phi,\beta)$, $g_2(\rho,\phi,\beta)$, และ $g_3(\rho,\phi,\beta)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$g_{11}(\rho-\rho_o) + g_{12}(\phi-\phi_o) + g_{13}(\beta-\beta_o) = -g_1$$
$$g_{21}(\rho-\rho_o) + g_{22}(\phi-\phi_o) + g_{23}(\beta-\beta_o) = -g_2$$
$$g_{31}(\rho-\rho_o) + g_{32}(\phi-\phi_o) + g_{33}(\beta-\beta_o) = -g_3$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho - \rho_o \\ \phi - \phi_o \\ \beta - \beta_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ -g_3 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_o \\ \phi_o \\ \beta_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ -g_3 \end{bmatrix}$$

ด้วยเทคนิคนิวตัน–ราฟสัน จะประมาณค่าพารามิเตอร์พร้อมกันทุกตัวในแต่ละเทอม จะกระทำซ้ำจนกระทั่ง ค่าประมาณพารามิเตอร์ไม่เปลี่ยนแปลงหรือลู่เข้าสู่ค่าคงที่ จะได้ค่าประมาณ (ρ,ϕ,β) เป็น $(\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{\beta})$ และจะได้สมการพยากรณ์

$$\hat{Y}_t = \hat{\rho}Y_{t-1} + \hat{\phi} + \hat{\beta}(X_t - \hat{\rho}X_{t-1})$$

2.2.3 <u>วิธีการแปลงข้อมูลโดยใช้ผลต่างอันดับที่หนึ่ง</u>

(First Difference Transformation Method)

หลักการวิธีนี้ คือ การแปลงข้อมูลอนุกรมเวลา ตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม (X,Y) โดยอาศัยเทคนิคการใช้ผลต่างอันดับที่หนึ่ง จะได้ตัวแปรอิสระและตัวแปรตามชุดใหม่ (X′,Y′) และนำมาประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

พิจารณารูปแบบความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

$$Y_t = \beta_o + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \quad ; t = 1, 2, \ldots, n$$

เพราะฉะนั้น

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta_0 - \beta_0 + \beta_1 X_t - \beta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

หรือ $$Y'_t = \beta_1 X'_t + u_t$$

ซึ่ง $Y'_t = Y_t - Y_{t-1}$, $X'_t = X_t - X_{t-1}$ และ $u_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

จากนี้ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะหาค่า β_1 ที่ทำให้

$$Q = \sum_{t=2}^{n} u_t^2 = \sum_{t=2}^{n} (Y'_t - \beta_1 X'_t)^2$$

$$= \sum_{t=2}^{n} Y'^2_t - 2\beta_1 \sum_{t=2}^{n} X'_t Y'_t + \beta_1^2 \sum_{t=2}^{n} X'^2_t$$

มีค่าต่ำสุด

ค่าของ β_1 ที่ทำให้ Q ต่ำสุด แทนด้วย b_1 เป็นค่าที่สอดคล้องสมการ

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \beta_1}\right|_{\beta_1 = b_1} = -2 \sum_{t=2}^{n} X_t' Y_t' + 2b_1 \sum_{t=2}^{n} X'^2_t = 0$$

จะได้

$$b_1 = \sum_{t=2}^{n} X'_t Y'_t \;/\; \sum_{t=2}^{n} (X'_t)^2$$

และดังนั้น สมการพยากรณ์ค่า Y_t คือ

$$\hat{Y}_t = Y_{t-1} + b_1(X_t - X_{t-1})$$