บทที่ 2
ดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

ดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม(Discrete Hartley Transform,DHT) ได้ถูกเสนอขึ้นในปีพ.ศ.2526 โดย R. N. Bracewell ซึ่งเป็นการดัดแปลงมาจากอินทิกรัลฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มที่ได้เสนอโดย R. V. L. Hartley ในปีพ.ศ.2485 ดีสครีตทรานส์ฟอร์มนี้จึงได้ถูกเรียกเพื่อเป็นเกียรติแก่ R. V. L. Hartley และ R. N. Bracewell ยังได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มกับดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มซึ่งจากความสัมพันธ์นี้ สามารถแสดงให้เห็นว่าการวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณดิจิตัลค่าจริงนั้นสามารถวิเคราะห์ได้โดยตรงจากดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม และต่อมาในปีพ.ศ. 2527 R. N. Bracewell ก็ได้เสนอบทความเกี่ยวกับฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม จึงทำให้ดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มเริ่มเป็นที่นิยมในการนำไปใช้งาน

2.1. <u>ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม (Hartley Transform)</u>

ในปีพ.ศ.2485 R. V. L. Hartley ได้เสนออินทิกรัลทรานส์ฟอร์มแบบใหม่ขึ้นมา[5] โดยให้ x(t) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของค่าจริง และได้นิยาม อินทิกรัลทรานส์ฟอร์มและอินเวอร์สทรานส์ฟอร์มขึ้นใหม่ดังสมการ(2.1.1) และสมการ(2.1.2) ตามลำดับซึ่งอินทิกรัลทรานส์ฟอร์มนี้ได้ถูกเรียกเพื่อเป็นเกียรติแก่ R. V. L. Hartley ว่า "ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม(Hartley Transform)"

$$H(w) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\cos(wt) + \sin(wt))\,dt \qquad (2.1.1)$$

$$x(t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} H(w)(\cos(wt) + \sin(wt))\,dw \qquad (2.1.2)$$

โดยสมการ(2.1.1) และ (2.1.2) สามารถหาอินทิกรัลได้ และ H(w) จะเป็นฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม ส่วน x(t) จะเป็นอินเวอร์สฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม จะเห็นว่าสมการของการทรานส์ฟอร์ม และอินเวอร์สทรานส์ฟอร์ม มีรูปสมการเดียวกัน จากสมการ(2.1.1) สามารถเขียนรูปใหม่ได้

$$H(w) = H_e(w) + H_o(w)$$

โดยที่ $H_e(w)$ และ $H_o(w)$ จะเป็นส่วนคู่และส่วนคี่(even and odd part) ของ H(w) ตามลำดับ แสดงดังสมการ(2.1.3)

$$H_e(w) = \frac{H(w) + H(-w)}{2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(wt)\, dt \qquad (2.1.3a)$$

$$H_o(w) = \frac{H(w) - H(-w)}{2} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(wt)\, dt \qquad (2.1.3b)$$

เปรียบเทียบฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มกับฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม โดยให้ F(w) เป็นฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ x(t) ซึ่งเป็นสัญญาณค่าจริงใด ๆ พิจารณานิยามของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม

$$F(w) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}\, dt$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(wt)\, dt - i(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(wt)\, dt$$

$$= Re[F(w)] + iIm[F(w)]$$

โดยที่ Re[F(w)] และ Im[F(w)] จะเป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพ(Real and Imaginary part) ของ F(w) โดย

$$Re[F(w)] = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(wt)\ dt \qquad (2.1.4a)$$

$$Im[F(w)] = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(wt)\ dt \qquad (2.1.4b)$$

พิจารณาสมการ(2.1.3) เทียบกับสมการ(2.1.4) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มกับฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม ดังสมการ(2.1.5)

$$H_e(w) = Re[F(w)] \qquad (2.1.5a)$$

$$H_o(w) = -Im[F(w)] \qquad (2.1.5b)$$

สมการ(2.1.5) แสดงให้เห็นว่าฮาร์ตเลย์ทรานส์ของฟังก์ชันค่าจริงใด ๆ นั้นสามารถหาได้จากการทำฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม ทำนองเดียวกันฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของสัญญาณค่าจริงใด ๆ ก็สามารถหามาได้จากการทำฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

<u>ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม</u> $H(w) = Re[F(w)] - Im[F(w)]$

<u>ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม</u> $F(w) = H_e(w) - iH_o(w)$

2.2 <u>ดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม (Discrete Hartley Transform,DHT)</u>

การใช้งานของฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มยังไม่เป็นที่นิยม จนปีพ.ศ.2526 R. N. Bracewell ได้เสนอฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มในรูปของดีสครีตทรานส์ฟอร์ม[5] อีกทั้งยังได้แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างดีสครีตทรานส์ฟอร์มนี้กับดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม ให้ x[n] เป็นดีสครีตฟังก์ชันของค่าจริงที่มีจำนวน N ตัว , $0 \leq n \leq N-1$

<u>นิยามดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม</u>

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{cas}(2\pi nk/N) \quad , 0 \leq k \leq N-1 \qquad (2.2.1)$$

$\mathrm{cas}(\theta) \triangleq \cos(\theta)+\sin(\theta)$

<u>นิยามอินเวอร์สดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม</u>

$$x[n] = N^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]\mathrm{cas}(2\pi nk/N) \quad , \ 0 \leq n \leq N-1 \qquad (2.2.2)$$

โดยที่ H[k] ในสมการ(2.2.1) เป็นดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มและ x[n] ในสมการ(2.2.2) เป็นอินเวอร์สดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

ดีสครีตทรานส์ฟอร์มแบบนี้มีรูปแบบของการทรานส์ฟอร์มและอินเวอร์สทรานส์ฟอร์มเหมือนกันต่างกันตรงอินเวอร์สทรานส์ฟอร์มมีค่า 1/N คูณอยู่ ซึ่งให้ผลการทรานส์ฟอร์มและอิน-เวอร์สทรานส์ฟอร์มเป็นจำนวนจริง เนื่องจากดีสครีตทรานส์ฟอร์มนี้มีพื้นฐานจาก อินทิกรัลฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม ซึ่ง Ralph V.L. Hartley เป็นผู้เสนอขึ้นในปี พ.ศ.2485 ดังนั้นดีสครีตทรานส์ฟอร์มนี้จึงมีชื่อเรียกว่า "ดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม (Discrete Hartley Transform,DHT)"

พิจารณาสมการของดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม(2.2.1)สามารถเขียนรูปใหม่ได้เป็น

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{cas}(2\pi kn/N)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi kn/N) + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi kn/N)$$

$$H[k] = H_e[k] + H_o[k] \qquad (2.2.3)$$

โดยที่ $H_e[k]$ และ $H_o[k]$ เป็นส่วนคู่และส่วนคี่(even and odd part)ของดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม,H[k] สามารถแสดงได้ดังสมการ(2.2.4)

$$H_e[k] = \frac{H[k] + H[-k]}{2} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi nk/N) \qquad (2.2.4a)$$

$$H_o[k] = \frac{H[k] - H[-k]}{2} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi nk/N) \qquad (2.2.4b)$$

สมการ(2.2.4) พบว่ามีเทอม H[-k] ซึ่งค่า -k อยู่นอกขอบเขต [0,N-1] กรณีเช่นนี้ H[-k] สามารถเขียนใหม่โดยแทนค่าภายในวงเล็บด้วยการบวกหรือการลบจำนวนเท่าของ N เช่น H[-1] จะแทนด้วย H[N-1] ดังนั้น H[-k] จะแทนด้วย H[N-k] สมการ (2.2.4) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$H_e[k] = \frac{H[k] + H[N-k]}{2} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi nk/N) \qquad (2.2.5a)$$

$$H_o[k] = \frac{H[k] - H[N-k]}{2} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi nk/N) \qquad (2.2.5b)$$

ให้ F[k] เป็นดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ x[n] ซึ่งเป็นดีสครีตฟังก์ชันค่าจริงใด ๆ และมีค่าในช่วง $0 \leqslant n \leqslant N-1$ พิจารณานิยามของดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-j2\pi nk/N)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi nk/N) - i\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi nk/N)$$

$$F[k] = Re[F[k]] + iIm[F[k]] \qquad (2.2.6)$$

โดย $$Re[F[k]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi nk/N) \qquad (2.2.7a)$$

$$Im[F[k]] = -\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi nk/N) \qquad (2.2.7b)$$

โดยที่ Re[F[k]] และ Im[F[k]] เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ F[k] ซึ่งเป็นดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม เมื่อเปรียบเทียบสมการ(2.2.5) กับสมการ(2.2.7) จะได้ว่า

$$H_e[k] = Re[F[k]] \qquad (2.2.8a)$$

$$H_o[k] = -Im[F[k]] \qquad (2.2.8b)$$

สมการ(2.2.8)เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มกับดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มสำหรับฟังก์ชันค่าจริงใด ๆ หมายความว่าดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มสามารถหามาได้จากการทำดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม ทำนองเดียวกันดีสครีตฟูเรียร์-ทรานส์ฟอร์มก็สามารถหามาได้จากดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

<u>ดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม</u> $H[k] = Re[F[k]] - Im[F[k]]$

<u>ดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม</u> $F[k] = H_e[k] - iH_o[k]$

การประมวลผลสัญญาณดีสครีต โดยใช้ดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม ถ้าจำนวนของสัญญาณ(N)มีจำนวนเพิ่มขึ้น เวลาในการคำนวณจะเพิ่มขึ้นมาก จึงได้มีการเสนออัลกอริทึมแบบฟาสต์(Fast Fourier Transform,FFT)[11] เพื่อให้การคำนวณใช้เวลาน้อยลง แต่มีข้อจำกัดคือไม่สามารถคำนวณได้ทุกค่าของ N ดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มก็เช่นกันได้มีการเสนออัลกอริทึมแบบฟาสต์ เพื่อให้การคำนวณใช้เวลาลดลง

2.3 <u>ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม (Fast Hartley Transform,FHT)</u>

การประมวลผลสัญญาณนั้นนิยมใช้อัลกอริทึมแบบฟาสต์ ดังนั้นเมื่อ R. N. Bracewell ได้เสนอดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มในปีพ.ศ.2526 ต่อมาในปีพ.ศ.2527 ได้เสนออัลกอริทึมฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม(Fast Hartley Transform,FHT)[6] ทำให้ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มมีการนำไปใช้ในการประมวลผลสัญญาณมากขึ้น

จากนิยามของดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม เวลาที่ใช้ในการประมวลผลจะแปรตามค่า N^2 เช่นเดียวกับดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม แต่ถ้า N สามารถแสดงในรูป 2^P, โดยที่ P เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ อัลกอริทึมฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม [11] เวลาในการคำนวณจะแปรตามค่า $N\log_2 N = NP$ สำหรับอัลกอริทึมฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม ก็จะให้ผลเช่นเดียวกัน โดยฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มจะดัดแปลงมาจาก ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม

[6],[12] ดังนั้นฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม จะมีอัลกอริทึมหลายอัลกอริทึมเช่น radix-2, radix4,PFA,split-radix [9],[13,[14] แต่อัลกอริทึมที่เป็นมาตรฐานคือ radix-2 อัลกอริทึมอื่นจะเป็นการดัดแปลงมาจาก radix-2 อีกที ดังนั้นวิทยานิพนธ์เล่มนี้จึงกล่าวเฉพาะอัลกอริทึมของ radix-2 เท่านั้น

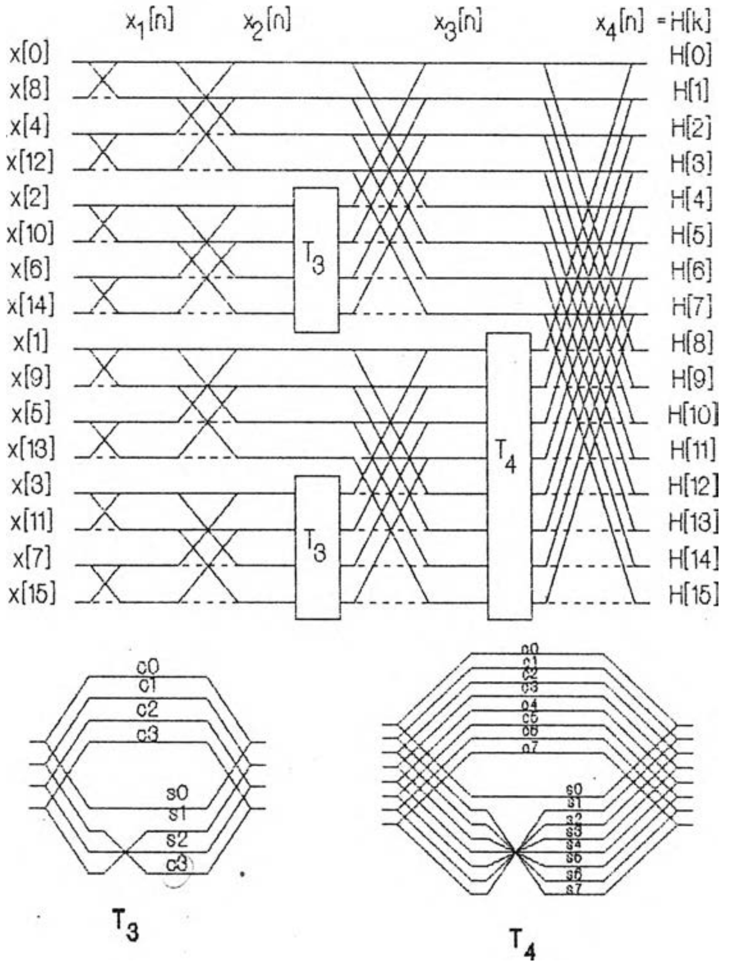
ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม จะแยกสัญญาณดิสครีต $x[n], 0 \le n \le N-1, N=2^P$ ออกเป็นสองส่วน ส่วนแรกเป็นข้อมูลที่ค่า n เป็นเลขคู่ อีกส่วน n เป็นเลขคี่ แต่ละส่วนมีจำนวนข้อมูลเท่ากันคือ N/2 ในแต่ละส่วนจะถูกแยกออกอีกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กันต่อไปจนกระทั่งทุก ๆ ส่วนมีจำนวนข้อมูลเหลือเพียง 2 ค่า จึงเริ่มทำการคำนวณ เสมือนว่าก่อนการคำนวณจะทำการจัดลำดับของข้อมูลใหม่ก่อน การจัดลำดับข้อมูลใหม่เรียกว่า "permutation แบบ bit reverse" ซึ่งฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม จะต้องทำก่อนการคำนวณเช่นกัน โดยส่วน permutation ของฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม จะมีโครงสร้างเดียวกับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม[6],[15] การจัดลำดับข้อมูลใหม่จะทำทั้งหมด P-1 สเตท จึงเริ่มการคำนวณในสเตทแรก โดยที่ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มมีสมการการคำนวณแต่ละสเตทดังสมการ(2.3.1) และการคำนวณจะทำการคำนวณทั้งหมด P สเตท

$$H[k] = H_{2n}[k] + H_{2n+1}[k]\cos(2\pi k/N) + H_{2n+1}[N-k]\sin(2\pi k/N)$$

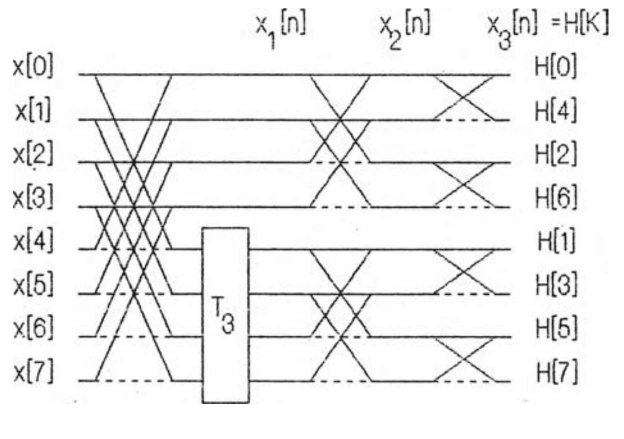
$$0 \le k \le N-1 \qquad (2.3.1)$$

H[k] มีจำนวนข้อมูลเท่ากับ N แต่ $H_{2n}[k]$ และ $H_{2n+1}[k]$ ซึ่งเป็น H[k] ที่ค่า k เป็นเลขคู่และเลขคี่ตามลำดับ มีจำนวนข้อมูล N/2 เท่ากัน แผนผังการคำนวณฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มจะแสดงดังรูปที่ 2.3.1 เส้นประหมายถึงการคูณด้วย -1 และค่า c_n, s_n จะเท่ากับ $\cos(2\pi n/2^L)$ และ $\sin(2\pi n/2^L)$ ตามลำดับ โดย L เป็นสเตทที่กำลังทำการคำนวณ

ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม จะมีอัลกอริทึมทั้ง decimation-in-time(DIT) รูป 2.3.1 และ decimation-in-frequency(DIF) แสดงในรูป 2.3.2 จะเห็นว่าโครงสร้างจะคล้ายกันต่างกันตรงทิศทางการคำนวณ จากการพิจารณารูปที่ 2.3.1 ถ้าเป็น DIT จะทำการคำนวณจากซ้ายไปขวา และทำการ permutation ก่อนการคำนวณ แต่ DIF



รูปที่ 2.3.1 แสดงโครงสร้างของ DIT ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม[12]



รูปที่ 2.3.2 แสดงโครงสร้างของ DIF ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม[12]

จะทำการคำนวณจากขวาไปซ้าย และทำการ permutation หลังการคำนวณ เห็นได้ว่าทั้งอัลกอริทึม DIT และ DIF จำนวนการคูณ(M)และจำนวนการบวก(A) จะใช้เท่ากันดังแสดงในสมการ(2.3.2)[9]

$$A = \frac{3}{2}N(\log_2 N - 1) + 2 = 1.5NP - 1.5N + 2 \qquad (2.3.2a)$$

$$M = N(\log_2 N - 3) + 4 = NP - 3N + 4 \qquad (2.3.2b)$$

สำหรับฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มทั้ง DIF และ DIT จะใช้จำนวนการบวกและจำนวนการคูณ[4] ดังแสดงในสมการ(2.3.3)

$$A = 3N(\log_2 N - 1) + 4 = 3NP - 3N + 4 \qquad (2.3.3a)$$

$$M = 2N(\log_2 N - \frac{7}{2}) + 12 = 2NP - 7N + 12 \qquad (2.3.3b)$$

เปรียบเทียบจำนวนการคูณและจำนวนการบวกระหว่าง DIT radix-2 ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มกับ DIT radix-2 ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม ในตาราง 2.3.1 จำนวนการบวกของฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มเท่ากับครึ่งหนึ่งของฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มส่วนจำนวนการคูณ ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม จะน้อยกว่าฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเท่ากับ (P-1)N+8

การประมวลผลสัญญาณดิจิตัลซึ่งนิยมใช้ดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ และจากความสัมพันธ์ระหว่างดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มกับดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม ถ้าสามารถนำดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มมาใช้วิเคราะห์ แทนดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มได้ จะทำให้เวลาในการคำนวณจะลดลงประมาณครึ่งหนึ่ง(ดังตาราง 2.3.1)

ตารางที่ 2.3.1 แสดงการเปรียบเทียบจำนวนการบวก(A)และจำนวนการคูณ(M)ระหว่าง DIT ฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มกับ DIT ฟาสต์ฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม

P	N	FFT		FHT	
		A	M	A	M
1	2	4	-	2	-
2	4	16	-	8	-
3	8	52	4	26	4
4	16	148	28	74	20
5	32	388	108	194	68
6	64	964	332	482	196
7	128	2,308	908	1,154	516
8	256	5,380	2,316	2,690	1,284
9	512	12,292	4,620	6,146	3,076
10	1024	27,652	13,324	13,826	7,172
11	2048	61,444	30,732	30,722	16,388
12	4096	135,172	69,644	67,586	36,868

2.4 สเปกตรัมกำลัง (Power Spectrum)

สเปกตรัมกำลังของสัญญาณเป็นการแสดงองค์ประกอบของสัญญาณในเชิงความถี่ [11] นิยมใช้ดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ ให้ F[k]เป็นดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ x[n] ซึ่งเป็นสัญญาณดีสครีตค่าจริงที่มีค่าในช่วง $0 \leq n \leq N-1$

$$F[k] = Re[F[k]] + iIm[F[k]] \qquad (2.4.1)$$

ให้ P[k] เป็นสเปกตรัมกำลังของ x[n]

<u>นิยามสเปกตรัมกำลัง</u>

$$P[k] = Re^2[F[k]] + Im^2[F[k]] \qquad (2.4.2)$$

องค์ประกอบของสเปกตรัมกำลัง(P[k]) ที่ k ใด ๆ คือองค์ประกอบของสเปกตรัมกำลังที่ความถี่ $f_k = kf_s/N$ โดย f_s เป็นความถี่ที่ใช้ในการสุ่มตัวอย่าง (Sampling

Frequency) ความถี่ที่ใช้ในการสุ่มตัวอย่างสัญญาณ(ส่วนมากสัญญาณดีสครีต จะมาจากการสุ่มตัวอย่างสัญญาณต่อเนื่อง[11]) ต้องเป็นไปตามทฤษฎีการสุ่มตัวอย่างของไนควิสต์ (Nyquist Sampling Theorem) ที่กล่าวว่าเวลาการสุ่มตัวอย่าง T_s มีค่าเท่ากับหนึ่งส่วนสองเท่าของความถี่สูงสุด(f_c)ของสัญญาณต่อเนื่อง x(t) ใด ๆ คือ

$$T_s = \frac{1}{2f_c}$$

อัตราการสุ่มตัวอย่างของไนควิสต์ T_s เป็นอัตราการสุ่มตัวอย่างที่น้อยที่สุดที่ให้สัญญาณกลับคืนครบถ้วน ดังนั้นในการสุ่มตัวอย่างสัญญาณต่อเนื่องจะต้องใช้ความถี่ในการสุ่มตัวอย่าง $f_s = \frac{1}{T}$ โดย

$$T \geq T_s = \frac{1}{2f_c}$$

ดังนั้น $$f_s \geq 2f_c$$

สเปกตรัมกำลังของสัญญาณตามสมการ(2.4.2) มาจากการทำดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม และดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มในสมการ(2.2.8) และสมการ(2.2.4) สเปกตรัมกำลังของสัญญาณในสมการ(2.4.2) สามารถเขียนรูปใหม่ได้เป็น

$$P[k] = Re^2[F[k]] + Im^2[F[k]] = H_e^2[k] + H_o^2[k]$$

$$= \left[\frac{H[k] + H[N-k]}{2}\right]^2 + \left[\frac{H[k] - H[N-k]}{2}\right]^2$$

$$P[k] = \frac{H^2[k] + H^2[N-k]}{2} \qquad (2.4.3)$$

สมการ(2.4.3) แสดงให้เห็นว่าสเปกตรัมกำลังของสัญญาณค่าจริงสามารถหาได้โดยตรงจากดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์ม พิจารณาเฟสสเปกตรัมซึ่งมาจากการทำดีสครีตฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม

<u>นิยามเฟสสเปกตรัม</u>

$$\text{เฟสสเปกตรัม} = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}[F[k]]}{\mathrm{Re}[F[k]]}\right] \qquad (2.4.4)$$

ใช้ความสัมพันธ์ในสมการ(2.2.8) และสมการ(2.2.4) สามารถเขียนสมการ (2.4.4) ใหม่ได้เป็น

$$\text{เฟสสเปกตรัม} = \arctan\left[\frac{H[N-k] - H[k]}{H[N-k] + H[k]}\right]$$

$$= \arctan\left[\frac{(H[N-k]/H[k]) - 1}{(H[N-k]/H[k]) + 1}\right] \qquad (2.4.5)$$

จาก

$$\arctan\left[\frac{x-y}{x+y}\right] = \arctan x - \arctan y$$

และสมการ(2.4.5) ให้ $x = H[N-k]/H[k]$, $y=1$

$$\text{เฟสสเปกตรัม} = \arctan\left[\frac{H[N-k]}{H[k]}\right] - \frac{\pi}{4} \qquad (2.4.6)$$

สมการ(2.4.6) แสดงให้เห็นว่าเฟสสเปกตรัมของสัญญาณค่าจริงสามารถหาได้โดยตรงจากดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มเช่นกัน

การวิเคราะห์สเปกตรัมกำลังของสัญญาณดิจิตัลค่าจริง สามารถใช้ดีสครีตฮาร์ตเลย์ทรานส์ฟอร์มวิเคราะห์ได้(สมการ(2.4.3)) โดยใช้อัลกอริทึมแบบฟาสต์เวลาในการคำนวณจะน้อยกว่าฟาสต์ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มประมาณ 50% (จากการเปรียบเทียบจำนวนการบวกและจำนวนการคูณของอัลกอริทึม DIT radix-2 ในตารางที่ 2.3.1)