บทที่ 1

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทนำ

ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันการพยากรณ์ได้เข้าไปมีบทบาทในการวิจัยสาขาต่าง ๆ โดยวิธีที่ใช้ในการพยากรณ์นั้นจะใช้วิธีการวิเคราะห์ความถดถอย (regression analysis) เป็นส่วนใหญ่ ซึ่งการวิเคราะห์ความถดถอยเป็นวิธีวิเคราะห์ทางสถิติที่ใช้หารูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว หรือมากกว่า เพื่อนำไปสู่การพยากรณ์ค่าจริง รูปแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระและตัวแปรตามนี้อาจสัมพันธ์กันในลักษณะเชิงเส้นตรงหรือเส้นโค้ง ในกรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระเป็นไปแบบเส้นโค้ง ระเบียบวิธีทางสถิติที่จะนำมาหารูปแบบความสัมพันธ์คือ การวิเคราะห์ความถดถอยพหุนาม (polynomial regression analysis) วิธีการวิเคราะห์นี้เป็นวิธีที่จะใช้ในทางปฏิบัติในกรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามกับตัวแปรอิสระเป็นลักษณะเส้นโค้งเนื่องจากการวิเคราะห์ความถดถอยพหุนามเป็นวิธีการที่อาจใช้แนวความคิดของวิธีการวิเคราะห์ความถดถอยเชิงเส้นโดยให้แต่ละพจน์พหุนามเป็นตัวแปรอิสระตัวหนึ่ง ดังนั้นการวิเคราะห์ความถดถอยพหุนามจึงเป็นกรณีพิเศษของการวิเคราะห์ความถดถอยเชิงเส้น (linear regression analysis) ทั่วไป

ตัวแบบของการถดถอยพหุนามเมื่อใช้ตัวแปรอิสระ $x_1, x_2, \ldots, x_p$ เราสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการ

(1) $$y = Z(X)\,\beta + \varepsilon$$

เมื่อ y เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรตามขนาด $n \times 1$

X เป็นเมทริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด $n \times p$

$Z(X)$ เป็นเมทริกซ์ของพจน์พหุนามของ X ซึ่งมีขนาด $n \times (k+1)$

โดยที่ k คือจำนวนพจน์พหุนาม

β เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าขนาด $(k+1) \times 1$

และ ε เป็นเวกเตอร์ของความผิดพลาดขนาด $n \times 1$

ในบางครั้งค่าของตัวแปรอิสระอาจจะมีการแปลงจากมาตรวัดหนึ่งไปเป็นอีกมาตรวัดหนึ่ง เช่น ตัวแปรอุณหภูมิอาจใช้มาตรวัดเป็นองศาเซลเซียสซึ่งอาจแปลงเป็นองศาฟาเรนไฮท์ได้ หรือบางครั้งอาจมีการลงรหัส (coding) ค่าตัวแปรอิสระด้วยวิธีที่ต่างกัน หรือบางทีอาจมีการดึงค่า

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เข้าสู่ศูนย์กลาง (centering) โดยการลบด้วยค่าเฉลี่ย กรณีที่กล่าวมานี้คล้ายจะไม่มีผลกระทบต่อการวิเคราะห์ความถดถอย ซึ่งจะเป็นเช่นนั้นถ้าการถดถอยที่วิเคราะห์มีพจน์กำลังเพียงแค่หนึ่งเท่านั้น และไม่มีพจน์อันตรกิริยา (interaction) หรือพจน์พหุนามในตัวแบบ ถ้าหากตัวแบบนั้นมีพจน์กำลังมากกว่า 1 หรือ พจน์พหุนามอยู่ในตัวแบบ และยังยอมให้เกิดการแปลงเชิงเส้นในตัวแปรอิสระแล้ว ผลของการแปลงนั้นอาจจะเกิดอิทธิพลต่อการวิเคราะห์ความถดถอยทำให้ปริภูมิการประมาณ (estimation space) เปลี่ยนแปลงไป แต่ปริภูมิการประมาณจะไม่เปลี่ยนแปลงถ้าตัวแบบนั้นเป็นตัวแบบหลักเกณฑ์ดี (well-formulated model)

พิจารณาตัวแบบ

(2) $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_3 x_i^3 + \varepsilon_i \qquad ; i = 1,2,\ldots,n$$

และให้มีการแปลงจาก x เป็น w โดยที่ w = ax+b ดังนั้นตัวแบบที่ควรจะได้เมื่อมีการแปลงจะอยู่ในรูปของ

(3) $$y_i = \gamma_0 + \gamma_1 w_i + \gamma_3 w_i^3 + \varepsilon_i$$

แต่เมื่อมีการแทนค่า w ในสมการ (3) แล้วจะได้ตัวแบบดังนี้

$$y_i = \gamma_0+\gamma_1(ax_i+b)+\gamma_3(ax_i+b)^3+\varepsilon_i$$

$$= (\gamma_0+\gamma_1 b+b^3)+(\gamma_1 a+3\gamma_3 ab^2)x_i+(3\gamma_3 a^2 b)x_i^2+(\gamma_3 a^3)x_i^3+\varepsilon_i$$

จะพบว่าจากตัวแบบเดิมที่ยังไม่มีการแปลงจะมีพจน์กำลัง 1 และ 3 เท่านั้น แต่เมื่อมีการแปลงแล้วพบว่ามีพจน์ที่เพิ่มขึ้นมาคือ พจน์กำลัง 2 นั่นคือ ตัวแบบเปลี่ยนแปลงไปหลังจากที่มีการแปลงเกิดขึ้น แต่ถ้า b = 0 การแปลงจะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงตัวแบบ

พิจารณาตัวแบบ

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i$$

เราสามารถเขียนตัวแบบเมื่อแปลงได้ดังนี้

$$y_i = \gamma_0 + \gamma_1 w_i + \gamma_2 w_i^2 + \varepsilon_i$$

แทนค่า w ด้วย ax+b

$$y_i = \gamma_0 + \gamma_1(ax_i+b) + \gamma_2 (ax_i+b)^2 + \varepsilon_i$$

$$y_i = (\gamma_0 + \gamma_1 b + \gamma_2 b^2) + (\gamma_1 a + 2\gamma_2\, ab)x_i + (\gamma_2 a^2)x_i^2 + \varepsilon_i$$

ซึ่งก็ได้พจน์ที่มีกำลังเหมือนเดิมก่อนที่จะมีการแปลง ตัวแบบที่พิจารณานี้เรียกว่าตัวแบบหลักเกณฑ์ดี นั่นคือ <u>ถ้าตัวแบบเป็นตัวแบบหลักเกณฑ์ดีแล้ว การแปลงจะไม่มีผลทำให้ตัวแบบนั้น</u>

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เปลี่ยนแปลงไป ดังนั้น ตัวแบบที่จะใช้เพื่อพยากรณ์ค่าในกรณีที่ค่าของตัวแปรอิสระอาจเกิดการแปลงหรือการลงรหัสที่ต่างกันควรจะเป็นตัวแบบหลักเกณฑ์ดี โดยเฉพาะในการประยุกต์เมื่อจุดกำเนิด (origin) ของตัวแปรอิสระจะเป็นเช่นไรก็ได้ หรือค่าของตัวแปรอิสระไม่มีความหมายในตัวเอง เช่น ตัวแปรปี พ.ศ. แต่ถ้าจะใช้ตัวแบบการถดถอยพหุนามไปอธิบายกฎที่แน่นอน เช่น ทางฟิสิกส์ เคมี เราก็ไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแบบหลักเกณฑ์ดีได้

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาวิธีการสร้างตัวแบบการถดถอยพหุนามจากวิธีต่าง ๆ ดังนี้

- การสร้างตัวแบบด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดสามัญ (model building by ordinary least squares method)
- การสร้างตัวแบบด้วยวิธีกำจัดตัวแปรอิสระย้อนหลัง (model building by backward elimination method)
- การสร้างตัวแบบด้วยวิธีการถดถอยขั้นบันได (model building by stepwise regression method)
- การสร้างตัวแบบด้วยวิธีตัวแบบหลักเกณฑ์ดี (model building by well-formulated model method)

2. เพื่อเปรียบเทียบความถูกต้องของการพยากรณ์จากตัวแบบที่ได้จากวิธีต่าง ๆ
3. เพื่อศึกษาถึงแนวโน้มของตัวแบบที่ได้จากวิธีต่าง ๆ

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. รูปแบบทั่วไปของสมการการถดถอยพหุนามมีรูปแบบดังสมการ (1)
2. ตัวแปรอิสระแต่ละตัวเป็นค่าคงที่
3. ความคลาดเคลื่อนสุ่มเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจง $N(0,\sigma^2)$ เหมือนกันและเป็นอิสระซึ่งกันและกัน
4. การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยพหุจะใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดในการประมาณ

สมมติฐานการวิจัย

การสร้างตัวแบบในการวิเคราะห์ความถดถอยพหุนามในกรณีที่มี 2 ตัวแปรอิสระซึ่งเกิดอันตรกิริยา วิธีตัวแบบหลักเกณฑ์ดีจะให้ผลที่ดีที่สุด

ขอบเขตของการวิจัย

1. ตัวแบบของการถดถอยพหุนามในการสร้างค่า y ที่สนใจศึกษาเป็นดังนี้

1.1 ตัวแบบที่กำลังสูงสุดของตัวแปรอิสระเป็น 6 มีรูปแบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_i = \beta_0 &+ \beta_{10}x_{1i} + \beta_{20}x_{1i}^2 + \beta_{30}x_{1i}^3 + \beta_{40}x_{1i}^4 + \beta_{50}x_{1i}^5 + \beta_{60}x_{1i}^6 \\
&+ \beta_{01}x_{2i} + \beta_{02}x_{2i}^2 + \beta_{03}x_{2i}^3 + \beta_{04}x_{2i}^4 + \beta_{05}x_{2i}^5 + \beta_{06}x_{2i}^6 \\
&+ \beta_{11}x_{1i}x_{2i} + \beta_{12}x_{1i}x_{2i}^2 + \beta_{13}x_{1i}x_{2i}^3 + \beta_{14}x_{1i}x_{2i}^4 + \beta_{15}x_{1i}x_{2i}^5 \\
&+ \beta_{21}x_{1i}^2x_{2i} + \beta_{22}x_{1i}^2x_{2i}^2 + \beta_{23}x_{1i}^2x_{2i}^3 + \beta_{24}x_{1i}^2x_{2i}^4 \\
&+ \beta_{31}x_{1i}^3x_{2i} + \beta_{32}x_{1i}^3x_{2i}^2 + \beta_{33}x_{1i}^3x_{2i}^3 \\
&+ \beta_{41}x_{1i}^4x_{2i} + \beta_{42}x_{1i}^4x_{2i}^2 \\
&+ \beta_{51}x_{1i}^5x_{2i} + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

ในกรณีนี้จำนวนตัวแปรอิสระ 27 ตัวแปร

1.2 ตัวแบบที่กำลังสูงสุดของตัวแปรอิสระเป็น 5 มีรูปแบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_i = \beta_0 &+ \beta_{10}x_{1i} + \beta_{20}x_{1i}^2 + \beta_{30}x_{1i}^3 + \beta_{40}x_{1i}^4 + \beta_{50}x_{1i}^5 \\
&+ \beta_{01}x_{2i} + \beta_{02}x_{2i}^2 + \beta_{03}x_{2i}^3 + \beta_{04}x_{2i}^4 + \beta_{05}x_{2i}^5 \\
&+ \beta_{11}x_{1i}x_{2i} + \beta_{12}x_{1i}x_{2i}^2 + \beta_{13}x_{1i}x_{2i}^3 + \beta_{14}x_{1i}x_{2i}^4 \\
&+ \beta_{21}x_{1i}^2x_{2i} + \beta_{22}x_{1i}^2x_{2i}^2 + \beta_{23}x_{1i}^2x_{2i}^3 \\
&+ \beta_{31}x_{1i}^3x_{2i} + \beta_{32}x_{1i}^3x_{2i}^2 \\
&+ \beta_{41}x_{1i}^4x_{2i} + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

ในกรณีนี้จำนวนตัวแปรอิสระ 20 ตัวแปร

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1.3 ตัวแบบที่กำลังสูงสุดของตัวแปรอิสระเป็น 4 มีรูปแบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_i = \beta_0 &+ \beta_{10}x_{1i} + \beta_{20}x_{1i}^2 + \beta_{30}x_{1i}^3 + \beta_{40}x_{1i}^4 \\
&+ \beta_{01}x_{2i} + \beta_{02}x_{2i}^2 + \beta_{03}x_{2i}^3 + \beta_{04}x_{2i}^4 \\
&+ \beta_{11}x_{1i}x_{2i} + \beta_{12}x_{1i}x_{2i}^2 + \beta_{13}x_{1i}x_{2i}^3 \\
&+ \beta_{21}x_{1i}^2x_{2i} + \beta_{22}x_{1i}^2x_{2i}^2 \\
&+ \beta_{31}x_{1i}^3x_{2i} + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

ในกรณีนี้จำนวนตัวแปรอิสระ 14 ตัวแปร

1.4 ตัวแบบที่กำลังสูงสุดของตัวแปรอิสระเป็น 3 มีรูปแบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_i = \beta_0 &+ \beta_{10}x_{1i} + \beta_{20}x_{1i}^2 + \beta_{30}x_{1i}^3 \\
&+ \beta_{01}x_{2i} + \beta_{02}x_{2i}^2 + \beta_{03}x_{2i}^3 \\
&+ \beta_{11}x_{1i}x_{2i} + \beta_{12}x_{1i}x_{2i}^2 \\
&+ \beta_{21}x_{1i}^2x_{2i} + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

ในกรณีนี้จำนวนตัวแปรอิสระ 9 ตัวแปร

1.5 ตัวแบบที่กำลังสูงสุดของตัวแปรอิสระเป็น 2 มีรูปแบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
y_i = \beta_0 &+ \beta_{10}x_{1i} + \beta_{20}x_{1i}^2 \\
&+ \beta_{01}x_{2i} + \beta_{02}x_{2i}^2 \\
&+ \beta_{11}x_{1i}x_{2i} + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

ในกรณีนี้จำนวนตัวแปรอิสระ 5 ตัวแปร

2. ตัวแบบเริ่มต้นในการสร้างตัวแบบที่เหมาะสมมีรูปแบบดังนี้

2.1 ตัวแบบกำลัง 6

$$
\begin{aligned}
y_i = {} & \beta_0 + \beta_1x_{1i} + \beta_2x_{1i}^2 + \beta_3x_{1i}^3 + \beta_4x_{1i}^4 + \beta_5x_{1i}^5 + \beta_6x_{1i}^6 + \\
& \beta_7x_{2i} + \beta_8x_{2i}^2 + \beta_9x_{2i}^3 + \beta_{10}x_{2i}^4 + \beta_{11}x_{2i}^5 + \beta_{12}x_{2i}^6 + \beta_{13}x_{1i}x_{2i} + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

2.2 ตัวแบบกำลัง 5

$$
\begin{aligned}
y_i = {} & \beta_0 + \beta_1x_{1i} + \beta_2x_{1i}^2 + \beta_3x_{1i}^3 + \beta_4x_{1i}^4 + \beta_5x_{1i}^5 + \\
& \beta_6x_{2i} + \beta_7x_{2i}^2 + \beta_8x_{2i}^3 + \beta_9x_{2i}^4 + \beta_{10}x_{2i}^5 + \beta_{11}x_{1i}x_{2i} + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.3 ตัวแบบกำลัง 4

$$y_i = \beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{1i}^2+\beta_3x_{1i}^3+\beta_4x_{1i}^4+\beta_5x_{2i}+\beta_6x_{2i}^2+\beta_7x_{2i}^3+\beta_8x_{2i}^4+\beta_9x_{1i}x_{2i}+\varepsilon_i$$

2.4 ตัวแบบกำลัง 3

$$y_i = \beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{1i}^2+\beta_3x_{1i}^3+\beta_4x_{2i}+\beta_5x_{2i}^2+\beta_6x_{2i}^3+\beta_7x_{1i}x_{2i}+\varepsilon_i$$

2.5 ตัวแบบกำลัง 2

$$y_i = \beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{1i}^2+\beta_3x_{2i}+\beta_4x_{2i}^2+\beta_5x_{1i}x_{2i}+\varepsilon_i$$

3. การวิจัยครั้งนี้กำหนดให้ $\beta' = (1\ 1\ \dots\ 1)_{1X(k+1)}$ ในประชากรทุกรูปแบบที่ศึกษา โดยที่ k เป็นจำนวนตัวพยากรณ์ (จำนวนพจน์พหุนามในตัวแบบโดยไม่นับพจน์ค่าคงที่)

4. ขนาดตัวอย่าง (n) ที่ศึกษาคือ 35[1] 50 75 และ 100

5. จำนวนตัวแปรอิสระเริ่มต้นที่ศึกษาคือ 2 ตัวแปร โดยสร้างจากการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวนเป็น 1

6. ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ (α) ที่ศึกษาคือ 0.05 และ 0.10

7. ในการวิจัยครั้งนี้จะศึกษาเมื่อความคลาดเคลื่อนสุ่มมีการแจงแจง $N(0,\sigma^2)$ โดยกำหนดให้ σ = 5 10 20 และ 25

ประโยชน์ของการวิจัย

เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างตัวแบบของการถดถอยพหุนามกรณีที่มี 2 ตัวแปรอิสระซึ่งเกิดอันตรกิริยาที่เหมาะสมในการนำไปใช้พยากรณ์ค่า

เกณฑ์การตัดสินใจ

เกณฑ์ในการตัดสินใจว่าตัวแบบจากวิธีการใดจะมีความถูกต้องมากที่สุดจะพิจารณาจากเกณฑ์ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squares Error (MSE)) และเกณฑ์ที่ใช้ประกอบการพิจารณาจะใช้เกณฑ์ค่าอัตราส่วนผลต่างของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Ratio of Different Average Mean Squares Error (RDAMSE)) ซึ่งมีสูตรดังนี้

---

[1] เนื่องจากจำนวนตัวแปรอิสระมีมากซึ่งส่งผลต่อค่าระดับขั้นความเสรีดังนั้นจึงต้องเริ่มขนาดตัวอย่างด้วยค่าที่มาก (มากกว่า 30)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$MSE = SSE / (n-p)$$

เมื่อ SSE คือ ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum of Squares Error) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$

และ p คือจำนวนพารามิเตอร์

$$RDAMSE_i = \frac{(AMSE_i - AMSE_{min}) \times 100\%}{AMSE_{min}}$$

เมื่อ $AMSE_i$ หมายถึงค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยจากวิธี i

และ $AMSE_{min}$ หมายถึงค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่มีค่าต่ำสุดจากวิธีทั้ง 4 วิธี

โดยทั้ง 2 เกณฑ์นั้น วิธีใดที่มีค่าต่ำสุดจะเป็นวิธีที่ให้ผลดีสุด

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย