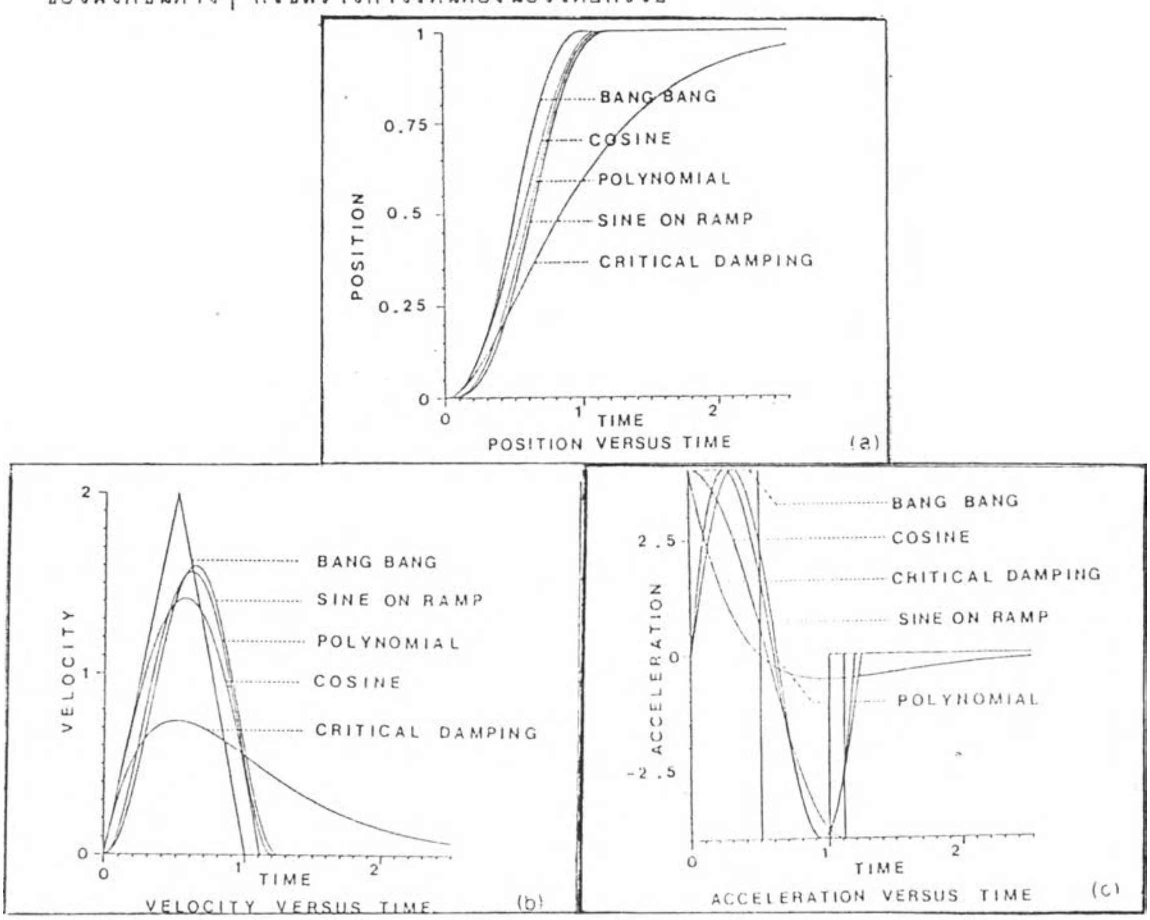
บทที่ 3

ฟังก์ชันโพลิโนเมียลกับการสร้างทางเดินต่อเนื่องในรูประบบแกนอ้างอิงแบบข้อหมุน

โดยปกติเราสามารถเลือกการสร้างทางเดินต่อเนื่อง โดยใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์เข้าช่วยได้หลายฟังก์ชันด้วยกัน เช่น ฟังก์ชันซายน์ (sine function) ฟังก์ชันโคซายน์ (cosine function) ฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล (exponential function) และฟังก์ชันโพลิโนเมียล (polynomial function) เป็นต้น

การจะเลือกใช้ฟังก์ชันหนึ่งฟังก์ชันใดนั้น ขึ้นอยู่กับข้อกำหนดเริ่มต้น และวัตถุประสงค์ที่ใช้สร้างทางเดินต่อเนื่องของแขนกลนั้นซึ่งจากกราฟรูปที่ 3.1 จะแสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติของฟังก์ชันต่างๆ ที่ใช้สร้างทางเดินต่อเนื่องโดยทั่วไป



รูปที่ 3.1 (a) กราฟความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ (b) กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลาที่ใช้ (c) กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ สำหรับวิถีทางเดินต่อเนื่องแบบต่างๆซึ่งศึกษาโดย MUJTABA ในปี ค.ศ. 1977

จากการศึกษาของ Mujtaba 1977 การสร้างทางเดินต่อเนื่องที่มีความราบเรียบนั้น จะพิจารณาถึงการมีความต่อเนื่องและความราบเรียบของความเร่งกับเวลาที่ใช้ของแขนกลนั้น ฉนั้นจะเห็นได้ว่าการใช้ฟังก์ชันเอ็กโปแนนเชียลเพื่อสร้างเป็นทางเดินแบบต่อเนื่องแบบคริตติเคิลแดมปิง (critical damping trajectory) จะให้ทางเดินต่อเนื่องที่มีความราบเรียบกว่าแบบอื่น การสร้างทางเดินต่อเนื่องแบบแบง-แบง(bang-bang trajectory) ซึ่งเป็นการสร้างทางเดินต่อเนื่องแบบใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียล โดยกำหนดให้มีความเร่งคงที่ จะให้ทางเดินต่อเนื่องที่มีความราบเรียบน้อยกว่า แต่เมื่อพิจารณาระยะเวลาในการเข้าสู่เป้าหมายของทางเดินต่อเนื่องที่ใช้ฟังก์ชันแบบต่างๆ จะเห็นว่าการสร้างทางเดินต่อเนื่องแบบแบง-แบง จะใช้เวลาน้อยที่สุด และแบบคริตติเคิลแดมปิงจะใช้เวลานานกว่ามาก ส่วนการสร้างทางเดินแบบให้ฟังก์ชันซายน์ ฟังก์ชันโคซายน์ และฟังก์ชันโพลีโนเมียลที่มีความเร่งไม่คงที่จะใช้เวลาเข้าสู่เป้าหมายใกล้เคียงกับการสร้างทางเดินต่อเนื่องแบบแบง-แบง และเมื่อพิจารณาถึงการสร้างฟังก์ชันให้เป็นไปตามข้อกำหนดเริ่มต้นต่างๆ เช่น ตำแหน่ง ความเร็วที่จุดต้น และจุดปลาย จะเห็นว่าฟังก์ชันซายน์ โคซายน์ และเอ็กโปแนนเชียล มีพารามิเตอร์อยู่น้อยไม่สามารถสร้างฟังก์ชันให้เป็นไปตามข้อกำหนดเริ่มต้นได้ครบถ้วน

ส่วนฟังก์ชันโพลีโนเมียลนั้นสามารถขยายอันดับออกไปได้ตามต้องการ ทำให้สามารถสร้างฟังก์ชัน ให้เป็นไปตามข้อกำหนดเริ่มต้นได้ แต่เนื่องจากความไม่เสถียร (stable) ของฟังก์ชันโพลีโนเมียล เมื่ออันดับเพิ่มขึ้น ฉะนั้น โดยทั่วไปจึงเลือกใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับต่ำๆ มากกว่า ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสูงๆ (Michael, 1983)

ดังนั้นในที่นี้ เราจึงทำการศึกษาเฉพาะ การสร้างทางเดินต่อเนื่อง โดยให้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลเป็นหลัก

ในการสร้างทางเดินต่อเนื่องโดยใช้ฟังก์ชัน โพลีโนเมียลอันดับใดนั้น ขึ้นกับค่าเริ่มต้น (contrains) ที่สามารถกำหนดได้ (John J., 1955)

ตัวอย่าง กำหนดให้

$\theta(0) = \theta_o$; ค่ามุมเริ่มต้นที่เวลา = 0

$\theta'(0) = \theta'_o$; ค่าความเร็วเชิงมุมที่เวลา = 0

$\theta(t_f) = \theta_f$; ค่ามุมเป้าหมายที่เวลา = t_f

$\theta'(t_f) = \theta'_f$; ค่าความเร็วเชิงมุมที่จุดเป้าหมาย

จากค่ากำหนดเริ่มต้นที่กำหนด ฟังก์ชันโพลีโนเมียลที่เลือกใช้ คือ ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับ 3 (cubic polynomial)

$$\theta(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \qquad ......(3.1)$$

ทำดิฟเฟอเรนเชียล จะได้

$$\theta'(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \qquad ......(3.2)$$

$$\theta''(t) = 2a_2 + 6a_3t \qquad ......(3.3)$$

สามารถหาค่า a_0 , a_1 , a_2 และ a_3 ได้โดย

$$a_0 = \theta_0$$

$$\theta_f = \theta_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3$$

$$0 = a_1$$

$$0 = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2$$

จะได้

$$a_0 = \theta_0 \qquad ......(3.4)$$

$$a_1 = 0 \qquad ......(3.5)$$

$$a_2 = 3/t_f^2 (\theta_f - \theta_0) \qquad ......(3.6)$$

$$a_3 = -2/t_f^3 (\theta_f - \theta_0) \qquad ......(3.7)$$

ฉะนั้น เราสามารถหาฟังก์ชันของ θ , θ' และ θ'' ได้

โดยทั่วไปฟังก์ชัน โพลิโนมิยลนี้จะใช้สร้างเส้นทางการเคลื่อนที่ระหว่างจุดเป้าหมายรองด้วย (visa points) ซึ่งการเคลื่อนที่ ของแขนกล ผ่านจุดเป้าหมายรองนี้ค่า $\theta'(0)$ และ $\theta'(t_f)$ จะไม่เป็นศูนย์

สมมติให้ $\theta'(0) = \theta'_0$

$$\theta'(t_f) = \theta'_f$$

$$\theta_0 = a_0$$

$$\theta_f = a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3$$

$$\theta'_0 = a_1$$

$$\theta'_f = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2$$

จะได้

$$a_0 = \theta_0 \qquad ......(3.8)$$

$$a_1 = \theta'_0 \qquad ......(3.9)$$

$$a_2 = 3/t_f^2(\theta_f - \theta_0) - 2/t_f\theta'_0 - 1/t_f\theta'_f \qquad ..(3.10)$$

$$a_3 = -2/t_f^3(\theta_f - \theta_0) + 1/t_f^2(\theta'_f + \theta'_0) \qquad ..(3.11)$$

จะเห็นได้ว่า ในกรณีที่เราใช้ ฟังก์ชันโพลิโนเมียล สร้างเส้นทางการเคลื่อนที่ระ

หว่างจุดเป้าหมายรอง 2 จุด เราจะต้องกำหนดค่าความเร็วที่จุดเป้าหมายรองเหล่านี้ให้มีความต่อเนื่องกัน วิธีการกำหนดความเร็วที่ จุดเป้าหมายรอง สามารถกำหนดได้ 3 วิธีคือ

1. ผู้ใช้สามารถกำหนดความเร็วที่จุดเป้าหมายรอง ในเทอมของระบบแกนอ้างอิงแบบคาร์ทีเซียนเองได้

2. ระบบสามารถเลือกความเร็วของจุดเป้ารองโดยอัตโนมัติตามสภาวะที่เหมาะสม

3. ระบบสามารถเลือกความเร็วของจุดเป้าหมายรอง โดยทำให้ความเร่งมีค่าต่อเนื่องกัน

ในวิธีแรก ความเร็วซึ่งอยู่ในเทอมของระบบแกนอ้างอิงแบบคาร์ทีเซียน จะถูกเปลี่ยนเป็นระบบแกนอ้างอิงแบบข้อหมุนโดยใช้ อินเวอร์สจาโคเบียน จะเห็นว่าวิธีนี้ เราต้องกำหนดความเร็วให้กับจุดเป้าหมายรองเสมอ ซึ่งไม่เป็นการสะดวกแก่ผู้ควบคุม

วิธีที่สอง ระบบเลือกความเร็วให้กับจุดเป็นเป้าหมายรองโดยอัตโนมัติ ตามสภาวะที่เหมาะสม กล่าวคือ ระบบจะพิจารณาถึงการเปลี่ยนเครื่องหมายความลาดชัน (slope) ของฟังก์ชัน ตำแหน่งกับเวลา ที่จุดเป้าหมายรอง และจะเลือกให้ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ ถ้าเครื่องหมายความลาดชันมีการเปลี่ยนแปลง ถ้าเครื่องหมายความลาดชันไม่มีการเปลี่ยนแปลงจะเลือกความเร็วเฉลี่ยของความลาดชันทั้งสอง

วิธีที่สาม ระบบจะเลือกความเร็วให้กับจุดเป้าหมายรอง โดยอัตโนมัติ เพื่อให้ความเร่งของจุดเป้าหมายรองมีความต่อเนื่อง ด้วยวิธีนี้เป็นการสร้างความสัมพันธ์ ระหว่าง 2 ฟังก์ชันโพลิโนเมียล ที่มีต่อกันอยู่ให้มีความเร็ว และความเร่งต่อเนื่องกัน

ในที่นี้ เราจะเลือกใช้วิธีที่สาม เนื่องจากวิธีนี้จะให้วิถีทางเดินต่อเนื่องที่ดีกว่า 2 วิธีแรก และสามารถพิจารณาได้โดยตัวอย่างดังต่อไปนี้

ให้ θ_o = ตำแหน่งเริ่มต้นที่เวลา $t = 0$

θ_v = ตำแหน่งของจุดเป้าหมายรองที่เวลา $t = t_{f1}$

θ_g = ตำแหน่งของจุดเป้าหมายหลักที่เวลา $t = t_{f2}$

และ ,

$\theta(0) = \theta_o \qquad , \dot{\theta}(0) = 0$

$\theta(t_{f1}) = \theta_v \qquad , \dot{\theta}(t_{f2}) = 0$

$\theta(t_{f2}) = \theta_g$

เราจะได้ฟังก์ชันโพลิโนเมียล 2 ฟังก์ชัน ระหว่างจุดทั้งสาม

ฟังก์ชันแรก : $\theta(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$ ....(3.12)

ฟังก์ชันสอง : $\theta(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$ ....(3.13)

จากค่าเริ่มต้นที่กำหนด จะได้

ฟังก์ชันแรก : $\theta_o = a_{10}$

$\theta_v = a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3$

และ

ฟังก์ชันสอง : $\theta_v = a_{20}$

$\theta_a = a_{20} + a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3$

และจาก $\dot{\theta}_o(0) = 0 = a_{11}$

$\theta'_a(t_{f2}) = 0 = a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{22}t_{f2}^2$

$\theta'_{vf1} = \theta'_{v10} = a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 = a_{21}$

$\theta''_{vf1} = \theta''_{v10} = 2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} = 2a_{22}$

จะได้

$a_{10} = \theta_o$ .... (3.14)

$a_{11} = 0$ .... (3.15)

$a_{12} = (12\theta_v - 3\theta_a - 9\theta_o) / 4t_f^2$ ... (3.16)

$a_{13} = (-8\theta_v + 3\theta_a + 5\theta_o) / 4t_f^3$ ... (3.17)

$a_{20} = \theta_v$ .... (3.18)

$a_{21} = (3\theta_a - 3\theta_o) / 4t_f$ .... (3.19)

$a_{22} = (-12\theta_v + 6\theta_a + 6\theta_o) / 4t_f^2$ ... (3.20)

$a_{23} = (8\theta_v - 5\theta_a - 3\theta_o) / 4t_f^3$ ... (3.21)

ฉะนั้นเราสามารถหาฟังก์ชันของวิถีทางเดินของจุดทั้งสามที่อยู่ติดกันได้ แต่เนื่องจากเรามีจุดเป้าหมายต่างๆมากมาย ฉนั้นโดยความเป็นจริงแล้วเราต้องอาศัยวิถีทางเมตริกซึ่งจะเสียเวลาในการประมวลผลและมีความยุ่งยากในการสร้างโปรแกรมเพื่อสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องแบบเวลาทำงาน (run time trajectory generation) เป็นอย่างมาก ฉนั้นในที่นี้เราจะศึกษาถึงเทคนิคการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องโดยอาศัยฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันเพื่อช่วยให้การเขียนโปรแกรม และการประมวลผลใช้เวลาน้อยลง ซึ่งจะเป็นผลทำให้เราสามารถสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องในเวลาทำงานได้

1. **เทคนิคการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องแบบเอ็กซ์-สไปน์**

(X-SPLINE TRAJECTORY GENERATION (Chun-shin & Po-rong, 1983))

เทคนิคการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องแบบเอ็กซ์-สไปน์นี้ เป็นการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องโดยอาศัยฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับ 3 (cubic polynomial trajectory generation) ในการสร้างวิถีทางเดินระหว่างจุดเป้าหมาย 2 จุดโดยให้ความเร็วของแต่ละจุดเป้าหมายมีความต่อเนื่องกันตลอดทางเดิน ด้วยการอาศัยเทคนิคการสร้างส่วนโค้ง (fit curve) ที่เรียกว่า เอ็กสไปน์ (X-spline) ที่ศึกษาโดย Behforooz, Papamichael และ Worsey 1980 แต่เนื่องด้วยสิ่งนี้ทำให้จำเป็นต้องยอมให้ค่าความเร่งขาดความต่อเนื่องที่จุดเป้าหมายต่างๆ แต่ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยการลดช่วงเวลาที่ใช้ในแต่ละจุดเป้าหมายให้น้อยลง

กำหนดให้ q_i = ตำแหน่งมุมของแขนกลที่เวลา t_i (joint trajectory)

โดยที่ $i=1,2,3,\ldots,n$

P_i = cubic polynomial ที่เกิดจาก q_i, q_{i+1}, q_{i+2} และ q_{i+3}

โดยที่ $i=1,2,3,\ldots,n-3$

$$= A_i(t-t_i)^3 + B_i(t-t_i)^2 + C_i(t-t_i) + D_i$$

หรือสามารถหาได้จาก Lagrange interpolation

$$P_i(t) = \sum_{k=i}^{i+3}\left[q_k \prod_{\substack{i \le j \le i+3 \\ j \ne k}} \frac{t-t_j}{t_k-t_j}\right] \qquad \text{เมื่อ } i=1,2,3,\ldots\ldots n-3$$

หรือ

$$P_{i-1}(t) = \sum_{k=i-1}^{i+2}\left[q_k \prod_{\substack{i-1 \le j \le i+2 \\ j \ne k}} \frac{t-t_j}{t_k-t_j}\right] \qquad \text{เมื่อ } i=2,3,4,\ldots n-2 \qquad \ldots\ldots.(3.22)$$

เพื่อทำให้ความเร็วมีความต่อเนื่องตลอดทางเดิน จึงอาศัยเทคนิค เอ็กสไปน์ในการกำหนดความเร็วที่จุดเป้าหมายต่างๆ

m_i = ความเร็วของแขนกลที่เวลา t_i $\quad i=1,2,3,\ldots\ldots n$

โดย

$m_1 = q'(t_1) = q'_1$ ในที่นี้คือความเร็วเริ่มต้น = 0

$$a_i m_{i-1} + m_i + b_i m_{i+1}$$
$$= a_i r_{i-1}(t_{i-1}) + r_{i-1}(t_i) + b_i r_{i-1}(t_{i+1}) \quad \ldots\ldots(3.23)$$

เมื่อ $i = 2,3,4,\ldots\ldots,n-1$

$m_n = q'(t_n) = q'_n$ ในที่นี้คือความเร็วจุดเป้าหมายสุดท้าย = 0

a_i , b_i เป็นจำนวนจริง 2n-4 จำนวน เมื่อ $i = 2,3,\ldots\ldots,n-1$

โดย $|a_i| + |b_i| < 1$ จะเห็นได้ว่า a_i, b_i เป็นพารามิเตอร์บ่งชี้ความสำคัญของความเร็วที่จุดเป้าหมายที่ผ่านมาหรือความเร็วของตำแหน่งที่อยู่ถัดไป โดยมีความเป็นไปได้หลายกรณีสำหรับค่า a_i และ b_i แต่จากการศึกษาของ Behforooz, 1980 มีกรณีที่น่าสนใจอยู่ 3 กรณี คือ

a). $a_i = b_i = 0$ เมื่อ $i = 2,3,\ldots\ldots,n-1$

b). $a_i = h_i / (h_{i-1} + h_i)$ และ $b_i = 0$ สำหรับ $i = 2,3,\ldots\ldots,n-1$

c). $a_i = h_i(h_i + h_{i+1}) / ((h_{i-1} + h_i)(h_{i-1} + h_i + h_{i+1}))$;

$b_i = 0$ สำหรับ $i = 2,3,\ldots\ldots,n-1$

และ $a_{n-1} = 0$

$b_{n-1} = h_{n-2}(h_{n-2} + h_{n-3}) / ((h_{n-2} + h_{n-1})(h_{n-3} + h_{n-2} + h_{n-1}))$

เมื่อ $h_i = t_{i+1} - t_i$

ความแตกต่างของ a_i และ b_i จะทำให้ได้ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนต่างกัน และเพื่อความสะดวกการเลือกกรณี a , b และ c จะแสดงโดย X1-spline , X2-spline และ X3-spline ตามลำดับ จะสังเกตเห็นว่าทั้ง 3 กรณี ค่า a_i หรือ b_i หรือทั้งคู่จะถูกกำหนดให้เป็นศูนย์ ทั้งนี้เพื่อทำให้การประมวลผลใช้เวลาน้อยลง

และ

r_{i-1} = qurdatic polynomial $i=2,\ldots\ldots,n-2$

โดย $r_{i-1}(t_z) = P'_{i-1}$ เมื่อ $i < n-2$

และ $= P'_{n-3}$ เมื่อ $i = n-1$ ...(3.24)

จาก derivative Lagrang interpolation สมการ (3.22)

$$P'_{i-1}(t_z) = q_z \sum_{k \neq z} \frac{1}{(t_z - t_k)} + \sum_{k \neq z} q_k \frac{\prod_{m \neq z,k} (t_z - t_m)}{\prod_{w \neq k} (t_k - t_w)}$$

สำหรับ $i-1<k,m,w<i+2$ และ $i-1<z<i+2$ ....(3.25)

จากสมการ (3.24) และ (3.25) ฉนั้นจะได้

$$r_{i-1}(t_{i-1}) = (2q_{i+2} - 9q_{i+1} + 18q_i - 11q_{i-1}) / 6h$$

$$r_{i-1}(t_i) = (-q_{i+2} + 6q_{i+1} - 3q_i - 2q_{i-1}) / 6h$$

$$r_{i-1}(t_{i+2}) = (2q_{i+2} + 3q_{i+1} - 6q_i + q_{i-1}) / 6h$$

สำหรับ $2 < i < n-2$

$$r_{n-2}(t) = r_{n-3}(t) \qquad \text{..........} (3.26)$$

แทนค่าสมการ (3.26) ลงในสมการ (3.23) m_i สามารถคำนวณได้

a). สำหรับ X1-spline

$$m_i = (-q_{i+2} + 6q_{i+1} - 3q_i - 2q_{i-1})/6h$$

สำหรับ $2 < i < n-2$

และ $$m_{n-1} = (2q_n + 3q_{n-1} - 6q_{n-2} + q_{n-3})/6h$$

b). สำหรับ X2-spline

$$m_i = (q_{i+1} + 4q_i - 5q_{i-1})/4h - m_{i-1}/2$$

สำหรับ $2 < i < n-2$

และ $$m_{n-1} = (q_n + 4q_{n-1} - 5q_{n-2})/4h - m_{n-2}/2$$

c). สำหรับ X3-spline

$$m_i = (-q_{i+2} + 9q_{i+1} - 9q_i - 17q_{i-1})/18h - m_{i-1}/3$$

สำหรับ $2 < i < n-2$

และ $$m_{n-1} = (17q_n - 9q_{n-1} - 9q_{n-2} + q_{n-3})/18h - m_{n-3}/3$$

จะสังเกตเห็นว่า m_i ใน X2-spline จะไม่สัมพันธ์กับ q_{i+2} ในขณะที่ X1-spline และ X3-spline ไม่เป็นความจริง

ในขั้นตอนสุดท้ายเมื่อเราสามารถหาค่า m_{i-1}, m_i ซึ่งเป็นค่าความเร็วที่ตำแหน่ง q_{i-1} และ q_i ได้แล้ว เราก็สามารถทำ interpolate โดยอาศัย cubic polynomial, $Q_{i-1}(t)$ ระหว่างจุดเป้าหมาย q_{i-1} และ q_i ได้ใหม่ ซึ่งฟังก์ชันที่ได้ใหม่นี้จะให้ค่าตำแหน่งและความเร็วที่ต่อเนื่องตลอดการเคลื่อนที่

$$Q_{i-1}(t_{i-1}) = q_{i-1} \quad ; \quad Q'_{i-1}(t_{i-1}) = m_{i-1}$$

$$Q_{i-1}(t_i) = q_i \quad ; \quad Q'_{i-1}(t_i) = m_i$$

และ $Q_{n-1}(t)$ สามารถหาได้ในเทอมของ m_{n-1}, m_n, q_{n-1} และ q_n

2. เทคนิคการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องโดยใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับ 4 (QUARTICPOLYNOMIAL TRAJECTORY GENERATION (Chun-shin & Po-rong, 1983))

จะเห็นว่าเทคนิคการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องแบบเอ็กซ์-สไปน์ยังขาดความต่อเนื่องของความเร่งที่ใช้ในการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นเพราะการใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับ3สร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องนั้นไม่เพียงพอ ยังขาดอันดับอนุกรมอีกหนึ่งอันดับสำหรับทำให้ความเร่งมีความต่อเนื่องตลอดเส้นทางการเคลื่อนที่ ฉนั้นในการศึกษาการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องแบบต่อไป เราจึงเลือกศึกษาเทคนิคการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องโดยใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับ4 ในการสร้างทางเดินระหว่างจุดเป้าหมาย 2 จุด

สำหรับข้อกำหนดเริ่มต้นที่เพิ่มเข้ามาเพื่อให้ความเร่งมีความต่อเนื่องตลอดการเคลื่อนที่ก็คือ การทำมินิไมเซชันเซคอนเดอริเวตีฟของฟังก์ชันทางเดินของจุดต่างๆ

กำหนดให้ $Q(t)$ = Quartic spline trajectory โดยที่

a). $Q(t)$ ประกอบด้วยชุดของ $Q_i(t)$ ซึ่งอยู่ระหว่าง t_i และ t_{i+1}

b). ข้อกำหนดเริ่มต้น ประกอบด้วย

$$Q(t_1) = q_1 \qquad Q(t_n) = q_n$$

$$Q'(t_1) = V_1 \qquad Q'(t_n) = V_n$$

$$Q''(t_1) = W_1 \qquad Q'(t_n) = W_n$$

c). $Q(t_i) = q_i$ สำหรับ $i=1,2,....,n-1,n$

d). ความต่อเนื่องของความเร่งสามารถกำหนดได้โดย

$$Q(t_i) \in C^2[t_1,t_n]$$

จากฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่ต้องการ $Q_i(t)$ ในช่วงเวลา t_i ถึง t_{i+1} จะมีข้อกำหนดเริ่มต้น 4 ข้อที่สามารถเป็นจริงได้ คือ ตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งที่ t_{i-1} และ ตำแหน่งที่เวลา t_i แต่ฟังก์ชันโพลิโนเมียลนั้นมีค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่รู้ค่า 5 ตัว ฉนั้นจึงต้องเพิ่มข้อกำหนดเริ่มต้นอีกหนึ่งข้อ คือการทำมินิไมเซชั่นของ $\int_{t_i}^{t_{i+1}}(Q_i''(t))^2dt$ ซึ่งเป็นการทำให้วิถีทางเดินมีความราบเรียบที่จุดต่างๆ ด้วย และจะสังเกตได้ว่าที่จุดสุดท้ายของชุดวิถีทางเดินต่อเนื่องนั้นๆจะมีค่าความเร็วและความเร่งเป็นศูนย์ ฉนั้นที่จุดสุดท้ายนี้เราจะละทิ้งการทำมินิไมเซชั่นของ $(Q_i''(t))^2dt$ ที่จุดนี้ ฉนั้นเราสามารถแบ่งการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องที่จุดต่างๆออกได้เป็น 2 ช่วง คือในช่วง n-3 จุดแรก และอีก 3 จุดสุดท้าย โดยในช่วง n-3 จุดแรกสามารถหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆได้ดังนี้

กำหนดให้

$$Q_i(t) = q_i + a_1^i(t-t_i) + a_2^i(t-t_i)^2 + a_3^i(t-t_i)^3 + a_4^i(t-t_i)^4$$ สำหรับเวลาในช่วง t_i และ t_{i+1} .... (3.27)

เมื่อ a_1^i , a_2^i , a_3^i , a_4^i เป็นค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการหาค่า จะสังเกตเห็นว่า $Q_i(t_i) = q_i$ เป็นไปโดยอัตโนมัติ และจาก

$$Q'_i(t_i) = Q'_{i-1}(t_i) \text{ , } i=2,3,\ldots,n-3$$

และ $$Q''_i(t_i) = Q''_{i-1}(t_i) \text{ , } i=2,3,\ldots,n-3 \quad \ldots\ldots(3.28)$$

จะได้

$$a_1^i = a_1^{i-1} + 2a_2^{i-1}h_{i-1} + 3a_3^{i-1}h_{i-1}^2 + 4a_4^{i-1}h_{i-1}^3 \quad \ldots\ldots\ldots (3.29)$$

และ

$$a_2^i = a_2^{i-1} + 3a_3^{i-1}h_{i-1} + 6a_4^{i-1}h_{i-1}^2 \quad \ldots\ldots\ldots (3.30)$$

นั่นคือ a_1^i และ a_2^i สามารถหาค่าได้โดย a_1^{i-1} , a_2^{i-1} , a_3^{i-1} และ a_4^{i-1} เป็นพารามิเตอร์ที่ทราบค่าแน่นอน การหาค่า a_3^i และ a_4^i อาศัยข้อกำหนดเริ่มต้นคือ $Q_i(t_{i+1}) = q_{i+1}$ และ การทำมินิไมเซชั่นของ $(Q_i''(t))^2dt$ ซึ่งจะได้

$$q_{i+1} = q_i + a_1^ih_i + a_2^ih_i^2 + a_3^ih_i^3 + a_4^ih_i^4 \quad \ldots(3.31)$$

ฉนั้นค่า a_4^i สามารถหาได้จาก

$$a_4^i = ((q_{i+1} - q_i)/h_i - a_1^i)/h_i^3 - a_2^i/h_i^2 - a_3^i/h_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.32)$$

ทำดิฟเฟอเรนเชียล 2 ครั้งในสมการ (26) แล้วแทนค่า a_4^i จะได้

$$Q_i''(t) = 2a_2^i + 6a_3^i(t-t_i) + 12(k - a_3^i/h_i)(t-t_i)^2$$

เมื่อ $$k = ((q_{i+1} - q_i)/h_i - a_2^i)/h_i^3 - a_2^i/h_i^2 \quad \ldots\ldots (3.33)$$

เพื่อความสะดวกกำหนดใช้ α แทน a_3^i และ $x = t - t_i$

$$F(\alpha) = \int_{t_i}^{t_{i+1}}(Q''(t))^2dt \quad \ldots\ldots (3.34)$$

$$= 4\int_0^{h_i}(a_2^i + 3\alpha x + 6(k - \alpha/h_i)x^2)^2 dx$$

ทำมินิไมซ์ $F(\alpha)$ โดยให้ $\partial F/\partial\alpha = 0$

$$\partial F/\partial\alpha = 24\int_0^{h_i}(a_2^i + 3\alpha x + 6(k - \alpha/h_i)x^2)(x - 2x^2/h_i)dx$$

$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3.35)$$

ฉะนั้นจะได้

$$2/5\alpha h_1 = 9h_1^2 k/10 + a_2^1/6$$

และจะได้

$$a_3^1 = \alpha = 9(q_{1+1} - q_1)/4h_1^2 - 11a_2^1/6h_1 \quad \text{.....} (3.36)$$

ฉะนั้นสามารถหาค่า a_4^1 ได้

สำหรับกรณี 3 จุดสุดท้าย จะได้

$$Q_{n-2}(t) = q_{n-2} + q'_{n-2}(t - t_{n-2}) + 1/2q''_{n-2}(t-t_{n-2})^2$$
$$+ c_1(t - t_{n-2})^3 + d_1(t - t_{n-2})^4 \quad \text{.......} (3.37)$$

และ

$$Q_{n-1}(t) = q_n + q'_n(t - t_n) + 1/2q''_n(t-t_n)^2$$
$$+ c_2(t - t_n)^3 + d_2(t - t_n)^4 \quad \text{.......} (3.38)$$

เมื่อ q'_{n-2} และ q''_{n-2} เท่ากับ $Q'_{n-3}(t_{n-2})$ และ $Q''_{n-3}(t_{n-2})$ และ q'_n กับ q''_n เป็นความเร็ว และความเร่งที่จุดสุดท้าย ฉะนั้นจะได้ว่า

$$Q_{n-2}(t_{n-1}) = q_{n-1} ,$$
$$Q_{n-1}(t_{n-1}) = q_{n-1} ,$$
$$Q'_{n-2}(t_{n-1}) = Q'_{n-1}(t_{n-1}) ,$$
$$Q''_{n-2}(t_{n-1}) = Q''_{n-1}(t_{n-1}) ,$$

ใช้การแก้สมการทางเมตทริกซ์เพื่อหาค่า c_1 , d_1 , c_2 และ d_2

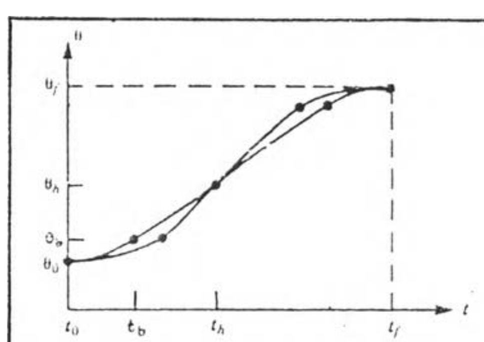
$$\begin{bmatrix} h_{n-2}^3 & h_{n-2}^4 & 0 & 0 \\ 3h_{n-2}^2 & 4h_{n-2}^4 & -3h_{n-1}^2 & 4h_{n-1}^3 \\ 6h_{n-2} & 12h_{n-2}^2 & 6h_{n-1} & -12h_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & -h_{n-1}^3 & h_{n-1}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_{n-1} - q_{n-2} - q'_{n-2}h_{n-2} - 1/2q''_{n-2}h_{n-2}^2 \\ q'_n - q_{n-2} - q''_n h_{n-1} - q''_{n-2}h_{n-2} \\ q''_n - q''_{n-2} \\ q_{n-1} - q_n + q'_n h_{n-1} - 1/2q''_n h_{n-1}^2 \end{bmatrix} \quad \text{.....}(3.39)$$

3. เทคนิคการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องโดยใช้ฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับ2ชนิดความเร่งคงที่ (BANG-BANG TRAJECTORY GENERATION (John J., 1955))

จากเทคนิคการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องทั้ง 2 เทคนิค เราไม่สามารถควบคุมความเร่งของเส้นทางเดินต่างๆ ให้อยู่ในขอบเขตจำกัดที่แขนกลสามารถสร้างขึ้นได้ ดังนั้นในทางปฏิบัติแขนกลอาจจะให้ความเร็วที่ไม่ต่อเนื่องได้ เนื่องจากไม่สามารถทำให้เกิดความเร่งได้ตามที่ต้องการ

การแก้ปัญหานี้กระทำได้โดย การกำหนดให้วิถีทางเดินต่อเนื่องของแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมระหว่างจุดเริ่มต้น กับจุดเป้าหมายรอง หรือ จุดเป้าหมายรอง กับจุดเป้าหมายรอง หรือ จุดเป้าหมายรอง กับจุดเป้าหมายหลัก มีลักษณะการเคลื่อนที่แบบความเร็วคงที่ และในส่วนที่ต่อเชื่อมกันระหว่างวิถีทางเดินต่อเนื่อง 2 เส้น เราจะเพิ่มส่วนโค้งพาราโบลา (parabolic blend) เข้าไป โดยกำหนดให้มีความเร่งคงที่เพื่อทำให้ความเร็วมีความต่อเนื่องและทำให้เราสามารถกำหนดค่าความเร่งตามขีดจำกัดของแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมต่างๆ ได้ และเพื่อเป็นการง่ายในการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องของแขนกลจึงกำหนดให้ส่วนโค้งพาราโบลาที่อยู่ติดกันมีลักษณะเดียวกันและใช้ค่าความเร่งเดียวกัน ผิดกันก็แต่เครื่องหมาย จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่าเราสามารถสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องได้หลายรูปแบบแต่จะสังเกตได้ว่า จะมีความสมมาตรระหว่างครึ่งทางเดินที่เวลา t_h ความเร็วที่ปลายส่วนโค้ง (ความเร่งคงที่) จะต้องเท่ากับความเร็วในส่วนที่เป็นเส้นตรง (ความเร็วคงที่)



รูปที่ 3.2 แสดงเส้นทางเดินต่อเนื่องย่อยซึ่งมีช่วงส่วนโค้งพาราโบลา

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\theta'' t_b = (\theta_h - \theta_b) / t_h - t_b \qquad \text{.......... (3.40)}$$

เมื่อ θ'' เป็นความเร่งในช่วงส่วนโค้งพาราโบลา และค่า θ_b สามารถหา

ได้จาก สมการความเร่งคงที่

$$\theta_b = \theta_o + 1/2\theta'' t_b^2 \qquad \text{.......... (3.41)}$$

จากสมการ 40,41 และ $t = 2t_n$ เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ทั้งหมด จะได้

$$\theta'' t_b^2 - \theta'' t t_b + (\theta_f - \theta_o) = 0 \qquad \text{.......... (4.42)}$$

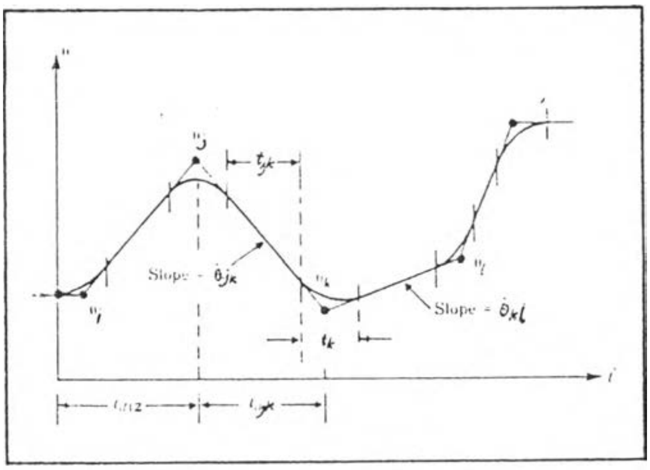
จะเห็นว่า เราสามารถสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องได้หลายรูปแบบ ตามการเลือกค่า θ'' และ t_b โดยปกติแล้ว ค่า θ'' จะถูกเลือกโดยกำหนดตามขีดจำกัดของแขนกลที่ข้อหมุนต่าง ๆ ฉะนั้นเราสามารถหาค่า t_b ได้

$$t_b = t/2 - (\theta'' t^2 - 4\theta''(\theta_f - \theta_o))^{1/2}/2\theta''$$

นั่นคือ $\theta'' >= 4(\theta_f - \theta_o)/t^2$ เพื่อให้ค่าความเร่งมีค่าสูงพอที่จะทำให้สมการเป็นจริง

เมื่อ $\theta'' = 4(\theta_f - \theta_o)/t^2$ จะได้ $t_b = t/2$ ซึ่งจะเห็นว่า ส่วนโค้งพาราโบลาทั้งสอง จะขยายมากจนทำให้ส่วนที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ (เส้นตรง) หมดไป และเมื่อ θ'' มีค่าสูงขึ้น ช่วงเวลาของส่วนโค้งพาราโบลาจะน้อยลง และเมื่อ θ'' มีค่ามากขึ้น ส่วนที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่จะเพิ่มขึ้น

เมื่อพิจารณาโดยทั่วไป สำหรับการสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องที่ประกอบด้วย จุดเริ่มต้น จุดเป้าหมายหลัก และจุดเป้าหมายรองต่าง ๆ สามารถแบ่งการพิจารณาออกได้เป็น



รูปที่ 3.3 แสดงเส้นทางเดินต่อเนื่องย่อยหลายเส้นที่เชื่อมต่อกันด้วยเส้นโค้งพาราโบลา (John J.,1955 pp.206)

1. สำหรับกรณีเลือกพิจารณา จุดเป้าหมายรองใด ๆ 3 จุด ที่อยู่ติดกัน และเรียกจุดเหล่านั้นว่า จุด j , k และ l ช่วงเวลาของส่วนโค้งพาราโบลาที่จุด k เป็น t_{jk} และ ช่วงเวลาทั้งหมดของ spline segment ที่ต่อกันระหว่างจุด j และ k เป็น t_{djk} ความเร็วในส่วนที่เป็นเส้นตรง (ความเร็วคงที่) เป็น θ'_j และ ความเร่งระหว่างส่วนที่เป็นส่วนโค้งที่จุด j (ความเร่งคงที่) เป็น θ''_j ซึ่งจะเห็นได้ดังรูปที่ 3.3

พิจารณาเฉพาะวิถีทางเดินต่อเนื่องในช่วงต่าง ๆ ที่ผ่านจุด t_k ในช่วงเวลา t_{djk} และ ค่าความเร่งที่ใช้เป็น $|\theta''_k|$ เราสามารถคำนวณเวลาที่ใช้ในช่วงส่วนโค้งพาราโบลาที่ผ่านจุด $\theta_k(t_k)$ ได้ สำหรับจุดต่อระหว่างวิถีทางเดินนี้ จะได้ว่า

$$\theta'_{jk} = (\theta_k - \theta_j) / t_{djk}$$

$$\theta''_k = SGN(\theta'_{kl} - \theta'_{jk})|\theta''|$$

$$t_k = (\theta'_{kl} - \theta'_{jk}) / \theta''_k$$

$$t_{jk} = t_{djk} - 1/2t_j - 1/2t_k$$

ที่ spline segment แรก และ สุดท้าย จะมีความแตกต่างเล็กน้อย คือ ช่วงที่เป็นส่วนโค้งพาราโบลา เราต้องคิดเต็มส่วนโค้งนั้น

2. สำหรับกรณี เลือกพิจารณาจุดเริ่มต้นกับจุดเป้าหมายรอง (first spline segment) เราสามารถหาค่า t_1 จากการหาค่าความเร็วที่จุดต่อของวิถีทางเดินต่อเนื่อง

$$(\theta_2 - \theta_1)/t_{d12} - 1/2t_1 = \theta''_1 t_1$$

θ'_{12} และ t_{12} สามารถหาได้จาก

$$\theta''_1 = SGN(\theta_2 - \theta_1)|\theta''|$$

$$t_1 = t_{d12} - (t_{d12}^2 - 2(\theta_2 - \theta_1)/\theta''_1)^{1/2}$$

$$\theta'_{12} = (\theta_2 - \theta_1)/t_{d12} - 1/2t_1$$

$$t_{12} = t_{d12} - t_1 - 1/2t_2$$

3. สำหรับกรณีเลือกพิจารณาจุดเป้าหมายรอง กับจุดเป้าหมายหลัก (final spline segment) ระหว่างจุด θ_{n-1} กับ θ_n

$$(\theta_{n-1} - \theta_n)/t_{d(n-1)n} - 1/2t_n = \theta''_n t_n$$

$$\theta''_n = SGN(\theta_{n-1} - \theta_n)|\theta''|$$

$$t_n = t_{d(n-1)n} - (t_{d(n-1)n}^2 + 2(\theta_n - \theta_{n-1})/\theta''_n)^{1/2}$$

$$\theta'_{(n-1)n} = (\theta_n - \theta_{n-1})/t_{d(n-1)n} - 1/2t_n)$$

$$t_{(n-1)n} = t_{d(n-1)n} - t_n - 1/2t_{n-1}$$

ฉะนั้น เราสามารถที่จะหาค่าเวลาและความเร็วในจุดเป้าหมายต่าง ๆ ของวิถีทางเดินต่อเนื่องได้ ซึ่งจากค่าเหล่านี้ จะนำไปหาฟังก์ชันโพลิโนเมียลที่แต่ละจุดเป้าหมาย เพื่อสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องต่อไป โดยปกติผู้ควบคุมจะเป็นผู้กำหนด จุดเป้าหมายรองต่าง ๆ (via points) และช่วงเวลาในการเคลื่อนที่เท่านั้น ด้วยเหตุนี้ระบบจะเลือกใช้ค่าความเร่งที่กำหนดไว้แล้วโดยอัตโนมัติ ในบางครั้งระบบอาจเลือกค่าความเร็วที่ถูกกำหนดไว้แล้วโดยอัตโนมัติก็ได้ ข้อสำคัญที่ส่วนโค้งพาราโบลาทุกจุด ค่าความเร่งจะต้องมีค่ามากเพียงพอที่จะทำให้ความเร็วมีค่าต่อเนื่องกันระหว่าง spline segment

จะสังเกตได้ว่าที่จุดเป้าหมายรองต่าง ๆ ที่มีวิถีทางเดินเป็นส่วนโค้ง แขนกลจะไม่สามารถเคลื่อนที่ไปถึงจุดเป้าหมายรองเหล่านั้นได้เลย แต่ในกรณีที่เรามีความต้องการให้แขนกลผ่านจุดเป้าหมายรองเหล่านั้นจริงๆ สามารถกระทำได้ โดยการกำหนดจุดเป้าหมายรองเทียม (pseudo via point) 2 จุด โดยมีจุดเป้าหมายรองที่ต้องการเคลื่อนที่ผ่านอยู่ระหว่างกลาง จากนั้น เราสามารถสร้างวิถีทางเดินต่อเนื่องตามที่ต้องการได้