บทที่ 2

ตัวสถิติและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 5 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบใช้การแปลงของเพรสและวินส์เทน วิธีการหาค่าพยากรณ์ร่วม และวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดแบบใช้การแปลงของเพรสและวินส์เทน ซึ่งรายละเอียดแต่ละวิธีเป็นดังนี้

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

1. วิธีกำลังสองน้อยที่สุด

การประมาณสมการถดถอยด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดใช้หลักการประมาณค่าพารามิเตอร์ ที่ทำให้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum Squares Error (SSE)) มีค่าน้อยที่สุด จากรูปแบบความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t \qquad ; \; t=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (1.1)$$

หรือ เมื่อเขียนสมการให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (1.2)$$

โดยที่ $\underset{\sim}{y}$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรตามขนาด n*1

X เป็นเมตริกซ์ของตัวแปรอิสระขนาด n*2

$\underset{\sim}{\beta}$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าขนาด 2*1

$\underset{\sim}{\varepsilon}$ เป็นเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนขนาด n*1

ให้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อแทนที่ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วย $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ในสมการ (1.2) จะได้

$$\underset{\sim}{y} = X\hat{\underset{\sim}{\beta}} + \underset{\sim}{e}$$

ดังนั้น

$$\underset{\sim}{e} = \hat{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{e}$ เป็นเวกเตอร์ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของ $\underset{\sim}{\varepsilon}$ ขนาด n*1

พิจารณาผลบวกของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum Squares Error (SSE)) :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SSE} &= (\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e}) \\
&= (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}})'(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) \\
&= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} - \underset{\sim}{\hat{\beta}}X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} \\
&= \underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}}
\end{aligned}
$$

การหาค่าน้อยที่สุดของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน ทำได้โดยการหาอนุพันธ์ (Differentiate) เทียบกับ β_i โดยที่ i = 0,1 แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0

$$
\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}}(\underset{\sim}{e}'\underset{\sim}{e}) = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\hat{\beta}}}(\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = \underset{\sim}{0}
$$

$$
-2\underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\hat{\beta}}'X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \underset{\sim}{0}
$$

$$
X'X\underset{\sim}{\hat{\beta}} = X'\underset{\sim}{y}
$$

ดังนั้น
$$
\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}
$$

สมการที่ใช้ในการพยากรณ์ค่า y_{n+m} ณ คาบเวลา t = n+1,n+2,......,n+m เป็นดังนี้

$$
\hat{y}_{n+m} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{n+m} \qquad ; \mathrm{m} = 1,2,......,12
$$

2. วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด

การประมาณสมการถดถอยด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดจะใช้เทคนิคโปรแกรมเชิงเส้น(Linear Programming Technique) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด จากรูปแบบความถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

$$
y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t \qquad ; \; t=1,2,......,n \tag{2.1}
$$

ให้ $\underset{\sim}{\tilde{\beta}}$ เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อแทนที่ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วย $\underset{\sim}{\tilde{\beta}}$ ในสมการ (2.1) จะได้

$$
y_t = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_t + e_t \tag{2.2}
$$

ดังนั้น

$$
e_t = \hat{\varepsilon}_t = y_t - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 x_t
$$

โดยที่ e_t เป็นค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของ ε_t

กำหนดให้
$$
z = \sum_{t=1}^{n} |e_t|
$$

ต้องการหาค่า $\widetilde{\beta}_0$ และ $\widetilde{\beta}_1$ ที่ทำให้ z มีค่าต่ำสุด :

หาค่าต่ำสุดของ $$z = \sum_{t=1}^{n} |e_t| \tag{2.3}$$

จาก (2.3) สามารถแปลงให้อยู่ในรูปโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

เนื่องจาก e_t ไม่มีข้อจำกัดด้านเครื่องหมาย ดังนั้นกำหนดให้

$$e_t = e_t^+ - e_t^- \qquad ; \; e_t^+, e_t^- \geq 0$$

นิยาม

$$e_t^+ = \begin{cases} e_t, e_t \geq 0 \\ 0, e_t < 0 \end{cases}$$

$$e_t^- = \begin{cases} 0, e_t \geq 0 \\ -e_t, e_t < 0 \end{cases}$$

$$e_t^+ e_t^- = 0$$

เพราะฉะนั้นแสดงว่าอย่างน้อย 1 ตัวใน e_t^+ และ e_t^- เท่ากับ 0 เสมอ ดังนั้น

$$|e_t| = e_t^+ + e_t^-$$

ให้ $$p_t = e_t^+ \; , \; q_t = e_t^-$$

เนื่องจาก $\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_1$ ไม่มีข้อจำกัดด้านเครื่องหมาย เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\widetilde{\beta}_0 = \widetilde{\beta}_0^+ - \widetilde{\beta}_t^-$$

และ $$\widetilde{\beta}_1 = \widetilde{\beta}_1^+ - \widetilde{\beta}_1^-$$

$$\widetilde{\beta}_0^+, \widetilde{\beta}_0^-, \widetilde{\beta}_1^+, \widetilde{\beta}_1^- \geq 0$$

เพราะฉะนั้น ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นคือ

หาค่าต่ำสุดของ $z = (p_1 + \ldots + p_n + q_1 + \ldots + q_n) + 0(\hat{\beta}_0^+ - \hat{\beta}_0^-) + 0(\hat{\beta}_1^+ - \hat{\beta}_1^-)$

ภายใต้เงื่อนไข

$$(\widetilde{\beta}_0^+ - \widetilde{\beta}_0^-) + (\widetilde{\beta}_1^+ - \widetilde{\beta}_1^-)x_1 + p_1 - q_1 = y_1$$
$$(\widetilde{\beta}_0^+ - \widetilde{\beta}_0^-) + (\widetilde{\beta}_1^+ - \widetilde{\beta}_1^-)x_2 + p_2 - q_2 = y_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$(\widetilde{\beta}_0^+ - \widetilde{\beta}_0^-) + (\widetilde{\beta}_1^+ - \widetilde{\beta}_1^-)x_n + p_n - q_n = y_n$$

สมการที่ใช้ในการพยากรณ์ค่า y_{n+m} ณ คาบเวลา t = n+1,n+2,......,n+m เป็นดังนี้

$$\hat{y}_{n+m} = \widetilde{\beta}_0 + \widetilde{\beta}_1 x_{n+m} \qquad ; \; m = 1,2,\ldots\ldots,12$$

3. วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบใช้การแปลงของเพรสและวินส์เทน

ในปี ค.ศ. 1954 เพรสและวินส์เทน เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตสหสัมพันธ์ ซึ่งทำการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการแปลงข้อมูลทั้งหมด n ค่า ต่อมา ในปี ค.ศ. 1980 Park และ Mitchell พบว่าวิธีการแปลงของคอตแครนและออร์คัตซึ่งใช้ข้อมูลเพียง n-1 ทำให้ประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ต่ำ ดังนั้นการประมาณค่าพารา-มิเตอร์โดยการแปลงข้อมูลทั้งหมด n ค่าของวิธีเพรสและวินส์เทนจึงมีความเหมาะสมกว่า ถ้าข้อมูลมีขนาดเล็กด้วยแล้ว การใช้วิธีการแปลงของเพรสและวินส์เทนจะมีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีการแปลงของคอตแครนและออร์คัต ซึ่งวิธีการแปลงข้อมูลของเพรสและวินส์ จะใช้เทคนิคการแล็ก (lag) [1] ดังนี้

จากสมการถดถอย

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t \qquad ; t=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (3.1)$$

แล็กสมการ (3.1) ไปหนึ่งคาบเวลา

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \qquad (3.2)$$

คูณสมการ(3.2) ด้วย ρ

$$\rho y_{t-1} = \rho\beta_0 + \rho\beta_1 x_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1} \qquad (3.3)$$

นำ (3.1) ลบ (3.3)

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + (\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}) \qquad (3.4)$$

จากรูปแบบความสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน ε_t คือ AR(1)

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$$

โดยที่ $|\rho| < 1$ และ v_t คือความคลาดเคลื่อนสุ่ม ภายใต้ข้อสมมติว่าไม่มีสหสัมพันธ์กัน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และมีความแปรปรวนคงที่ จะได้ว่า

$$v_t = \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-1}$$

แทนค่า v_t ใน (3.4) จะได้ว่า

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + v_t \qquad (3.5)$$

จากสมการ (3.4) จะเห็นว่าความคลาดเคลื่อน ε_t ซึ่งมีรูปแบบ AR(1) ได้แปลงมาอยู่ในรูปความคลาดเคลื่อน v_t ซึ่งได้ลดปัญหาอัตสหสัมพันธ์บ้างแล้ว ดังนั้นเราสามารถที่จะนำข้อมูลมาใช้ในการวิเคราะห์ความถดถอยต่อไป

[1] คำว่าแล็ก (lag) หมายถึง การย้อนเวลาไปในอดีต

การแปลงข้อมูลของเพรสและวินส์เทนแบ่งเป็น 2 กรณี

<u>กรณี 1</u> เมื่อ t = 1

$$\text{กำหนดให้} \quad \varepsilon_1 = \frac{v_1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

แทนค่า ε_1 ในสมการ (3.1) สมการการแปลงข้อมูลเป็นดังนี้

$$y_1\sqrt{1-\rho^2} = \beta_0\sqrt{1-\rho^2} + \beta_1 x_1\sqrt{1-\rho^2} + v_1 \tag{3.6}$$

<u>กรณี 2</u> เมื่อ t = 2,3,......,n

สมการการแปลงข้อมูลเป็นดังนี้

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + v_t \tag{3.7}$$

จากสมการที่ (3.6) และ (3.7) เราสามารถเขียนสมการการแปลงข้อมูล ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{\mathbf{y}}^* = \mathbf{X}^* \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\mathbf{v}}$$

โดยที่
$$\underset{\sim}{\mathbf{y}}^* = \begin{bmatrix} y_1\sqrt{1-\rho^2} \\ y_2 - \rho y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & x_1\sqrt{1-\rho^2} \\ (1-\rho) & x_2 - \rho x_1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ (1-\rho) & x_n - \rho x_{n-1} \end{bmatrix}$$

การประมาณค่า ρ ด้วย $\hat{\rho}$ ทำได้ดังนี้

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

เมื่อ $e_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_t$

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ คือ ค่าประมาณของ β_0, β_1 ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

จากการแปลงข้อมูลโดยวิธีของเพรสและวินส์ เราจะมาประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด โดยให้ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^*$ เป็นค่าประมาณของ $\underset{\sim}{\beta}$ ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\underset{\sim}{\mathbf{y}}^*$$

สมการที่ใช้ในการพยากรณ์ค่า y_{n+1} ณ คาบเวลา t = n+1 เป็นดังนี้

$$\hat{y}_{n+1} - \hat{\rho} y_n = (1-\hat{\beta}_0^*) + \hat{\beta}_1^*(x_{n+1} - \hat{\rho} x_n)$$
$$= (1-\hat{\beta}_0^*) + \hat{\beta}_1^*(x_{n+1} - \hat{\rho} x_n) + \hat{\rho} y_n$$

$$= \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_{n+1} + \hat{\rho}(y_n - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1^* x_n)$$
$$= \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_{n+1} + \hat{\rho}\hat{s}_n$$

ค่าพยากรณ์ของ y_{n+2} ณ คาบเวลา $t = n+2$

$$\hat{y}_{n+2} - \hat{\rho}\hat{y}_{n+1} = (1-\hat{\beta}_0^*) + \hat{\beta}_1^*(x_{n+2} - \hat{\rho}x_{n+1})$$
$$= (1-\hat{\beta}_0^*) + \hat{\beta}_1^*(x_{n+2} - \hat{\rho}x_{n+1}) + \hat{\rho}\hat{y}_{n+1}$$
$$= \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_{n+2} + \hat{\rho}(\hat{y}_{n+1} - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1^* x_{n+1})$$

เมื่อ แทนค่า $\hat{y}_{n+1} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_{n+1} + \hat{\rho}\hat{s}_n$

$$\hat{y}_{n+2} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_{n+2} + \hat{\rho}^2 \hat{s}_n$$

ดังนั้นสมการที่ใช้ในการพยากรณ์ค่า y_{n+m} ณ คาบเวลา $t = n+m$ เป็นดังนี้

$$\hat{y}_{n+m} = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_{n+m} + \hat{\rho}^m \hat{s}_n \qquad m = 1,2,\ldots\ldots,n$$

โดยที่

$$\hat{s}_n = y_n - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1^* x_n$$

4. วิธีการหาค่าพยากรณ์ร่วม

วิธีการหาค่าพยากรณ์ร่วม เป็นวิธีที่เกิดจากการรวมวิธีการพยากรณ์เข้าด้วยกัน โดยการให้น้ำหนักแก่วิธีการพยากรณ์

$$CF_t = \sum_{j=1}^{m} w_j \hat{y}_{jt}$$

โดยที่ w_j คือ ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของวิธีการพยากรณ์ที่ j

$\hat{y}_{jt}$ คือ ค่าพยากรณ์ของวิธีพยากรณ์ที่ j คาบเวลาที่ t

j คือ วิธีการพยากรณ์ที่ j ; j = 1,2,......m

t คือ คาบเวลา ; t = 1,2,......,n

วิธีการให้น้ำหนักที่เท่ากัน

$$w_j = \frac{1}{m}$$

โดยที่ $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$

m คือ จำนวนวิธีพยากรณ์ที่นำมารวมกัน

วิธีที่ใช้ในการหาค่าพยากรณ์ร่วม คือ วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดและวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบใช้การแปลงของเพรสและวินส์เทน

5. วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดแบบใช้การแปลงของเพรสและวินส์เทน

ในปี 1994 Deilman และ Rose ได้นำวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดมาใช้ร่วมกับการแปลงข้อมูลของเพรสและวินส์เทน ซึ่งการประมาณค่าด้วยวิธีการนี้เป็นดังนี้

การแปลงข้อมูลเพรสและวินส์เทน แบ่งเป็น 2 กรณี

<u>กรณี 1</u> เมื่อ t = 1

กำหนดให้ $\varepsilon_1 = \dfrac{v_1}{\sqrt{1-\rho^2}}$

แทนค่า ε_1 ในสมการ (5.1) สมการการแปลงข้อมูลเป็นดังนี้

$$y_1\sqrt{1-\rho^2} = \beta_0\sqrt{1-\rho^2} + \beta_1 x_1\sqrt{1-\rho^2} + v_1 \qquad (5.1)$$

<u>กรณี 2</u> เมื่อ t = 2,3,......,n

สมการการแปลงข้อมูลเป็นดังนี้

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + v_t \qquad (5.2)$$

เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$y_t^* = \beta_0 w_t^* + \beta_1 x^*_t + v_t \qquad ;\ t=1,2,......,n \qquad (5.3)$$

ประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด โดยให้ $\underset{\sim}{\tilde{\beta}}^*$ เป็นค่าประมาณของ $\underset{\sim}{\beta}$

เพราะฉะนั้น ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นคือ

หาค่าต่ำสุดของ $z = (p_1 + ...+ p_n + q_1 + ...+ q_n) + 0(\hat{\beta}_0^+ - \hat{\beta}_0^-) + 0(\hat{\beta}_1^+ - \hat{\beta}_1^-)$

ภายใต้เงื่อนไข

$$(\tilde{\beta}_0^{*+} - \tilde{\beta}_0^{*-})w_1^* + (\tilde{\beta}_1^{*+} - \tilde{\beta}_1^{*-})x_1^* + p_1 - q_1 = y_1^*$$
$$(\tilde{\beta}_0^{*+} - \tilde{\beta}_0^{*-})w_2^* + (\tilde{\beta}_1^{*+} - \tilde{\beta}_1^{*-})x_2^* + p_2 - q_2 = y_2^*$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$(\tilde{\beta}_0^{*+} - \tilde{\beta}_0^{*-})w_t^* + (\tilde{\beta}_1^{*+} - \tilde{\beta}_1^{*-})x_t^* + p_t - q_t = y_t^*$$

ค่าประมาณ $\widetilde{\beta}_0^*, \widetilde{\beta}_1^*$ คือ

$$\widetilde{\beta}_0^* = \widetilde{\beta}_0^{*+} - \widetilde{\beta}_0^{*-}$$
$$\widetilde{\beta}_1^* = \widetilde{\beta}_1^{*-} - \widetilde{\beta}_1^{*-}$$

โดยที่ $\widetilde{\beta}_0^{*+}, \widetilde{\beta}_0^{*-} \widetilde{\beta}_1^{*+}, \widetilde{\beta}_1^{*-} \geq 0$

เมื่อ t = 1

$$w_1^* = \sqrt{1-\rho^2}$$
$$y_1^* = y_1\sqrt{1-\rho^2}$$
$$x_1^* = x_1\sqrt{1-\rho^2}$$

เมื่อ t = 2,3,......,n

$$w_t^* = 1-\rho$$
$$y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}$$
$$x_t^* = x_t - \rho x_{t-1}$$

การประมาณค่า ρ ด้วย $\widetilde{\rho}$ ทำได้ดังนี้

จากรูปแบบความสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อน

$$e_t = \widetilde{\rho} e_{t-1} + v_t \tag{5.4}$$

จากการแปลงสมการ (5.4) ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น จะได้ว่า

เพราะฉะนั้น ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นคือ

หาค่าต่ำสุดของ $z = (p_2 + ...+ p_n + q_2 + ...+ q_n) + 0(\widetilde{\rho}^+ - \widetilde{\rho}^-)$

ภายใต้เงื่อนไข

$$(\widetilde{\rho}^+ - \widetilde{\rho}^-)e_1 + p_2 - q_2 = e_2$$
$$(\widetilde{\rho}^+ - \widetilde{\rho}^-)e_2 + p_3 - q_3 = e_3$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(\widetilde{\rho}^+ - \widetilde{\rho}^-)e_{t-1} + p_t - q_t = e_t$$

ค่า $\widetilde{\rho}$ ที่ได้จากการประมาณ คือ

$$\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}^+ - \widetilde{\rho}^-$$

โดยที่ $\widetilde{\rho}^+, \widetilde{\rho}^- \geq 0$

เมื่อ $e_t = y_t - \widetilde{\beta}_0 - \widetilde{\beta}_1 x_t$

$\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_1$ คือ ค่าประมาณของ β_0, β_1 ที่ได้จากวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด

สมการที่ใช้ในการพยากรณ์ y_{n+m} ณ คาบเวลา $t = n+1, n+2, \ldots\ldots, n+m$ เป็นดังนี้

$$\hat{y}_{n+m} = \tilde{\beta}_0^* + \tilde{\beta}_1^* x_{n+m} + \tilde{\rho}^m \tilde{s}_n \qquad ; m = 1,2,\ldots\ldots,12$$

โดยที่

$$\tilde{s}_n = y_n - \tilde{\beta}_0^* - \tilde{\beta}_1^* x_n$$

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ปรียารัตน์ นาคสุวรรณ์ (2534) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์จากสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย ที่มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดและวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เกณฑ์การเปรียบเทียบใช้ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยค่าความคลาด-เคลื่อนกำลังสองของการพยากรณ์ล่วงหน้า 12 คาบเวลา กำหนดการแจกแจงของความคลาดเคลื่อน (ε_t) ในสมการถดถอยมี การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ การแจกแจงลาปลาซ การแจกแจงโคชี และการแจกแจงแบบปกติปลอมปน สำหรับตัวแปรอิสระมี 4 รูปแบบ คือรูปแบบเส้นตรงตามเวลา (Simple Time trend) รูปแบบแนวโน้มขึ้นกับเวลา (Periodic trend) รูปแบบแนวโน้มไม่คงที่ (Stochastic trend) และรูปแบบอัตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (AR(1)) ขนาดตัวอย่างมี 3 ระดับ คือ 15,30 และ 50

ผลการศึกษาสรุปได้ดังนี้ คือ

1. กรณีที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงที่ไม่แสดงค่าผิดปกติ เช่น การแจกแจงแบบปกติ และการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะให้ค่าพยากรณ์ที่มีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด ในทุกรูปแบบตัวแปรอิสระ และทุกขนาดตัวอย่าง

2. กรณีที่ค่าความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงที่แสดงค่าผิดปกติ เช่น การแจกแจงลาปลาซ การแจกแจงโคชี และการแจกแจงปกติปลอมปน วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดจะให้ค่าพยากรณ์ที่มีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ในทุกรูปแบบตัวแปรอิสระ และทุกขนาดตัวอย่าง

ฝน เทพวัฒนะ (2534) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อการพยากรณ์ เมื่อความคลาดเคลื่อนมีอัตสหสัมพันธ์ของวิธีการประมาณ 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไป และวิธีการแปลงของคอคแครนและออร์คัต เกณฑ์การเปรียบเทียบใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองจากการพยากรณ์ล่วงหน้า 12 คาบเวลา ภายใต้เงื่อนไขของค่าอัตสหสัมพันธ์ 7 ระดับ คือ 0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8 และ0.9 รูปแบบตัวแปรอิสระ 4 รูปแบบคือ รูปแบบเส้นตรงตามเวลา (Simple Time trend) รูปแบบแนวโน้มขึ้นกับเวลา(Periodic trend) รูปแบบแนวโน้มไม่คงที่ (Stochastic trend) และรูปแบบอัตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (AR (1)) และขนาดตัวอย่าง 5 ระดับ คือ 10,15,30,50 และ 70

ผลการศึกษาสรุปได้ดังนี้ คือ

1. กรณีอัตสหสัมพันธ์ระดับต่ำ (0.3 และ 0.4)

กรณีขนาดตัวอย่างเล็กถึงปานกลาง (10,15,30 และ 50) วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ของ 3 วิธี มีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองใกล้เคียงกันในทุกรูปแบบตัวแปรอิสระ กรณีขนาดตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (70) วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไปมีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด ขณะที่วิธีการแปลงของคอคแครนและออร์คัตและวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญมีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองใกล้เคียงกัน ในทุกรูปแบบตัวแปรอิสระ

2. กรณีอัตสหสัมพันธ์ระดับกลางถึงระดับสูง (0.5,0.6,0.7,0.8 และ 0.9)

วิธีการแปลงของคอคแครนและออร์คัตมีค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองต่ำสุด รองลงมาคือ วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไปและวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญตามลำดับ ในทุกขนาดตัวอย่างและทุกรูปแบบตัวแปรอิสระ