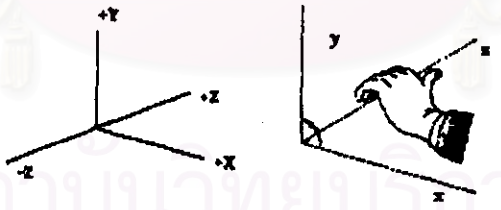
บทที่ 3
การสร้างภาพสามมิติ

การสร้างภาพไทโมกราฟีแบบสามมิติในงานวิจัยนี้ เลือกวิธีการสร้างภาพจากระนาบตัดขวางของสองมิติในแต่ละระดับ แล้วนำข้อมูลภาพแต่ละระดับตัดขวางมาประกอบเป็นภาพสามมิติ ซึ่งมีวิธีการคำนวณดังรายละเอียดต่อไปนี้

ระบบโคออร์ดิเนต ในการแสดงภาพแบบสามมิติจะมีแกนอ้างอิงสามแนวแกน คือ แกน X แกน Y และ แกน Z การกำหนดทิศทางของแกน Z มี 2 แบบ คือ แบบระบบมือขวา และ แบบระบบมือซ้ายดังภาพ

ก) ระบบมือขวา

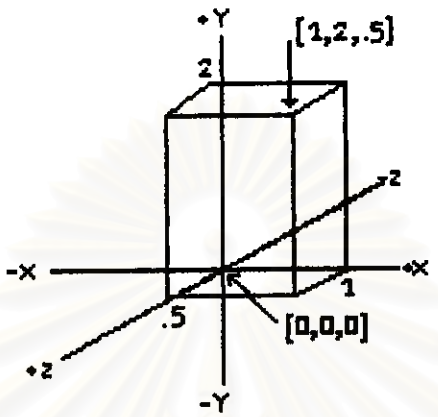


ข) ระบบมือซ้าย

รูปที่ 3.1 ระบบโคออร์ดิเนต 3 มิติ

ในระบบมือขวา จะใช้นิ้วหัวแม่มือขวาชี้ไปในแนวแกน +Z งอนิ้วที่เหลือทั้ง 4 นิ้ว ทิศทางการหมุนของนิ้วทั้ง 4 จะหมุนจากแกน +X เข้าหาแกน +Y ส่วนในระบบมือซ้าย จะใช้นิ้วหัวแม่มือของมือซ้ายชี้ไปในแนวแกน +Z งอนิ้วที่เหลือทั้ง 4 นิ้ว ทิศทางการหมุนของนิ้วทั้ง 4 จะหมุนจากแกน +X เข้าหาแกน +Y โดยทั่วไปมักใช้ระบบมือขวาในงานทางคณิตศาสตร์ หรืองานทางภูมิศาสตร์ แต่สำหรับระบบคอมพิวเตอร์กราฟิกส์ มักนิยมใช้ระบบมือซ้าย ทั้งนี้เพราะผู้ใช้จะถือว่าระนาบของจอภาพเป็นระนาบ XY และให้ระยะความลึกเข้าไปหลังจอภาพมีค่าเป็นบวก

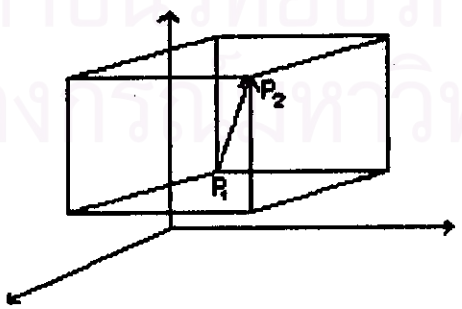
การกำหนดจุดในระบบ 3 มิติ ต้องใช้จำนวน 3 จำนวน เพื่อเป็นการระบุว่าจุดนั้นห่างจากจุดกำเนิด (0,0,0) ไปตามแนวแกน X Y และ Z เป็นค่าเท่าใด เช่นจุด (1,2,0.5)คือจุด ที่ห่างจากจุดกำเนิดในแนวแกน X ในทางบวก 1 หน่วย ห่างจากจุดกำเนิดในทางบวกของแกน Y 2 หน่วย และในแนวแกน Z ทางบวก 0.5 หน่วย



รูปที่ 3.2 ตัวอย่างตำแหน่งของจุด (1,2,0.5) ในระบบ 3 มิติ

เส้นตรงและเวคเตอร์ เส้นตรงในระบบ 3 มิติ กำหนดด้วยจุดปลายทั้ง 2 จุด ซึ่งทั้ง 2 จุดนี้สามารถกำหนดความยาว และทิศของเส้นตรง สำหรับเวคเตอร์ในระบบ 3 มิติ ก็กำหนดเหมือนเส้นตรง สำหรับทิศจะให้จุดแรกเป็นจุดเริ่มต้น และอีกจุดหนึ่งเป็นจุดปลาย เช่น ถ้ามีเวคเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นคือ $P_1(X_1,Y_1,Z_1)$ และมีจุดปลายคือ $P_2(X_2,Y_2,Z_2)$ เวคเตอร์นี้จะมีขนาดและทิศทางดังแสดงในรูปที่ 3.3 และขนาดของเวคเตอร์สามารถหาได้จากสมการ

$$\text{ขนาดของเวคเตอร์} = [(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2]^{1/2} \qquad (3.1)$$



รูปที่ 3.3 ตัวอย่างเวคเตอร์ในระบบ 3 มิติ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยทั่วไปเราจะสนใจเฉพาะทิศทางของเวคเตอร์เท่านั้น ซึ่งสามารถแทนแนวทิศของเวคเตอร์ได้ด้วยเมตริกซ์ [X Y Z] ค่าของ X Y และ Z เป็นอัตราส่วนซึ่งแสดงว่าเวคเตอร์นั้นทันเหไปในแนวแกน X Y และ Z มากน้อยเท่าใดตามลำดับ สำหรับในระบบคอมพิวเตอร์กราฟิกส์ มักใช้เมตริกซ์ [X Y Z] แทนเวคเตอร์นั้นไปเลย ถ้าจุดตั้งต้นของเวคเตอร์คือ $P_1(X_1,Y_1,Z_1)$ และมีจุดปลายของเวคเตอร์คือ $P_2(X_2,Y_2,Z_2)$ จะสามารถหาเวคเตอร์นี้ได้คือ [X Y Z] โดยที่

$$\begin{aligned} X &= X_2 - X_1 \\ Y &= Y_2 - Y_1 \\ Z &= Z_2 - Z_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

จะสังเกตุได้ว่าเวคเตอร์ที่ได้นี้แสดงเฉพาะทิศทางของเวคเตอร์เท่านั้น โดยไม่สนใจขนาดและจุดตั้งต้นของเวคเตอร์ ดังนั้นจึงสามารถใช้เวคเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วยเพื่อกำหนดทิศทาง เวคเตอร์ 1 หน่วยที่มีทิศทางตรงกับเวคเตอร์ที่เกิดจากจุด $P_1(X_1,Y_1,Z_1)$ และ $P_2(X_2,Y_2,Z_2)$ คือ [X Y Z] โดยที่

$$\begin{aligned} X &= (X_2 - X_1) / S \\ Y &= (Y_2 - Y_1) / S \\ Z &= (Z_2 - Z_1) / S \end{aligned} \tag{3.3}$$

โดยที่ S คือขนาดของเวคเตอร์

$$S = [(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2]^{1/2} \tag{3.3}$$

ระนาบ ระนาบเปรียบได้กับแผ่นกระดาษเรียบที่ไม่มีความหนา แต่มีขนาดใหญ่ไม่จำกัดตั้งอยู่ในระบบโคออร์ดิเนต ระนาบมีสมการในการกำหนด คือ

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.4}$$

เมื่อ A B C และ D คือค่าคงที่ และ (x, y, z) คือจุดใดๆที่อยู่บนระนาบ

ในกรณีที่ทราบ 3 จุดที่อยู่บนระนาบเดียวกันคือ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ และ $P_3(x_3,y_3,z_3)$ สามารถหาสมการของระนาบได้โดยแทนค่าจุดต่างๆลงบนสมการ

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

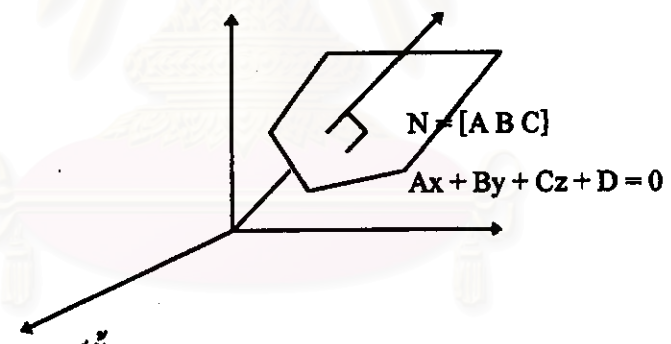
และจากสมการทั้งสามนี้ สามารถแก้สมการเพื่อหาค่า A B C และ D ได้ จาก

$$A = y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)$$
$$B = z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)$$
$$C = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

และ

$$D = - x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_3 z_1 - y_1 z_2) - x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)$$

การจัดเรียงตัวของระนาบในระบบโคออร์ดิเนต สามารถกำหนดได้ด้วยเวคเตอร์หนึ่งเวคเตอร์ ซึ่งเป็นเวคเตอร์มีทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวของระนาบ เราเรียกเวคเตอร์นี้ว่า เวคเตอร์ตั้งฉาก (Normal Vector) ถ้าสมการของระนาบคือ Ax + By + Cz + D = 0 เวคเตอร์ตั้งฉากของระนาบนี้คือ [A B C]



รูปที่ 3.4 เวคเตอร์ตั้งฉาก N ของระนาบ Ax + By + Cz + D = 0

การแปลงในระบบ 3 มิติ การแปลงในระบบ 3 มิติ สามารถใช้เมตริกซ์ขนาด 1 x 3 ช่วยในการทำการแปลง โดยจุด (x, y, z) จะแทนด้วย [X Y Z]

การแปลงแบบสเกล ในระบบภาพ 3 มิติ เมตริกซ์การแปลงแบบสเกลเป็นเมตริกซ์ขนาด 3 X 3 โดยมีรูปแบบเป็น

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$$

โดยที่ S_x S_y และ S_z คือ สเกลแฟคเตอร์สำหรับไดออร์ดิเนต X Y และ Z ตามลำดับ
และถ้าเป็นโฮโมจีเนียสไดออร์ดิเนตเมตริกซ์ หรือเมตริกซ์ที่มาจาก สมการ $Ax + By + Cz - D = 0$
จะมีรูปเป็นเมตริกซ์ขนาด 4 x 4 คือ

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ S_x S_y และ S_z คือ สเกลแฟคเตอร์สำหรับไดออร์ดิเนต X Y และ Z ตามลำดับ
การหมุนรอบแกน X Y และ Z ในระบบ 3 มิติ ค่าไดออร์ดิเนตของแกนที่หมุน จะคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง สามารถเขียนเป็นเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & \sin(a) & 0 \\ 0 & -\sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(a) & 0 & -\sin(a) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(a) & 0 & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) & 0 & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ a คือมุมที่หมุนแกน X Y หรือ Z ในทิศตามเข็มนาฬิกา
ตัวอย่าง ถ้าหมุนจุด $P_1(X_1,Y_1,Z_1)$ รอบแกน Z เป็นมุม a จะได้จุด $P_2(X_2,Y_2,Z_2)$ คือ

$$X_2 = X_1 \cos(a) - Y_1 \sin(a)$$
$$Y_2 = X_1 \sin(a) - Y_1 \cos(a)$$
$$Z_2 = Z_1$$

แต่ถ้าเป็นการหมุนรอบแกน X จุด $P_2(X_2,Y_2,Z_2)$ คือ

$$X_2 = X_1$$
$$Y_2 = Y_1 \cos(a) - Z_1 \sin(a)$$
$$Z_2 = Y_1 \sin(a) - Z_1 \sin(a)$$

และเมื่อหมุนรอบแกน Y จุด $P_2(X_2,Y_2,Z_2)$ คือ

$$X_2 = Z_1 \sin(a) - X_1 \cos(a)$$
$$Y_2 = Y_1$$
$$Z_2 = Z_1 \cos(a) - X_1 \sin(a)$$

การสร้างภาพ 3 มิติ

ภาพของวัตถุ 3 มิติ ซึ่งต้องใช้โคออร์ดิเนต ถึง 3 แกน จะต้องถูกวาดลงบนจอภาพที่เป็นระนาบ 2 มิติเพื่อแสดงภาพ ดังนั้นจึงต้องมีวิธีแสดงภาพ 2 มิติของวัตถุที่ถูกกำหนดในโคออร์ดิเนต 3 มิติ

โปรเจกชันแบบขนาน(Parallel Projection) โปรเจกชัน เป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถสร้างภาพ 3 มิติได้ โดยการฉายเงา(Project) ของวัตถุขนานกันไปตกลงบนระนาบหนึ่ง ที่ระนาบก็จะเกิดเป็นเงา หรือภาพ 2 มิติของวัตถุนั้น และเรียกระนาบนี้ว่า ระนาบภาพ (View Plane) หรือ ฉาก แต่ปัญหาพื้นฐานสำหรับการแสดงภาพสองมิติที่มาจากวัตถุสามมิติคือความลึก (Depth) เมื่อทำการฉายเงาให้ปรากฏภาพที่ฉาก รายละเอียดเกี่ยวกับความลึกของภาพจะลดน้อยหรือหายไป

การทำโปรเจกชันแบบขนาน เรามักใช้ระนาบ XY เป็นระนาบภาพ และทิศทางโปรเจกชันมีทิศทางขนานกับแนวแกน Z เงาของจุดต่างๆที่เกิดขึ้นบนระนาบภาพ จะมีค่าโคออร์ดิเนต X และ Y ที่ไม่เปลี่ยนแปลง เพราะทิศทางโปรเจกชันลากตรงจากจุดต่างๆขนานแกน Z ลงมาตัดกับระนาบ XY ทำให้การทำโปรเจกชันนั้น คือ เพียงแค่ตัดค่าโคออร์ดิเนต Z ของจุดเหล่านั้นออก เราก็จะได้ตำแหน่งเงาของจุดนั้นบนระนาบภาพ เช่น จุด P(x,y,z) จะทำให้เกิดจุด $P'(x', y')$ บนระนาบภาพหรือดังสมการ

$$x' = x$$

$$y' = y$$

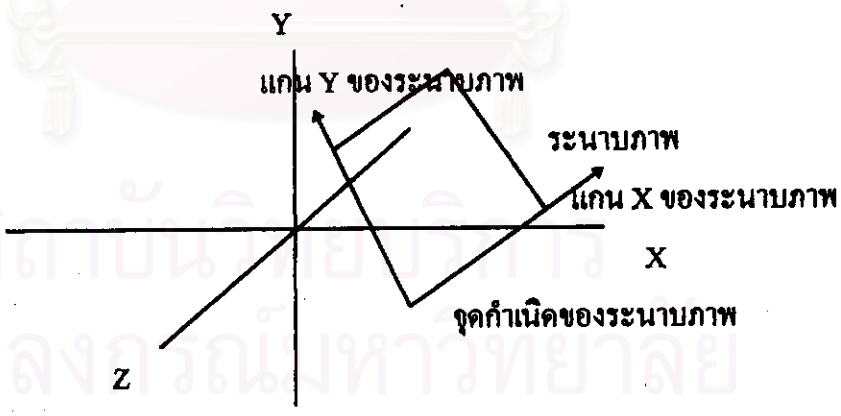
แต่ถ้าทิศทางโปรเจกชันเปลี่ยนไปทำมุม A กับแกน x และทำมุม B กับ ระนาบ z = 0 จะทำให้เกิดจุด $P'(x',y')$ บนระนาบภาพดังสมการ

$$x' = x \cos A - y \sin B$$

$$y' = x \sin A \sin B + y \cos A \cos B + z \cos B$$

ภาพที่เกิดขึ้นบนระนาบภาพของวัตถุเดียวกัน อาจแตกต่างกันได้ขึ้นกับองค์ประกอบต่างๆ ที่มีผลต่อการสร้างภาพ ซึ่งเราเรียกว่า "พารามิเตอร์ภาพ(Viewing Parameters)"

ก่อนที่จะกล่าวถึงพารามิเตอร์ต่างๆ เราควรรู้จักระนาบภาพให้ละเอียดก่อน ระนาบภาพคือระนาบที่เราฉายเงาของวัตถุลงไป ภาพของเงาที่เกิดขึ้นบนระนาบจะเป็นภาพ 2 มิติของวัตถุ และเป็นภาพที่จะถูกแสดงทางจอภาพ ระนาบภาพสามารถเป็นระนาบใดๆก็ได้ที่ตั้งอยู่ในโคออร์ดิเนต 3 มิติ ที่วัตถุนี้อยู่เรียกว่า ออปเจ็กโคออร์ดิเนต (Object Coordinates) เราจะมองระนาบภาพนี้เสมือนกับเป็นระนาบ XY ธรรมดาที่วางตัวอยู่ในระบบ มีแกน X แกน Y และจุดกำเนิดของระนาบดังแสดงในรูป



รูปที่ 3.5 ระนาบภาพในระบบโคออร์ดิเนต 3 มิติ

ระบบโคออร์ดิเนต XY ของระนาบภาพนี้เรียกว่าโคออร์ดิเนตของระนาบภาพ (View Plane Coordinates) ซึ่งเราอาจเปรียบเทียบระนาบภาพได้กับ ฟิล์มในกล้องถ่ายภาพ วัตถุที่เราถ่ายคือวัตถุในระบบโคออร์ดิเนต ซึ่งเงาของวัตถุนั้นจะตกไปที่ฟิล์มในกล้องเกิดเป็นภาพบนฟิล์ม ขณะเดียวกันตำแหน่งของฟิล์มก็เป็นตำแหน่งที่เรามองวัตถุด้วย เราสามารถย้ายตำแหน่งหรือเปลี่ยนมุมของกล้อง

ถ่ายภาพ เพื่อให้ได้ภาพถ่ายที่มีลักษณะต่างออกไป ระนาบภาพก็เช่นกัน เราสามารถโยกย้ายและวางระนาบภาพไว้ในลักษณะใดที่เราต้องการ ตำแหน่งการวางตัวของระนาบภาพต้องใช้พารามิเตอร์ 4 ตัวในการกำหนด

พารามิเตอร์ตัวแรกคือ จุดอ้างอิงภาพ (View Reference Point) $P_r(X_r,Y_r,Z_r)$ จุดนี้เป็นจุดศูนย์กลางของความสนใจในการมองภาพของเรา พารามิเตอร์ตัวที่สอง คือ เวคเตอร์ตั้งฉากของระนาบภาพ (View Plane Normal Vector) $N = [X_n\ Y_n\ Z_n]$ เป็นเวคเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบภาพ ถ้าเราลากเส้นตรงจากจุดอ้างอิงภาพ ให้ขนานกับเวคเตอร์ N ไปตั้งฉากกับระนาบภาพ จุดที่เส้นตรงนี้ตัดกับระนาบภาพคือจุดกำเนิดของโคออร์ดิเนตของระนาบภาพนั้นเอง พารามิเตอร์ตัวที่สามคือ ระยะภาพ(View Distance) หมายถึง ระยะห่างระหว่างจุดอ้างอิงภาพและระนาบภาพ โดยปกติ เรามักกำหนดระยะภาพให้เป็นศูนย์ ทำให้จุดอ้างอิงภาพและจุดกำเนิดของระนาบภาพเป็นจุดเดียวกัน และ พารามิเตอร์ตัวสุดท้าย คือ วิวอัพเวคเตอร์ (View-up Vector) $V = [X_v\ Y_v\ Z_v]$ เป็นเวคเตอร์ที่กำหนดแนวทิศทางตั้งขึ้นของโคออร์ดิเนตของระนาบภาพ นั้นคือเวคเตอร์ V เป็นเวคเตอร์ที่ขนานและมีทิศทางเดียวกับแกน +Y ของโคออร์ดิเนตของระนาบภาพ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย