ระบบการแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนแบบฐานคู่

นางสาววรางคณา เบญจศีล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2549

A DOUBLE-BASE REPRESENTATION FOR QUATERNION SYSTEM

Miss Warangkana Benjasil

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science Program in Computer Science

Department of Computer Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2006

หัวข้อวิทยานิพนธ์	**ระบบการแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนแบบฐานคู่**
โดย	**นางสาววรางคณา เบญจศีล**
สาขาวิชา	**วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์**
อาจารย์ที่ปรึกษา	**อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์**

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

ประธานกรรมการ
(อาจารย์ ดร.อาทิตย์ ทองทักษ์)

อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

กรรมการ
(อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

วรางคณา เบญจศีล : **ระบบการแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนแบบฐานคู่.** (A DOUBLE-BASE REPRESENTATION FOR QUATERNION SYSTEM) อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร.**อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 50 หน้า.**

ในปัจจุบันระบบเวกเตอร์ได้ถูกนำใช้ในงานประยุกต์ต่างๆ (คือ เครื่องกล การประมวลผลสัญญาณ ฟิสิกส์ ไฟฟ้า) และรูปแบบที่ใช้ในการแทนค่าของระบบเวกเตอร์สี่มิติโดยทั่วไปประกอบไปด้วยจำนวนจริงหนึ่งจำนวนและเวกเตอร์สามจำนวน คือ i, j และ k ซึ่งชุดตัวเลขที่ใช้ยังติดอยู่ในรูปของเวกเตอร์ ทำให้ทำการคำนวณได้ช้ามาก ในงานวิจัยนี้นำเสนอระบบการแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่ ในระบบนี้ประกอบด้วยฐานที่เป็นเวกเตอร์ และชุดตัวเลขที่เป็นจำนวนจริง โดยนำแนวคิดในระบบจำนวนฐานคู่มาประยุกต์ใช้ในการทำการแทนค่าของระบบเวกเตอร์สี่มิติ ซึ่งจะเรียกระบบนี้ว่า ระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยที่จะทำการพิสูจน์ว่าระบบเวกเตอร์สี่มิติที่เป็นจำนวนเต็มสามารถแทนค่าให้อยู่ในรูปแบบของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้ การคำนวณพื้นฐานที่ใช้ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ คือ การบวก การลบ และการคูณ และสามารถทำการคำนวณแบบขนานได้

ภาควิชา ....วิศวกรรมคอมพิวเตอร์.... ลายมือชื่อนิสิต ....วรางคณา เบญจศีล....

สาขาวิชา ....วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์.... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

ปีการศึกษา ....2549....

4870455221 : MAJOR COMPUTER SCIENCE

KEY WORD: REDUNDANT NUMBER SYSTEM / DOUBLE-BASE NUMBER SYSTEM / QUATERNION

WARANGKANA BENJASIL : A DOUBLE-BASE REPRESENTATION FOR QUATERNION SYSTEM. THESIS ADVISOR : ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 50 pp.

This research proposes a double-base vector representation system. We focus on four-dimensional vector space, called quaternion system. The representation of quaternion system contains one real number and three unit vectors, which are denoted by i, j, and k. Although the vector is used in many applications (i.e., mechanics, physics, signal processing, electrical), the computation of vector is very slow. By adapting the concept of double-base for vector representation, two vectors are proposed as the bases for representing the quaternion system. We prove that four-dimensional vectors can have representation in the proposed double-base quaternion system. Fundamental arithmetic operations for quaternion system are also introduced, including addition, subtraction and multiplication. Moreover, using the proposed quaternion system the vector operations can be processed in parallel manner.

Department ......Computer Engineering...... Student's signature ....

Field of study ....Computer Science............ Advisor's signature ....

Academic year ..2006..............................

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีเพราะความช่วยเหลือและคำชี้แนะของ อาจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ที่สละเวลาคอยให้คำแนะนำ แนวทาง และคำปรึกษา

ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร.อาทิตย์ ทองทักษ์ อาจารย์ ดร. เศรษฐา ปานงาม และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง ที่ให้เกียรติสละเวลามาเป็นกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ และกรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอบคุณสมาชิกห้องแล็บ ELITE สำหรับคำแนะนำต่างๆ บรรยากาศการอยู่ร่วมกันที่สนุกสนาน และขอบคุณ พี่ๆ เพื่อนๆ น้องๆ ทุกคนที่คอยช่วยเหลือ โดยเฉพาะคุณสุนิสา ริมเจริญที่คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือและให้กำลังใจ

สุดท้ายนี้ กราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และพี่ที่เป็นกำลังใจและคอยผลักดันจนสามารถประสบความสำเร็จในวันนี้

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ระบบจำนวนในระบบคอมพิวเตอร์นั้นมีอยู่หลากหลายระบบ แต่ละระบบจำนวนประกอบด้วยเซตของตัวเลขและฐาน โดยทั่วไประบบจำนวนในคอมพิวเตอร์จะใช้ฐานเป็นฐานสอง นอกจากนั้นยังมีระบบจำนวนชนิดอื่นอีก เช่น ระบบจำนวนเชิงซ้อน[1-3] ที่ใช้ฐานเป็นจำนวนเชิงซ้อน งานวิจัยทางด้านระบบจำนวนส่วนใหญ่จะสนใจในเรื่องของความเร็วที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งการเพิ่มความเร็วในการคำนวณนั้นมีหลายวิธี แต่เทคนิคหนึ่งที่เราสนใจ คือ ระบบจำนวนแบบซ้ำซ้อน (redundant number systems) ซึ่งเป็นระบบจำนวนใดๆ ที่มีรูปแบบการแสดงจำนวนแบบจำกัดได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ทำให้ในระหว่างการคำนวณสามารถจำกัดการแพร่ของตัวทดที่เกิดขึ้นได้ และยังสามารถทำการคำนวณแบบขนาน (parallel computation) ได้อีกด้วย ตัวอย่างหนึ่งของระบบจำนวนแบบซ้ำซ้อนนี้ คือ ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย (signed-digit number systems) ของ อเวเซียนีส (Avizienis) [4] ซึ่งตัวเลขต่างๆ ในระบบจำนวนนี้สามารถมีเครื่องหมายได้ ทำให้สามารถเขียนจำนวนหนึ่งๆ ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ต่อมาได้มีการนำระบบจำนวนซ้ำซ้อนนี้มาประยุกต์ใช้กับระบบเวกเตอร์ เพราะในปัจจุบันได้มีการนำระบบเวกเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการคำนวณหลายสาขา ได้แก่ คำนวณในทางฟิสิกส์ ไฟฟ้า เครื่องกล โดยจะใช้เวกเตอร์ในการแทนทิศทางและขนาดของแรงที่กระทำต่อวัตถุโดยจะนำระบบเวกเตอร์มาใช้แทนข้อมูลในแต่ละมิติ อย่างไรก็ตามการคำนวณในระบบเวกเตอร์ยังประสบปัญหาในเรื่องของความเร็วในการคำนวณ

ในงานวิจัยที่ผ่านมาได้มีการนำเสนอรูปแบบการแทนเวกเตอร์สามมิติที่สามารถทำการคำนวณแบบเชื่อมตรง (on-line computation) [5] ซึ่งรูปแบบแทนเวกเตอร์เป็นลำดับของตัวเลขเพียงชุดเดียว แล้วนำมาทำการคำนวณแบบเชื่อมตรง ทำให้เพิ่มประสิทธิภาพของการคำนวณในระบบเวกเตอร์ได้ แต่ตัวเลขในชุดตัวเลขมีจำนวนมาก และยังเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์

ในปี ค.ศ.1996 ได้มีการนำเสนอระบบจำนวนแบบใหม่ที่สามารถทำการคำนวณแบบขนานได้ คือ ระบบจำนวนแบบฐานคู่ (double-base number system : DBNS) ซึ่งระบบจำนวนแบบฐานคู่นี้ประกอบด้วยฐานสองตัวที่มีความแตกต่างกัน ได้แก่ ฐานสอง และฐานสาม โดยใช้ชุดตัวเลขเหมือนกับระบบเลขฐานสอง อีกทั้งคุณสมบัติของระบบนี้ คือ มีความซ้ำซ้อนสูง ซึ่งก็คือค่าเชิงตัวเลขใดๆ ในระบบนี้สามารถเขียนแทนค่าได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ และระบบนี้ยังมีการกระจาย

ตัวของข้อมูลสูงและมีจำนวนของตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์ (non-zero digits) น้อย ส่งผลให้การบวกสามารถทำได้เร็ว

เนื่องจากต้องการพัฒนาให้ระบบเวกเตอร์สามารถที่จะทำการคำนวณแบบขนานได้ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณ เพราะว่าการคำนวณแบบขนานสามารถที่จะทำการคำนวณไปได้พร้อมกันโดยที่ไม่ต้องคำนวณจากเลขนัยสำคัญต่ำสุดไปเลขที่มีนัยสำคัญสูงสุด จึงจะนำเสนอโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่ และรูปแบบการแทนเวกเตอร์สามมิติมาประยุกต์ใช้เข้าด้วยกัน โดยจะใช้ฐานเป็นเวกเตอร์ เพื่อที่จะทำให้ชุดตัวเลขเป็นจำนวนจริงและมีจำนวนน้อยลง แต่รูปแบบแทนเวกเตอร์แบบสามมิติมีข้อจำกัดในเรื่องของคุณสมบัติในการคูณกัน (cross product)ของเวกเตอร์ที่ไม่สามารถจะนำเวกเตอร์มาเป็นฐานได้ แต่สามารถนำมาใช้กับเวกเตอร์สี่มิติได้ ซึ่งเวกเตอร์สี่มิตินั้นมีคุณสมบัติที่สามารถใช้เป็นฐานในรูปของเวกเตอร์แทน ดังนั้นตัวเลขในระบบใหม่นี้จึงไม่ติดอยู่ในรูปของเวกเตอร์ ส่งผลให้สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับระบบจำนวนแบบฐานคู่ได้

ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะนำเสนอระบบการแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่ที่มีฐานอยู่ในรูปของเวกเตอร์ ทำให้สามารถทำการคำนวณแบบขนานในระบบเวกเตอร์ได้ และตัวดำเนินการเลขคณิตพื้นฐานที่ใช้ คือ การบวก การลบ และการคูณ

1.2 วัตถุประสงค์

เพื่อพัฒนาการแทนค่าสำหรับระบบเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่ และการคำนวณพื้นฐานที่ใช้ คือ การบวก การลบ และการคูณ ซึ่งฐานที่ใช้ในระบบจำนวนฐานคู่เป็นเวกเตอร์ เพื่อปรับปรุงประสิทธิภาพของความเร็วในการคำนวณ

1.3. ขอบเขตการวิจัย

1. เสนอระบบแทนจำนวนเวกเตอร์สี่มิติที่ใช้ระบบจำนวนฐานคู่ โดยใช้ฐานที่เป็นเวกเตอร์
2. เสนออัลกอริทึมในการแปลงชุดตัวเลขบนระบบแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนแบบฐานคู่
3. เสนอตัวดำเนินการพื้นฐานเชิงเลขคณิตบนระบบจำนวนเวกเตอร์ คือ การบวก การลบ และการคูณ

1.4. ขั้นตอนการวิจัย

1. ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับระบบจำนวนฐานคู่
2. ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับระบบเวกเตอร์สี่มิติ
3. หาค่าเวกเตอร์ที่จะใช้เป็นฐานในระบบจำนวนฐานคู่
4. หาตัวดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์สำหรับระบบแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่
5. พิสูจน์แนวคิดที่นำเสนอในงานวิจัย
6. สรุปผลและจัดทำวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้การแทนระบบเวกเตอร์สี่มิติด้วยระบบจำนวนฐานคู่ที่มีลักษณะการทำงานแบบขนาน (Parallel Computation)

2. สามารถนำวิธีการแทนเวกเตอร์แบบใหม่นี้ไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์เป็นบทความทางวิชาการในหัวข้อเรื่อง “A double-base quaternion system: representation and operations” โดย วรางคณา เบญจศีล และ อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ “The 4th International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering (JCSSE 2007)”

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในงานวิจัยและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ระบบจำนวน ระบบจำนวนซ้ำซ้อน ระบบจำนวนฐานคู่ และระบบเวกเตอร์สี่มิติ

2.1 ระบบจำนวน (Number System)

ระบบจำนวน (β, D) ประกอบด้วยเลขฐาน β โดยที่ β สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|\beta| > 1$ และ ชุดตัวเลขแบบจำกัด (finite digit-set) D ที่ตัวเลขสามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ X เป็นจำนวนใดๆ X สามารถแสดงได้ในเลขฐาน β ในรูปแบบ

$$X = (x_n x_{n-1} \cdots x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots)_\beta$$

ซึ่ง $x_i \in D$ โดยที่ $i \le n,\ \exists n \in \mathbb{Z}$

โดยค่าเชิงตัวเลขของ X ฐาน β สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i \beta^i$$

ซึ่งค่าเชิงตัวเลขทั้งหมดที่แสดงได้สามารถเขียนให้อยู่รูปของเซต $P[\beta, D]$ ได้ดังนี้

$$P_n^m[\beta, D] = \left\{ X = (x_n x_{n-1} \cdots x_{m+1} x_m)_\beta \,\middle|\, x_i \in D, m \le i \le n \right\}$$
$$P_n[\beta, D] = \left\{ X = (x_n x_{n-1} \cdots)_\beta \,\middle|\, x_i \in D, i \le n \right\}$$

โดย $P_n^m[\beta, D]$ และ $P_n[\beta, D]$ เท่ากับ เซตจำกัดและเซตไม่จำกัด ตามลำดับ ในระบบเลขฐานจำนวนเต็มโดยทั่วไปแล้วนิยมให้ $D = \{0, 1, \cdots, |\beta| - 1\}$ ซึ่ง D จะถูกเรียกว่าเป็น ชุดตัวเลขแบบคาโนนิคอล (canonical digit-set)

2.2 ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (Redundant Number Systems)

ระบบจำนวนซ้ำซ้อน คือ ระบบจำนวนใดๆ ที่มีรูปแบบที่ใช้ในการแสดงค่าเชิงตัวเลขของจำนวน X ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ โดยที่กำหนดให้ β เป็นเลขฐาน โดยที่ $\beta \ge 2$ และ

กำหนดให้ D เป็นชุดตัวเลขที่มีค่าเป็น $\{d \in Z \mid \alpha_1 \le d \le \alpha_2\}$ โดย $-\alpha_1 + \alpha_2 \ge \beta$ ยกตัวอย่าง เช่น ให้ชุดตัวเลข D มีค่า $\{\bar{7}, \bar{6}, \ldots, 0, \ldots, 6, 7\}$ บนเลขฐาน $\beta = 10$ และค่าเชิงตัวเลข $X = 269$ จะมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & \bar{1} \end{pmatrix}_{10} = 2*10^2 + 7*10^1 + (-1)*10^0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}_{10} = 3*10^2 + (-3)*10^1 + (-1)*10^0$$

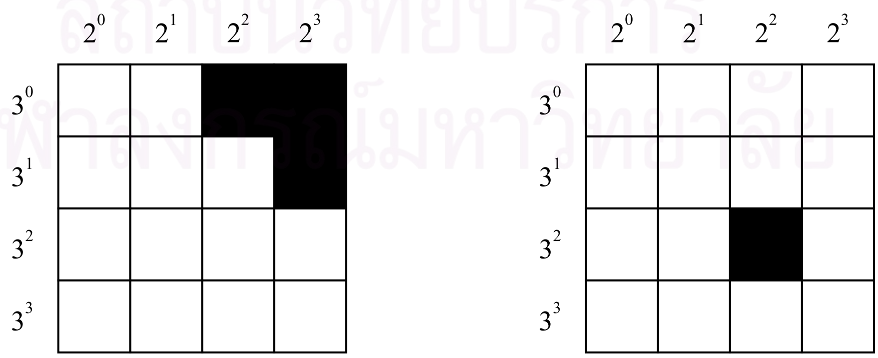
$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{7} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}_{10} = 1*10^3 + (-7)*10^2 + (-3)*10^1 + (-1)*10^0$$

2.3 ระบบจำนวนฐานคู่ (Double-Base Number System)

ระบบจำนวนฐานคู่ได้ถูกนำเสนอในปี 1996 โดยดิมิทรอฟ (Dimitrov) จูเลี่ยน (Jullien) และ มิลเลอร์ (Miller) [6-9] เป็นระบบจำนวนที่ใช้ฐานคู่ ประกอบด้วยฐานสองและฐานสาม ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\|X\| = \sum_{i,j} d_{i,j} 2^i 3^j,\ d_{i,j} \in \{0,1\}$$

ซึ่ง $d_{i,j}$ เป็นชุดของตัวเลข (digit set) $\{0,1\}$ และ i, j เป็นจำนวนเต็มใดๆ ระบบจำนวนแบบฐานคู่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบตารางสองมิติ โดยให้ค่าตามหลัก เป็นค่ายกกำลังของสอง และค่าตามแถว เป็นค่ายกกำลังของสาม ระบบจำนวนนี้เป็นระบบจำนวนแบบซ้ำซ้อน เช่น ค่าของ 36 สามารถแสดงแทนด้วยตารางสองมิติในระบบจำนวนฐานคู่ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ดังรูปที่ 2.1 โดยเรียกช่องสีดำว่าบิตที่แอ็กทิฟ หรือ แอ็กทิฟเซลล์ (active cell) ซึ่งมีค่า $d_{i,j}$ มีค่าเป็น 1 สำหรับช่องที่เป็นสีขาวจะมีค่า $d_{i,j}$ เป็น 0 เรียกว่าบิตที่ไม่แอ็กทิฟ



(ก) (ข)

รูปที่ 2.1 การแทนค่าของ 36 ด้วยตารางในระบบเลขจำนวนฐานคู่

จากรูปที่ 2.1(ก) จะแสดงค่า 36 ในรูปแบบของสมการได้ดังนี้

$$36 = 2^2 3^0 + 2^3 3^0 + 2^3 3^1$$

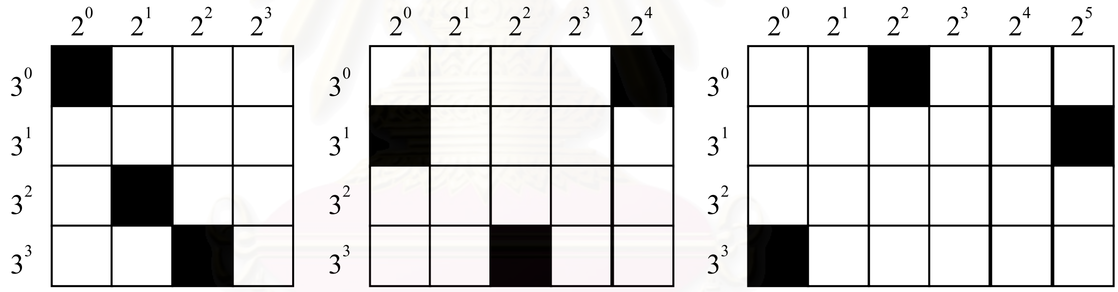
จากรูปที่ 2.1(ข) จะแสดงค่า 36 ในรูปแบบของสมการได้ดังนี้

$$36 = 2^2 3^2$$

จะเห็นได้ว่ารูปที่ 2.1(ข) มีจำนวนเลขที่ไม่เป็นศูนย์น้อยกว่ารูปที่ 2.1(ก) ทำให้มีประสิทธิภาพในการคำนวณมากขึ้น และเห็นได้ว่ารูปที่ 2.1(ข) อยู่ในรูปแบบคาโนนิก (canonical form) คือ รูปแบบของการคำนวณค่าเชิงตัวเลขโดยใช้จำนวนเลขที่ไม่เป็นศูนย์น้อยที่สุด ตัวอย่างเช่น ค่าของ 127 มีรูปแบบการแทนค่าที่แตกต่างกันถึง 783 รูปแบบ โดยจะมีรูปแบบที่เป็นคาโนนิกได้ 3 รูปแบบ [9] ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 127 &= 2^2 3^3 + 2^1 3^2 + 2^0 3^0 \\ &= 2^2 3^3 + 2^4 3^0 + 2^0 3^1 \\ &= 2^5 3^1 + 2^0 3^3 + 2^2 3^0 \end{aligned}$$

โดยสามารถแสดงค่าในรูปแบบของตารางสองมิติได้ดังรูปที่ 2.2



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 2.2 การแทนค่าด้วยรูปแบบคาโนนิกของ 127

ในการหารูปแบบที่เป็นคาโนนิกนั้นทำได้ยาก ดังนั้นจึงใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบ (greedy algorithm) มาช่วยในการหารูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบใกล้เคียงคาโนนิก (near-canonic double-base number representation : NCDBNR) [6, 8] โดยที่การทำให้อยู่ในรูปแบบนี้จะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบที่ไม่มีตัวเลขที่ไม่ใช่ศูนย์ติดกัน ซึ่งมีนิยามดังนี้

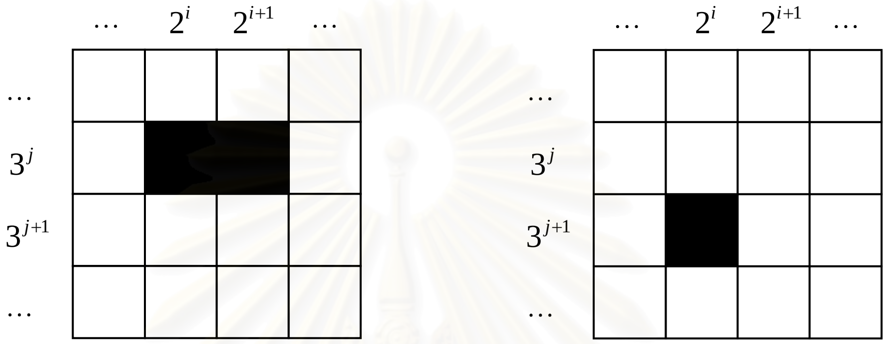
นิยามที่ 2.1 *รูปแบบแทนจำนวนแบบฐานคู่ที่ไม่มีตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์ติดกัน จะเรียกรูปแบบนี้ว่า* รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบพร้อมบวก (addition ready DBNR: ARDBNR)

รูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบพร้อมบวกจะทำได้โดยการแปลงรูป เพื่อที่จะทำให้มีตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์น้อยลง โดยจะต้องใช้กฎดังนี้

กฎข้อที่ 1 กฎของการลดแถว เป็นกฎของการลดแถวที่มีตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน

$$2^i 3^j + 2^{i+1} 3^j = 2^i 3^{j+1}$$

โดยสามารถแสดงกฎของการลดแถวได้ดังรูปที่ 2.3

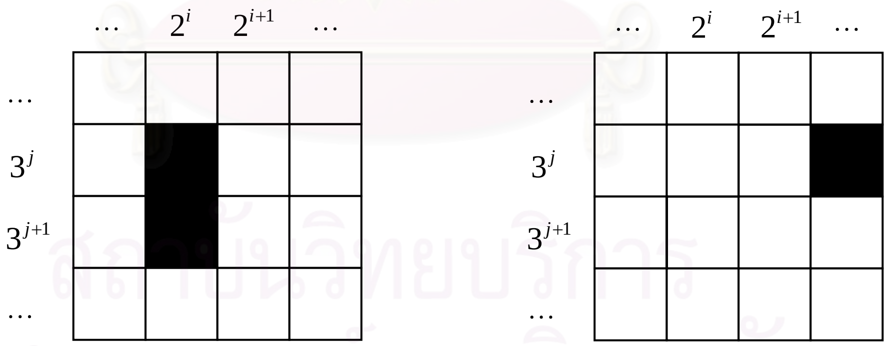


รูปที่ 2.3 กฎของการลดรูปตามแถวในระบบจำนวนฐานคู่

กฎข้อที่ 2 กฎของการลดหลัก เป็นกฎของการลดหลักที่มีตัวเลขที่ไม่เป็นศูนย์อยู่ติดกัน

$$2^i 3^j + 2^i 3^{j+1} = 2^{i+2} 3^j$$

โดยสามารถแสดงกฎของการลดหลักได้ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 กฎของการลดรูปตามหลักในระบบจำนวนฐานคู่

ในรูปที่ 2.3 และ 2.4 แสดงการลดรูปตามแถวและตามหลักตามลำดับ จากตารางจะเห็นได้ว่าจำนวนเลขที่ไม่เป็นศูนย์ (non-zero digit) มีจำนวนน้อยลง

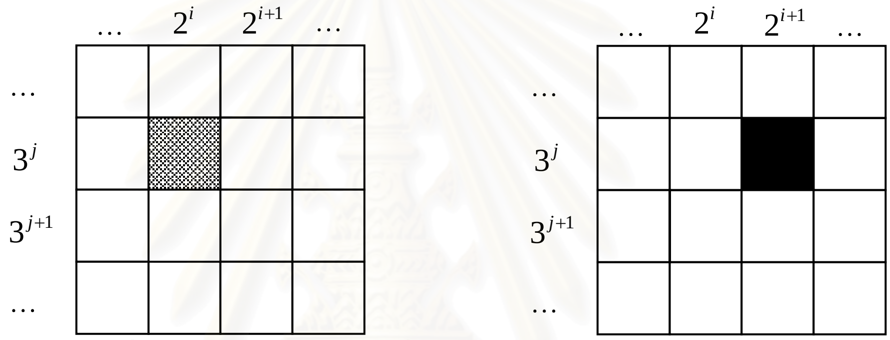
2.3.1 การบวกของระบบจำนวนฐานคู่

ในการทำการบวกกันของระบบจำนวนฐานคู่ทำได้โดยการซ้อนทับกันของตารางทั้งสองตารางที่จะนำมาบวกกัน ซึ่งตารางที่จะนำมาทำการบวกกันนั้นต้องอยู่ในรูปแบบแทนจำนวนฐานคู่แบบพร้อมบวก และเมื่อนำตารางมาซ้อนทับกันแล้วอาจเกิดช่องที่เป็นแอ็กทิฟเซลล์ซ้อนทับกัน ดังนั้นจะต้องทำการเปลี่ยนรูปเพื่อไม่ให้มีแอ็กทิฟเซลล์ซ้อนทับกัน ดังกฎต่อไปนี้

กฎข้อที่ 3 กฎของการลดช่องที่ซ้อนทับกัน

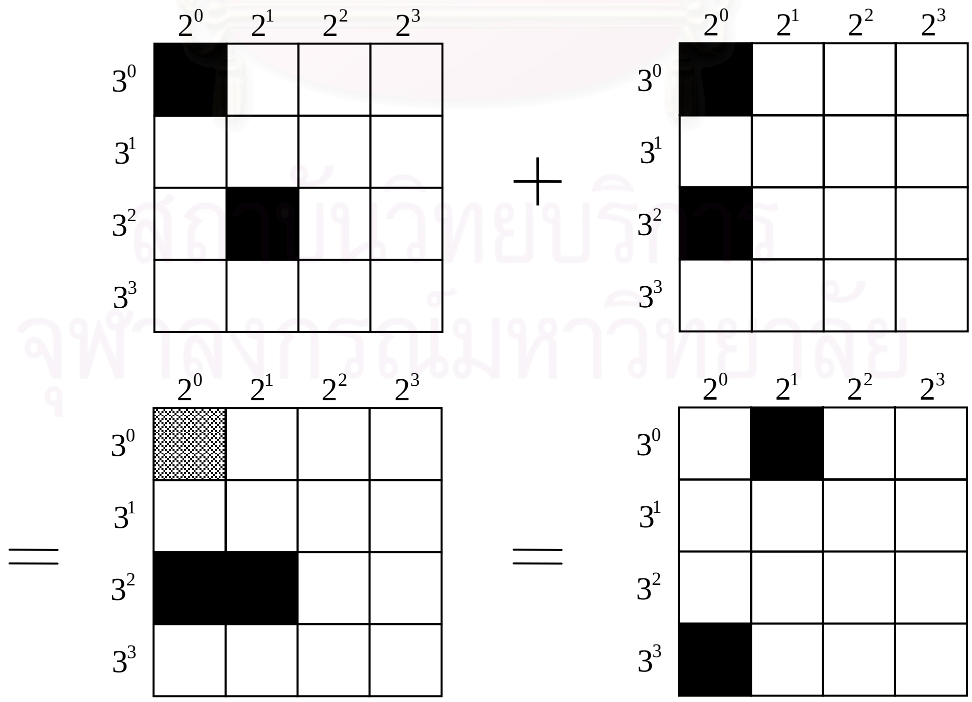
$$2^i3^j + 2^i3^j = 2^{i+1}3^j$$

สามารถแสดงกฎของการลดช่องที่ซ้อนทับกันในรูปแบบของตารางได้ดังรูปที่ 2.5 โดยที่ช่องทีมีแอ็กทิฟเซลล์ซ้อนทับกันเราจะแสดงด้วยช่องที่มีเส้นที่ไขว้กัน



รูปที่ 2.5 กฎของการลดช่องที่ซ้อนทับกันในระบบจำนวนฐานคู่

จะแสดงตัวอย่างของการบวกกันของระบบจำนวนฐานคู่ได้ดังรูปที่ 2.6



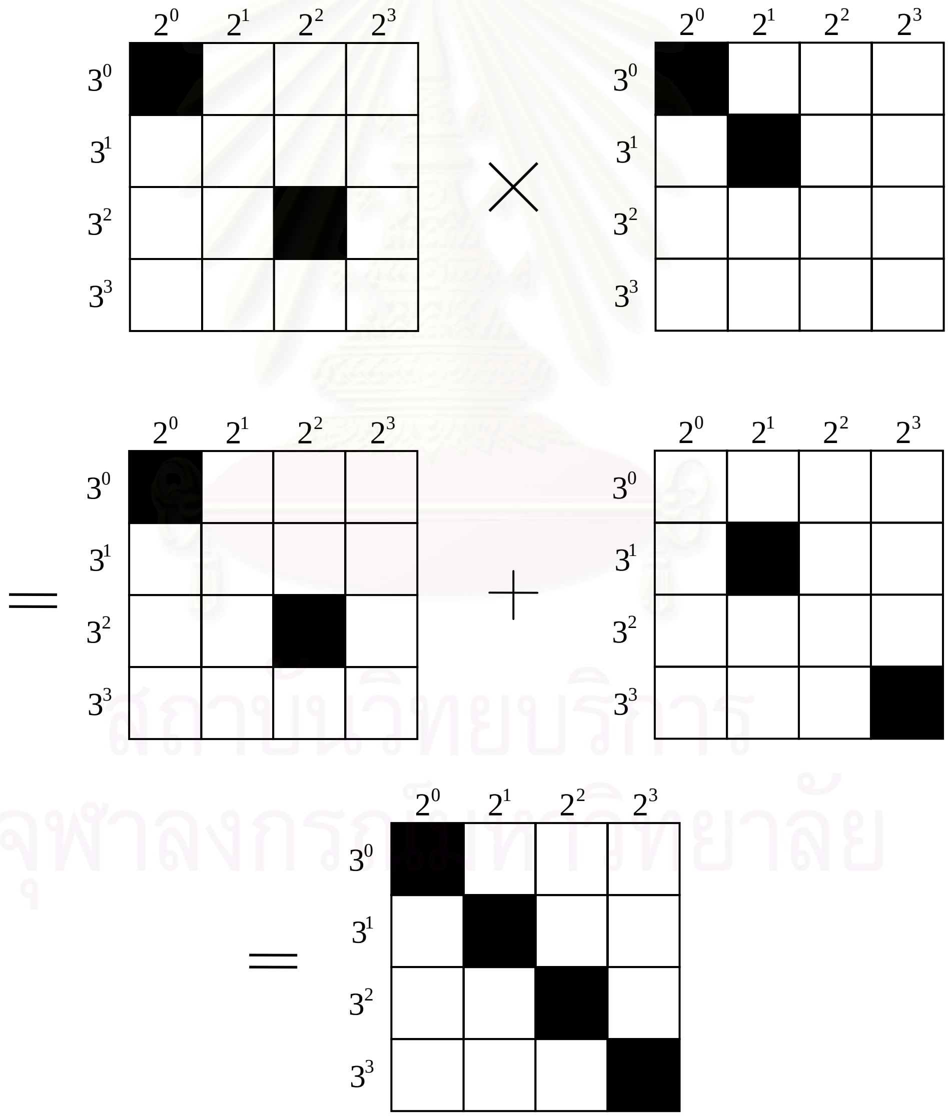
รูปที่ 2.6 การบวกกันของ 19 และ 10 ผลลัพธ์ที่ได้เท่ากับ 29

จากรูปที่ 2.6 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\left(2^0 3^0 + 2^1 3^2\right) + \left(2^0 3^0 + 2^0 3^2\right) &= 2^0 3^0 + 2^1 3^2 + 2^0 3^0 + 2^0 3^2 \\
&= 2^0 3^0 \left(1+1\right) + 2^0 3^2 \left(2+1\right) \\
&= 2^1 3^0 + 2^0 3^3 \\
&= 29
\end{aligned}
$$

2.3.2 การคูณของระบบจำนวนฐานคู่

ในระบบการคูณของระบบจำนวนฐานคู่นั้น ทำได้โดยการเลื่อนตำแหน่งของตัวตั้งไปตามตำแหน่งของตัวคูณ แล้วนำค่าที่ได้ทั้งหมดมารวมกัน ซึ่งจะทำการแสดงวิธีการคูณดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 การคูณกันของ 37 และ 7 ผลลัพธ์ที่ได้เท่ากับ 259

จากรูปที่ 2.7 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\left(2^0 3^0 + 2^2 3^2\right)\times\left(2^0 3^0 + 2^1 3^1\right) &= 2^0 3^0\left(2^0 3^0 + 2^2 3^2\right) + 2^1 3^1\left(2^0 3^0 + 2^2 3^2\right)\\ &= 2^0 3^0 + 2^2 3^2 + 2^1 3^1 + 2^3 3^3\\ &= 259\end{aligned}$$

2.4 ระบบเวกเตอร์สี่มิติ (Quaternion System)

ในปี ค.ศ.1843 ฮามิลตัน (Hamilton) [10] ได้นำเสนอระบบเวกเตอร์สี่มิติ เป็นระบบที่ขยายมาจากระบบจำนวนเชิงซ้อนซึ่งอยู่ในรูปแบบเวกเตอร์สองมิติ ซึ่งระบบเวกเตอร์สี่มิตินี้นำมาประยุกต์ใช้เกี่ยวกับการควบคุมการวางตัวของยานอวกาศ โดยจะใช้ในการวัดระยะไกลในการบิน และยังใช้ในงานเกี่ยวกับทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกส์ ที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์ทางเรขาคณิต เพื่อแสดงการหมุนหรือปฏิบัติการในสามมิติและการกำหนดทิศทางในสามมิติ โดยมีนิยามการแทนค่าของระบบจำนวนเวกเตอร์สี่มิติ ดังนิยามที่ 2.2 ดังนี้

นิยามที่ 2.2 รูปแบบการแทนค่าของเวกเตอร์สี่มิติ *ประกอบด้วยจำนวนที่เป็นจริงหนึ่งจำนวนและจำนวนที่เป็นเวกเตอร์สามจำนวน โดยที่* a,b,c *และ* d *เป็นจำนวนเต็ม ส่วน* i,j *และ* k *เป็นหน่วยของเวกเตอร์ ดังนั้นการแทนค่าของเวกเตอร์สี่มิติสามารถเขียนได้ดังนี้*

$$V = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$$

ในการคำนวณของระบบเวกเตอร์สี่มิตินั้น จะเป็นไปดังนิยามดังต่อไปนี้

นิยามที่ 2.3 การบวกกันของเวกเตอร์สี่มิติ *คือ การบวกกันของเวกเตอร์ที่มีหน่วยของเวกเตอร์เหมือนกัน กำหนดให้* $V_1 = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ *และ* $V_2 = e + f\mathrm{i} + g\mathrm{j} + h\mathrm{k}$ *โดยที่* a,b,c,d,e,f,g *และ* h *เป็นจำนวนจริง ซึ่งการบวกกันของสองเวกเตอร์เป็นดังนี้*

$$V_1 + V_2 = (a+e) + (b+f)\mathrm{i} + (c+g)\mathrm{j} + (d+h)\mathrm{k}$$

ในการบวกกันของเวกเตอร์สี่มิตินั้น ทำได้โดยจะทำการบวกกันในแต่ละมิติ จะแสดงตัวอย่างของการทำการบวกกันของเวกเตอร์สองตัวได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 หาค่าการบวกกันของเวกเตอร์สี่มิติสองตัว ดังนี้ $V_1 = 2 + \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}$ และ $V_2 = 4 + 2\mathrm{i} + \mathrm{j} + 3\mathrm{k}$

วิธีทำ ในการหาค่าการบวกกันทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= (2+4) + (1+2)\mathrm{i} + (1+1)\,\mathrm{j} + (1+3)\,\mathrm{k} \\ &= 6 + 3\mathrm{i} + 2\,\mathrm{j} + 4\mathrm{k} \end{aligned}$$

□

นิยามที่ 2.4 การคูณกันของเวกเตอร์สี่มิติ *คือ การคลอสกันของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ กำหนดให้* $V_1 = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ *และ* $V_2 = e + f\mathrm{i} + g\mathrm{j} + h\mathrm{k}$ *โดยที่* a, b, c, d, e, f, g *และ* h *เป็นจำนวนจริง ซึ่งการคลอสกันของสองเวกเตอร์เป็นดังนี้*

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 = {} & ae + af[\,\mathrm{i}\,] + ag\,[\,\mathrm{j}\,] + ah\,[\,\mathrm{k}\,] + \\ & be\,[\,\mathrm{i}\,] + bf\,[\,\mathrm{i}\times\mathrm{i}\,] + bg\,[\,\mathrm{i}\times\mathrm{j}\,] + bh\,[\,\mathrm{i}\times\mathrm{k}\,] + \\ & ce\,[\,\mathrm{j}\,] + cf\,[\,\mathrm{j}\times\mathrm{i}\,] + cg\,[\,\mathrm{j}\times\mathrm{j}\,] + ch\,[\,\mathrm{j}\times\mathrm{k}\,] + \\ & de\,[\,\mathrm{k}\,] + df\,[\,\mathrm{k}\times\mathrm{i}\,] + dg\,[\,\mathrm{k}\times\mathrm{j}\,] + dh\,[\,\mathrm{k}\times\mathrm{k}\,] \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละมิติในเวกเตอร์สี่มิตินี้ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll} \mathrm{i}\times\mathrm{i} = -1, & \mathrm{i}\times\mathrm{j} = \mathrm{k}, & \mathrm{i}\times\mathrm{k} = -\mathrm{j}, \\ \mathrm{j}\times\mathrm{i} = -\mathrm{k}, & \mathrm{j}\times\mathrm{j} = -1, & \mathrm{j}\times\mathrm{k} = \mathrm{i}, \\ \mathrm{k}\times\mathrm{i} = \mathrm{j}, & \mathrm{k}\times\mathrm{j} = -\mathrm{i}, & \mathrm{k}\times\mathrm{k} = -1 \\ & \mathrm{i}\times\mathrm{j}\times\mathrm{k} = -1 & \end{array}$$

ในการคลอสกันของเวกเตอร์สี่มิติสองตัวนั้น ทำโดยต้องทำการคูณทั้งหมด 16 ครั้ง ดังนั้นความซับซ้อนในการคูณกันนั้นมีค่าเป็น $O(n^2)$ ซึ่งจะแสดงตัวอย่างในการคูณดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.2 หาค่าการคูณกันของเวกเตอร์สี่มิติสองตัว ดังนี้ $V_1 = 2 + \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}$ และ $V_2 = 4 + 2\mathrm{i} + \mathrm{j} + 3\mathrm{k}$

วิธีทำ ในการหาค่าการคูณกันทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 = {} & (2\times4) + (2\times2\mathrm{i}) + (2\times\mathrm{j}) + (2\times3\mathrm{k}) + \\ & (\mathrm{i}\times4) + (\mathrm{i}\times2\mathrm{i}) + (\mathrm{i}\times\mathrm{j}) + (\mathrm{i}\times3\mathrm{k}) + \\ & (\mathrm{j}\times4) + (\mathrm{j}\times2\mathrm{i}) + (\mathrm{j}\times\mathrm{j}) + (\mathrm{j}\times3\mathrm{k}) + \\ & (\mathrm{k}\times4) + (\mathrm{k}\times2\mathrm{i}) + (\mathrm{k}\times\mathrm{j}) + (\mathrm{k}\times3\mathrm{k}) + \\ = {} & (8-2-1-3) + (4+4+3-1)\mathrm{i} + (2-3+4+2)\,\mathrm{j} + (6+1-2+4)\mathrm{k} \\ = {} & 2 + 10\mathrm{i} + 5\mathrm{j} + 9\mathrm{k} \end{aligned}$$

□

บทที่ 3

ระบบแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่และตัวดำเนินการในระบบแทนเวกเตอร์โดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่

ในงานวิจัยนี้นำเสนอระบบรูปแบบแทนเวกเตอร์แบบใหม่ โดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่ในการแทนเวกเตอร์ ซึ่งฐานที่ใช้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณในระบบเวกเตอร์ จะเรียกระบบนี้ว่า ระบบแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่ หรือเรียกว่า *ระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่* (*Double-Base Quaternion System, DBQS*)

3.1 ระบบแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่

ในระบบจำนวนฐานคู่ใช้ฐานเป็นจำนวนเต็ม คือ ฐานสองและฐานสาม ใช้ชุดตัวเลข $\{0,1\}$ แต่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นี้จะใช้ฐานที่อยู่ในรูปของเวกเตอร์ เพราะทำให้ชุดของตัวเลขไม่ติดอยู่ในของรูปเวกเตอร์ โดยฐานที่ใช้ในระบบนี้คือ $\sqrt{2}\mathrm{i}$ และ $\sqrt{3}\mathrm{j}$ สาเหตุที่ใช้ฐานดังกล่าว เพื่อต้องการให้แต่ละตำแหน่งมีตัวเลขในชุดตัวเลขอยู่สองแบบ ซึ่งเปรียบเสมือนว่าเป็นบิตที่แอ็กทิฟและบิตที่ไม่แอ็กทิฟ และยังคงคุณสมบัติในการคำนวณของระบบจำนวนแบบฐานคู่ด้วย โดยระบบแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบจำนวนฐานคู่ หรือระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะนิยามได้ดังต่อไปนี้

นิยามที่ 3.1 *ระบบแทนเวกเตอร์สี่มิติจะเรียกว่าเป็น* ระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ *เมื่อประกอบด้วยฐานสองฐาน คือ* $\beta = \sqrt{2}\mathrm{i}$ *และ* $\alpha = \sqrt{3}\mathrm{j}$ *โดยรูปแบบแทนเวกเตอร์* V *สามารถเขียนได้ดังนี้*

$$V = \sum_{m,n} d_{m,n} (\beta)^m (\alpha)^n$$

โดย d *คือเลขโดดจากชุดตัวเลขที่มีนิยามดังต่อไปนี้*

กรณีที่ 1 m *เป็นจำนวนเต็มคู่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคู่* ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \{0,1\}$

กรณีที่ 2 m *เป็นจำนวนเต็มคี่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคู่* ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

กรณีที่ 3 m *เป็นจำนวนเต็มคู่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคี่* ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

กรณีที่ 4 m *เป็นจำนวนเต็มคี่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคี่* ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

โดยที่ m, n *เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์*

จากนิยามที่ 3.1 จะเห็นได้แต่ละตำแหน่งในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นั้นมีบิตที่ไม่แอ็กทิฟ คือ 0 เหมือนกัน แต่สำหรับบิตที่แอ็กทิฟนั้นมีค่าที่แตกต่างกันไป คือ $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{1}{\sqrt{6}}$ เนื่องมาจากว่าต้องการให้ค่าเวกเตอร์ที่ได้ออกมาในแต่ละตำแหน่งอยู่ในรูปของจำนวนเต็ม ถ้าบิตในแต่ละตำแหน่งเป็นบิตที่แอ็กทิฟจะทำให้เกิดผลลัพธ์ในแต่ละตำแหน่งดังจะสามารถแสดงอยู่ในรูปแบบของตารางสองมิติได้ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงค่าของแต่ละตำแหน่งโดยใช้ฐาน $\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$

	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3$	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0$	1	i	-2	-2i	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1$	j	k	-2j	-2k	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2$	-3	-3i	6	6i	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3$	-3j	-3k	6j	6k	…
…	…	…	…	…	…

ในตัวอย่างที่ 3.1 จะทำการแสดงค่าของเวกเตอร์สี่มิติให้อยู่ในรูปแบบของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยการแสดงค่าในรูปแบบของตารางนั้น ถ้าเป็นบิตที่แอ็กทิฟจะแทนด้วยช่องสีดำ

ในการแทนค่าเวกเตอร์สี่มิติในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นั้นอาจมีโอกาสที่จำนวนแอ็กทิฟเซลล์มีมากกว่าการแทนค่าของเวกเตอร์สี่มิติในระบบจำนวนฐานสองเนื่องจากว่าระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นั้นสามารถทำการแทนค่าได้ทั้งค่าบวกและค่าลบโดยที่ชุดของตัวเลขประกอบด้วยเลขโดดที่มีแค่ 2 แบบ ทำให้การแทนค่าบางค่าในระบบนี้มีจำนวนบิตที่แอ็กทิฟมากกว่าในระบบจำนวนฐานสอง เช่น ค่าของ 2 ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่มีบิตที่แอ็กทิฟ 2 บิต แต่ในระบบจำนวนฐานสองมีบิตที่แอ็กทิฟแค่บิตเดียว แต่บางค่าในระบบนี้มีจำนวนบิตที่แอ็กทิฟน้อยกว่า เช่น ค่าของ 6 ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่มีบิตที่แอ็กทิฟแค่บิตเดียว แต่ในระบบจำนวนฐานสองมีบิตที่แอ็กทิฟถึง 2 บิต

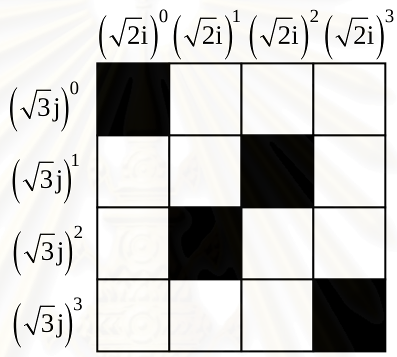
ตัวอย่างที่ 3.1 *หาค่าของเวกเตอร์สี่มิติให้อยู่ในรูปแบบของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยกำหนดให้เวกเตอร์สี่มิติมีค่าดังนี้* $V = 1 - 3\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + 6\mathrm{k}$ *โดยที่ชุดตัวเลขเป็นดังนี้* m, n *เป็นจำนวน*

เต็มคู่ $d_{m,n} \in \{0,1\}$ *,* m *เป็นจำนวนเต็มคี่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$*,* m *เป็นจำนวนเต็มคู่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ *และ* m, n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

วิธีทำ ค่าของ $V = 1 - 3\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + 6\mathrm{k}$ จะมีรูปแบบที่ใช้ในการแสดงค่าของเวกเตอร์ V ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้ดังนี้

$$V = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3$$

สามารถแสดงค่าของเวกเตอร์ให้อยู่ในรูปของตารางได้ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ค่าของ $1 - 3\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + 6\mathrm{k}$ ในรูปแบบตารางของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

□

3.2 ความสมบูรณ์ของระบบ

การแทนค่าของเวกเตอร์ของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะใช้ฐานที่อยู่ในรูปของเวกเตอร์ ดังนั้นชุดตัวเลขที่ใช้จึงเป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ติดอยู่ในรูปของเวกเตอร์ โดยค่าของเวกเตอร์สี่มิติสามารถเขียนให้อยู่รูปแบบการแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้เสมอ โดยจะแสดงความสมบูรณ์ของระบบในทฤษฎีบทที่ 3.1 ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *สำหรับเวกเตอร์สี่มิติที่เป็นจำนวนเต็มใดๆ สามารถหารูปแบบการแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้เสมอ*

พิสูจน์ ในระบบเวกเตอร์สี่มิติ กำหนดให้ V เป็นเวกเตอร์สี่มิติตัวหนึ่ง โดยที่ V เขียนอยู่ในรูปแบบของเกาส์ $V = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ โดยที่ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง i, j และ k เป็นหน่วยของเวกเตอร์ การพิสูจน์จะแสดงได้โดยกล่าวถึงการหารูปแบบการแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยแบ่งการพิจารณาออกเป็นสี่กรณีตามแต่ละหน่วย(มิติ)

กรณีที่ 1 รูปแบบการแทนค่าของ a โดยที่ a เป็นค่าของจำนวนเต็ม $a \in \mathbb{Z}$ แสดงได้ดังนี้

$$a = \sum_{s=0}^{m} e_s (-2)^s \qquad , e_s \in \{0,1\}$$

จำนวนเต็มทุกจำนวนสามารถเขียนให้อยู่บนเลขฐาน -2 ได้ ซึ่งมีรูปแบบการแทนค่าเป็น $\sum e_s (-2)^s$ โดยที่มีชุดตัวเลข $e_s \in \{0,1\}$ ได้มีการพิสูจน์ใน [11]

$$\begin{aligned} a &= \sum_{s=0}^{m} e_s \left(-\left(\sqrt{2}\right)^2 \right)^s \\ &= \sum_{s=0}^{m} e_s \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2 \right)^s \\ &= \sum_{s=0}^{m} e_s \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2s} \\ &= \sum_{t=0}^{2m} e_{t,0} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^t \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0 \end{aligned}$$

โดยที่มีชุดตัวเลขเป็นดังนี้

$$e_{t,0} = \begin{cases} e_{2s} & t = \text{even} \\ 0 & t = \text{odd} \end{cases}$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าจำนวนเต็มสามารถเขียนให้อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้ทุกจำนวน โดยที่ i เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $\mathrm{j} = 0$

กรณีที่ 2 รูปแบบการแทนค่าของ $b\mathrm{i}$ โดยที่ $b \in \mathbb{Z}$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} b\mathrm{i} &= \left(\sum_{s=0}^{m} e_s (-2)^s \right) \mathrm{i} \qquad , e_s \in \{0,1\} \\ &= \left(\sum_{s=0}^{m} e_s \left(-\left(\sqrt{2}\right)^2 \right)^s \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right) \\ &= \left(\sum_{s=0}^{m} \frac{1}{\sqrt{2}} e_s \left(-\left(\sqrt{2}\right)^2 \right)^s \right) \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $e_t = \dfrac{e_s}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $e_t \in \left\{ 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

$$
\begin{aligned}
b\mathrm{i} &= \sum_{t=0}^{m} e_t \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2 \right)^t \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1 \\
&= \sum_{t=0}^{m} e_t \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2t} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1 \\
&= \sum_{t=0}^{m} e_t \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2t+1} \\
&= \sum_{u=0}^{2m+1} e_{u,0} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^u \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0
\end{aligned}
$$

โดยที่มีชุดตัวเลขเป็นดังนี้

$$
d_{u,0} = \begin{cases} 0 & u = \text{even} \\ d_{2t+1} & u = \text{odd} \end{cases}
$$

จะเห็นได้ว่าเป็นลักษณะในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1 ดังนั้นจำนวนเต็มของเวกเตอร์ i สามารถเขียนให้อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้ทุกจำนวน โดยที่ i เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\mathrm{j} = 0$

กรณีที่ 3 รูปแบบการแทนค่าของ $c\mathrm{j}$ โดยที่ $c \in \mathbb{Z}$ แสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
c\mathrm{j} &= \left(\sum_{s=0}^{m} e_s (-2)^s \right) \mathrm{j} \qquad , e_s \in \{0,1\} \\
&= \left(\sum_{s=0}^{m} e_{s,1} \left(-\left(\sqrt{2}\right)^2 \right)^s \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) \\
&= \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{\sqrt{3}} e_{s,1} \left(-\left(\sqrt{2}\right)^2 \right)^s \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่า $e_t = \dfrac{e_s}{\sqrt{3}}$ ดังนั้น $e_t \in \left\{0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$$
\begin{aligned}
c\mathrm{j} &= \sum_{t=0}^{m} e_{t,1} \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2 \right)^t \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) \\
&= \sum_{t=0}^{m} e_{t,1} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2t} \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) \\
&= \sum_{u=0}^{2m} e_{u,1} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^u \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)
\end{aligned}
$$

โดยที่มีชุดตัวเลขเป็นดังนี้

$$e_{u,1}=\begin{cases} e_{2t} & u=\text{even} \\ 0 & u=\text{odd} \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่าเป็นลักษณะในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1 ดังนั้นจำนวนเต็มของเวกเตอร์ j สามารถเขียนให้อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้ทุกจำนวน โดยที่ i เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $\mathrm{j}=1$

กรณีที่ 4 รูปแบบการแทนค่าของ $d\mathrm{k}$ โดยที่ $d\in\mathbb{Z}$ แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} d\mathrm{k} &= \left(\sum_{s=0}^{m} e_s(-2)^s\right)\mathrm{k} \qquad , \; e_s\in\{0,1\} \\ &= \sum_{s=0}^{m} e_s\left(-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^s(\mathrm{i}\times\mathrm{j}) \\ &= \sum_{s=0}^{m} e_{s,1}\left(-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^s\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) \end{aligned}$$

โดยที่ $e_t=\dfrac{e_s}{\sqrt{6}}$ ดังนั้น $e_t\in\left\{0,\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

$$\begin{aligned} d\mathrm{k} &= \sum_{t=0}^{m} e_{t,1}\left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\right)^t\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1 \\ &= \sum_{t=0}^{m} e_{t,1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2t+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1 \\ &= \sum_{u=0}^{2m+1} e_{u,1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^u\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1 \end{aligned}$$

โดยที่มีชุดตัวเลขเป็นดังนี้

$$d_{t,1}=\begin{cases} d_{2s+1} & t=\text{even} \\ 0 & t=\text{odd} \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่าเป็นลักษณะในทำนองเดียวกับกรณีที่ 1 ดังนั้นจำนวนเต็มของเวกเตอร์ k สามารถเขียนให้อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้ทุกจำนวน โดยที่ i เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\mathrm{j}=1$

โดยทั้งสี่กรณีนั้นมีตำแหน่งของบิตที่แอ็กทิฟเป็นดังนี้ กรณีที่ 1 ค่า i เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $\mathrm{j}=0$ กรณีที่ 2 ค่า i เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\mathrm{j}=0$ กรณีที่ 3 ค่า i เป็นจำนวนเต็มคู่ และ $\mathrm{j}=1$ กรณีที่ 2 ค่า i เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $\mathrm{j}=1$ จะเห็นได้ว่าทั้งสี่กรณีจะไม่เกิดบิตที่แอ็กทิฟทับกัน เพราะว่าอยู่กันตำแหน่งของแต่ละกรณีนั้นแตกต่างกัน

■

ตัวอย่างที่ 3.2 *กำหนดให้เวกเตอร์สี่มิติมีค่าดังนี้* $V = 4 - 2\mathrm{i} + 5\mathrm{j} + \mathrm{k}$ *หาค่าของเวกเตอร์สี่มิติให้อยู่ในรูปแบบของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่โดยที่ชุดตัวเลขเป็นดังนี้* m, n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n} \in \{0,1\}$, m *เป็นจำนวนเต็มคี่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, m *เป็นจำนวนเต็มคู่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ *และ* m, n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

วิธีทำ หาค่าของแต่ละเวกเตอร์โดยแบ่งออกเป็นสี่กรณีตามทฤษฎีบทที่ 3.1 ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ค่าของ $a = 4$

$$4 = (-2)^2$$

ชุดของตัวเลขประกอบด้วย $d \in \{0,1\}$

$$\begin{aligned} 4 &= \left(-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2 \\ &= \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^4 \\ &= \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^4 \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ค่าของ $b\mathrm{i} = -2\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} -2\mathrm{i} &= (-2)^1 \mathrm{i} \\ &= \left(-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right) \end{aligned}$$

ชุดของตัวเลขในเวกเตอร์ i ประกอบด้วย $d \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$$\begin{aligned} -2\mathrm{i} &= \left(-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^1 \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right) \\ &= \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\right)^1 \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2 \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3 \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0 \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 ค่าของ $c\mathrm{j} = 5\mathrm{j}$

$$
\begin{aligned}
5\mathrm{j} &= \left[(-2)^{0} + (-2)^{2}\right]\mathrm{j} \\
&= \left(\left(-\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)^{0} + \left(-\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)^{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)
\end{aligned}
$$

ชุดของตัวเลขในเวกเตอร์ i ประกอบด้วย $d \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$$
\begin{aligned}
5\mathrm{j} &= \left(\left(-\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)^{0} + \left(-\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)^{2}\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) \\
&= \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) + \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\right)^{2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{4}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 4 ค่าของ $d\mathrm{k} = \mathrm{k}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{k} &= (-2)^{0}\,\mathrm{k} \\
&= \left(-\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)^{0}\,\mathrm{i} \times \mathrm{j} \\
&= \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)
\end{aligned}
$$

ชุดของตัวเลขในเวกเตอร์ i ประกอบด้วย $d \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{k} &= \left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\right)^{0}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)
\end{aligned}
$$

ค่าของเวกเตอร์สี่มิติ $V = 4 - 2\mathrm{i} + 5\mathrm{j} + \mathrm{k}$ มีรูปแบบการแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ดังนี้

$$
V = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{4}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0} + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{3}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0} + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{1} + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{4}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{1} + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{1}
$$

□

3.3 การแปลงเวกเตอร์สี่มิติให้อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

ในการแปลงค่าจากเวกเตอร์สี่มิติให้อยู่ในรูปแบบของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบ (greedy algorithm) เพื่อช่วยในการหารูปแบบในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ เนื่องจากว่าระบบนี้เป็นระบบที่มีความซ้ำซ้อน ทำให้ค่าเชิงตัวเลขหนึ่งมีรูปแบบการแสดงค่าได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ โดยที่รูปแบบแทนจำนวนที่มีจำนวนบิตที่แอ็กทิฟน้อยที่สุดจะเรียกว่า รูปแบบคาโนนิก (canonical form) เหตุผลของการที่ต้องการรูปแบบแทนค่าที่มีจำนวนบิตที่แอ็กทิฟน้อยที่สุด เพราะจำนวนแอ็กทิฟเซลล์อาจมีผลต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณ แต่ถ้าจำนวนที่มีขนาดใหญ่จะทำการหาค่าที่อยู่ในรูปแบบนี้ได้ยาก ปัญหานี้จัดเป็นปัญหาเอ็นพีบริบูรณ์ (NP-complete) [2,3] ดังนั้นจึงได้นำอัลกอริทึมเชิงละโมบ มาช่วยในการหารูปแบบแทนเวกเตอร์สี่มิติที่อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่แบบใกล้เคียงรูปแบบคาโนนิก (Near-canonic double-base quaternion representation, NCDBQR) โดยวิธีในการแปลงค่าในระบบเวกเตอร์สี่มิติให้อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ได้ดังอัลกอริทึมที่ 3.1 ต่อไปนี้

อัลกอริทึมที่ 3.1 อัลกอริทึมการแปลงเวกเตอร์สี่มิติให้อยู่ในรูปแบบแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

Input: Vector V

Output: Q

Begin

$Q = 0$

while $(V \neq 0)$

Find W , nearest of $\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$ to V

Write (W)

$Q = Q + W$

$V : W - V$

end do

end

อัลกอริทึมที่ 3.1 เป็นอัลกอริทึมที่ใช้ในการแปลงเวกเตอร์สี่มิติให้อยู่ในรูปแบบแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยมีข้อมูลเวกเตอร์สี่มิติที่อยู่ในรูปของ

$V = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ เป็นข้อมูลนำเข้า และข้อมูลที่ส่งออกจะเป็นข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบการแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ ขั้นตอนการทำงานจะทำการค้นหาค่าข้อมูลในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ซึ่งใช้ฐาน $\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$ ที่มีค่าใกล้เคียงกับค่าของข้อมูลเวกเตอร์ที่นำเข้า แล้วนำค่าข้อมูลเวกเตอร์ที่นำเข้าลบกับค่าที่ได้ใกล้เคียง และจะเก็บค่าของผลต่างที่ได้ไว้เป็นข้อมูลนำเข้าเพื่อใช้ในการค้นหาค่าข้อมูลเวกเตอร์ในรอบถัดไป เมื่อค่าข้อมูลนำเข้ากับค่าที่ได้มีผลต่างเท่ากับศูนย์ ก็จะยุติการค้นหา แล้วนำค่าของข้อมูลส่งออกในแต่ละรอบมาบวกกัน โดยที่จะทำการแสดงการแปลงค่าของเวกเตอร์ให้อยู่ในรูปแบบการแทนเวกเตอร์ที่อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ ดังในตัวอย่างที่ 3.3 ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.3 *การแปลงค่าของ* $33+\mathrm{i}-5\mathrm{j}+6\mathrm{k}$ *ให้อยู่ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่*

วิธีทำ พิจารณาค่าที่ต้องการหาจากในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 ตารางแสดงค่าของแต่ละตำแหน่งโดยใช้ฐาน $\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$

	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^4$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^5$
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0$	1	i	-2	-2i	4	4i
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1$	j	k	-2j	-2k	4j	4k
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2$	-3	-3i	6	6i	-12	-12i
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3$	-3j	-3k	6j	6k	-12j	-12k
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^4$	9	9i	-18	-18i	36	36i
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^5$	9j	9k	-18j	-18k	36j	36k

เริ่มจากการหาค่าของเวกเตอร์ที่มีค่าใกล้เคียงกับค่า $33+\mathrm{i}-5\mathrm{j}+6\mathrm{k}$ โดยพิจารณาจากตาราง

ในรอบที่ 1 ค่าผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$36+\mathrm{i}-3\mathrm{j}+6\mathrm{k} = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^4\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^4 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3$$

นำค่าผลลัพธ์ที่ได้ในรอบที่ 1 เก็บไว้ใน Q

ผลต่างที่ได้ คือ $\left(36+\mathrm{i}-5\mathrm{j}+6\mathrm{k}\right)-\left(36+\mathrm{i}-3\mathrm{j}+6\mathrm{k}\right)=-3-2\mathrm{j}$ นำค่า $-3-2\mathrm{j}$ ที่ได้มาเป็นข้อมูลนำเข้าในรอบที่ 2

ในรอบที่ 2 ค่าผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$-3-2\mathrm{j}=\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{2}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{1}$$

ผลต่างที่ได้ คือ $(-3-2\mathrm{j})-(-3-2\mathrm{j})=0$

แล้วนำค่าผลลัพธ์ที่ได้ในรอบที่ 2 ที่ได้มาบวกกับค่าที่ได้ในรอบที่ 1 ค่าที่ได้จะแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}33+\mathrm{i}-5\mathrm{j}+6\mathrm{k}=&\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{4}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{4}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{3}+\\&\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{3}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{3}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{2}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{1}\end{aligned}$$

□

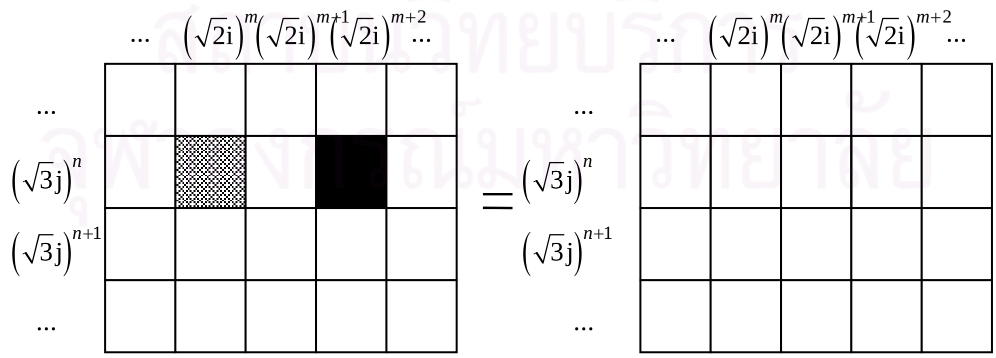
3.4 การบวกในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

การบวกในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะดำเนินการเช่นเดียวกันกับการบวกในระบบจำนวนฐานคู่ คือ การทำการซ้อนทับกันของตารางที่เป็นตัวตั้งและตัวบวก แต่ในการซ้อนทับกันของตารางทั้งสองอาจเกิดการชนกันของแอ็กทิฟเซลล์ และเพื่อความสะดวกในการทำการบวกกันซึ่งเราจะนิยามกฎขึ้นมา 2 ข้อ ในการลดรูปและเปลี่ยนรูปของช่องที่มีบิตที่แอ็กทิฟซ้อนทับกันดังต่อไปนี้

กฎข้อที่ 1 กฎการลดรูปของช่องที่ชนกัน

$$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}=0$$

การชนกันของบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งที่ m,n และมีบิตที่แอ็กทิฟอีกตัวในตำแหน่งที่ $m+2,n$ สามารถทำการลดรูปให้เป็นศูนย์ได้ จะทำการแสดงในรูปแบบของตารางได้ดังรูปที่ 3.2

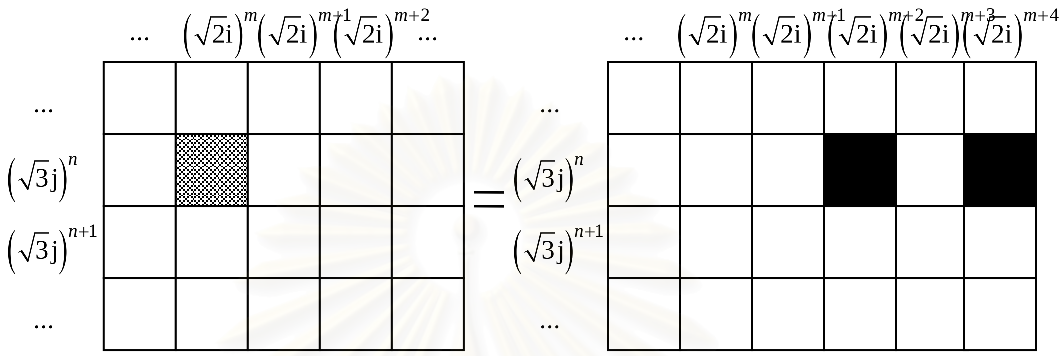


รูปที่ 3.2 กฎการลดรูปของช่องที่ซ้อนทับกันในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

กฎข้อที่ 2 กฎการเปลี่ยนรูปของช่องที่ชนกัน

$$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}=\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+4}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}$$

ในการชนกันของบิตที่แอ็กทิฟสองตัวในตำแหน่งที่ m,n จะทำการเปลี่ยนรูปให้อยู่ในตำแหน่งที่ $m+2,n$ และ $m+4,n$



รูปที่ 3.3 กฎการเปลี่ยนรูปของช่องที่ซ้อนทับกันในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

ทฤษฎีบทที่ 3.2 *การบวกกันของสองเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ สามารถทำได้โดยการซ้อนทับกันของตาราง โดยหากเกิดการซ้อนทับกันของตารางก็จะใช้กฎในการลดรูปและเปลี่ยนรูปของบิตที่ซ้อนทับกัน*

พิสูจน์ กำหนดให้เวกเตอร์สองเวกเตอร์มีค่าดังนี้ $V=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$ และ $W=e+f\mathrm{i}+g\mathrm{j}+h\mathrm{k}$ โดยที่ a,b,c,d,e,f,g และ h เป็นจำนวนจริง โดยสามารถแทนค่าในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยที่ชุดตัวเลขเป็นดังนี้ m,n เป็นจำนวนเต็มคู่ $d_{m,n}\in\{0,1\}$, m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ และ m,n เป็นจำนวนเต็มคี่ $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}V=&\sum_{m,n}v_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\sum_{m+1,n}v_{m+1,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\\&\sum_{m,n+1}v_{m,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}+\sum_{m+1,n+1}v_{m+1,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}\\W=&\sum_{m,n}w_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\sum_{m+1,n}w_{m+1,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\\&\sum_{m,n+1}w_{m,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}+\sum_{m+1,n+1}w_{m+1,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

ให้ $Q=V+W$ และ $d=v+w$ โดยที่ m,n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น Q สามารถแทนค่าได้ดังนี้

$$Q=\sum_{m,n} d_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\sum_{m+1,n} d_{m+1,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+$$
$$\sum_{m,n+1} d_{m,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}+\sum_{m+1,n+1} d_{m+1,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}$$

$$Q=V+W$$
$$=\sum_{m,n}\left(v+w\right)_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\sum_{m+1,n}\left(v+w\right)_{m+1,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+$$
$$\sum_{m,n+1}\left(v+w\right)_{m,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}+\sum_{m+1,n+1}\left(v+w\right)_{m+1,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}$$

ในกรณีที่ไม่มีบิตที่แอ็กทิฟซ้อนทับกัน

$$Q=\sum_{m,n} d_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\sum_{m+1,n} d_{m+1,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+$$
$$\sum_{m,n+1} d_{m,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}+\sum_{m+1,n+1} d_{m+1,n+1}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+1}$$

ในกรณีที่เกิดบิตที่แอ็กทิฟซ้อนทับกัน ให้ทำการพิจารณาจากความสัมพันธ์ดังกฎข้อที่ 1 และกฎข้อที่ 2 ซึ่งถ้าทำการเปลี่ยนรูปแล้วเกิดการชนกันอีกครั้งก็จะทำการพิจารณาจากกฎข้อที่ 1 และกฎข้อที่ 2 ต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งไม่เกิดการชนกันของบิตที่แอ็กทิฟ

■

ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นั้น สามารถที่จะทำการลดจำนวนบิติที่แอ็กทิฟได้ เพื่อลดโอกาสการที่จะเกิดบิตที่แอ็กทิฟซ้อนทับกัน ซึ่งเราจะนิยามดังนี้

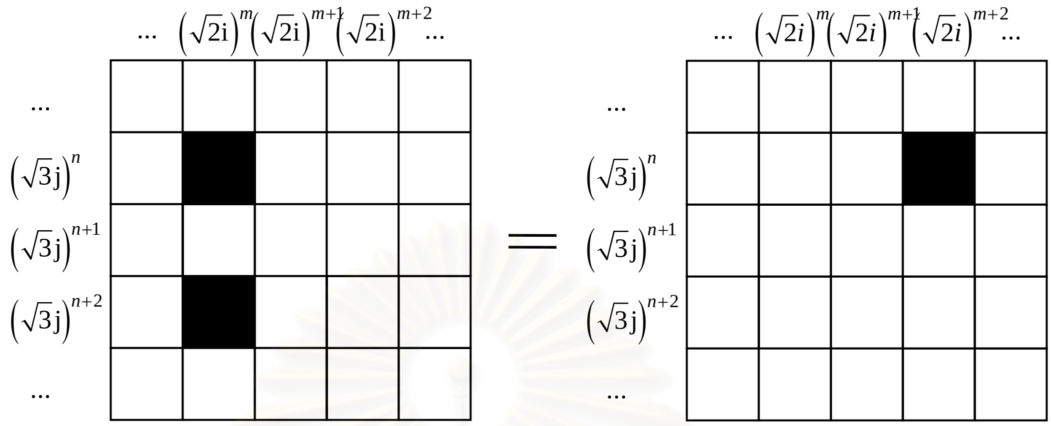
นิยามที่ 3.2 รูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่แบบพร้อมบวก (Addition ready double-base quaternion representation :ADBQR) *คือ รูปแบบแสดงค่าในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ที่ไม่มีตำแหน่งที่มีค่าในตำแหน่งที่* m,n *และ* $m,n+2$ *สำหรับจำนวนเต็ม* m *และ* n

รูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่แบบพร้อมบวกเป็นรูปแบบ เป็นรูปแบบที่กำหนดขึ้นตามแนวคิดของการลดจำนวนของบิตที่แอ็กทิฟ ซึ่งจะสามารถเพิ่มความรวดเร็วในการคำนวณได้ โดยรูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่แบบพร้อมบวกนี้สามารถคำนวณได้จากรูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยใช้กฎการลดหลัก ดังต่อไปนี้

กฎข้อที่ 3 กฎการลดหลัก

$$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n+2}=\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}$$

กฎการลดของหลักในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่เพื่อให้ไม่มีบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งที่ m,n และ $m,n+2$ สามารถแสดงให้เห็นในรูปแบบของตารางสองมิติได้ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 กฎการลดหลักของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

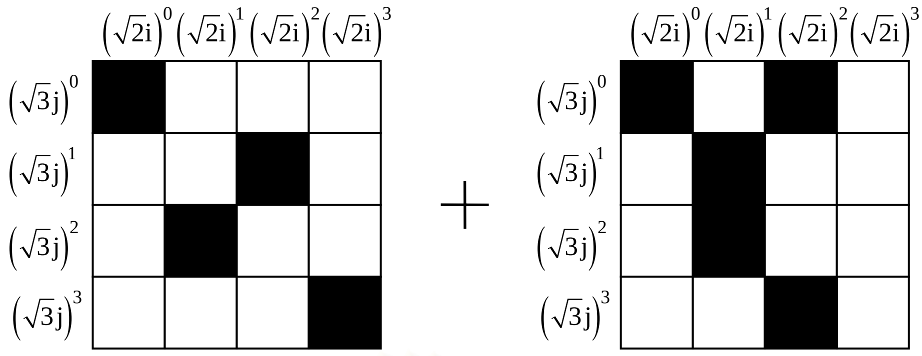
ตัวอย่างที่ 3.4 *การบวกกันระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์* $V_1 = 1-3\mathrm{i}-2\mathrm{j}+6\mathrm{k}$ *และ* $V_2 = -1-3\mathrm{i}+6\mathrm{j}+\mathrm{k}$ *โดยที่ชุดตัวเลขเป็นดังนี้* m,n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n} \in \{0,1\}$, m *เป็นจำนวนเต็มคี่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, m *เป็นจำนวนเต็มคู่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ *และ* m,n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

วิธีทำ ทำการแปลงค่าของเวกเตอร์ทั้งสองโดยใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบทำให้อยู่ในรูปแบบของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะได้ค่าดังสมการที่ 3.1 และ 3.2

$$V_1 = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3 \qquad 3.1$$

$$V_2 = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0 + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3 \qquad 3.2$$

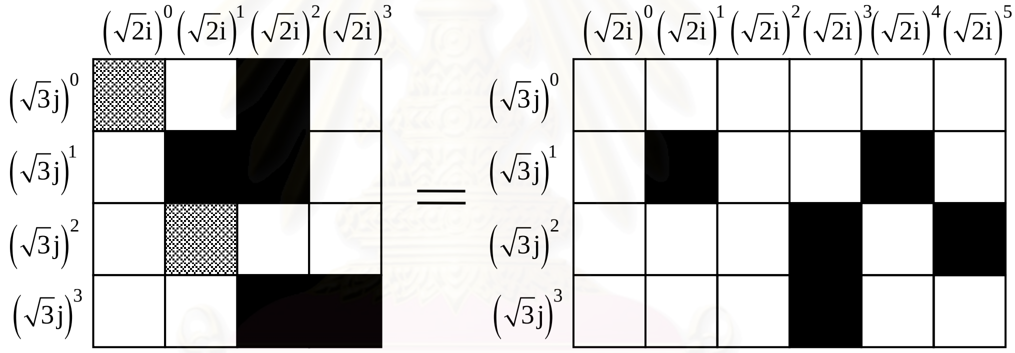
สามารถแสดงค่าของเวกเตอร์ V_1 และ V_2 ในรูปแบบตารางได้ดังรูปที่3.5



$V_1 = 1-3i-2j+6k$ $\qquad$ $V_2 = -1-3i+6j+k$

รูปที่ 3.5 ค่าของ $V_1 = 1-3i-2j+6k$ และ $V_2 = -1-3i+6j+k$

ในการบวกกันจะทำการซ้อนทับตารางของเวกเตอร์ V_1 และ V_2 โดยผลลัพธ์ที่ได้จากการบวกของเวกเตอร์ทั้งสองสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.6 (ก) และเมื่อทำการบวกกันแล้วจะจัดให้อยู่ในรูปแบบพร้อมบวกได้ดังรูปที่ 3.6 (ข)



$V = -6i+4j+7k$ $\qquad$ $V = -6i+4j+7k$

(ก) $\qquad$ (ข)

รูปที่ 3.6 ผลลัพธ์ของการบวกกันระหว่าง V_1 และ V_2

จากผลบวกของสมการที่ 3.1 และ สมการที่ 3.2 จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$V_1+V_2 = \left(\sqrt{2}i\right)^1\left(\sqrt{3}j\right)^1 + \left(\sqrt{2}i\right)^3\left(\sqrt{3}j\right)^2 + \left(\sqrt{2}i\right)^3\left(\sqrt{3}j\right)^3 + \left(\sqrt{2}i\right)^4\left(\sqrt{3}j\right)^1 + \left(\sqrt{2}i\right)^5\left(\sqrt{3}j\right)^2$$

$$= -6i+4j+7k$$

□

ทฤษฎีบทที่ 3.3 *รูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่พร้อมบวก สามารถคำนวณได้โดยใช้กฎทั้งสามข้อ*

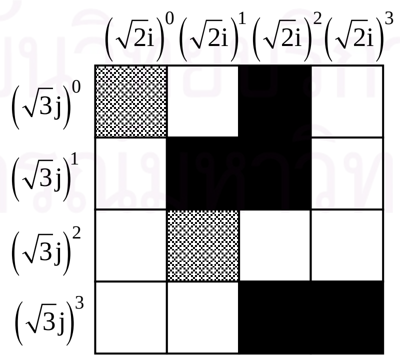
พิสูจน์ จากรูปแบบการแทนค่าในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ใดๆ ที่ไม่อยู่ในรูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่แบบพร้อมบวก จะพิจารณาตามหลักโดยเริ่มจากจากซ้ายไปขวา ถ้าเกิดกรณีที่มีบิตที่แอ็กทิฟซ้อนทับกันในตำแหน่งที่ m,n และมีบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งที่ $m,n+2$ จะทำการลดรูปให้มีค่าเท่ากับศูนย์โดยใช้กฎข้อที่ 1 หรือเกิดกรณีที่มีบิตที่แอ็กทิฟซ้อนทับกันในตำแหน่งที่ m,n โดยที่ไม่มีบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งที่ $m,n+2$ ก็จะทำการเปลี่ยนรูปให้มีบิตที่แอ็กทิฟอยู่ในตำแหน่งที่ $m+2,n$ และ $m+4,n$ โดยใช้กฎข้อที่ 2 หรือในกรณีที่มีบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งที่ m,n และ $m,n+2$ ก็จะทำการเปลี่ยนรูปให้มีบิตที่แอ็กทิฟอยู่ในตำแหน่งที่ $m+2,n$ ก็จะใช้กฎข้อที่ 3 ซึ่งหากทำการเปลี่ยนตำแหน่งของบิตที่แอ็กทิฟแล้วเกิดการซ้อนทับกันอีก จะทำการลดรูปหรือเปลี่ยนรูปต่อไปเรื่อยๆตามกฎข้อที่ 1 กฎข้อที่ 2 และกฎข้อที่ 3 จนกว่าจะไม่มีบิตที่แอ็กทิฟเกิดขึ้นในลักษณะดังกล่าว

■

ตัวอย่างที่ 3.5 *ค่า V ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่มีค่าดังนี้*

$$
\begin{aligned}
V = &\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0+\\
&\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2+\\
&\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3
\end{aligned}
$$

สามารถแสดงค่าของ V ได้ดังรูปที่ 3.7 โดยแปลงให้อยู่ในรูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่พร้อมบวก โดยใช้ทฤษฎีบทที่3.3



รูปที่ 3.7 แสดงค่าของ V ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

วิธีทำ ทำการพิจารณาตามกฎทั้ง 3 ข้อ เพื่อทำให้อยู่ในรูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่พร้อมบวกได้ ดังนี้ เริ่มพิจารณาตามหลักจากซ้ายไปขวา

ใช้กฎข้อที่ 1 ในการลดรูป

$$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^0=0$$

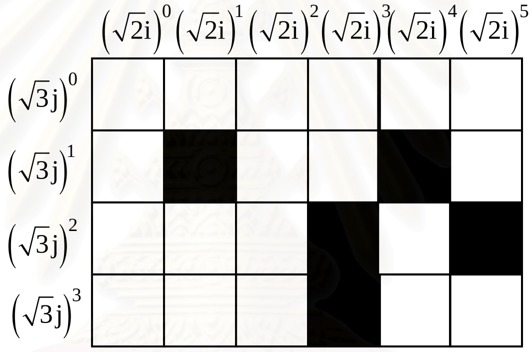
ใช้กฎข้อที่ 2 ในการลดรูป

$$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2=\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^5\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2$$

ใช้กฎข้อที่ 3 ในการลดรูป

$$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3=\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^4\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1$$

ค่าของ V ที่อยู่ในรูปแบบของรูปแบบของควอเทอร์เนียนฐานคู่พร้อมบวกแสดงได้ดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 แสดงค่าของ V ที่อยู่ในรูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่พร้อมบวก

สามารถเขียนให้อยู่ในสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}V=&\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^4\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^1+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2+\\&\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^5\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^2+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^3\end{aligned}$$

□

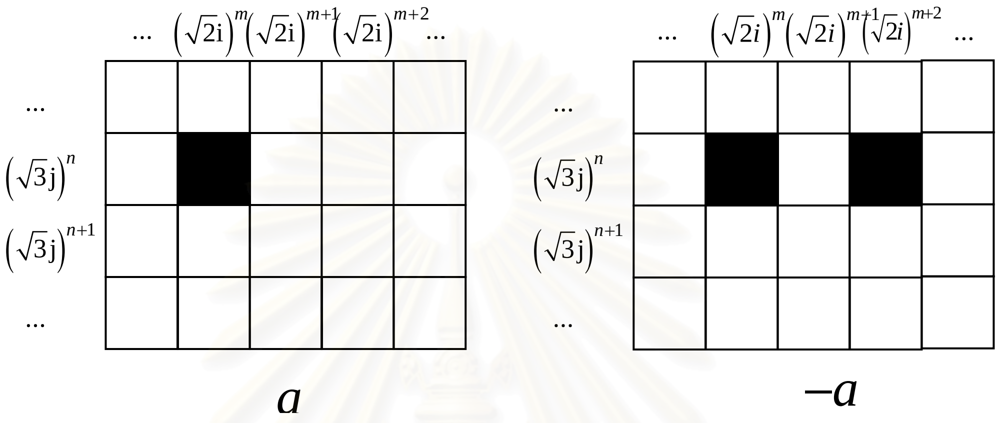
3.5 การลบในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

การลบในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะทำการกลับเครื่องหมายของตัวที่จะนำมาลบ ตามทฤษฎีบทที่ 3.4 และทำเช่นเดียวกับการบวกในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ คือ การทำการซ้อนทับกันของตารางทั้งสองตารางที่เป็นตัวตั้งและตัวบวก ในการกลับเครื่องหมาย (inverse) ของค่าที่จะนำการลบกันนั้นทำได้โดยใช้กฎในการกลับเครื่องหมายดังนี้

กฎข้อที่ 4 กฎในการกลับเครื่องหมาย

$$a = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n \qquad -a = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n + \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{m+2} \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$$

ในการกลับเครื่องหมายของบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งที่ m,n ทำได้โดยเพิ่มบิตที่แอ็กทิฟ อีกหนึ่งตัวในตำแหน่งที่ $m+2,n$ จะแสดงดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 แสดงค่าของ a และ $-a$

ทฤษฎีบทที่ 3.4 *การกลับเครื่องหมายของค่าที่จะนำมาทำการลบกัน ทำได้โดยพิจารณาบิตที่แอ็กทิฟแล้วทำการเพิ่มบิตทางขวามือที่ถัดไปสองตำแหน่งของบิตที่แอ็กทิฟ*

พิสูจน์ กำหนดให้เวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่มีค่าดังนี้ $V = \sum_{s=0}^{m} d_{s,t} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^s \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^t$ จะสามารถทำการหาค่าของ $-V$ ได้ดังนี้

$$V = \sum_{s=0}^{m} d_{s,t} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^s \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^t$$

โดยที่ค่าของ $V = -(-V)$

$$V = -\left(-\sum_{s=0}^{m} d_{s,t} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^s \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^t\right)$$

ค่าของ $-V$ จะมีค่าเท่ากับ $-V = -\sum_{s=0}^{m} d_{s,t} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^s \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^t$

$$
\begin{aligned}
-V &= -\left(\sum_{s=0}^{m} d_{s,t}\left(-1\right)\times\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}\right) \\
&= -\left(\sum_{s=0}^{m} d_{s,t}\left(1+\left(-2\right)\right)\times\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}\right) \\
&= -\left(\sum_{s=0}^{m} d_{s,t}\left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0}\right)\times\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}\right) \\
&= -\left(\sum_{s=0}^{m} d_{s,t}\left(\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s+2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}\right)\right) \\
&= -\left(\sum_{s=0}^{m} d_{s,t}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}+\sum_{s=0}^{m} d_{s,t}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s+2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้นค่าของ $-V$ สามารถแทนค่าได้ด้วย

$$
-V = \sum_{s=0}^{m} d_{s,t}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}+\sum_{s=0}^{m} d_{s,t}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{s+2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{t}
$$

■

ในการลบกันจะทำการกลับเครื่องหมายของตัวที่จะนำมาลบและทำการซ้อนทับตาราง โดยถ้าเกิดกรณีที่บิตที่แอ็กทิฟซ้อนทับกันหรือไม่อยู่ในรูปแบบควอเทอร์เนียนฐานคู่พร้อมบวกก็จะทำการพิจารณาตามกฎข้อที่ 1 กฎข้อที่ 2 และกฎข้อที่ 3

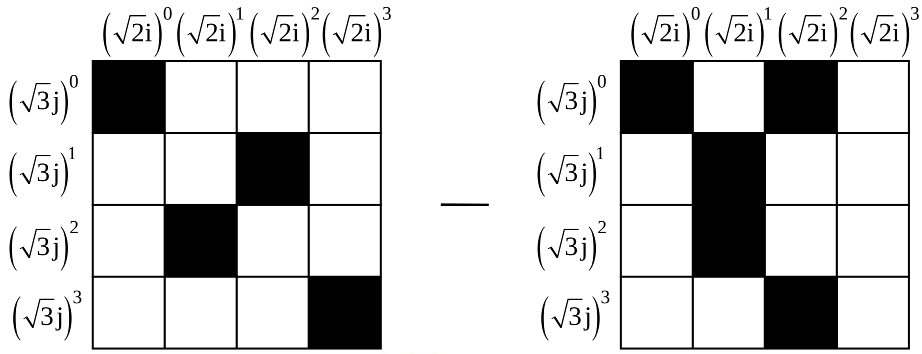
ตัวอย่างที่ 3.5 *การลบกันระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์* $V_1 = 1-3\mathrm{i}-2\mathrm{j}+6\mathrm{k}$ *และ* $V_2 = -1-3\mathrm{i}+6\mathrm{j}+\mathrm{k}$ *โดยที่ชุดตัวเลขเป็นดังนี้* m,n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n}\in\{0,1\}$, m *เป็นจำนวนเต็มคี่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, m *เป็นจำนวนเต็มคู่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ *และ* m,n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

วิธีทำ ทำการแปลงค่าของเวกเตอร์ทั้งสองโดยใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบทำให้อยู่ในรูปแบบของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะได้ค่าดังสมการที่ 3.3 และ 3.4

$$
V_1 = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{2}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{1}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{3}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{3} \quad 3.3
$$

$$
V_2 = \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{0}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{1}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{1}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{2}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0}+\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^{2}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{3} \quad 3.4
$$

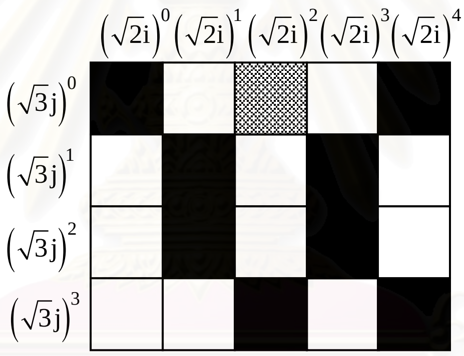
สามารถแสดงค่าของเวกเตอร์ V_1 และ V_2 ในรูปแบบตารางได้ดังรูปที่3.5



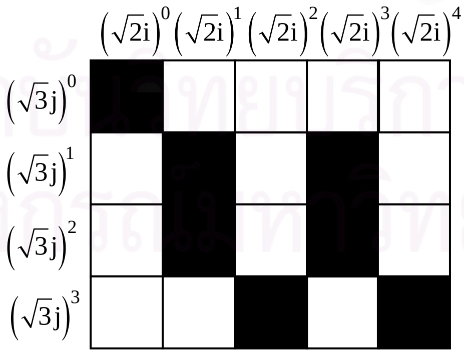
$V_1 = 1 - 3i - 2j + 6k$ $\qquad$ $V_2 = -1 - 3i + 6j + k$

รูปที่ 3.10 ค่าของ $V_1 = 1 - 3i - 2j + 6k$ และ $V_2 = -1 - 3i + 6j + k$

ทำการกลับเครื่องหมายของ $V_2 = -1 - 3i + 6j + k$ โดยใช้กฎข้อที่ 4 แล้วพิจารณาว่า ถ้ามีการซ้อนทับกันของบิตที่แอ็กทิฟก็จะพิจารณาตามกฎข้อที่ 1 และกฎข้อที่ 2 จะแสดงดังรูปที่ 3.11



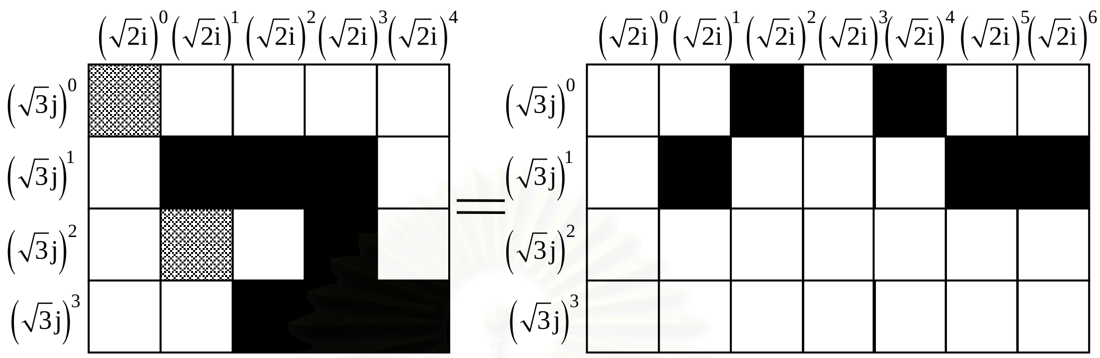
$-V_2 = 1 + 3i - 6j - k$



$-V_2 = 1 + 3i - 6j - k$

รูปที่ 3.11 ค่าของ $-V_2 = -1 - 3i + 6j + k$

เมื่อทำการกลับค่าของเครื่องหมายแล้วจะทำการซ้อนทับกันของตารางที่เป็นตัวตั้งและตารางที่ทำการกลับเครื่องหมายจะได้ดังรูปที่ 3.12 (ก) แล้วจัดให้อยู่ในรูปแบบของควอเทอร์เนียนฐานคู่พร้อมบวก จะแสดงได้ดังรูปที่ 3.12 (ข)



$V = 2 - 8j + 5k$ (ก) $V = 2 - 8j + 5k$ (ข)

รูปที่ 3.12 ผลลัพธ์ของการลบกันระหว่าง V_1 และ V_2

จากผลลบของสมการที่ 3.3 และ สมการที่ 3.4 จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$V_1 - V_2 = \left(\sqrt{2}i\right)^1\left(\sqrt{3}j\right)^1 + \left(\sqrt{2}i\right)^2\left(\sqrt{3}j\right)^0 + \left(\sqrt{2}i\right)^3\left(\sqrt{3}j\right)^2 + \left(\sqrt{2}i\right)^4\left(\sqrt{3}j\right)^0 + \left(\sqrt{2}i\right)^4\left(\sqrt{3}j\right)^1 + \left(\sqrt{2}i\right)^5\left(\sqrt{3}j\right)^1 + \left(\sqrt{2}i\right)^6\left(\sqrt{3}j\right)^1$$

$$= 2 - 8j + 5k$$

□

3.6 การคูณในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

การคูณในระบบควอเทอร์เนียนแตกต่างจากการคูณในระบบจำนวนฐานคู่ทั่วไป เนื่องจากการคูณในระบบเวกเตอร์ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่ ดังนั้นต้องพิจารณาที่ตัวตั้ง โดยจะทำการกระจายตัวตั้งไปคูณกับตัวคูณ แล้วนำค่าที่ได้มารวมกัน ซึ่งก็คือการเลื่อนตำแหน่งของตัวคูณไปตามตำแหน่งของตัวตั้ง แล้วทำการสลับตำแหน่งโดยพิจารณาจากตัวตั้ง แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ทั้งหมดจากการเลื่อนตำแหน่งมารวมกัน พร้อมทั้งแสดงวิธีการคูณดังในตัวอย่างที่ 3.6

การคูณกันของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นั้นทำได้โดยการเลื่อนตำแหน่งของตัวคูณไปตามตัวตั้งเหมือนระบบจำนวนแบบฐานคู่ แต่ในการเลื่อนนั้นเราจะไม่เลื่อนไปทีละช่อง แต่จะทำการเลื่อนทั้งกลุ่มที่เป็นมิติที่แตกต่างกันดังแสดงในเห็นในรูปที่ 3.13 ว่าทำการเลื่อนทั้งชุดที่เป็น

กรอบสีแดง ถ้าตัวคูณอยู่ในตำแหน่งในในกรอบสีแดงในรูปที่ 3.13(ก) และตัวตั้งอยู่ในตำแหน่งใดๆ ในกรอบสีแดงดังรูป 3.13 (ข) จะเลื่อนกรอบสีแดงจากรูปที่ 3.13 (ก)ไปเป็นรูปที่ 3.13 (ข) ซึ่ง

	$(\sqrt{2}i)^0$	$(\sqrt{2}i)^1$	$(\sqrt{2}i)^2$	$(\sqrt{2}i)^3$
$(\sqrt{3}j)^0$	1	i	-2	-2i
$(\sqrt{3}j)^1$	j	k	-2j	-2k
$(\sqrt{3}j)^2$	-3	-3i	6	6i
$(\sqrt{3}j)^3$	-3j	-3k	6j	6k

(ก)

	$(\sqrt{2}i)^0$	$(\sqrt{2}i)^1$	$(\sqrt{2}i)^2$	$(\sqrt{2}i)^3$
$(\sqrt{3}j)^0$	1	i	-2	-2i
$(\sqrt{3}j)^1$	j	k	-2j	-2k
$(\sqrt{3}j)^2$	-3	-3i	6	6i
$(\sqrt{3}j)^3$	-3j	-3k	6j	6k

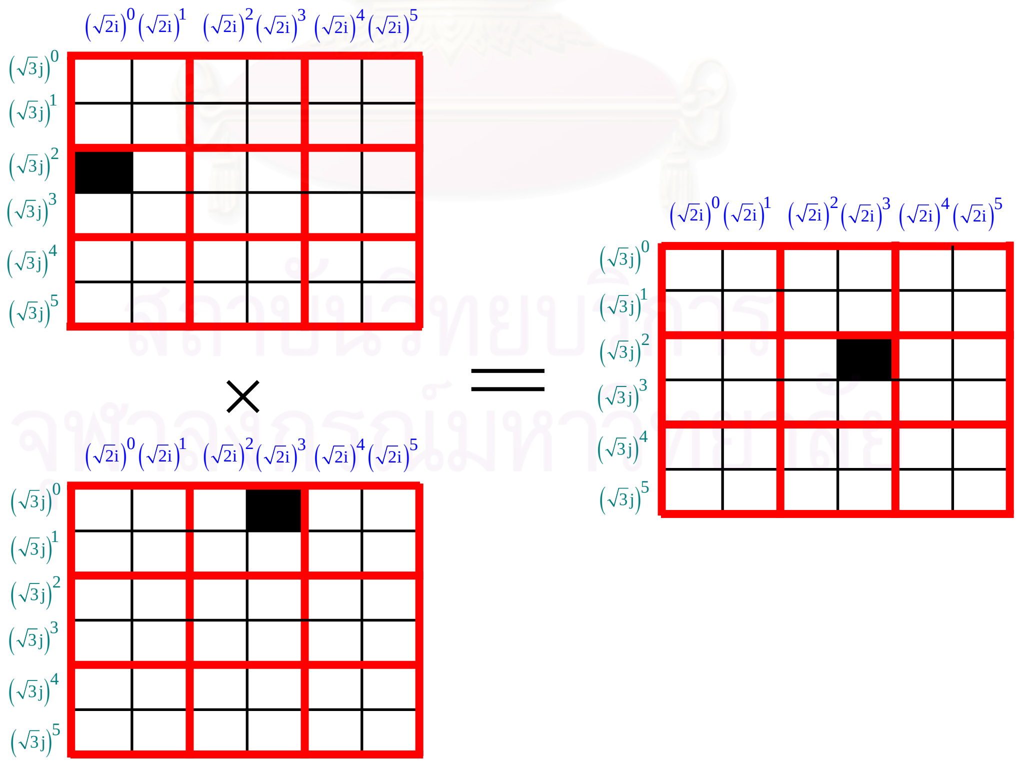
(ข)

รูปที่ 3.13 แสดงการเลื่อนในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

เมื่อทำการเลื่อนตำแหน่งแล้ว จะใช้กรอบที่เลื่อนไปเป็นตำแหน่งอ้างอิง โดยขึ้นอยู่กับตัวตั้งว่าเป็นมิติใด จะแบ่งเป็นสี่กรณี

กรณีที่ 1 ถ้าหากตัวตั้งเป็นค่าของมิติจำนวนเต็ม (a)

ทำการเลื่อนตัวคูณไปตามตำแหน่งของตัวตั้ง บิตที่แอ็กทิฟอยู่ที่ตำแหน่งใด ตำแหน่งนั้นจะเป็นค่าของผลลัพธ์ โดยจะแสดงได้ดังรูปที่ 3.14



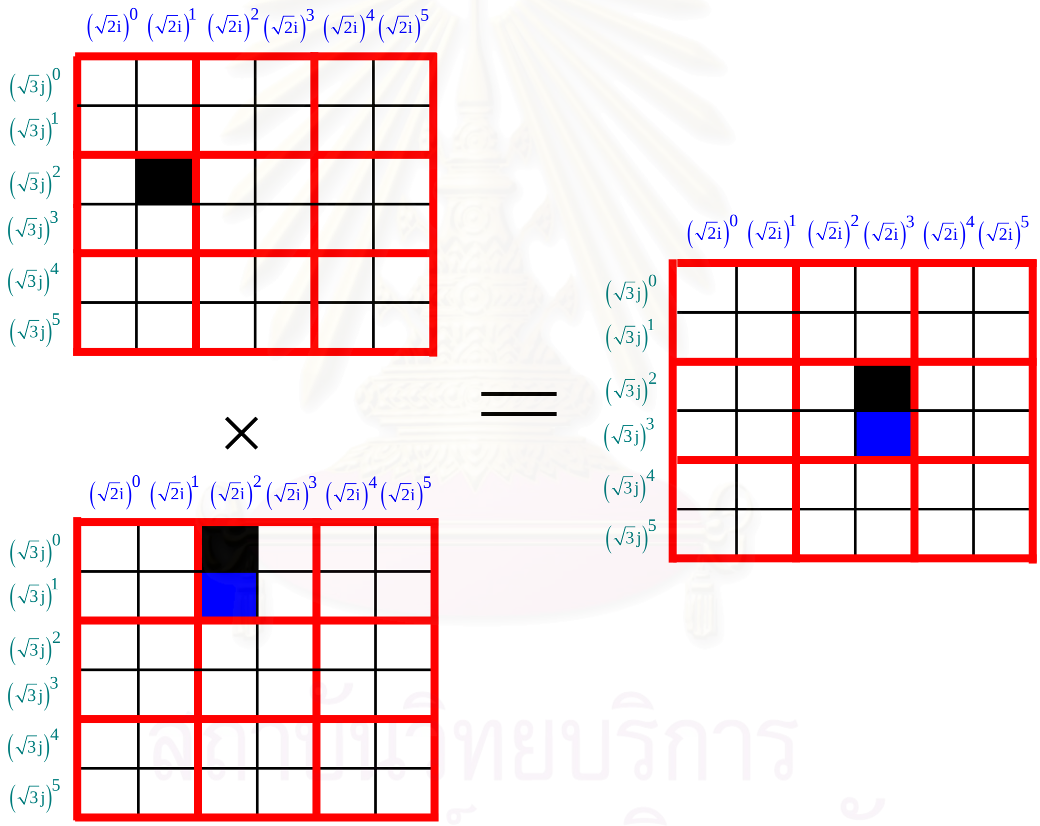
รูปที่ 3.14 แสดงผลลัพธ์ของการเลื่อนของตัวคูณเมื่อตัวตั้งเป็นจำนวนเต็ม (a)

กรณีที่ 2 ถ้าตัวตั้งเป็น i

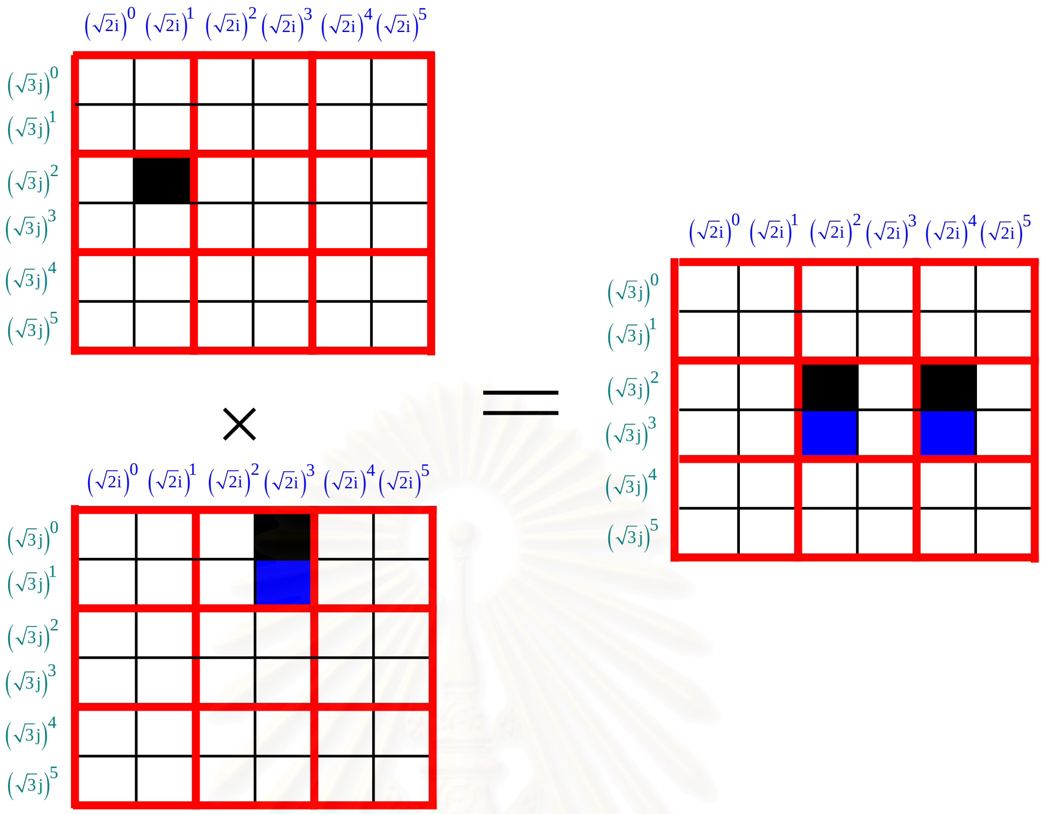
ผลลัพธ์ที่ได้ คือ จะทำการเลื่อนตัวคูณไปตามตำแหน่งของตัวตั้ง แล้วพิจารณาที่ตำแหน่งที่มีบิตที่แอ็กทิฟหลังจากเลื่อนตำแหน่งไป

กรณีที่ 2.1หากมีบิตที่แอ็กทิฟอยู่ในตำแหน่งที่ m เป็นจำนวนเต็มคู่ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ เปลี่ยนตำแหน่งบิตที่แอ็กทิฟไปทางขวา โดยจะแสดงได้ดังรูปที่ 3.15

กรณีที่ 2.2 หากมีบิตที่แอ็กทิฟอยู่ในตำแหน่งที่ m เป็นจำนวนเต็มคี่ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ เปลี่ยนตำแหน่งบิตที่แอ็กทิฟไปทางซ้าย แล้วเพิ่มบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งถัดไป 2 ตำแหน่ง โดยจะแสดงได้ดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.15 ผลลัพธ์การคูณเมื่อตัวตั้งเป็นเวกเตอร์ i และมีบิตที่แอ็กทิฟเป็นดังกรณีที่ 2.1



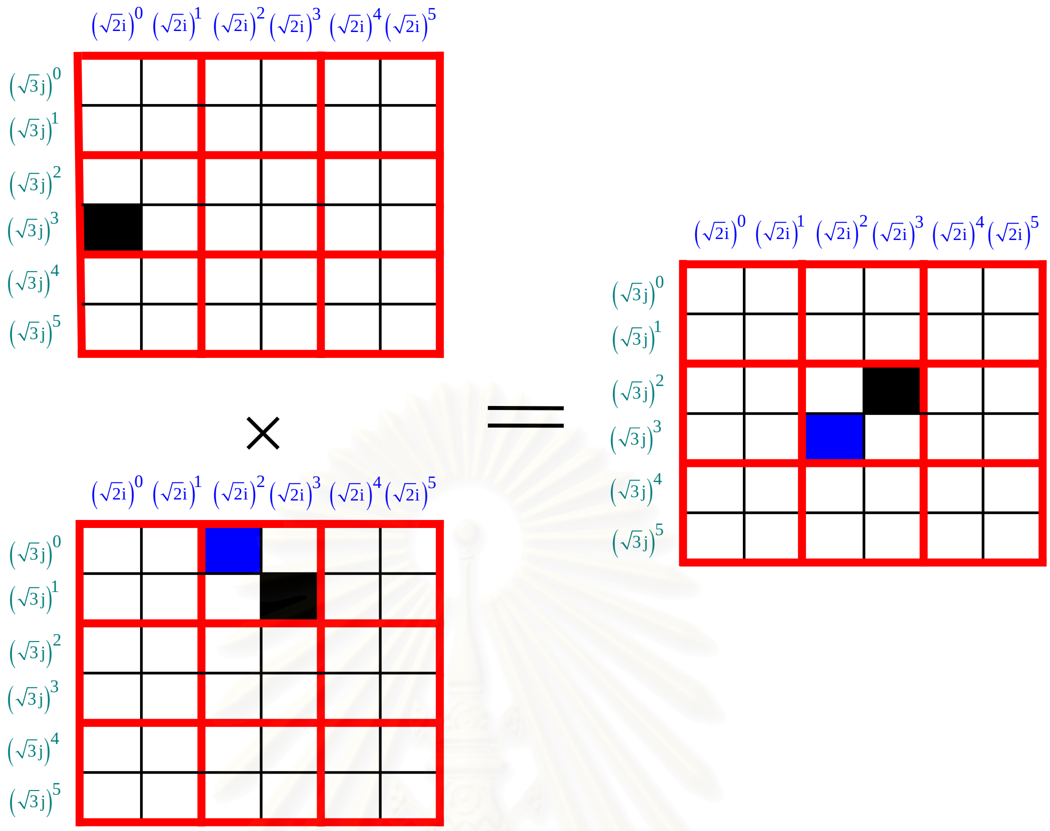
รูปที่ 3.16 ผลลัพธ์การคูณเมื่อตัวตั้งเป็นเวกเตอร์ i และมีบิตที่แอ็กทิฟเป็นดังกรณีที่ 2.2

กรณีที่ 3 ถ้าตัวตั้งเป็น j

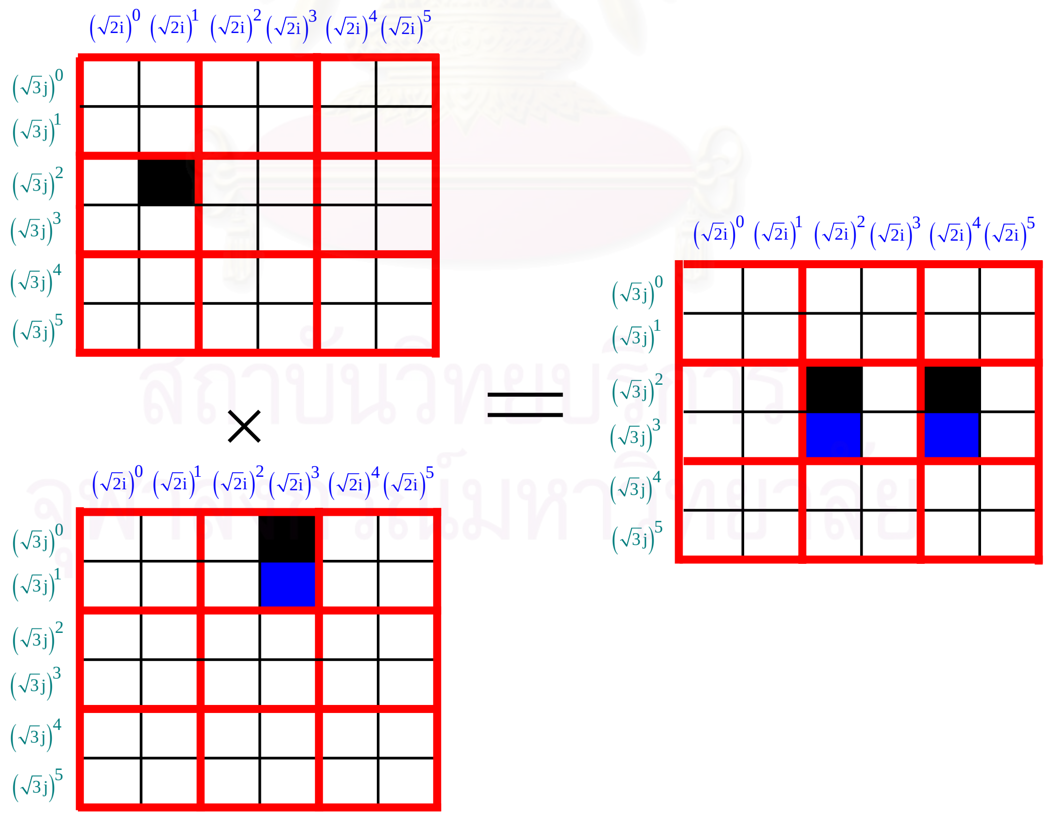
ผลลัพธ์ที่ได้ คือ จะทำการเลื่อนตัวคูณไปตามตำแหน่งของตัวตั้ง แล้วพิจารณาที่ตำแหน่งที่มีบิตที่แอ็กทิฟหลังจากเลื่อนตำแหน่งไป

กรณีที่ 3.1 หากมีบิตที่แอ็กทิฟอยู่ในตำแหน่งที่ m,n เป็นจำนวนเต็มคู่ หรือ m,n เป็นจำนวนเต็มคี่ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ เปลี่ยนตำแหน่งบิตที่แอ็กทิฟบน-ล่าง โดยจะแสดงได้ดังรูปที่ 3.17

กรณีที่ 3.2 หากมีบิตที่แอ็กทิฟอยู่ในตำแหน่งที่ m เป็นจำนวนเต็มคี่, n เป็นจำนวนเต็มคู่ หรือ m เป็นจำนวนเต็มคู่, n เป็นจำนวนเต็มคี่ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ เปลี่ยนตำแหน่งบิตที่แอ็กทิฟบน-ล่าง แล้วเพิ่มบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งถัดไป 2 ตำแหน่ง โดยจะแสดงได้ดังรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.17 ผลลัพธ์การคูณเมื่อตัวตั้งเป็นเวกเตอร์ j และมีบิตที่แอ็กทิฟเป็นดังกรณีที่ 3.1



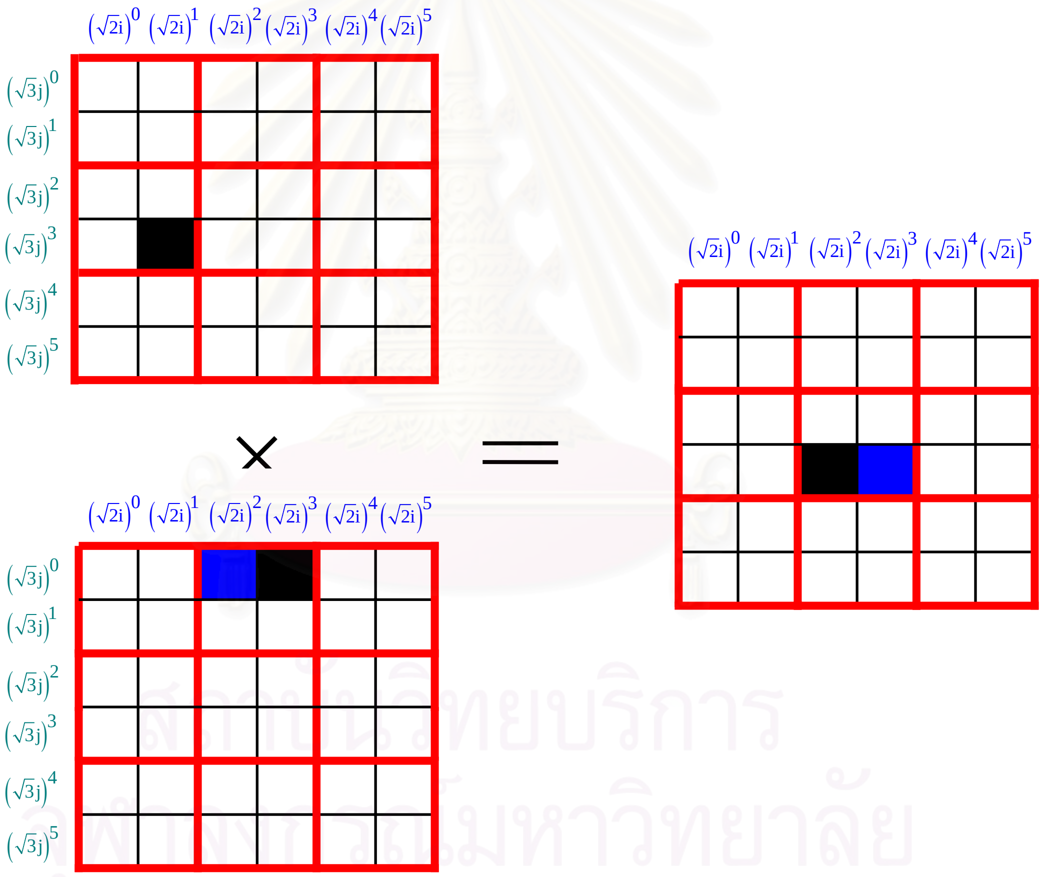
รูปที่ 3.18 ผลลัพธ์การคูณเมื่อตัวตั้งเป็นเวกเตอร์ j และมีบิตที่แอ็กทิฟเป็นดังกรณีที่ 3.2

กรณีที่ 4 ถ้าตัวตั้งเป็น k

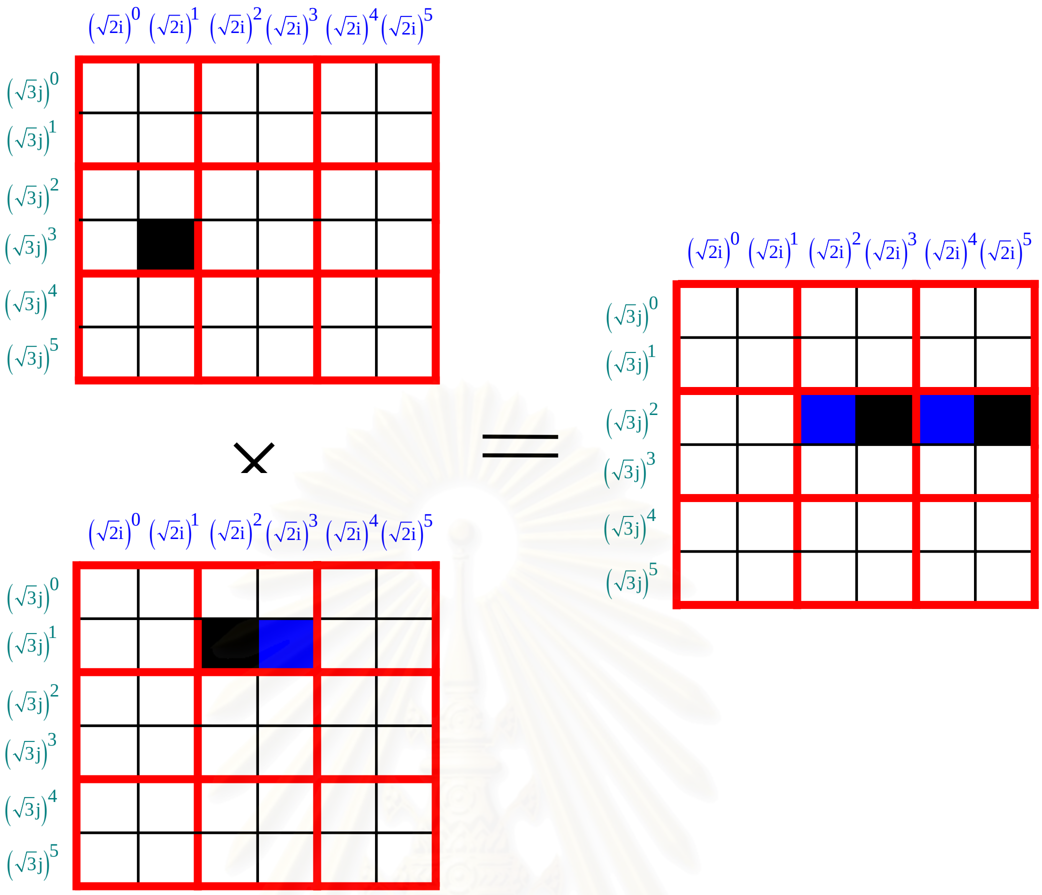
ผลลัพธ์ที่ได้ คือ จะทำการเลื่อนตัวคูณไปตามตำแหน่งของตัวตั้ง แล้วพิจารณาที่ตำแหน่งที่มีบิตที่แอ็กทิฟหลังจากเลื่อนตำแหน่งไป

กรณีที่ 4.1 หากมีบิตที่แอ็กทิฟตำแหน่งที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ เปลี่ยนตำแหน่งบิตที่แอ็กทิฟไปทิศทางทแยงมุม โดยจะแสดงได้ดังรูปที่ 3.19

กรณีที่ 4.2 หากมีบิตที่แอ็กทิฟอยู่ในตำแหน่งที่ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ เปลี่ยนตำแหน่งบิตที่แอ็กทิฟไปทิศทางทแยงมุม แล้วเพิ่มบิตที่แอ็กทิฟในตำแหน่งถัดไป 2 ตำแหน่ง โดยจะแสดงได้ดังรูปที่ 3.20



รูปที่ 3.19 ผลลัพธ์การคูณเมื่อตัวตั้งเป็นเวกเตอร์ k และมีบิตที่แอ็กทิฟเป็นดังกรณีที่ 4.1



รูปที่ 3.20 ผลลัพธ์การคูณเมื่อตัวตั้งเป็นเวกเตอร์ k และมีบิตที่แอ็กทิฟเป็นดังกรณีที่ 4.2

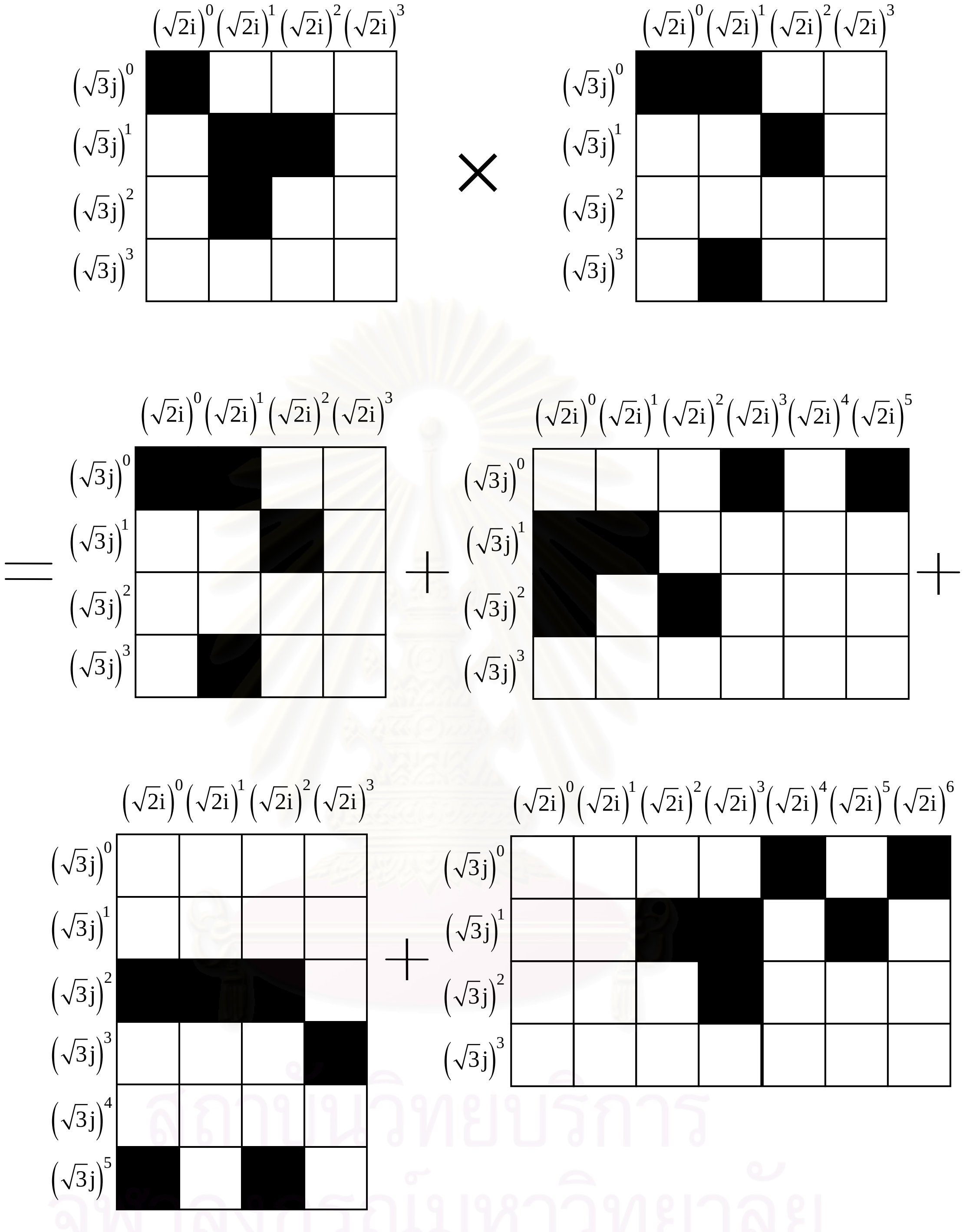
ตัวอย่างที่ 3.6 *การคูณกันระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์* $V_1 = 1 - 3i - 2j + k$ *และ* $V_2 = 1 + i - 2j - 3k$ *โดยที่ชุดตัวเลขเป็นดังนี้* m,n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n} \in \{0,1\}$, m *เป็นจำนวนเต็มคี่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคู่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, m *เป็นจำนวนเต็มคู่ และ* n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ *และ* m,n *เป็นจำนวนเต็มคี่* $d_{m,n} \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

วิธีทำ ทำการแปลงค่าของเวกเตอร์ทั้งสองโดยใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบทำให้อยู่ในรูปแบบของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะได้ค่าสมการที่ 3.5 และ 3.6

$$V_1 = (\sqrt{2}i)^0(\sqrt{3}j)^0 + (\sqrt{2}i)^1(\sqrt{3}j)^1 + (\sqrt{2}i)^1(\sqrt{3}j)^2 + (\sqrt{2}i)^2(\sqrt{3}j)^1 \qquad 3.5$$

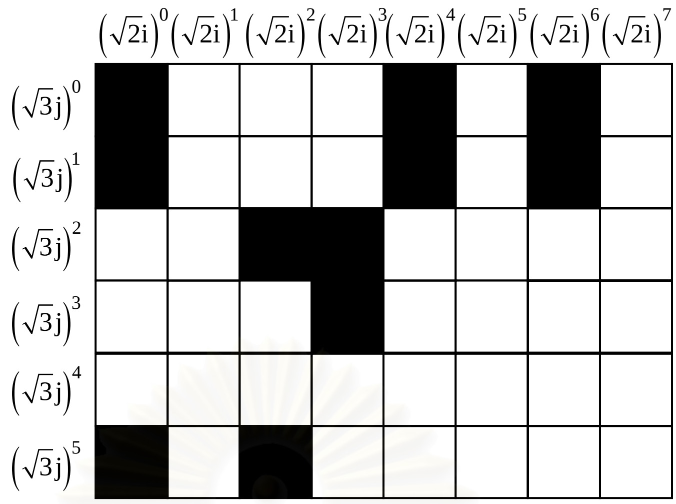
$$V_2 = (\sqrt{2}i)^0(\sqrt{3}j)^0 + (\sqrt{2}i)^1(\sqrt{3}j)^0 + (\sqrt{2}i)^1(\sqrt{3}j)^3 + (\sqrt{2}i)^2(\sqrt{3}j)^1 \qquad 3.6$$

สามารถแสดงค่าของเวกเตอร์ V_1 และ V_2 ในรูปแบบตารางได้ดังรูปที่ 3.21



รูปที่ 3.21 การคูณกันระหว่าง V_1 และ V_2

ทำการพิจารณาที่ตัวตั้งและเลื่อนตำแหน่งของตัวคูณไปตามตัวตั้ง ผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณแสดงได้ดังรูปที่ 3.21 และเมื่อจัดให้อยู่ในรูปแบบพร้อมบวกแล้วจะแสดงดังรูปที่ 3.22



รูปที่ 3.22 ผลลัพธ์ในรูปแบบพร้อมบวกของการคูณกันระหว่าง V_1 และ V_2

จากผลคูณของสมการที่ 3.5 และ สมการที่ 3.6 จะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$V_1 \times V_2 = (\sqrt{2}i)^0(\sqrt{3}j)^0 + (\sqrt{2}i)^0(\sqrt{3}j)^1 + (\sqrt{2}i)^0(\sqrt{3}j)^5 + (\sqrt{2}i)^2(\sqrt{3}j)^2 + (\sqrt{2}i)^2(\sqrt{3}j)^5 + (\sqrt{2}i)^3(\sqrt{3}j)^2 + (\sqrt{2}i)^3(\sqrt{3}j)^3 + (\sqrt{2}i)^4(\sqrt{3}j)^0 + (\sqrt{2}i)^4(\sqrt{3}j)^1 + (\sqrt{2}i)^6(\sqrt{3}j)^0 + (\sqrt{2}i)^6(\sqrt{3}j)^1$$

$$= 3 + 6i - 12j + 6k$$

□

บทที่ 4

วิเคราะห์เวกเตอร์ที่ใช้เป็นฐานในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่

ฐานที่ใช้ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ คือ $\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$ จะเห็นได้ว่าเวกเตอร์ที่ใช้เป็นฐาน คือ เวกเตอร์ i และ j เราจะทำการพิจารณาโดยการเปลี่ยนเวกเตอร์ที่ใช้เป็นฐานจาก i และ j เป็นเวกเตอร์ตัวอื่นๆ ซึ่งการเปลี่ยนเวกเตอร์ที่ใช้เป็นฐานสามารถแบ่งได้เป็น 5 กรณี ได้แก่ j และ k, k และ i, j และ i, i และ k และ k และ j โดยจะทำการแสดงได้ดังต่อไปนี้

4.1 การใช้เวกเตอร์ j และ k เป็นฐาน

รูปแบบแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยการใช้เวกเตอร์ j และ k เป็นฐานสามารถเขียนได้ ดังนี้ $V=\sum_{m,n} d_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^n$ โดยที่มี $\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^n$ เป็นฐาน และชุดตัวเลขที่ใช้เป็นดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\{0,1\}$

กรณีที่ 2 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

กรณีที่ 3 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

กรณีที่ 4 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

การเปลี่ยนฐานที่ใช้จากเวกเตอร์ i และ j เป็นเวกเตอร์ j และ k สามารถแสดงในตารางสองมิติได้ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงค่าของแต่ละตำแหน่งโดยใช้ฐาน $\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^n$

	$\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^0$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^1$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^3$	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^0$	1	j	-2	-2j	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^1$	k	i	-2k	-2i	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^2$	-3	-3j	6	6j	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^3$	-3k	-3i	6k	6i	…
…	…	…	…	…	…

4.2 การใช้เวกเตอร์ k และ i เป็นฐาน

รูปแบบแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยการใช้เวกเตอร์ k และ i เป็นฐานสามารถเขียนได้ ดังนี้ $V=\sum_{m,n} d_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^n$ โดยที่มี $\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^n$ เป็นฐาน และชุดตัวเลขที่ใช้เป็นดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\{0,1\}$

กรณีที่ 2 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

กรณีที่ 3 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

กรณีที่ 4 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

การเปลี่ยนฐานที่ใช้จากเวกเตอร์ i และ j เป็นเวกเตอร์ k และ i สามารถแสดงในตารางสองมิติได้ดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 ตารางแสดงค่าของแต่ละตำแหน่งโดยใช้ฐาน $\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^n$

	$\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^0$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^1$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^3$	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^0$	1	k	-2	-2k	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^1$	i	j	-2i	-2j	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2$	-3	-3k	6	6k	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3$	-3i	-3j	6i	6j	…
…	…	…	…	…	…

4.3 การใช้เวกเตอร์ j และ i เป็นฐาน

รูปแบบแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยการใช้เวกเตอร์ j และ i เป็นฐานสามารถเขียนได้ ดังนี้ $V=\sum_{m,n} d_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^n$ โดยที่มี $\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^n$ เป็นฐาน และชุดตัวเลขที่ใช้เป็นดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \{0,1\}$

กรณีที่ 2 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

กรณีที่ 3 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

กรณีที่ 4 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

การเปลี่ยนฐานที่ใช้จากเวกเตอร์ i และ j เป็นเวกเตอร์ j และ i สามารถแสดงในตาราง สองมิติได้ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ตารางแสดงค่าของแต่ละตำแหน่งโดยใช้ฐาน $\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^n$

	$\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^0$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^1$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{j}\right)^3$	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^0$	1	j	-2	-2j	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^1$	i	-k	-2i	2k	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^2$	-3	-3j	6	6j	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^3$	-3i	3k	6i	-6k	…
…	…	…	…	…	…

4.4 การใช้เวกเตอร์ i และ k เป็นฐาน

รูปแบบแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยการใช้เวกเตอร์ i และ k เป็นฐานสามารถเขียนได้ ดังนี้ $V=\sum_{m,n} d_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^n$ โดยที่มี $\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^n$ เป็นฐาน และชุดตัวเลขที่ใช้เป็นดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \{0,1\}$

กรณีที่ 2 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

กรณีที่ 3 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

กรณีที่ 4 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n} \in \left\{0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

การเปลี่ยนฐานที่ใช้จากเวกเตอร์ i และ j เป็นเวกเตอร์ i และ k สามารถแสดงในตาราง สองมิติได้ดังตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 ตารางแสดงค่าของแต่ละตำแหน่งโดยใช้ฐาน $\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^n$

	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^0$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^1$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^2$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^3$	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^0$	1	i	-2	-2i	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^1$	k	-j	-2k	2j	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^2$	-3	3i	6	6i	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{k}\right)^3$	-3k	3j	6k	-6j	…
…	…	…	…	…	…

4.5 การใช้เวกเตอร์ k และ j เป็นฐาน

รูปแบบแทนเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยการใช้เวกเตอร์ k และ j เป็นฐานสามารถเขียนได้ ดังนี้ $V=\sum_{m,n} d_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$ โดยที่มี $\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$ เป็นฐาน และชุดตัวเลขที่ใช้เป็นดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\{0,1\}$

กรณีที่ 2 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

กรณีที่ 3 m เป็นจำนวนเต็มคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

กรณีที่ 4 m เป็นจำนวนเต็มคี่ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดตัวเลข $d_{m,n}\in\left\{0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

การเปลี่ยนฐานที่ใช้จากเวกเตอร์ i และ j เป็นเวกเตอร์ k และ j สามารถแสดงในตาราง สองมิติได้ดังตารางที่ 4.5

ตารางที่ 4.5 ตารางแสดงค่าของแต่ละตำแหน่งโดยใช้ฐาน $\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^{m}\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{n}$

	$\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^{0}$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^{1}$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^{2}$	$\left(\sqrt{2}\mathrm{k}\right)^{3}$	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{0}$	1	k	-2	-2k	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{1}$	j	-i	-2j	2i	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{2}$	-3	-3k	6	6k	…
$\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^{3}$	-3j	3i	6j	-6i	…
…	…	…	…	…	…

4.6 สรุปผล

จากทั้ง 5 กรณี เห็นได้ว่าสามารถแบ่งออกเป็นสองกลุ่ม คือ กลุ่มที่หนึ่ง คือ 4.1 และ4.2 ส่วนกลุ่มที่สอง คือ 4.3, 4.4 และ4.5 ซึ่งทั้งสองกลุ่มนี้มีความแตกต่างกัน คือ ค่าที่อยู่ในตำแหน่งที่ m,n เป็นจำนวนเต็มคี่ โดยในกลุ่มที่หนึ่ง ค่าของการแทนเวกเตอร์ ณ ตำแหน่งที่ m,n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะเริ่มต้นด้วยค่าที่เป็นบวกเช่นเดียวกับการใช้เวกเตอร์ i และ j เป็นฐาน ส่วนในกลุ่มที่สองนั้น ค่าของการแทนเวกเตอร์ ณ ตำแหน่งที่ m,n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะเริ่มต้นด้วยค่าที่เป็นลบ สาเหตุที่เป็นเช่นนี้ เพราะว่าเวกเตอร์ไม่มีคุณสมบัติของการสลับที่ ทำให้เมื่อทำการสลับตำแหน่งของเวกเตอร์ทำให้ค่าที่ได้ไม่เท่ากัน ในการคูณกันของเวกเตอร์จึงใช้วิธีครอสกันของเวกเตอร์ที่มีคุณสมบัติเป็นไปตามกฎมือขวา ทำให้ในตำแหน่งที่ m,n เป็นจำนวนเต็มคี่ค่าที่ได้จึงมีความแตกต่างกัน

จากการที่เปลี่ยนฐานเป็นเวกเตอร์ตัวอื่นๆ นั้นไม่มีความแตกต่างกันโดยสิ้นเชิง ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนฐานที่ใช้เป็นเวกเตอร์ไม่มีผลต่อระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ เพราะไม่ว่าจะเปลี่ยนค่าของเวกเตอร์ที่ใช้เป็นฐาน ชุดของตัวเลขที่ใช้ก็ยังเหมือนกัน การทำการคำนวณโดยการบวก การลบและการคูณในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ ก็ใช้วิธีการเช่นเดียวกัน ดังนั้นจะ เห็นได้ว่าใช้ฐานใดๆ

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากที่มีการนำเสนอระบบจำนวนฐานคู่ของดิมิทรอฟ จูเลี่ยน และมิลเลอร์ ซึ่งเป็นระบบที่มีความซ้ำซ้อน และการกระจายตัวสูง จึงได้นำมาประยุกต์ใช้กับระบบเวกเตอร์ที่ยังใช้การคำนวณด้วยจำนวนจริง ซึ่งใช้จำนวนจริงหลายจำนวนในการแทนเวกเตอร์ ต่อมาได้มีการพัฒนาโดยแทนค่ารูปแบบของเวกเตอร์ด้วยลำดับของตัวเลขเพียงชุดเดียว แต่ชุดตัวเลขประกอบด้วยค่าหลายค่าและยังติดอยู่ในรูปของเวกเตอร์ ทำให้ใช้บิตจำนวนมากกว่าหนึ่งบิตในการเก็บค่าของชุดตัวเลข ในวิทยานิพนธ์นี้จึงนำเสนอรูปแบบแทนเวกเตอร์สี่มิติโดยใช้ระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ โดยที่ระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ที่นำเสนอนี้จะทำการใช้ฐานอยู่ในรูปของเวกเตอร์เพื่อให้ชุดตัวเลขไม่ติดอยู่ในรูปของเวกเตอร์เสมือนว่าเป็นการคำนวณค่าของเวกเตอร์โดยที่ไม่ได้เป็นการคำนวณจากจำนวนจริงของแต่ละเวกเตอร์ ทำให้สามารถที่จะทำการคำนวณในแต่ละมิติได้พร้อมกัน จึงได้นำใช้เวกเตอร์สองตัวมาประกอบกันเป็นฐานโดยเวกเตอร์ที่ใช้เป็นฐาน คือ เวกเตอร์ตัวเดียวกับที่ใช้ในระบบเวกเตอร์สี่มิติ โดยที่สามารถที่จะใช้เวกเตอร์เพียงแค่ i และ j เป็นฐานก็สามารถที่จะทำการคำนวณได้สี่มิติ เนื่องจากว่าการคลอสกันของเวกเตอร์ i และ j ทำให้เกิดเวกเตอร์ k ดังนั้นค่าของเวกเตอร์สามารถเขียนได้อยู่ในรูปของ $\sum_{m,n} d_{m,n}\left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m\left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$ โดยเวกเตอร์แต่ละตัวจะใช้เพียงแค่บิตเดียวในการเก็บชุดของตัวเลขประกอบด้วยชุดตัวเลขมี 2 แบบ ซึ่งในแต่ละเวกเตอร์มีตัวเลขในชุดตัวเลขที่แตกต่างกัน ดังนี้ เวกเตอร์ในตำแหน่งที่ m,n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดของตัวเลขประกอบด้วย 0 และ 1 เวกเตอร์ในตำแหน่งที่ m เป็นจำนวนเต็มคี่ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ชุดของตัวเลขประกอบด้วย 0 และ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ เวกเตอร์ในตำแหน่งที่ m เป็นจำนวนเต็มคู่ n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดของตัวเลขประกอบด้วย 0 และ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ เวกเตอร์ในตำแหน่งที่ m,n เป็นจำนวนเต็มคี่ ชุดของตัวเลขประกอบด้วย 0 และ $\frac{1}{\sqrt{6}}$ จะเห็นได้ว่า สามารถใช้จำนวนบิตหนึ่งบิตในการเก็บชุดของตัวเลข โดย 0 เปรียบเสมือนเป็นบิตที่ไม่แอ็กทิฟ และในแต่ละเวกเตอร์ที่มีค่า $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{1}{\sqrt{6}}$ เปรียบเสมือนเป็นบิตที่แอ็กทิฟ และการที่เราใช้ค่า $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$ เป็นตัวเลขในชุดตัวเลขต่างๆ เพราะว่าจะทำให้ตำแหน่งนั้นๆ สามารถแทนค่าให้อยู่ในรูปของจำนวนเต็ม โดยระบบควอ

เทอร์เนียนฐานคู่มีความสมบูรณ์ของระบบจากการพิสูจน์ พร้อมทั้งเสนอตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย การบวก การลบ และการคูณ

ข้อดีของการทำการคำนวณโดยใช้ระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นี้ ที่สามารถแสดงค่าได้ด้วยตารางสองมิติ คือ การคำนวณเชิงเลขคณิตสามารถทำการดำเนินการแบบขนานได้ เนื่องจากว่าค่าของแต่ละเวกเตอร์เป็นอิสระต่อกัน ทำให้แต่ละช่องในตารางสามารถทำการบวกได้พร้อมกันได้ ดังนั้นเวลาในการคำนวณทางคณิตศาสตร์คาดว่าสามารถลดลงได้บ้างตามวัตถุประสงค์ เนื่องจากว่าเวลาที่ใช้ในการบวกของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่จะไม่เกินจำนวนของการซ้อนทับกันของบิตที่แอ็กทิฟ แต่ในเวกเตอร์สี่มิตินั้นต้องทำการคำนวณเริ่มจากซ้ายไปขวา ซึ่งเวลาที่ใช้ในการบวกขึ้นอยู่กับจำนวนบิตที่แอ็กทิฟ ดังนั้นเวลาในการคำนวณทางคณิตศาสตร์จะลดลง ถ้าหากว่าการบวกกันในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ไม่มีการซ้อนทับกันของบิตที่แอ็กทิฟจะทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณเร็วกว่าในระบบเวกเตอร์สี่มิติ เพราะว่าเวลาที่ใช้ในการคำนวณคงที่ ทำให้การคำนวณโดยใช้ระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นั้นสามารถคำนวณได้เร็วกว่าในระบบเวกเตอร์สี่มิติที่คำนวณโดยการแยกกรณีตามมิติ ในการนำไปใช้จริงนั้นการคูณของระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ขึ้นอยู่กับจำนวนของตัวตั้ง โดยที่ในกรณีที่เลวร้ายที่สุดนั้น คือ ตารางของตัวตั้งที่มีขนาด $m \times n$ คูณกับตารางของตัวคูณที่มีขนาด $m \times n$ แล้วเนื้อที่ที่ต้องใช้ในจะมีขนาดไม่เกิน $2m+1,2n$

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้มุ่งเน้นที่การแทนเวกเตอร์สี่มิติในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่ที่มีค่าของเวกเตอร์เป็นจำนวนเต็มอาจจะทำการพัฒนาไปได้ทางอื่นได้อีก เช่น การแทนเวกเตอร์ให้อยู่ในรูปแบบของจำนวนจริงโดยการขยายระบบโดยใช้เลขยกกำลังที่เป็นติดลบเพื่อที่จะทำให้สามารถที่จะแทนค่าของเวกเตอร์ให้อยู่ในระบบจำนวนจริงได้ด้วย และระบบนี้การอ้างอิงถึงศูนย์ หมายถึงตารางที่ไม่มีบิตที่แอ็กทิฟปรากฏอยู่เลย แต่ก็มีโอกาสเมื่อทำการดำเนินการทางเลขคณิตแล้วทำให้มีรูปแบบที่เป็นศูนย์รูปแบบอื่น เนื่องจากว่าระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่นี้สามารถมีค่าที่เป็นได้ทั้งบวกและลบ จึงทำให้ระบบมีความซ้ำซ้อนสูง และทำให้เกิดความซ้ำซ้อนของศูนย์ (zero redundant) โดยสามารถที่จะทำการพัฒนาต่อโดยการพิจารณารูปแบบที่มีค่าเป็นศูนย์เพื่อให้เปลี่ยนรูปแบบที่แสดงค่าของศูนย์ให้อยู่ในรูปแบบเดียวกัน

อภิธานศัพท์

β	เลขฐาน
D	ชุดตัวเลข
$\mathbb{Z}$	จำนวนเต็ม
i	ตำแหน่งของหลัก
j	ตำแหน่งของแถว
$d_{i,j}$	เลขโดดในตำแหน่งหลักที่ i แถวที่ j
$\sum_{i,j} d_{i,j} 2^i 3^j$	รูปแบบการแทนค่าของตัวเลขในระบบจำนวนฐานคู่
i	เวกเตอร์ i
j	เวกเตอร์ j
k	เวกเตอร์ k
m	ตำแหน่งของหลัก
n	ตำแหน่งของแถว
$d_{m,n}$	เลขโดดในตำแหน่งหลักที่ m แถวที่ n
$\sum_{m,n} d_{m,n} \left(\sqrt{2}\mathrm{i}\right)^m \left(\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^n$	รูปแบบการแทนค่าของเวกเตอร์ในระบบควอเทอร์เนียนฐานคู่
□	บิตที่ไม่แอ็กทิฟ
■	บิตที่แอ็กทิฟ
▒	บิตที่ซ้อนทับกัน

ตัวย่อ

DBNS	Double-Base Number System
NCDBNR	Near-Canonic Double-Base Number Representation
ARDBNS	Addition Ready Double-Base Number Representation
DBQS	Double-Base Quaternion System
NCDBQR	Near-Canonic Double-Base Quaternion Representation
ARDBQS	Addition Ready Double-Base Quaternion Representation

รายการอ้างอิง

[1] Knuth, D. E. An Imaginary Number System. Communications of the ACM (1960): 245-247.

[2] Penney, W. A binary system for complex numbers. JACM 12 (1965): 247-248.

[3] Jamil, T. The complex binary number system. IEEE Potentials (December 2001/January 2002): 40-41.

[4] Avizienis, A. Signed-Digit Number Representations for Fast Parallel Arithmetic. IRE Transaction on Electronic Computers 10 (1961): 389-400.

[5] Rangsunvigit, S., Punthong, N., and Surarerks, A. On-Line Fundamental Arithmetic Algorithms for Three-Dimensional Vector System. Proceedings of 10th National Computer Science and Engineering Conference(NCSEC), Khon Kaen, Thailand, October 25-27 (2006): 118-125.

[6] Dimitrov, V.S., S. Sadeghi-Emamchaie, G.A. Julien, and W.C. Miller. A Near Canonic Double-Based Number System (DBNS) with Applications in Digital Signal Processing. SPIE Conference on Signal Processing Algorithms 48 (1996): 1098-1106.

[7] Dimitrov, V.S., G.A. Jullien, and W.C. Miller. Theory and Applications of a Double-Base Number System. IEEE Transactions on Computers 48 (1999): 1098-1106.

[8] Dimitrov, V.S., and G.A. Jullien. Loading the bases: A new number system representation with applications. IEEE Circuits and Systems Magazine 3 (2003): 6-23.

[9] Valérie Berthé, Laurent Imbert, and Graham A. Jullien. More on Converting Numbers to the Double-Base Number System. Researcher Report LIRMM-04031 (2004): 1-20.

[10] Hamilton, W.R. On quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 3 (1847): 1-16.

[11] Surarerks, A. Digit Set Conversion by On-Line Finite Automata. Bulletin of the Belgian Mathematial Society, Simon Stevin 8 (April-May-June 2001): 337-358.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาววรางคณา เบญจศีล เกิดเมื่อวันที่ 19 กันยายน พ.ศ. 2525 สำเร็จการศึกษาระดับระดับมัธยมต้นและระดับมัธยมปลายจากโรงเรียนสวรรค์อนันต์วิทยา สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิต ในสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ในปีการศึกษา 2546