

บทที่ 7

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

บทนี้เป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาตรวจสอบความถูกต้อง โดยนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวไปแก้ปัญหาคำนวณ แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีอื่น ๆ หรือผลการทดลองของปัญหาเดียวกัน โดยมีพารามิเตอร์ไร้มิติ (Dimensionless parameter) เท่ากัน ปัญหาที่ถูกนำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในบทนี้ได้แก่ (1) การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Free convection in square enclosure) (2) การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน (Free convection in the annulus space between concentric cylinders) (3) การพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน (Forced convection from a hot circular cylinder) และ (4) การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่ได้รับความร้อนจากด้านล่าง (Free convection in enclosure heated from below)

7.1 พารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้ในการวิเคราะห์การไหล

การรวมผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิเข้าไปในสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมดังแสดงในสมการ (3.20b) ทำให้สามารถนำระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในสมการ (3.19) ถึง (3.21) ไปประยุกต์ใช้กับปรากฏการณ์การพาความร้อนได้ การวิเคราะห์การไหลจึงกระทำได้หลากหลายมากขึ้น แต่การแยกความแตกต่างของการไหลเหล่านี้โดยการระบุคุณสมบัติทางกายภาพ (Physical properties) ของของไหลกระทำไม่ได้ไม่สะดวกนัก เนื่องจากคุณสมบัติทางกายภาพที่มีผลต่อการไหลมีอยู่ด้วยกันหลายตัว ดังนั้นเพื่อให้เกิดความสะดวกในการแยกความแตกต่างของการไหล จึงนิยามที่จะใช้การระบุพารามิเตอร์ไร้มิติแทน ซึ่งพารามิเตอร์ไร้มิตินิยามใช้กัน ได้แก่

เรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynolds number, Re)

เรย์โนลด์นัมเบอร์เป็นพารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้ระบุรูปแบบการไหลว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบหรือแบบปั่นป่วนในปรากฏการณ์การพาความร้อนแบบบังคับ (Forced convection) ความหมายทางกายภาพของเรย์โนลด์นัมเบอร์ก็คือ เป็นอัตราส่วนของแรงเฉื่อย (Inertia force) กับแรงเนื่องจากความหนืด (Viscous force) [12] ซึ่งหาค่าได้จากสมการ

$$Re = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu} \quad (7.1)$$

| | | |
|-----|--------|----------------------------------------------------------|
| โดย | ρ | แทนความหนาแน่นของของไหล |
| | V | แทนความเร็วของของไหลที่ทางเข้า |
| | l | แทนความยาวเฉพาะ (Characteristic length) ในโดเมนของการไหล |
| | μ | แทนความหนืดพลศาสตร์ของของไหล |
| | ν | แทนความหนืดจลนศาสตร์ของของไหล |

พรีนดท์เทิลนัมเบอร์ (Prandtl number, Pr)

พรีนดท์เทิลนัมเบอร์เป็นพารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้ระบุความแตกต่างของการไหลในปรากฏการณ์การพาความร้อนทั้งแบบอิสระและแบบบังคับ ความหมายทางกายภาพของพรีนดท์เทิลนัมเบอร์ก็คือ เป็นอัตราส่วนของการแพร่กระจายของโมเมนตัม (Momentum diffusivity) ในชั้นขอบเขตของความเร็ว (Velocity boundary layer) กับการแพร่กระจายของพลังงานความร้อน (Thermal diffusivity) ในชั้นขอบเขตของพลังงานความร้อน (Thermal boundary layer) [12] ซึ่งหาค่าได้จากสมการ

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (7.2)$$

| | | |
|-----|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| โดย | c_p | แทนความร้อนจำเพาะของของไหลเมื่อความดันคงที่ |
| | k | แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหล |
| | α | แทนการแพร่กระจายเชิงความร้อน (Thermal diffusivity) ของของไหล ซึ่งเป็นอัตราส่วนของการนำความร้อนกับความสามารถในการจุความร้อน [12] ดังสมการ |

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (7.3)$$

เรย์เลห์นัมเบอร์ (Rayleigh number, Ra)

เรย์เลห์นัมเบอร์เป็นพารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้ระบุรูปแบบการไหลว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบหรือแบบปั่นป่วนในปรากฏการณ์การพาความร้อนแบบอิสระ ความหมายทางกายภาพของเรย์เลห์นัมเบอร์ก็คือ เป็นอัตราส่วนของแรงลอยตัวกับแรงเนื่องจากความหนืด ซึ่งหาค่าได้จากสมการ

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T l^3}{\nu \alpha} \quad (7.4)$$

| | | |
|-----|-----|----------------------------------|
| โดย | g | แทนความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วง |
|-----|-----|----------------------------------|

β แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อนของของไหล
 ΔT แทนผลต่างของอุณหภูมิสูงสุดและต่ำสุดของของไหล

นัสเซลท์นัมเบอร์ (Nusselt number, Nu)

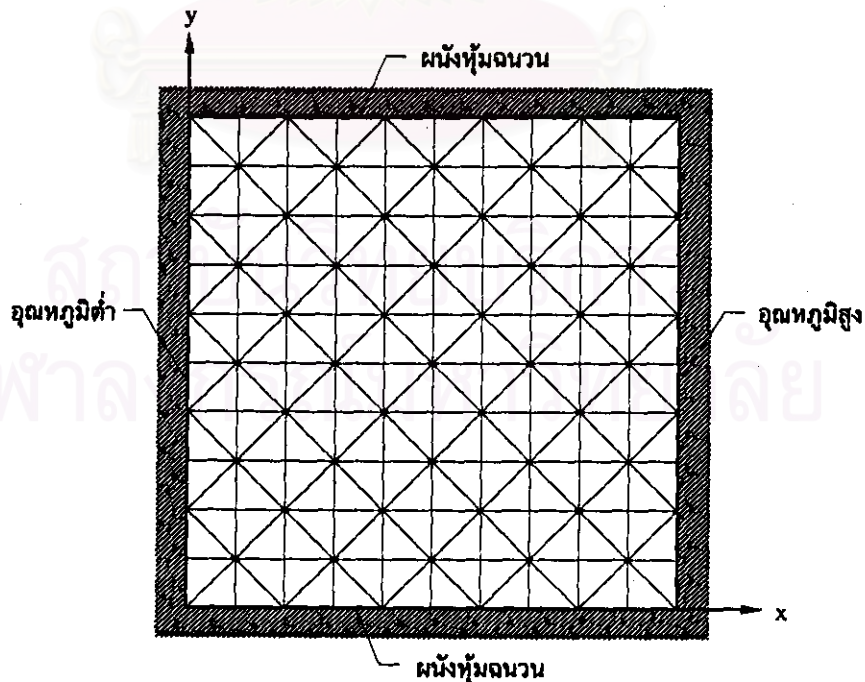
นัสเซลท์นัมเบอร์เป็นพารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้วัดปริมาณการถ่ายเทความร้อนโดยการพาความร้อนทั้งแบบอิสระและแบบบังคับจากพื้นผิวที่พิจารณา ซึ่งหาค่าได้จากสมการ

$$Nu = \frac{hl}{k} \quad (7.5)$$

โดย h แทนสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (Convection heat transfer coefficient) ของของไหล

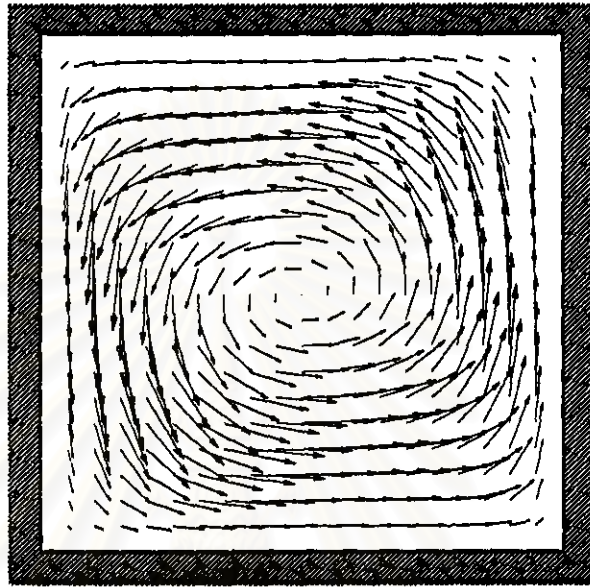
7.2 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ปัญหาแรกที่ถูกนำมาใช้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นก็คือ ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ทั้งนี้เนื่องจากปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาพื้นฐานที่มีการค้นคว้าวิจัยกันอย่างกว้างขวางทั้งทางด้านทฤษฎีและการคำนวณเชิงตัวเลข ดังนั้นจึงมีผลลัพธ์เชิงตัวเลข (Numerical solution) จากนักวิจัยคนอื่นๆ มาอ้างอิงเพื่อตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้น

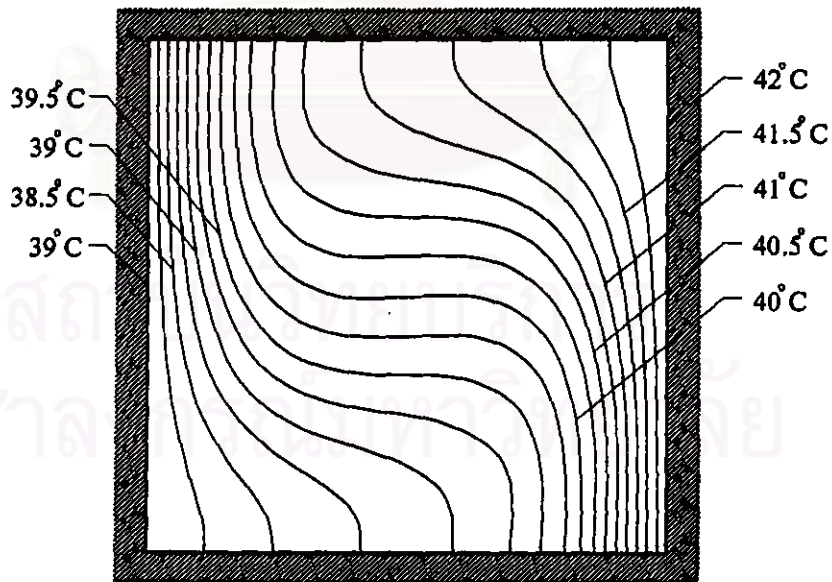


รูปที่ 7.1 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

รูปแบบของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตั้งแสดงในรูปที่ 7.1 (สร้างจากโปรแกรม NASTRAN) ประกอบด้วย 200 เอลิเมนต์ 441 จุดต่อของความเร็ว (Velocity nodes) และอุณหภูมิ (Temperature nodes) และ 200 จุดต่อของความดัน (Pressure nodes) โดยที่ผนังทางด้านขวาของช่องปิดมีอุณหภูมิสูงกว่าผนังด้านซ้าย ส่วนผนังด้านบนและด้านล่างของช่องปิดถูกหุ้มด้วยฉนวนความร้อน



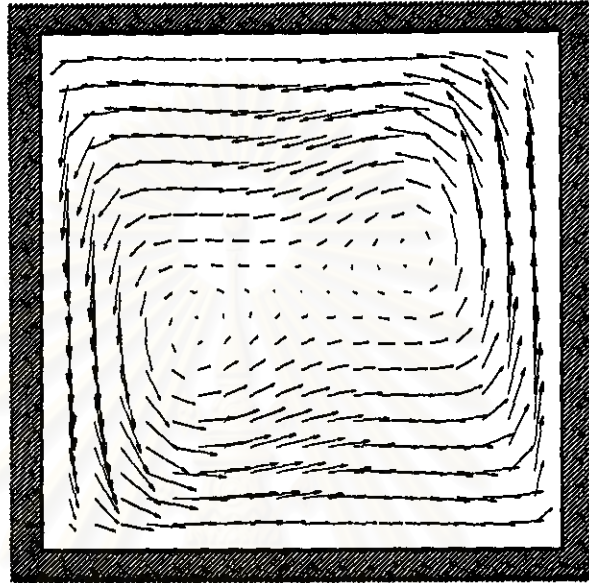
(a)



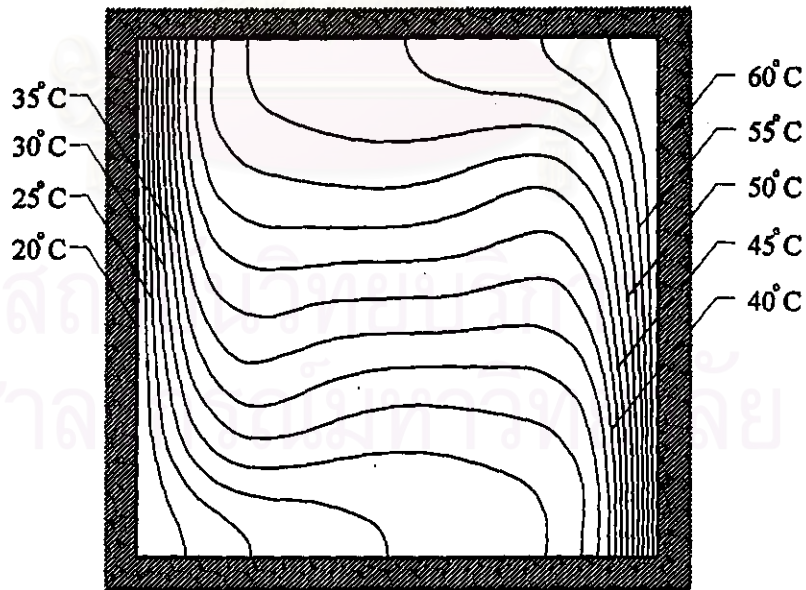
(b)

รูปที่ 7.2 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรณีที่มี $Pr=1$ และ $Ra=10^4$ (a) รูปแบบการไหล (b) ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ

การวิเคราะห์การไหลของปัญหานี้จะกระทำในกรณีที่พรีนัมเบอร์เทิลนัมเบอร์เท่ากับ 1 โดยมี เรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^4 และ 10^5 (ใช้ผลต่างของอุณหภูมิสูงสุดและต่ำสุดต่างกัน 10 เท่า) เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในบทที่ 6 ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ Penalty function formulation ของ Reddy และ Satake [21]



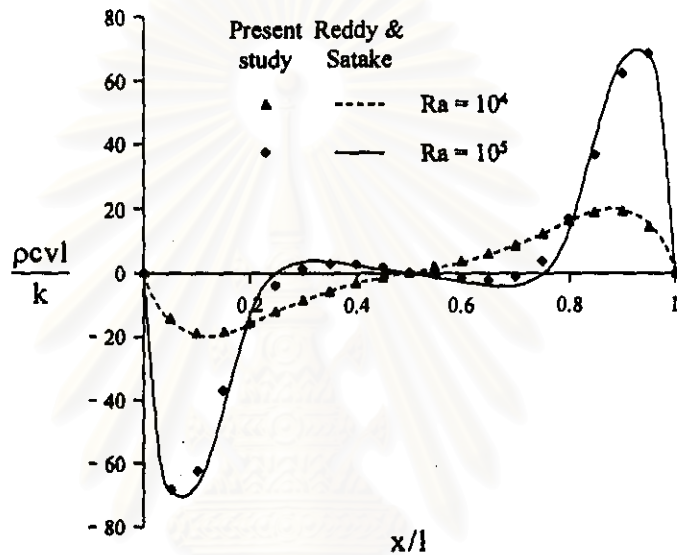
(a)



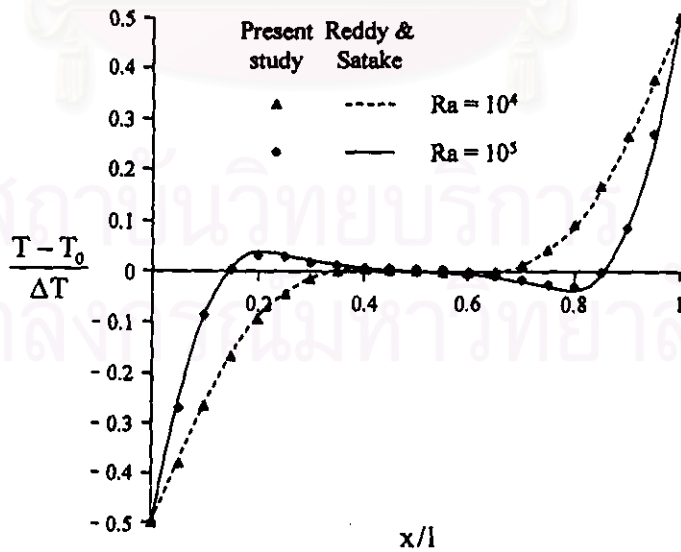
(b)

รูปที่ 7.3 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในกรณีที่ $Pr = 1$ และ $Ra = 10^5$ (a) รูปแบบการไหล (b) ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ

รูปที่ 7.2a-b แสดงรูปแบบการไหลและลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^4 จะเห็นได้ว่าการไหลหมุนวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (Counterclockwise direction) ในลักษณะที่ราบเรียบ ทำให้ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิราบเรียบตามไปด้วย ซึ่งสังเกตได้จากเส้นแสดงระดับของอุณหภูมิที่ราบเรียบ ส่วนรูปที่ 7.3a-b แสดงรูปแบบการไหลและลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^5 จะเห็นได้ว่ารูปแบบการไหลมีความซับซ้อนมากขึ้นกล่าวคือ เกิดการไหลหมุนวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาถึง 2 บริเวณ ทำให้ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิตั้งแต่มีความซับซ้อนมากขึ้นกว่าเดิม ซึ่งสังเกตได้จากเส้นแสดงระดับของอุณหภูมิที่ไม่ราบเรียบเหมือนกับในกรณีที่เรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าเท่ากับ 10^4



(a)



(b)

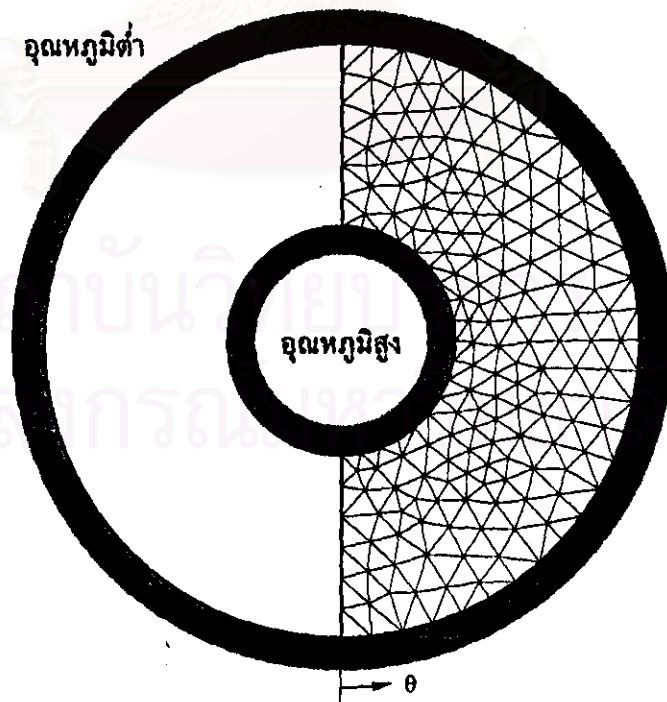
รูปที่ 7.4 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการไหลที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิด
 (a) ความเร็วไร้มิติในแนวดิ่ง (b) อุณหภูมิไร้มิติ

สำหรับการวิเคราะห์การไหลในกรณีที่เราเลือกนัมเบอร์เท่ากับ 10^5 นั้น ถ้าใช้จำนวนเอลิเมนต์ไม่เพียงพอที่จะแสดงรูปแบบการไหลที่ซับซ้อนแล้ว ก็จะไม่สามารรถคำนวณหาผลลัพธ์ออกมาได้ ซึ่งข้อสังเกตนี้จะเป็นประโยชน์ในการแบ่งเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาอื่นที่ซับซ้อนมากขึ้นต่อไป

ผลลัพธ์ดังกล่าวถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ Reddy และ Satake [21] โดยนำผลลัพธ์ที่ได้มาคำนวณความเร็วไร้มิติ (Dimensionless velocity) ในแนวตั้งและอุณหภูมิไร้มิติ (Dimensionless temperature) ที่ระยะกึ่งกลางความสูง (Mid-height) ของช่องปิด แล้วนำมาพลอตกราฟดังแสดงในรูปที่ 7.4a-b พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น และผลลัพธ์ของ Reddy และ Satake [21] มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

7.3 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

ปัญหาที่สองที่ถูกนำมาใช้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นก็คือ ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน เนื่องจากปัญหาดังกล่าวก็เป็นปัญหาพื้นฐานเช่นเดียวกับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในหัวข้อ 7.2 ดังนั้นจึงมีการค้นคว้าวิจัยกันมาอย่างต่อเนื่อง และ

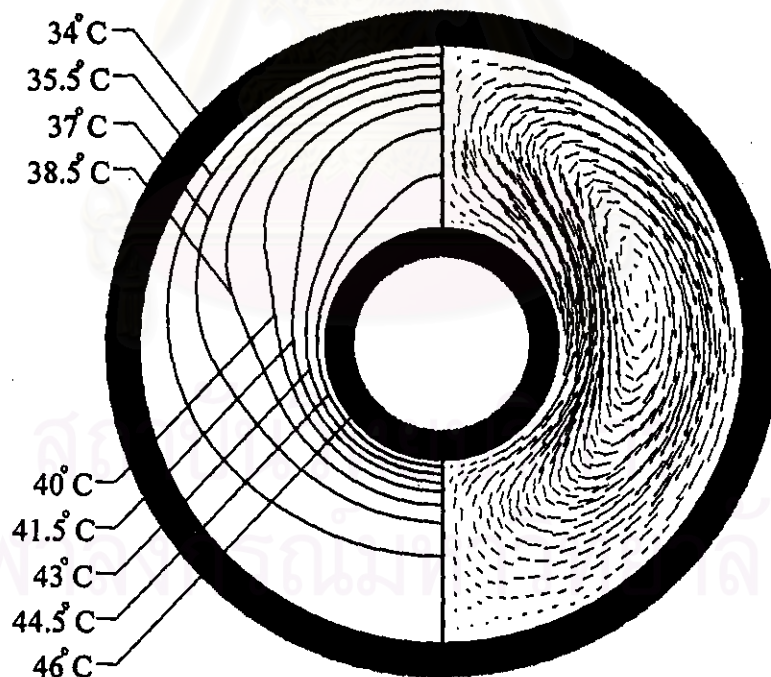


รูปที่ 7.5 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

มีผลลัพธ์เชิงตัวเลขมาอ้างอิงเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ ถูกประดิษฐ์ขึ้น

รูปแบบของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลาง ร่วมกันดังแสดงในรูปที่ 7.5 (สร้างจากโปรแกรม NASTRAN) ประกอบด้วย 338 เอลิเมนต์ 737 จุดต่อของความเร็วและอุณหภูมิ และ 200 จุดต่อของความดัน โดยที่ทรงกระบอก ที่อยู่ด้านในมีอุณหภูมิสูงกว่าทรงกระบอกที่อยู่ด้านนอก

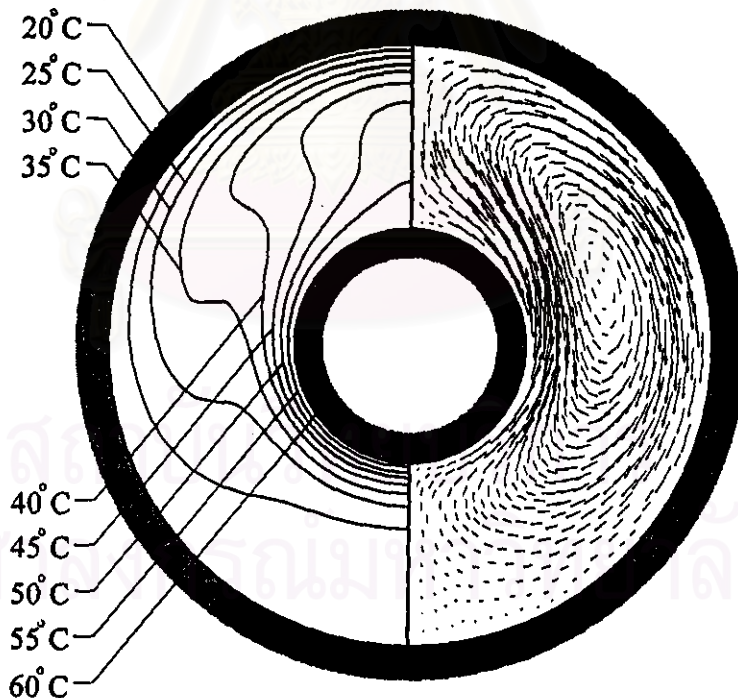
การวิเคราะห์การไหลของปัญหานี้จะกระทำในกรณีที่พริ้นด์เทิลนัมเบอร์เท่ากับ 0.7 โดยมีเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 3000 และ 10000 (คำนวณจากความกว้างของช่องว่างระหว่างทรง กระบอก) ซึ่งเกิดจากการใช้ผลต่างของอุณหภูมิของทรงกระบอก 12 และ 40 องศาเซลเซียส ตามลำดับ และมีอัตราส่วนของความกว้างของช่องว่างระหว่างทรงกระบอกกับเส้นผ่านศูนย์กลาง ของทรงกระบอกที่อยู่ด้านในเท่ากับ 0.8 เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในบทที่ 6 ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างสลับเนื่องของ Kuehn และ Goldstein [22]



รูปที่ 7.6 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิและรูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนแบบ อิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันในกรณีที่ $Pr = 0.7$ และ $Ra = 3000$

การวิเคราะห์การไหลโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างสลับเนื่องของ Kuehn และ Goldstein [22] นั้น เริ่มต้นด้วยการเขียนระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาการไหลในรูปแบบไร้มิติ ในพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate) แล้วจึงประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสลับเนื่องกับระบบสมการดังกล่าว เพื่อประดิษฐ์ระบบสมการของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆขึ้นมา หลังจากนั้นจึงใช้ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสลับเนื่อง (Successive over-relaxation method) [15] ในการหาลักษณะของระบบสมการของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อเหล่านั้น

รูปที่ 7.6 แสดงรูปแบบการไหลและการกระจายของอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 3000 จะเห็นว่าของไหลที่อยู่ทางด้านขวาของช่องว่างจะไหลหมุนวนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา (Clockwise direction) โดยมีความเร็วของการไหลค่อนข้างต่ำ ทำให้ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิก่อนข้างเป็นระเบียบ ซึ่งสังเกตได้จากเส้นแสดงระดับของอุณหภูมิที่มีลักษณะบิดเบี้ยวเพียงเล็กน้อย ส่วนรูปที่ 7.7 แสดงรูปแบบการไหลและการกระจายของอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10000 จะเห็นว่าของไหลที่อยู่ทางด้านขวาของช่องว่างก็ยังคงไหลในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเช่นเดิม แต่ความเร็วของการไหลเพิ่มขึ้น ทำให้ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิจึงมีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งสังเกตได้จากเส้นแสดงระดับของอุณหภูมิที่บิดเบี้ยวไม่เป็นระเบียบ



รูปที่ 7.7 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิจึงรูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันในกรณีที่มี $Pr = 0.7$ และ $Ra = 10000$

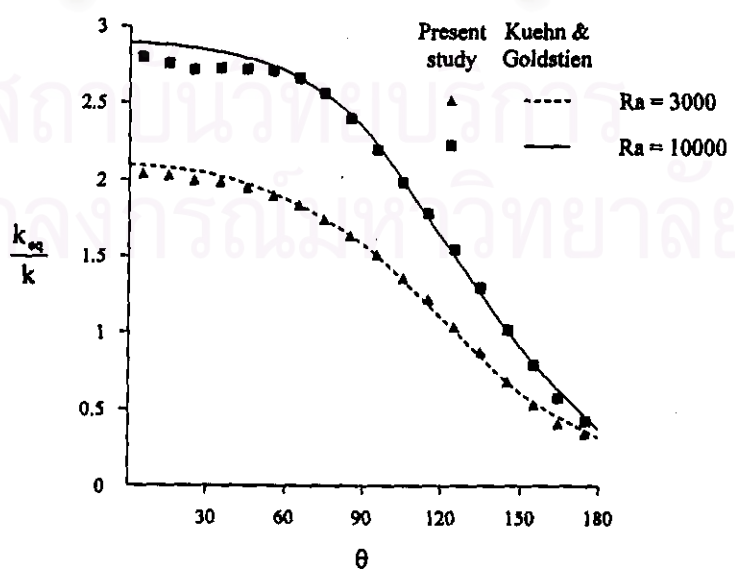
ตารางที่ 7.1a การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่ทรงกระบอกด้านใน

| Ra | Average equivalent conductivity | | Error(%) |
|-------|---------------------------------|---------------|----------|
| | Kuehn & Goldstien | Present study | |
| 3000 | 1.40 | 1.39 | 1.34 |
| 10000 | 2.01 | 1.98 | 1.47 |

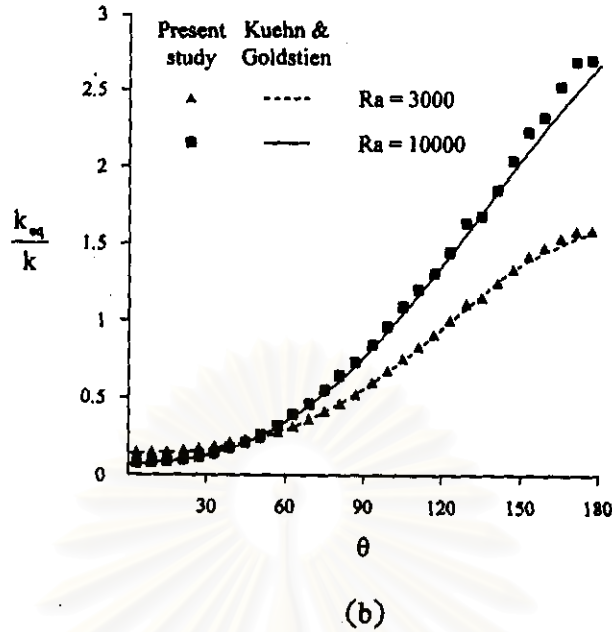
ตารางที่ 7.1b การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่ทรงกระบอกด้านนอก

| Ra | Average equivalent conductivity | | Error(%) |
|-------|---------------------------------|---------------|----------|
| | Kuehn & Goldstien | Present study | |
| 3000 | 1.40 | 1.42 | 1.29 |
| 10000 | 2.00 | 2.07 | 3.35 |

ผลลัพธ์ดังกล่าวถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ Kuehn และ Goldstein [22] โดยนำผลลัพธ์ที่ได้มาคำนวณหาค่าของการนำความร้อนสมมูล (Equivalent conductivity) ที่ผิวของทรงกระบอกทั้งสอง (วิธีการคำนวณแสดงไว้ในภาคผนวก ข) แล้วนำมาพลอตกราฟดังแสดงในรูปที่ 7.8a-b และนำค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลมาแสดงไว้ในตารางที่ 7.1a-b พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นและผลลัพธ์ของ Kuehn และ Goldstein [22] มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ยกเว้นบริเวณด้านล่างของทรงกระบอกด้านในและบริเวณด้านบน



(a)



รูปที่ 7.8 การเปรียบเทียบการนำความร้อนสมมูลที่ผิวของทรงกระบอก (a) ทรงกระบอกด้านใน (b) ทรงกระบอกด้านนอก

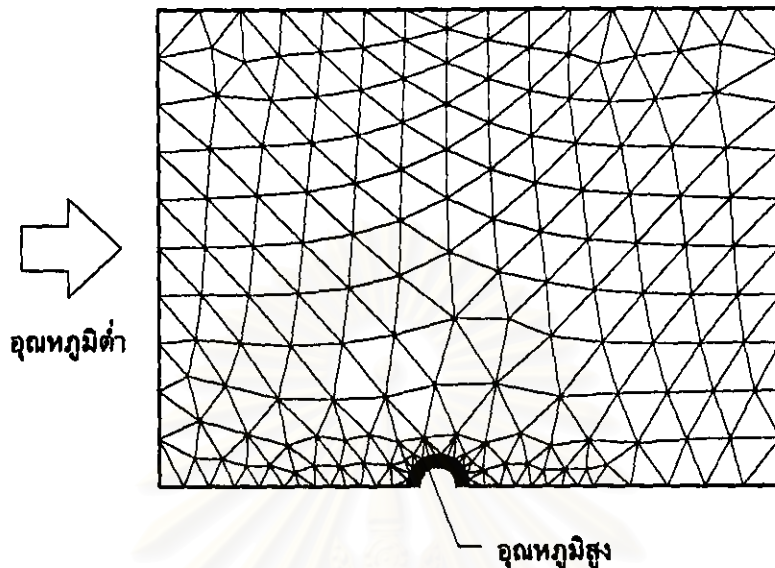
ของทรงกระบอกด้านนอกเท่านั้นที่มีความคลาดเคลื่อนอย่างชัดเจน ทั้งนี้ก็เพราะว่าในบริเวณดังกล่าวมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิค่อนข้างมาก การใช้จำนวนเอลิเมนต์เท่าที่ได้กล่าวมาในตอนต้นทำให้ความคลาดเคลื่อนของค่าการนำความร้อนสมมูลเฉลี่ยมีค่าอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้เท่านั้น แต่ไม่สามารถที่จะแสดงรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของค่าการนำความร้อนสมมูลในบางบริเวณได้อย่างสมบูรณ์

7.4 การพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน

หลังจากที่ได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในหัวข้อ 7.2 และ 7.3 แล้ว ปัญหาถัดมาที่ถูกนำมาใช้ในการตรวจสอบก็คือ ปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน ปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาพื้นฐานที่มีความสำคัญในทางวิศวกรรมค่อนข้างมาก ดังนั้นการทดลองเป็นจำนวนมากจึงมุ่งเน้นเพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น โดยเฉพาะปรากฏการณ์การถ่ายเทความร้อน ทำให้มีผลการทดลองมาอ้างอิง เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้น

รูปแบบของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อนดังแสดงในรูปที่ 7.9 (สร้างจากโปรแกรม NASTRAN) ประกอบด้วย 342 เอลิเมนต์ 761 จุดต่อของความเร็วและ

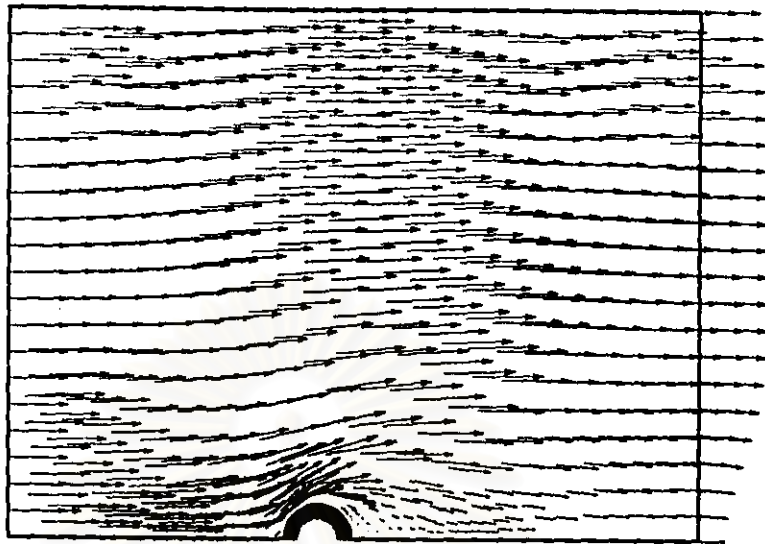
อุณหภูมิ และ 210 จุดต่อของความดัน โดยที่ของไหลไหลเข้าสู่โดเมนของการไหลด้วยความเร็วสม่ำเสมอ (Uniform velocity)



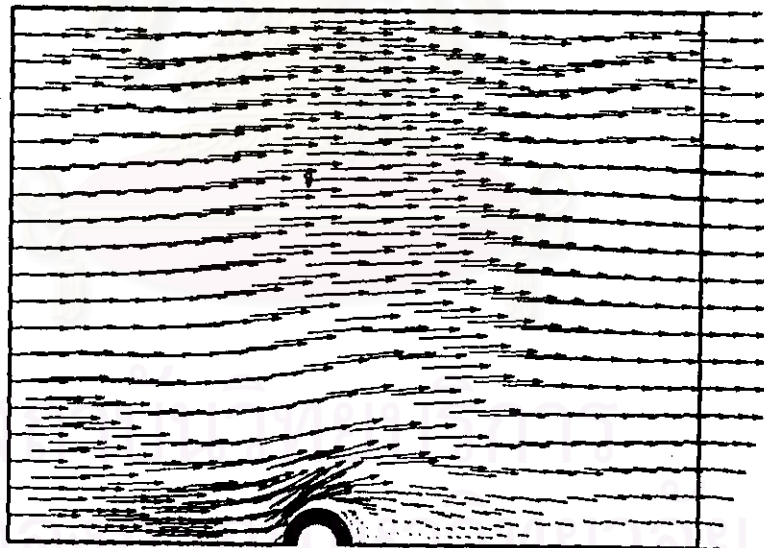
รูปที่ 7.9 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน

การวิเคราะห์การไหลของปัญหานี้จะกระทำในกรณีที่พรีนัมเบอร์เท่ากับ 0.7 โดยที่ $Re^{0.45}$ มีค่าเท่ากับ 3, 4 และ 5 และอุณหภูมิของทรงกระบอกสูงกว่าอุณหภูมิของของไหล 20 องศาเซลเซียส เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในบทที่ 6 ไปเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของ Collis และ Williams [23] ซึ่งเป็นการทดลองเพื่อหาความสัมพันธ์ของการถ่ายเทความร้อน (Heat transfer correlation) ในปรากฏการณ์การถ่ายเทความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน โดยที่เรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าไม่เกิน 40

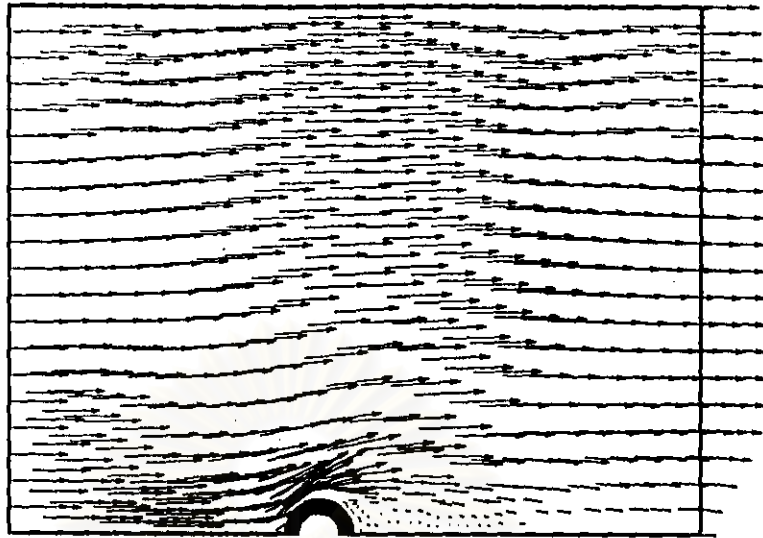
รูปที่ 7.10a-c แสดงรูปแบบการไหลเมื่อ $Re^{0.45}$ มีค่าเท่ากับ 3, 4 และ 5 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อ $Re^{0.45}$ มีค่าเท่ากับ 3 ของไหลจะไม่ไหลหมุนวนที่ด้านหลังของทรงกระบอก เนื่องจากความเร็วของของไหลต่ำมาก การไหลหมุนวนจะเริ่มเกิดขึ้นเมื่อ $Re^{0.45}$ มีค่าเท่ากับ 4 และกินบริเวณกว้างมากขึ้นเมื่อ $Re^{0.45}$ มีค่าเท่ากับ 5 เนื่องจากความเร็วของของไหลมากขึ้น ส่วนรูปที่ 7.11 แสดงลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเมื่อ $Re^{0.45}$ มีค่าเท่ากับ 5 เพียงกรณีเดียวเท่านั้น เพราะว่าลักษณะการกระจายของอุณหภูมิของการไหลทั้ง 3 กรณีไม่แตกต่างกันมากนัก



(a)

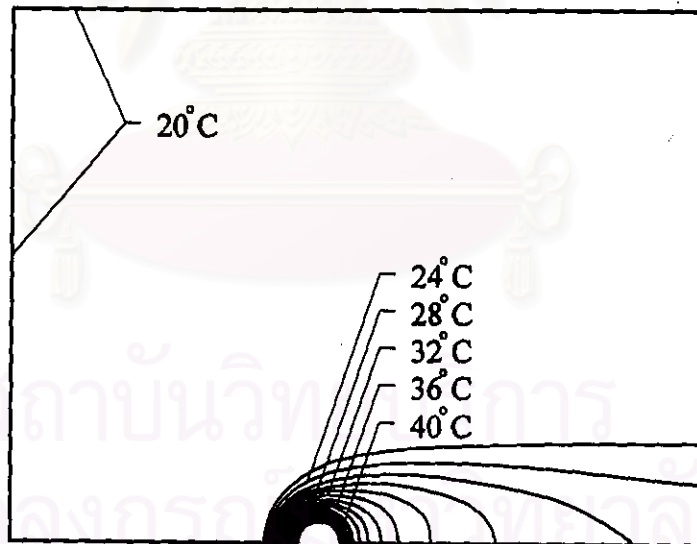


(b)



(c)

รูปที่ 7.10 รูปแบบการไหลของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจากทรงกระบอกร้อน
 (a) $Re^{0.45} = 3$ (b) $Re^{0.45} = 4$ (c) $Re^{0.45} = 5$

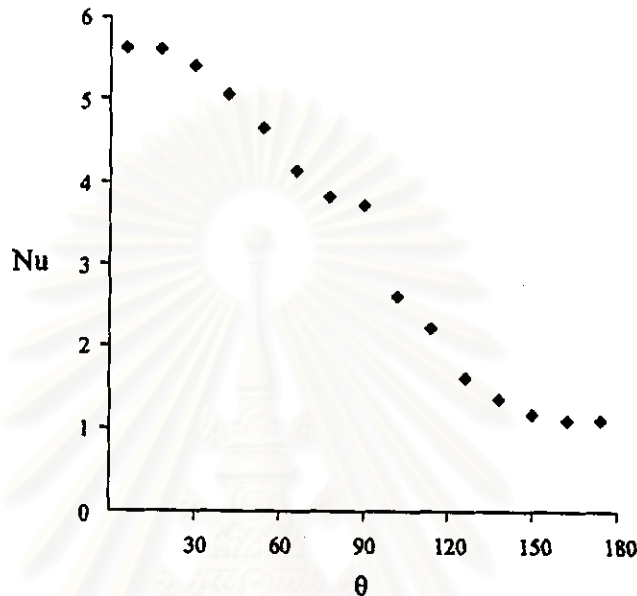


รูปที่ 7.11 ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิของปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับจาก
 ทรงกระบอกร้อนในกรณีที่มี $Re^{0.45} = 5$

ผลลัพธ์ดังกล่าวถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของ Collis และ Williams [23] โดยคำนวณหาค่านัสเซลที่นับเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆ บนผิวของทรงกระบอก แล้วนำมาพลอตกราฟดังแสดงในรูปที่ 7.12 ซึ่งเป็นกรณีที่มี $Re^{0.45}$ มีค่าเท่ากับ 5 เพียงกรณีเดียวเท่านั้นเนื่องจากลักษณะ

ของกราฟที่ได้จากการไหลทั้ง 3 กรณีมีลักษณะที่คล้ายคลึงกันมากและแตกต่างกันเฉพาะค่าของ นัสเซลท์นัมเบอร์ หลังจากนั้นจึงคำนวณหาค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์นัมเบอร์ (วิธีการคำนวณแสดงไว้ในภาคผนวก ข) เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากสมการ [23]

$$Nu = (0.24 + 0.56Re^{0.45}) \left(\frac{T_m}{T_i} \right)^{0.17} \quad (7.6)$$



รูปที่ 7.12 ค่านัสเซลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆบนผิวของทรงกระบอกในกรณี $Re^{0.45} = 5$

โดย T_m แทนค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิที่ผิวของทรงกระบอกกับอุณหภูมิของของไหลที่ไหลเข้าโดเมนของการไหล

T_i แทนอุณหภูมิของของไหลที่ไหลเข้าโดเมนของการไหล

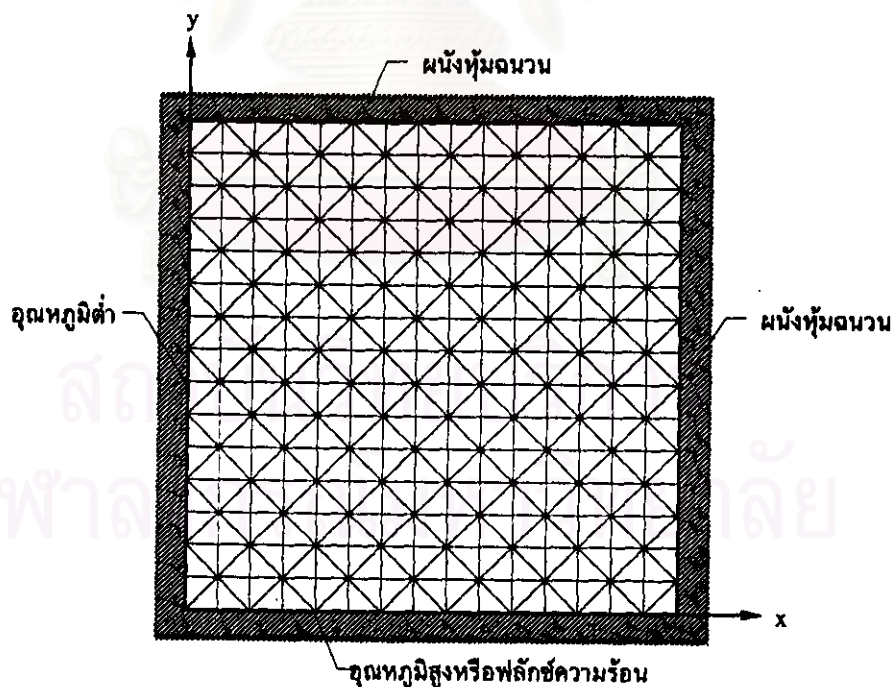
ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์นัมเบอร์ดังแสดงในตารางที่ 7.2 แสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความถูกต้องอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ความผิดปกติของค่านัสเซลท์นัมเบอร์ ณ ตำแหน่งที่ θ เท่ากับ 90 องศาในรูปที่ 7.12 นั้น เกิดขึ้นเนื่องจากเอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวมีรูปร่างที่ผิดปกติ จึงไม่สามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงของค่านัสเซลท์นัมเบอร์อย่างราบเรียบได้ เพื่อลดความผิดปกติในจุดดังกล่าว จำเป็นต้องเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาจนกระทั่งเอลิเมนต์ที่อยู่บริเวณผิวของทรงกระบอกมีรูปร่างเป็นปกติ ซึ่งการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ที่กล่าวถึงนี้จะทำให้จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดมีจำนวนมากขึ้นไป และต้องใช้หน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์มากตามไปด้วย ดังนั้นเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่านัสเซลท์นัมเบอร์ได้ดีขึ้นกว่าเดิม โดยใช้จำนวนเอลิเมนต์ไม่มากนักเกินไป จึงควรนำเทคนิคการปรับขนาด (Adaptive meshing technique) มาใช้ในการวิเคราะห์การไหลด้วย ซึ่งจัดว่าเป็นงานวิจัยในระดับที่สูงขึ้นไปอีกระดับหนึ่ง

ตารางที่ 7.2 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์ที่ผิวของทรงกระบอก

| $Re^{0.45}$ | Average nusselt number | | Error(%) |
|-------------|------------------------|---------------|----------|
| | Collis & Williams | Present study | |
| 3 | 2.06 | 1.99 | 3.07 |
| 4 | 2.66 | 2.61 | 1.55 |
| 5 | 3.26 | 3.28 | 0.67 |

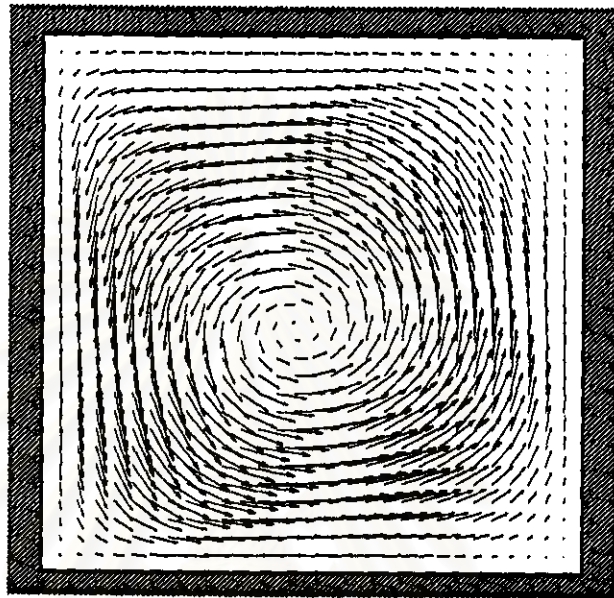
7.5 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่ได้รับความร้อนจากด้านล่าง

ปัญหาที่ถูกนำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทั้ง 3 ปัญหาที่ผ่านมาเป็นปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังเป็นแบบกำหนดอุณหภูมิ ดังนั้นจึงเลือกปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่ได้รับความร้อนจากด้านล่าง ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังเป็นแบบกำหนดฟลักซ์ความร้อน มาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นปัญหาสุดท้าย

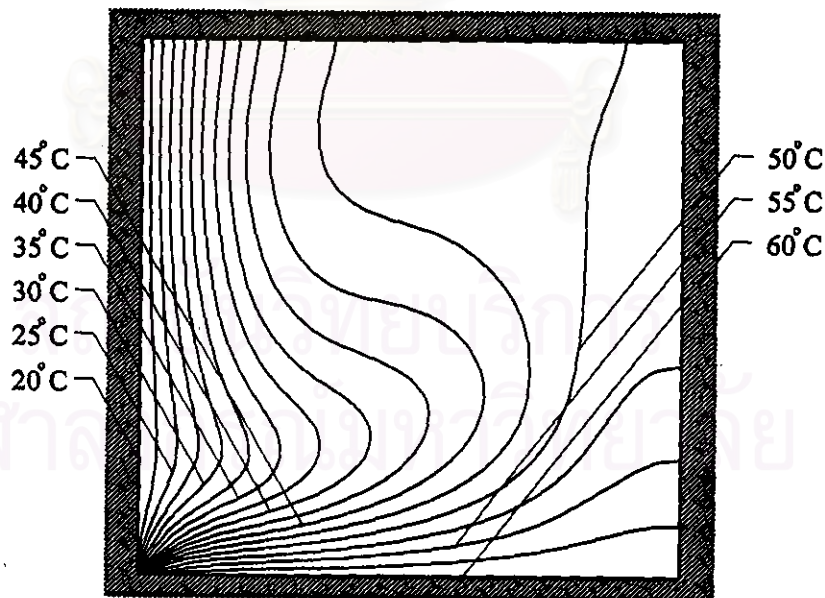


รูปที่ 7.13 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่ได้รับความร้อนจากด้านล่าง

รูปแบบของปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่ได้รับความร้อนจากด้านล่างตั้งแสดงในรูปที่ 7.13 (สร้างจากโปรแกรม NASTRAN) ประกอบด้วย 450 เอลิเมนต์ 961 จุดต่อของความเร็วจลื่นและอุณหภูมิ และ 256 จุดต่อของความดัน โดยที่ผนังทางด้านซ้ายมีอุณหภูมิต่ำ ผนังทางด้านบนและด้านขวาถูกหุ้มด้วยฉนวนความร้อน และผนังทางด้านล่างมีอุณหภูมิสูงหรือมีการถ่ายเทความร้อนให้แก่ของไหลภายในช่องปิด

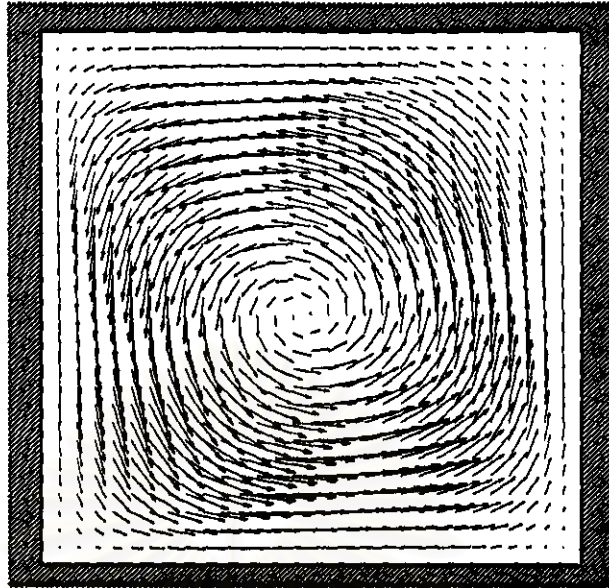


(a)

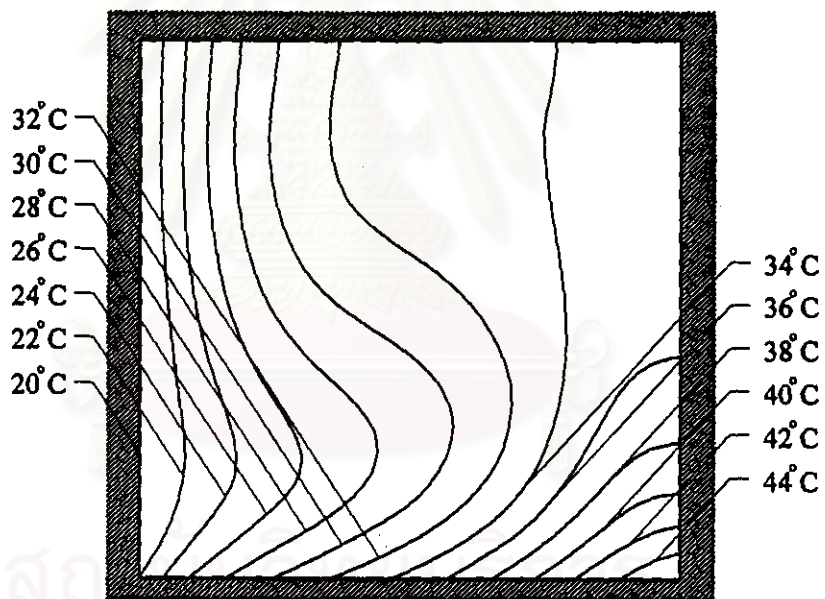


(b)

รูปที่ 7.14 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่ได้รับความร้อนจากด้านล่างในกรณีที่มี $Ra = 10000$ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตแบบกำหนดอุณหภูมิ (a) รูปแบบการไหล (b) ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ



(a)



(b)

รูปที่ 7.15 การหาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดที่ได้รับความร้อนจากด้านล่างในกรณีที่มี $Ra = 10000$ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตแบบกำหนดฟังก์ชันความร้อน (a) รูปแบบการไหล (b) ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ

การวิเคราะห์การไหลของปัญหานี้จะกระทำในกรณีที่พรีนัมเบอร์เท่ากับ 0.7 โดยมีเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10000 ซึ่งใช้ผลต่างของอุณหภูมิสูงสุดและต่ำสุด 40 องศาเซลเซียสสำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังแบบกำหนดอุณหภูมิ และมีฟังก์ชันความร้อนไหลเข้า 1.2 วัตต์ต่อ

ตารางเมตรสำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังแบบกำหนดฟลักซ์ความร้อน (ดัดแปลงจากเอกสารอ้างอิงหมายเลข 24) เพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในบทที่ 6 ไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ Streamfunction-vorticity formulation ของ Ganzarolli และ Milanez [24]

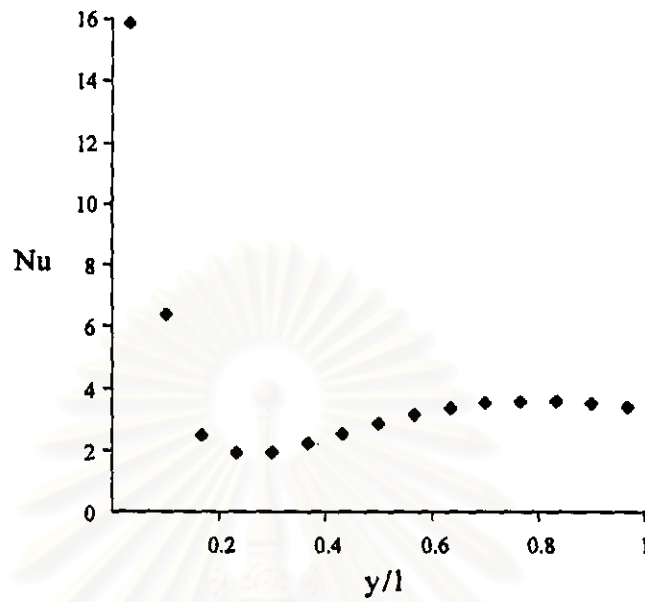
รูปที่ 7.14a-b แสดงรูปแบบการไหลและลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10000 สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านล่างเป็นแบบกำหนดอุณหภูมิ จะเห็นว่าเกิดการไหลหมุนวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาคล้ายกับรูปที่ 7.2a แต่มีจุดศูนย์กลางเนื่องจากจุดศูนย์กลางของช่องปิดเล็กน้อย ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิของของไหลในช่องปิดค่อนข้างราบเรียบ ยกเว้นบริเวณมุมซ้ายล่างของช่องปิดที่อุณหภูมิของของไหลเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ส่วนรูปที่ 7.15a-b แสดงรูปแบบการไหลและลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเมื่อเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10000 สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านล่างเป็นแบบกำหนดฟลักซ์ความร้อน จะเห็นว่าเกิดการไหลหมุนวนในลักษณะเดียวกับกรณีแรก แต่มีลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่บริเวณมุมซ้ายล่างของช่องปิดราบเรียบกว่า ซึ่งสังเกตได้จากเส้นแสดงระดับของอุณหภูมิที่ไม่เรียงตัวอัดแน่นเหมือนกับกรณีแรก

ตารางที่ 7.3 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์นัมเบอร์บนผนังทางด้านซ้ายของช่องปิด ในกรณี 31×31 จุดต่อกับ 31×31 จุดต่อ

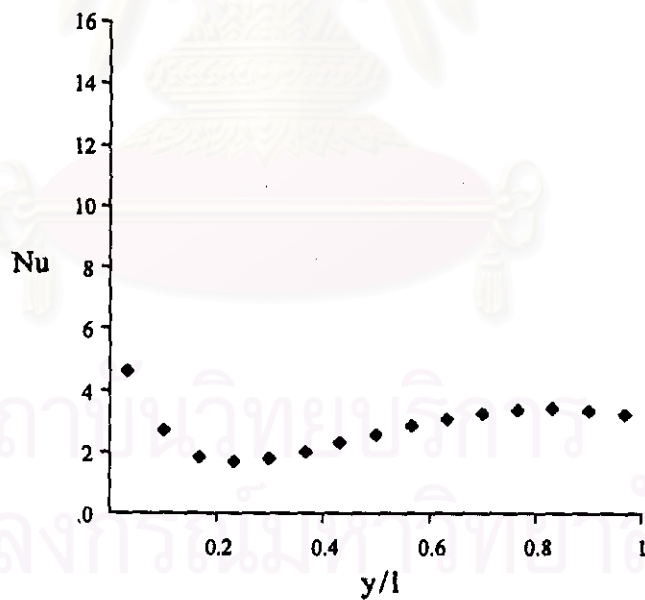
| Boundary condition | Average nusselt number | | Error(%) |
|------------------------|------------------------|---------------|----------|
| | Ganzarolli & Milanez | Present study | |
| Specifying temperature | 4.00 | 4.03 | 0.74 |
| Specifying heat flux | N/A | 2.79 | - |

ผลลัพธ์ดังกล่าวถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ Ganzarolli และ Milanez [24] โดยคำนวณหาค่านัสเซลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนผนังทางด้านซ้ายของช่องปิด (ในกรณีที่เป็นกำหนดฟลักซ์ความร้อนใช้อุณหภูมิเฉลี่ยที่ผนังด้านล่างในการคำนวณ) แล้วนำมาพลอตกราฟดังแสดงในรูปที่ 7.16a-b และคำนวณหาค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์นัมเบอร์ การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์นัมเบอร์ในตารางที่ 7.3 เป็นการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในกรณี 31×31 จุดต่อกับผลลัพธ์ของ Ganzarolli และ Milanez ในกรณี 31×31 จุดต่อเช่นกัน ปรากฏว่าผลลัพธ์ในกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านล่างเป็นแบบกำหนดอุณหภูมิมีความถูกต้องอยู่ในเกณฑ์ที่ดีมาก แต่ในกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านล่างเป็นแบบกำหนด

ฟลักซ์ความร้อนไม่สามารถสรุปได้ เนื่องจาก Ganzarolli และ Milanez ไม่ได้แสดงผลลัพธ์จากการคำนวณในกรณีดังกล่าว



(a)



(b)

รูปที่ 7.16 ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนผนังทางด้านซ้ายของช่องปิด (a) กำหนดอุณหภูมิ (b) กำหนดฟลักซ์ความร้อน

ตารางที่ 7.4 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์นัมเบอร์บนผนังทางด้านซ้ายของช่องปิด
ในกรณี 61×61 จุดต่อกับ 31×31 จุดต่อ

| Boundary condition | Average nusselt number | | Error(%) |
|------------------------|------------------------|---------------|----------|
| | Ganzarolli & Milanez | Present study | |
| Specifying temperature | 4.49 | 4.03 | 10.24 |
| Specifying heat flux | 2.86 | 2.79 | 2.68 |

การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์นัมเบอร์ในตารางที่ 7.4 เป็นการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในกรณี 31×31 จุดต่อกับผลลัพธ์ของ Ganzarolli และ Milanez ในกรณี 61×61 จุดต่อ ปรากฏว่าผลลัพธ์ในกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านล่างเป็นแบบกำหนดอุณหภูมิมีความผิดพลาดสูงมาก ทั้งนี้เป็นเพราะอุณหภูมิของของไหลบริเวณมุมซ้ายล่างของช่องปิดเปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็ว (เกิดจากเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังของช่องปิดไม่เหมาะสม กล่าวคือ อุณหภูมิของผนังที่มุมซ้ายล่างของช่องปิดเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน) ทำให้ค่านัสเซลท์นัมเบอร์ในบริเวณดังกล่าวเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วตามไปด้วย ซึ่งในกรณี 31×31 จุดต่อนั้น จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ยังไม่สามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงได้อย่างถูกต้องมากเพียงพอ ค่าเฉลี่ยของนัสเซลท์นัมเบอร์จึงมีความคลาดเคลื่อนจากกรณี 61×61 จุดต่อสูงมาก (การแก้ไขที่เหมาะสมกับปัญหาในกรณีนี้คือ การใช้เทคนิคการปรับขนาดดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 7.4) ส่วนผลลัพธ์ในกรณีที่เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังด้านล่างเป็นแบบกำหนดฟลักซ์ความร้อนมีความถูกต้องอยู่ในเกณฑ์ที่ดี เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของของไหลบริเวณมุมซ้ายล่างของช่องปิดไม่รวดเร็วเท่ากับในกรณีแรก

ปัญหานี้แสดงให้เห็นว่าการวิเคราะห์ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่เหมาะสม โดยใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่ำๆ แม้ว่าจะได้ผลลัพธ์ออกมา แต่ผลลัพธ์ดังกล่าวก็จะมีค่าผิดพลาดมาก ซึ่งจะก่อให้เกิดความระมัดระวังในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในการคำนวณ อันจะเป็นประโยชน์ในการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปประยุกต์ใช้ต่อไป