บทที่ 3

การไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว

บทนี้เป็นการนำระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 2 มาดัดแปลงให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น แต่ในขณะเดียวกันยังสามารถใช้อธิบายการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวได้ โดยเริ่มจากการจำแนกประเภทของการไหล เพื่อให้ทราบถึงเงื่อนไขของการไหลแบบไม่อัดตัว การตั้งสมมุติฐานของการไหล เพื่อทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น ซึ่งจะทำให้ความยุ่งยากในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ลดลง และที่สำคัญที่สุดคือ การพิจารณาผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ ซึ่งจะทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ถูกดัดแปลงนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการพาความร้อน (Heat convection) ได้

3.1 การจำแนกประเภทของการไหล

เนื่องจากสมการ (2.49) ถึง (2.51) มีความสัมพันธ์กันและก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีรูปแบบซับซ้อน ดังนั้นการนำระบบสมการดังกล่าวไปแก้ปัญหาการไหลโดยตรงจึงเป็นเรื่องที่ค่อนข้างจะยุ่งยาก เพื่อให้ความยุ่งยากในการแก้ปัญหาลดลง จึงควรระบุประเภทของการไหลที่กำลังพิจารณาให้ชัดเจนก่อนที่จะแก้ปัญหาการไหลนั้น สำหรับการจำแนกประเภทของการไหลในวิทยานิพนธ์นี้จะจำแนกออกเป็น 2 ประเภท ดังต่อไปนี้

1. การไหลแบบไม่หนืด (Inviscid flow)

การไหลประเภทนี้จะสมมุติให้ความหนืดพลศาสตร์ของของไหลมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งแม้ว่าในทางปฏิบัติจะไม่มีของไหลชนิดใดที่มีคุณสมบัติดังที่กล่าว แต่การวิเคราะห์ปัญหาการไหลหลายปัญหาสามารถกระทำได้สะดวกขึ้น ในขณะเดียวกันผลลัพธ์ที่ได้ก็ยังมีความน่าเชื่อถืออยู่ การไหลประเภทนี้จะเกิดขึ้นเฉพาะในบริเวณที่ค่อนข้างห่างจากชั้นขอบเขต (Boundary layer) ซึ่งถือว่าไม่มีความเค้นเฉือนมาต้านทานการไหล ส่วนการไหลที่พิจารณาผลของความเค้นเฉือนจะถือว่ามีความหนืดและไม่จัดเป็นการไหลประเภทนี้ นอกจากนี้การไหลแบบไม่หนืดยังสามารถแบ่งออกได้เป็น การไหลแบบไม่อัดตัวชนิดไม่หนืด (Inviscid incompressible flow) และการไหลแบบอัดตัวชนิดไม่หนืด (Inviscid compressible flow) โดยทั่วไปการไหลที่สามารถสมมุติให้ความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงที่ได้จัดว่าเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว (Incompressible flow) ส่วนการไหลที่ไม่สามารถสมมุติให้ความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงที่จัดว่าเป็นการไหลแบบอัดตัวได้

(Compressible flow) ตามปกติเราถือว่าการไหลของของเหลว (Liquid) เป็นการไหลแบบไม่อัดตัว ในขณะที่การไหลของก๊าซ (Gas) ถือว่าเป็นการไหลแบบไม่อัดตัวเมื่อความเร็วสูงสุดของการไหลมีค่าต่ำกว่า 0.3 เท่าของความเร็วเสียงในก๊าซนั้น [9]

2. การไหลแบบหนืด (Viscous flow)

การไหลประเภทนี้เป็นการไหลที่เกิดขึ้นจริงตามธรรมชาติ แม้ว่าการแก้ปัญหาการไหลแบบหนืดจะให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า แต่ความยากลำบากในการหาผลลัพธ์ก็เพิ่มขึ้นตามไปด้วย เช่นเดียวกับการไหลแบบไม่หนืด การไหลแบบหนืดแบ่งออกได้เป็น การไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืด (Viscous incompressible flow) และการไหลแบบอัดตัวชนิดหนืด (Viscous compressible flow) เนื่องจากของไหลมีความหนืด รูปแบบของการไหลอาจจะเป็นแบบราบเรียบ (Laminar flow) หรือแบบปั่นป่วน (Turbulent flow) ก็ได้ แต่การวิเคราะห์การไหลแบบปั่นป่วนมีความยุ่งยากและเกินขอบเขตของวิทยานิพนธ์นี้ ดังนั้นจึงทำการวิเคราะห์การไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่มีรูปแบบการไหลเป็นแบบราบเรียบเท่านั้น

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืด สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่าง ๆจะอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.1}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{3.2a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \tag{3.2b}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) = \rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\sigma_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(v\tau_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\sigma_y\right) + \rho\left(uf_x + vf_y\right) \tag{3.3}$$

โดย

$$\sigma_x = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.4a}$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.4b}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.4c}$$

ถ้าแทนค่า ε จากสมการ (2.54) ลงไปในสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + u\frac{\partial e}{\partial x} + v\frac{\partial e}{\partial y}\right) + \rho u\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \rho v\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$= \rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + u\left(\rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right)$$
$$+ v\left(\rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) + \sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.5)$$

จะเห็นได้ว่าบางพจน์ที่ปรากฏอยู่ในสมการ (3.5) เหมือนกับการนำ u มาคูณกับสมการ (3.2a) และนำ v มาคูณกับสมการ (3.2b) ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานจึงลดรูปมาเป็น

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + u\frac{\partial e}{\partial x} + v\frac{\partial e}{\partial y}\right) = \rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$
$$+ \sigma_x\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.6)$$

หลังจากแทนค่าความเค้นในสมการ (3.4a-c) ลงไปในสมการ (3.6) จะได้

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + u\frac{\partial e}{\partial x} + v\frac{\partial e}{\partial y}\right) = \rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\Phi \quad (3.7)$$

โดย Φ แทนฟังก์ชันการกระจายความหนืด (Viscous dissipation function) ซึ่งในกรณีนี้มีค่าดังสมการ

$$\Phi = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \quad (3.8)$$

3.2 สมมุติฐานของการไหลที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

ถึงแม้ว่าระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดจะอยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น แต่ก็ยังทำการหาผลลัพธ์ได้ยากลำบาก ดังนั้นจึงต้องทำการตั้งสมมุติฐานของการไหลขึ้นมา เพื่อทำให้ระบบสมการดังกล่าวลดความซับซ้อนลง สมมุติฐานต่าง ๆที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ได้แก่

1. เป็นการไหลที่สภาวะอยู่ตัว (Steady-state flow)

สภาวะอยู่ตัว หมายถึง สภาวะที่คุณสมบัติต่าง ๆภายในปริมาตรควบคุมเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง (x,y) เพียงอย่างเดียว โดยไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา (t) การตั้งสมมุติฐานว่าเป็นการ

ไหลที่สภาวะอยู่ตัว จะทำให้พจน์ที่เป็นค่าอนุพันธ์ของคุณสมบัติต่าง ๆเทียบกับเวลามีค่าเป็นศูนย์ การแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจึงกระทำได้สะดวกขึ้น ในขณะที่ผลลัพธ์ที่ได้ยังมีประโยชน์ในทางปฏิบัติ เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้มักจะถูกใช้เป็นข้อจำกัด (Constraint) ในการออกแบบเสมอ จากการตั้งสมมุติฐานดังกล่าว สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมและการอนุรักษ์พลังงานจะอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{3.9a}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \tag{3.9b}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x} + v\frac{\partial e}{\partial y}\right) = \rho q + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\Phi \tag{3.10}$$

2. พลังงานภายในแปรผันแบบเชิงเส้นกับอุณหภูมิในช่วงที่ทำการวิเคราะห์การไหล

ตามปกติค่าพลังงานภายในจะแปรผันแบบไม่เชิงเส้นกับอุณหภูมิ ซึ่งจะทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานยุ่งยากมากขึ้น ดังนั้นจึงสมมุติว่าพลังงานภายในมีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิในรูปแบบ

$$e = e_0 + c(T - T_0) \tag{3.11}$$

โดย e_0 แทนค่าพลังงานภายในของของไหลที่อุณหภูมิเฉลี่ย ซึ่งมีค่าคงที่

T_0 แทนอุณหภูมิเฉลี่ยของของไหล

c แทนความร้อนจำเพาะของของไหลเมื่อปริมาตรคงที่ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความดัน (p) และอุณหภูมิ (T) ดังสมการ

$$c = c(p,T) \tag{3.12}$$

3. มีผลของแรงวัตถุเฉพาะในแนวแกน y

การตั้งสมมุติฐานดังกล่าว ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{3.13a}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g \tag{3.13b}$$

โดย g แทนความเร่งอันเนื่องมาจากแรงโน้มถ่วง

4. ไม่มีการผลิตความร้อน

ตามปกติของไหลจะผลิตความร้อนขึ้นเองไม่ได้อยู่แล้ว ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานจึงอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x} + v\frac{\partial e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu\Phi \qquad (3.14)$$

5. ละทิ้งผลของการกระจายพลังงานความหนืด (Viscous energy dissipation)

การกระจายพลังงานความหนืด ($\mu\Phi$) เป็นอัตราการสูญเสียพลังงานกล (Mechanical energy) ในการเปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อน (Thermal energy) อันเนื่องมาจากผลของความหนืดของของไหล [12] เนื่องจากการไหลที่จะทำการวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้มีความเร็วค่อนข้างต่ำ จึงมีพลังงานกลต่ำตามไปด้วย การสูญเสียพลังงานกลจึงมีค่าน้อยและละทิ้งได้ การตั้งสมมุติฐานอันนี้จะทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\rho\left(u\frac{\partial e}{\partial x} + v\frac{\partial e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (3.15)$$

6. คุณสมบัติต่าง ๆของของไหล ได้แก่ μ, c, k มีค่าคงที่

ในความเป็นจริงนั้น คุณสมบัติต่าง ๆของของไหลจะเป็นฟังก์ชันของความดัน (p) และอุณหภูมิ (T) แต่ความแตกต่างของความดันและอุณหภูมิของของไหลในปัญหาต่าง ๆที่จะทำการวิเคราะห์ในวิทยานิพนธ์นี้มีค่าไม่มากนัก ทำให้คุณสมบัติต่าง ๆของของไหลมีค่าต่างกันเพียงเล็กน้อยและพิจารณาให้เป็นค่าคงที่ได้ ซึ่งเมื่อสมมุติให้ c มีค่าคงที่ การแทนค่า e จากสมการ (3.11) ลงในสมการ (3.15) จะได้ผลดังนี้

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (3.16)$$

3.3 ผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ

สสารที่มีอยู่ตามธรรมชาติทั้งของแข็งและของไหล เมื่อได้รับความร้อนจนมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น จะขยายตัวจากสภาวะที่ไม่ได้รับความร้อนเล็กน้อย ในของแข็งการขยายตัวในลักษณะนี้จะก่อให้เกิดความเค้นอันเนื่องมาจากอุณหภูมิ (Thermal stress) แต่ในของไหลนอกจากความดันจะเพิ่มขึ้นแล้ว ยังอาจเกิดการไหลขึ้นได้อีกด้วย เนื่องจากการขยายตัวดังกล่าวทำให้เกิดแรงลอย

ตัว (Buoyant force) ในบริเวณที่ของไหลมีอุณหภูมิสูง ซึ่งของไหลในบริเวณนี้จะถูกผลักดันให้ไหลขึ้นสู่ด้านบน แรงลอยตัวนี้สามารถนำไปรวมกับแรงวัตถุ [13] ในสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมได้ สมการ (3.13b) จึงกลายเป็น

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g\left[1 - \beta\left(T - T_0\right)\right] \qquad (3.17)$$

โดย β แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน (Coefficient of thermal expansion) ของของไหล ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความดัน (p) และอุณหภูมิ (T) ดังสมการ

$$\beta = \beta(p,T) \qquad (3.18)$$

การวิเคราะห์การไหลในวิทยานิพนธ์นี้ จะตั้งสมมุติฐานว่า β เป็นค่าคงที่ด้วย เพื่อให้วิเคราะห์การไหลได้ง่ายขึ้น นอกจากนี้คุณสมบัติต่าง ๆของของไหลที่ใช้ในการคำนวณซึ่งกำหนดให้เป็นค่าคงที่นั้น ควรจะใช้ค่าที่อุณหภูมิเฉลี่ยของของไหล [14] แต่ในทางปฏิบัติกระทำได้ยาก ในที่นี้จึงใช้ค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิสูงสุดและต่ำสุดของของไหลแทนอุณหภูมิเฉลี่ยที่แท้จริง

3.4 สมการของการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว

หลังจากการตั้งสมมุติฐานของการไหล และรวมผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ เข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 2 แล้ว จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวที่ใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (3.19)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \qquad (3.20a)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g\left[1 - \beta\left(T - T_0\right)\right] \qquad (3.20)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (3.21)$$