บทที่ 2

การแบ่งแยกโครงข่ายระบบไฟฟ้ากำลัง

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแบ่งแยกโครงข่ายระบบไฟฟ้ากำลัง ซึ่งเริ่มจากการสร้างเมทริกซ์แสดงความใกล้ทางไฟฟ้าจากแอตมิตแทนซ์ระหว่างบัสในโครงข่าย จากนั้นจึงใช้เมทริกซ์นี้ช่วยในการแทนบัสด้วยจุดที่มีเวกเตอร์แสดงตำแหน่งที่เหมาะสม โดยบัสที่มีความใกล้ทางไฟฟ้ามากหรือแอตมิตแทนซ์ระหว่างกันมีขนาดใหญ่จะถูกแทนด้วยจุดที่อยู่ใกล้กันหรือมีเวกเตอร์แสดงตำแหน่งที่มีระยะทางระหว่างกันน้อยนั่นเอง หากพิจารณาโครงข่ายมีจำนวน n บัส จะทำการแทนบัสด้วยจุดที่มีเวกเตอร์แสดงตำแหน่งเป็นเวกเตอร์ในปริภูมิแบบยุคลิด q มิติ (Euclidean q-space) หรือเขียนแทนด้วย E^q โดย q เป็นจำนวนพิกัด (coordinates) ที่เหมาะสม สำหรับความแตกต่างของ E^q กับปริภูมิค่าจริง q มิติ ซึ่งเขียนแทนด้วย R^q คือ E^q เป็น R^q ที่เพิ่มนิยามในการวัดขนาดของเวกเตอร์ การวัดระยะทางระหว่างสองเวกเตอร์ และการวัดมุมระหว่างสองเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $\mathbf{z}_1$ และ $\mathbf{z}_2$ เป็นเวกเตอร์ใน E^q และเขียนแทนด้วยเวกเตอร์แนวตั้ง (column vector) จะได้ขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{z}_1$ เป็น $\|\mathbf{z}_1\| = \sqrt{\mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1}$ และได้ระยะทางระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{z}_1$ กับ $\mathbf{z}_2$ เป็น $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|$ ถ้า $\mathbf{z}_1$ และ $\mathbf{z}_2$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์จะได้มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองเป็น θ โดย $\cos\theta = \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 / (\|\mathbf{z}_1\| \|\mathbf{z}_2\|)$ และ $0 \le \theta < \pi$ หลังจากแทนบัสด้วยจุดแล้ว จะทำการจัดกลุ่มจุดเหล่านี้ให้มีจำนวนกลุ่มตามต้องการ โดยจุดที่อยู่ใกล้กันจะถูกจัดไว้ในกลุ่มเดียวกัน

ขั้นตอนสำคัญที่ใช้ในการแบ่งแยกโครงข่ายระบบไฟฟ้ากำลังในวิทยานิพนธ์นี้มี 3 ขั้นตอน ได้แก่

1) การวางตำแหน่ง (placement) เป็นขั้นตอนของการแทนบัสต่าง ๆ ด้วยจุดที่มีเวกเตอร์แสดงตำแหน่งเป็นเวกเตอร์ใน E^q โดยบัสซึ่งมีความใกล้ทางไฟฟ้าต่อกันมากจะถูกแทนด้วยจุดที่อยู่ใกล้กัน

2) การจัดกลุ่ม (clustering) เป็นการจัดกลุ่มของจุดที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ให้มีจำนวนกลุ่มตามต้องการ โดยจุดหรือบัสที่อยู่ใกล้กันจะถูกจัดไว้ในกลุ่มเดียวกัน

3) การปรับปรุง (improvement) เป็นขั้นตอนของการปรับปรุงกลุ่มของบัสที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 เพื่อให้ได้กลุ่มของบัสที่เหมาะสมในการนำไปใช้งานมากยิ่งขึ้น

2.1 การวางตำแหน่ง

ถ้า n คือจำนวนบัสทั้งหมดในระบบ จะกำหนดเมทริกซ์สมมาตรค่าจริง $\mathbf{B}$ (real symmetric matrix) อันดับ $n \times n$ ซึ่งแสดงระดับความใกล้ทางไฟฟ้าของบัสต่าง ๆ โดยที่สมาชิก b_{ij} ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ มีคุณสมบัติดังนี้

$$b_{ij} = \begin{cases} -w_{ij} & ; i \neq j \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} w_{ik} & ; i = j \end{cases} \tag{2.1}$$

โดย $w_{ij} = w_{ji} \geq 0$ แสดงระดับความใกล้ทางไฟฟ้าระหว่างบัส i กับบัส j ซึ่งไม่ใช่บัสเดียวกัน

เนื่องจากเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรค่าจริง ดังนั้นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ จะเป็นจำนวนจริง และจะสามารถหาเวกเตอร์เฉพาะ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ซึ่ง $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_n]$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (orthogonal matrix) ได้ นั่นคือ $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_n$ นอกจากนั้นเนื่องจากเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ที่มีคุณสมบัติตามสมการ (2.1) จะมีตัวกำหนด (determinant) เป็น 0 และ

$$\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} w_{ij}(x_i - x_j)^2 \geq 0 \text{ โดย } \mathbf{x} = [x_1\ x_2 \ldots x_n]^T$$

ดังนั้นเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ จึงเป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) และมีคุณสมบัติบวกกึ่งแน่นอน (positive semi-definite) ด้วย จึงได้ว่าค่าเฉพาะทุกตัวของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และมีค่าเฉพาะบางตัวเป็นศูนย์ด้วย นอกจากนั้นหากในระบบซึ่งไม่รวมตัวต่อขนาน (shunt) มีลักษณะเป็นกราฟเชื่อมต่อ (connected graph) (กราฟที่สองจุดใด ๆ ในกราฟมีวิถี (path) เชื่อมถึงกัน) หรือไม่มีโครงข่ายย่อยแยกโดด (isolated subnetwork) นั่นเอง จะพบว่าเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ที่สร้างโดยวิธีข้างต้น จะมีค่าเฉพาะที่เป็นศูนย์เพียงตัวเดียวเท่านั้น เนื้อหาที่จะกล่าวต่อไปจะถือว่าในระบบไม่มีโครงข่ายย่อยแยกโดด ดังนั้นค่าเฉพาะทุกตัวของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์และจะมีค่าเฉพาะที่เป็นศูนย์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ระดับความใกล้ทางไฟฟ้าระหว่างบัส i กับบัส j ซึ่งไม่ใช่บัสเดียวกัน สามารถคำนวณได้จากขนาดของแอตมิตแทนซ์ระหว่างบัส i กับบัส j ถ้า $R_{ij}+jX_{ij}$ คืออิมพีแดนซ์ระหว่างบัส i กับบัส j จะได้ขนาดของแอตมิตแทนซ์ระหว่างบัส i กับบัส j เป็น $1\big/\sqrt{R_{ij}^2 + X_{ij}^2}$ ซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นค่า w_{ij} ในสมการ (2.1) และคำนวณเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ได้ สำหรับระบบที่กิ่งมีค่าอัตราส่วน X/R สูง เราจะประมาณขนาดของแอตมิตแทนซ์ระหว่างบัส i กับบัส j ได้เป็น $1\big/\left|X_{ij}\right|$ ซึ่งสามารถใช้เป็นค่า w_{ij} ในสมการ (2.1) ได้เช่นกัน นอกจากนั้นสำหรับระบบที่กิ่งมีค่าอัตราส่วน X/R สูงและ X_{ij} มากกว่าศูนย์เสมอ เราจะสามารถสร้างเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ได้จากเมทริกซ์ของแอตมิตแทนซ์ (admittance matrix) $\mathbf{Y}_{bus} = \mathbf{G}_{bus}+j\mathbf{B}_{bus} \approx j\mathbf{B}_{bus}$ ถ้าละเลยตัวต่อขนานทุกชนิดในขณะสร้าง $\mathbf{Y}_{bus}$ จะได้ $\mathbf{B} = -\mathbf{B}_{bus}$ ซึ่งมีคุณสมบัติตามสมการ (2.1)

ผลการวางตำแหน่งที่เหมาะสมของบัสลงบน E^q จะได้จากการแก้ปัญหาที่มีฟังก์ชันจุดประสงค์ซึ่งสร้างจากเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ และมีตัวแปรเป็นเวกเตอร์แสดงพิกัดจำนวน q ตัวดังนี้

หากให้ F คือ ผลบวกของระยะทางระหว่างทุกคู่ของบัสยกกำลังสองซึ่งถูกถ่วงน้ำหนักตามระดับความใกล้ทางไฟฟ้า เราจะสามารถเขียน F ในรูปของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ได้ดังนี้

$$F \equiv \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{n} w_{ij} \left\| \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j \right\|^2 = \sum_{i=1}^{q} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{B} \mathbf{x}_i \tag{2.2}$$

โดย $\mathbf{z}_i$ คือ เวกเตอร์แสดงตำแหน่ง เป็นเวกเตอร์แนวตั้งอันดับ q ใน E^q แสดงตำแหน่งของบัส i และ $\mathbf{x}_i$ คือ เวกเตอร์แสดงพิกัด เป็นเวกเตอร์แนวตั้งอันดับ n ใน E^n แสดงพิกัดที่ i ของทุกบัส นอกจากนั้นถ้าให้ $\mathbf{X}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีแนวตั้งเป็นเวกเตอร์แสดงพิกัด และ $\mathbf{Z}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีแนวตั้งเป็นเวกเตอร์แสดงตำแหน่ง จะได้ความสัมพันธ์ของ $\mathbf{X}$ กับ $\mathbf{Z}$ เป็นดังนี้

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \dots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} \tag{2.3}$$

เวกเตอร์แสดงพิกัดที่เหมาะสมตามระดับความใกล้ทางไฟฟ้าสามารถคำนวณได้โดยแก้ปัญหาการวางตำแหน่งกำลังสองที่เหมาะที่สุด (optimal quadratic placement) ดังนี้

$$\min \left\{ F = \sum_{i=1}^{q} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{B} \mathbf{x}_i \right\} \text{โดยมีเงื่อนไขต่อไปนี้}$$

$$\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_i = 1 \qquad ; i = 1, 2, \dots, q \tag{2.4}$$

$$\text{และ} \quad \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_j = 0 \qquad ; i \neq j;\ i, j = 1, 2, \dots, q$$

เงื่อนไขแรกเป็นการให้ $\mathbf{x}_i$ มีขนาดเป็น 1 เพื่อป้องกันกรณี $\mathbf{x}_i$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ส่วนเงื่อนไขที่สองเป็นการให้ $\mathbf{x}_i$ ทุกคู่ตั้งฉากกัน เพื่อป้องกันกรณีที่ $\mathbf{z}_i$ เท่ากันหมด โดย $q \geq 2$ ซึ่งจะทำให้ $\mathbf{x}_i$ ทุกตัวขนานกัน จะพบว่า $\mathbf{x}_i$ ที่เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4) คือ เวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วย q ตัวของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรก และค่าต่ำสุดของ F คือ ผลบวกของค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรกของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ซึ่งการพิสูจน์สามารถทำได้ดังนี้ [3]

<u>การหาผลเฉลยของปัญหา (2.4)</u>

ปัญหา (2.4) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\min_{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=\mathbf{I}_q} \operatorname{trace}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X})$$

โดย $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_q]$ เป็นเมทริกซ์อันดับ $n \times q$ $(1 \leq q \leq n)$ และ trace(A) คือ ฟังก์ชันผลบวกเฉียง มีค่าเท่ากับผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงมุมมุขสำคัญ (principal diagonal) ของเมทริกซ์ $\mathbf{A}$

พิจารณากรณีที่ $\mathbf{X} = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_q]$ ประกอบไปด้วยเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วย q ตัวของ $\mathbf{B}$ คือ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q$ จะได้ว่า $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{D}_q = \mathbf{I}_q\mathbf{D}_q = \mathbf{D}_q$ โดย $\mathbf{D}_q$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix) ที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมมุขสำคัญเป็นค่าเฉพาะ q ตัวที่สอดคล้องกับเวกเตอร์เฉพาะในเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ ดังนั้น $\operatorname{trace}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X}) = \operatorname{trace}(\mathbf{D}_q)$ เพราะฉะนั้นในกรณีของ $\mathbf{X}$ ข้างต้น ถ้าต้องการ $\operatorname{trace}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X})$ ที่มีค่าต่ำที่

สุด ย่อมทำได้โดยเลือก $\mathbf{X} = \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_q]$ ซึ่งประกอบไปด้วยเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วย q ตัวที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรกของ $\mathbf{B}$

ต่อไปจะแสดงให้เห็นว่าไม่มีเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ ซึ่ง $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}_q$ และทำให้ $\mathrm{trace}(\mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X}) < \mathrm{trace}(\Lambda_q)$ โดยที่ Λ_q เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมมุขสำคัญเป็นค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรกของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$

สมมติว่ามีเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ ซึ่ง $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}_q$ และทำให้ $\mathrm{trace}(\mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X}) < \mathrm{trace}(\Lambda_q)$ โดย Λ_q เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมมุขสำคัญเป็นค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรกของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ได้แก่ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ เรียงลำดับจากน้อยไปมาก

ให้ q เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดซึ่งทำให้มีเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ อันดับ $n\times q$ ที่มีคุณสมบัติข้างต้น

เนื่องจากเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ มีคุณสมบัติบวกกึ่งแน่นอน นั่นคือ $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \ge 0 = \lambda_1$ สำหรับทุกเวกเตอร์แนวตั้ง $\mathbf{x}$ ที่มีอันดับ n ดังนั้น q จะต้องมีค่ามากกว่า 1

ให้ $\mathbf{y}$ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งขนาดหนึ่งหน่วยใน $S_{\mathbf{x}}$ ที่ทำให้ $\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$ มีค่ามากที่สุด โดย $S_{\mathbf{x}}$ คือปริภูมิย่อย q มิติซึ่งถูกแผ่ทั่ว (span) โดยเวกเตอร์ที่เป็นแนวตั้งของเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ ดังนั้นจะมีเมทริกซ์ $\mathbf{C}$ อันดับ $n\times q$ ที่มีแนวตั้งเป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) ของ $S_{\mathbf{x}}$ และมี $\mathbf{y}$ เป็นแนวตั้งหนึ่งของเมทริกซ์ $\mathbf{C}$

เนื่องจากทั้งเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ และ $\mathbf{C}$ แผ่ทั่วปริภูมิย่อยเดียวกัน ดังนั้นจะสามารถเขียนแต่ละแนวตั้งของเมทริกซ์ $\mathbf{C}$ ในรูปผลบวกเชิงเส้นของแนวตั้งของเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ ได้ นั่นคือจะมีเมทริกซ์ $\mathbf{S}$ ที่มีอันดับ $q\times q$ ซึ่ง $\mathbf{C} = \mathbf{X}\mathbf{S}$ และเนื่องจาก $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{I}_q$ ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{I}_q = (\mathbf{X}\mathbf{S})^T(\mathbf{X}\mathbf{S}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\mathbf{S} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}$$

นั่นคือ $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$ นอกจากนี้จะพบว่า

$$\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C} = (\mathbf{X}\mathbf{S})^T\mathbf{B}(\mathbf{X}\mathbf{S}) = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X})\mathbf{S}$$

นั่นคือเมทริกซ์ $\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C}$ คล้ายกับ (similar to) เมทริกซ์ $\mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X}$ และเนื่องจากเมทริกซ์ที่คล้ายกันจะมีผลบวกเฉียงเท่ากัน จึงได้ว่า

$$\mathrm{trace}(\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C}) = \mathrm{trace}(\mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X}) < \mathrm{trace}(\Lambda_q)$$

ให้ $\mathbf{C}_*$ เป็นเมทริกซ์ที่มีอันดับ $n\times(q\text{-}1)$ ซึ่งถูกสร้างโดยการย้าย $\mathbf{y}$ ออกจากแนวตั้งของเมทริกซ์ $\mathbf{C}$ ดังนั้นจากข้อสมมติของ q จะได้ว่า $\mathrm{trace}(\mathbf{C}_*^T\mathbf{B}\mathbf{C}_*) \ge \mathrm{trace}(\Lambda_{q-1})$ เพราะฉะนั้นจะได้

$$\mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathrm{trace}(\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C}) - \mathrm{trace}(\mathbf{C}_*^T\mathbf{B}\mathbf{C}_*) < \mathrm{trace}(\Lambda_q) - \mathrm{trace}(\Lambda_{q-1}) = \lambda_q$$

จึงได้ว่า

$$\max_{\substack{\mathbf{x}\in S_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x}=1}} \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = \max_{\substack{\mathbf{x}\in S_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}\neq 0}} \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} < \lambda_q$$

ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทคูรันต์-ฟิสเชอร์ (Courant-Fischer Theorem) [14, pp. 188-191] [15, pp. 99-101] ซึ่งแสดงค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุดเป็นอันดับที่ i ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ไว้ดังนี้

$$\lambda_i = \min_{\dim(S)=i} \max_{\substack{\mathbf{x}\in S \\ \mathbf{x}\neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}}$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทคูรันต์-ฟิสเชอร์แสดงไว้ในภาคผนวก ก

ดังนั้นจะสรุปได้ว่าสำหรับทุกเมทริกซ์ $\mathbf{X}$ ซึ่ง $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{I}_q$ จะได้ $\mathrm{trace}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X}) \geq \mathrm{trace}(\mathbf{\Lambda}_q)$ จากข้อสรุปนี้ร่วมกับผลในตอนต้นซึ่งได้ว่า $\mathrm{trace}(\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{V}) = \mathrm{trace}(\mathbf{\Lambda}_q)$ จะได้ $\mathbf{x}_i$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4) คือ เวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วย q ตัวที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรกของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ และจะได้ค่าต่ำสุดของ F เป็น

$$F_{\min} = \mathrm{trace}(\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{V}) = \mathrm{trace}(\mathbf{\Lambda}_q) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \qquad \square$$

ผลเฉลยของปัญหา (2.4) ยังไม่เหมาะสมที่จะนำไปใช้เป็นพิกัดในการวางตำแหน่งบัส เนื่องจากถ้าระบบไม่มีโครงข่ายย่อยแยกโดด ค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุดของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ จะมีเพียงตัวเดียวคือ 0 และเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่เป็น 0 คือ $\mathbf{1}_n/\sqrt{n}$ โดย $\mathbf{1}_n = [1\ 1\ \ldots\ 1]^{\mathrm{T}}$ มีอันดับเป็น n จะเห็นว่าเวกเตอร์เฉพาะตัวนี้มีส่วนประกอบ (component) เท่ากันหมด เมื่อนำไปใช้เป็นพิกัดของบัส จะไม่ช่วยในการบอกระยะห่างระหว่างบัส ดังนั้นจะเพิ่มเงื่อนไข $\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{1}_n/\sqrt{n}) = 0$ เข้าไปในปัญหา (2.4) ได้เป็นปัญหา (2.5)

$$\begin{aligned} &\min\left\{ F = \sum_{i=1}^{q} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{x}_i \right\} \text{โดยมีเงื่อนไขต่อไปนี้} \\ &\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i = 1 \qquad ; i = 1, 2, \ldots, q \\ &\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_j = 0 \qquad ; i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, q \\ \text{และ}\quad &\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{1}_n/\sqrt{n}\right) = 0 \qquad ; i = 1, 2, \ldots, q \end{aligned} \tag{2.5}$$

ได้ $\mathbf{x}_i$ ที่เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.5) คือ เวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วย q ตัว ที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

<u>การหาคำตอบของปัญหา (2.5)</u>

ให้ ${}^{q+1}F_{\min}$ เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ในปัญหา (2.4) เมื่อใช้จำนวนพิกัดเป็น q+1 ดังนั้น

$$^{q+1}F_{\min} = \sum_{i=1}^{q+1}\lambda_i = \sum_{i=2}^{q+1}\lambda_i$$

โดย $\lambda_1 = 0, \lambda_2, ..., \lambda_q$ เป็นค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุดของเมทริกซ์ **B** เรียงลำดับจากน้อยไปมาก

ให้ $F'_{\min}(\mathbf{u})$ เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ในปัญหาต่อไปนี้

$$\min\left\{F' = \sum_{i=1}^{q}\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{x}_i + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u}\right\}\text{โดยมีเงื่อนไขต่อไปนี้}$$

$$\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i = 1 \qquad ; i = 1, 2, ..., q$$

$$\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_j = 0 \qquad ; i \neq j; i, j = 1, 2, ..., q$$

และ $$\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = 0 \qquad ; i = 1, 2, ..., q$$

โดย **u** เป็นเวกเตอร์แนวตั้งอันดับ n ที่กำหนด จะได้ว่า

$$^{q+1}F_{\min} = \min_{\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}=1} F'_{\min}(\mathbf{u}) \leq F'_{\min}(\mathbf{u})\Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{1}_n/\sqrt{n}} = \text{ค่าต่ำสุดของ } F \text{ ในปัญหา (2.5)}$$

และหากแทน $\mathbf{x}_i$ ในปัญหา (2.5) ด้วยเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วย q ตัวที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ **B** จะได้ F ในปัญหา (2.5) มีค่าเป็นผลบวกของค่าเฉพาะที่น้อยที่สุด q ตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ **B** ซึ่งเท่ากับ $^{q+1}F_{\min}$ ดังนั้นค่าต่ำสุดของปัญหา (2.5) คือ $^{q+1}F_{\min}$ โดยที่มีผลเฉลย $\mathbf{x}_i$ เป็นเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วย q ตัวที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด q ตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ของ **B** □

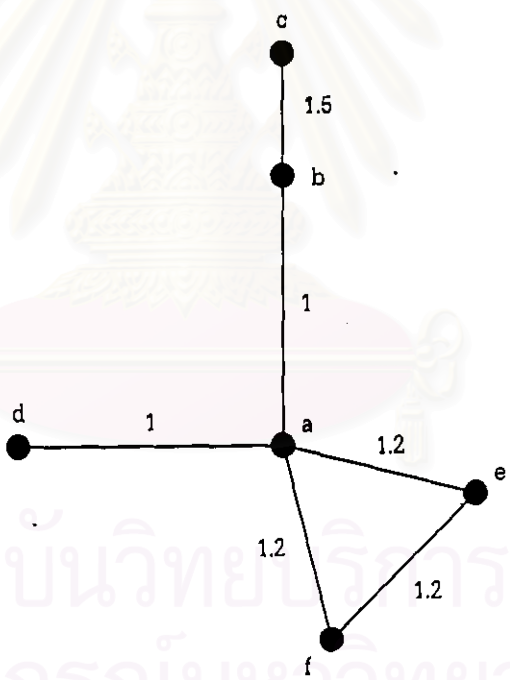
หลังจากได้ $\mathbf{x}_i$ ที่เป็นคำตอบของปัญหา (2.5) จะได้เมทริกซ์ **X** ซึ่งมีแนวตั้งประกอบไปด้วย $\mathbf{x}_i$ และได้ผลการวางตำแหน่งที่เหมาะสมตามความใกล้ทางไฟฟ้าเป็นจุดที่มีเวกเตอร์แสดงตำแหน่งเป็น $\mathbf{z}_i$ ซึ่งเมทริกซ์ **Z** ที่มีแนวตั้งประกอบไปด้วย $\mathbf{z}_i$ มีความสัมพันธ์กับเมทริกซ์ **X** ดังสมการ (2.3) นั่นคือ $\mathbf{z}_i$ เป็นแถว (row) ของเมทริกซ์ **X** นั่นเอง

การหากลุ่มของค่าเฉพาะที่มีขนาดใหญ่ที่สุดบางตัว รวมทั้งเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกันสามารถทำได้หลายวิธี ดังมีรายละเอียดในหนังสืออ้างอิง [14] โดยเฉพาะวิธีของ Lanczos ซึ่งเหมาะกับเมทริกซ์มากเลขศูนย์ (sparse matrix) ที่มีคุณสมบัติสมมาตร สำหรับการหากลุ่มของค่าเฉพาะที่มีขนาดเล็กที่สุดบางตัวรวมทั้งเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกันสามารถทำได้โดยอาศัยความจริงที่ว่า "ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) **A** จะเท่ากับส่วนกลับของค่าเฉพาะของ $\mathbf{A}^{-1}$ และเวกเตอร์เฉพาะจะเท่ากัน" ดังนั้นถ้าเราสามารถหาค่าเฉพาะที่มีขนาดใหญ่ที่สุด และเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกันของ $\mathbf{A}^{-1}$ ได้ ก็จะได้ค่าเฉพาะที่มีขนาดเล็กที่สุด และเวกเตอร์เฉพาะที่สอดคล้องกันของ **A** ด้วย แต่เนื่องจากเมทริกซ์ **B** ที่มีคุณสมบัติตามสมการ (2.1) เป็นเมทริกซ์เอกฐาน ทำให้ขั้นตอนในการหาค่าเฉพาะที่มีขนาดเล็กที่สุด (หรือมีค่าน้อยที่สุดนั่นเอง เพราะค่าเฉพาะทุกตัวของเมทริกซ์ **B** มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0) ซึ่งจะใช้การแยกตัวประกอบแบบ LU

(LU factorization) และการกำจัดของเกาส์ (Gaussian elimination) แทนการหาตัวผกผัน (inverse) ของ **B** มีประสิทธิภาพไม่ดี ดังนั้นโดยอาศัยความจริงที่ว่า "ถ้า p เป็นจำนวนจริงใด ๆ ค่าเฉพาะของ $\mathbf{A}+p\mathbf{I}$ จะเท่ากับค่าเฉพาะของ **A** บวกด้วย p ส่วนเวกเตอร์เฉพาะจะเท่ากัน" จะหาเวกเตอร์เฉพาะของ **B+I** ที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีขนาดเล็กที่สุด q ตัวแรกที่ไม่เท่ากับ 1 แทน นอกจากนี้จะพบว่าเมทริกซ์ **B+I** เป็นเมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติบวกแน่นอน (positive definite) ซึ่งทำให้ขั้นตอนการกำจัดของเกาส์มีประสิทธิภาพดีขึ้นด้วย

การเลือกจำนวนพิกัด q ที่เหมาะสมกับวิธีการจัดกลุ่มที่ใช้มีความสำคัญอย่างมากต่อความถูกต้องของผลการจัดกลุ่ม ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้การจัดกลุ่มของบัสที่ถูกแทนด้วยจุดโดยพิจารณาความใกล้กันของจุดหรือเวกเตอร์แสดงตำแหน่ง $\mathbf{z}_i$

เนื่องจากไม่ว่าจะเลือกจำนวนพิกัด q เป็นเท่าใด ก็จะต้องใช้เวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่น้อยที่สุดที่ไม่เป็นศูนย์ของเมทริกซ์ **B** เสมอ ดังนั้นเวกเตอร์เฉพาะตัวนี้จึงมีความสำคัญมาก แต่การใช้เวกเตอร์เฉพาะตัวนี้เพียงตัวเดียวก็อาจไม่เพียงพอ ดังจะได้แสดงด้วยตัวอย่างต่อไปนี้



รูปที่ 2.1 กราฟตัวอย่าง

พิจารณาการจัดกลุ่มจุดยอดของกราฟในรูปที่ 2.1 โดยตัวเลขที่กำกับไว้ที่เส้นเชื่อมคือน้ำหนักของเส้นเชื่อม เป็นตัวเลขแสดงความใกล้ระหว่างจุดยอด 2 จุดที่เส้นเชื่อมนั้นเชื่อมอยู่ ยิ่งตัวเลขมีค่ามากยิ่งแสดงว่าจุดยอดทั้งสองใกล้กันมาก จากรูปที่ 2.1 ซึ่งเขียนจุดยอดในกราฟให้มีความใกล้ที่เหมาะสมตามน้ำหนักของเส้นเชื่อม จะเห็นได้ชัดว่าผลการจัดกลุ่มเป็น 3 กลุ่มที่เหมาะสม คือ $C_1 = \{a, e, f\}$, $C_2 = \{b, c\}$, $C_3 = \{d\}$

ซึ่งทำให้จุดยอดในแต่ละกลุ่มมีการเกาะกลุ่มกันมากที่สุดหรือกลุ่มที่ต่างกันมีการเชื่อมโยงกันน้อยที่สุดนั่นเอง ผลการจัดกลุ่มที่ดีอาจวัดจาก ratio-cut cost ตามเอกสารอ้างอิง [3] ซึ่งนิยามดังนี้

$$\text{ratio - cut cost} = \sum_{i=1}^{k} \frac{E_i}{|C_i|} \tag{2.6}$$

โดย k คือ จำนวนกลุ่ม

E_i คือ ผลรวมน้ำหนักของเส้นเชื่อมในกราฟที่มีจุดปลายหนึ่งจุดเท่านั้นเป็นจุดยอดในกลุ่ม C_i

และ $|C_i|$ คือ ขนาดของกลุ่ม C_i

ผลการจัดกลุ่มที่ดีที่สุด คือ ผลการจัดกลุ่มที่ให้ ratio-cut cost น้อยที่สุด ผลการจัดกลุ่มเป็น 3 กลุ่มที่เหมาะสมข้างต้น จะมี ratio-cut cost ดังนี้

$$\text{ratio-cut cost} = (1+1)/3 + 1/2 + 1/1 = 2.1667$$

จากกราฟในรูปที่ 2.1 จะสร้างเมทริกซ์ **B** ที่สมาชิกในเมทริกซ์มีคุณสมบัติตามสมการ (2.1) ได้โดยใช้ตัวเลขบอกความใกล้ในรูปเป็น w_{ij} ดังนี้

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4.4 & -1 & 0 & -1 & -1.2 & -1.2 \\ -1 & 2.5 & -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0 & 0 & 2.4 & -1.2 \\ -1.2 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & 2.4 \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะ และเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกันของเมทริกซ์ **B** เรียงลำดับตามค่าเฉพาะจากน้อยไปมากจะเป็นดังนี้

$\lambda_1 = 0,\quad \mathbf{v}_1 = [\ 0.4082 \quad 0.4082 \quad 0.4082 \quad 0.4082 \quad 0.4082 \quad 0.4082\ ]^T$

$\lambda_2 = 0.5380,\quad \mathbf{v}_2 = [\ -0.1657 \quad 0.4397 \quad 0.6856 \quad -0.3587 \quad -0.3004 \quad -0.3004\ ]^T$

$\lambda_3 = 1.0593,\quad \mathbf{v}_3 = [\ -0.0481 \quad 0.0131 \quad 0.0447 \quad 0.8114 \quad -0.4106 \quad -0.4106\ ]^T$

$\lambda_4 = 3.3558,\quad \mathbf{v}_4 = [\ -0.2599 \quad -0.7289 \quad 0.5892 \quad 0.1103 \quad 0.1447 \quad 0.1447\ ]^T$

$\lambda_5 = 3.6,\quad \mathbf{v}_6 = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.7071 \quad 0.7071\ ]^T$

$\lambda_6 = 5.6468,\quad \mathbf{v}_6 = [\ -0.8579 \quad 0.3294 \quad -0.1192 \quad 0.1846 \quad 0.2315 \quad 0.2315\ ]^T$

หากเลือกใช้จำนวนพิกัด q เป็น 1 จะได้ผลเฉลย $\mathbf{x}_1$ ของปัญหา (2.5) เป็นเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่น้อยที่สุดที่ไม่เป็นศูนย์ นั่นคือจะได้ $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_2$ และได้ผลการวางตำแหน่งจุดยอดของกราฟให้เป็นจุดที่มี 1 พิกัดดังรูปที่ 2.2 หากต้องการจัดกลุ่มของจุดในรูปที่ 2.2 ให้เป็น 3 กลุ่ม จะได้ผลการจัดกลุ่มที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มซึ่งนิยามไว้ในหัวข้อต่อไปดังสมการ (2.10) มีค่าน้อยที่สุดเป็นดังนี้

$$C_1 = \{a, d, e, f\},\ C_2 = \{b\},\ C_3 = \{c\}$$

และคำนวณ ratio-cut cost ได้ดังนี้

$$\text{ratio-cut cost} = 1/4 + (1+1.5)/1 + 1.5/1 = 4.25$$

ซึ่งมากกว่า ratio-cut cost ของผลการจัดกลุ่มที่เหมาะสม จะเห็นได้ชัดจากรูปที่ 2.2 ว่าจุด d ถูกวางไว้ใกล้จุด e และ f ซึ่งผิดจากที่ควรจะเป็น เพราะจากกราฟในรูปที่ 2.1 จะเห็นว่าจุด d ไม่ได้เชื่อมต่อกับทั้งจุด e และจุด f

รูปที่ 2.2 ผลการวางตำแหน่งกราฟตัวอย่าง เมื่อใช้จำนวนพิกัดเท่ากับ 1

การเลือกจำนวนพิกัด q สูงเกินไปก็ทำให้เกิดความผิดพลาดได้เช่นกัน เช่น การเลือก $q = n$-1 จะทำให้บัสถูกแทนด้วยจุดที่มีระยะห่างระหว่างทุกคู่ของจุดเท่ากันเป็น 2 ซึ่งจะทำให้ผลการจัดกลุ่มผิดพลาด

ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้จำนวนพิกัด q ที่เหมาะสม ตามลักษณะการเชื่อมต่อกันของบัส เช่น ถ้าระบบประกอบไปด้วยบัสที่สามารถเรียงกันเป็นเส้นตรงได้ จำนวนพิกัดที่เหมาะสมคือ 1 ส่วนระบบที่มีบัส 3 บัสต่อกันเป็นรูปสามเหลี่ยม จะมีจำนวนพิกัดที่เหมาะสมคือ 2 เป็นต้น เพื่อความสะดวกในการเลือกจำนวนพิกัด จะเลือกใช้ค่าเฉลี่ยของจำนวนกิ่งที่ต่อกับแต่ละบัสเป็นจำนวนพิกัด ดังนี้

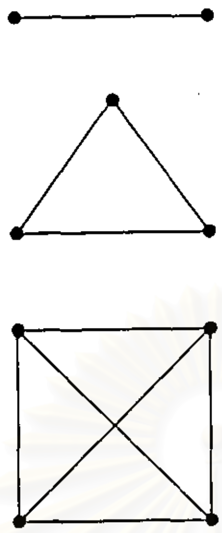
$$q = \begin{cases} \text{floor}(2b/n) & ;b \le n \\ \text{ceil}(2b/n) & ;b > n \end{cases} \tag{2.7}$$

โดย b คือ จำนวนกิ่งทั้งหมดในระบบ หรือเท่ากับจำนวนสายส่งรวมกับจำนวนหม้อแปลงนั่นเอง ดังนั้น $2b$ คือ ผลรวมจำนวนกิ่งของทุกบัส และ $2b/n$ คือ ค่าเฉลี่ยของจำนวนกิ่งที่ต่อกับแต่ละบัส

floor(x) คือ ฟังก์ชันในการหาจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าไม่เกิน x

และ ceil(x) คือ ฟังก์ชันในการหาจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มีค่าไม่ต่ำกว่า x

จากสมการ (2.7) หากกล่าวในรูปของกราฟ b จะเป็นจำนวนเส้นเชื่อม และ n จะเป็นจำนวนจุดยอดนั่นเอง ฟังก์ชัน floor จะถูกใช้เมื่อ $b \le n$ เช่น กราฟที่มีจุดยอดเชื่อมต่อกันเป็นเส้นตรง เป็นต้น ส่วนฟังก์ชัน ceil จะถูกใช้เมื่อ $b > n$ หากนำสมการ (2.7) ไปใช้กับกราฟแบบบริบูรณ์ (complete graph) หรือกราฟที่ทุก ๆ สองจุดยอดใด ๆ จะมีเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นเท่านั้นเชื่อมอยู่นั่นเอง จะได้ q ที่เหมาะสมกับกราฟดังแสดงในรูปที่ 2.3 แต่ถ้าหากนำไปใช้กับกราฟทั่วไปก็จะได้ผลเป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนการเชื่อมโยงของแต่ละจุดยอดในกราฟ



$n = 1,\ b = 1,\ 2b/n = 1$

$n = 2,\ b = 3,\ 2b/n = 2$

$n = 4,\ b = 6,\ 2b/n = 3$

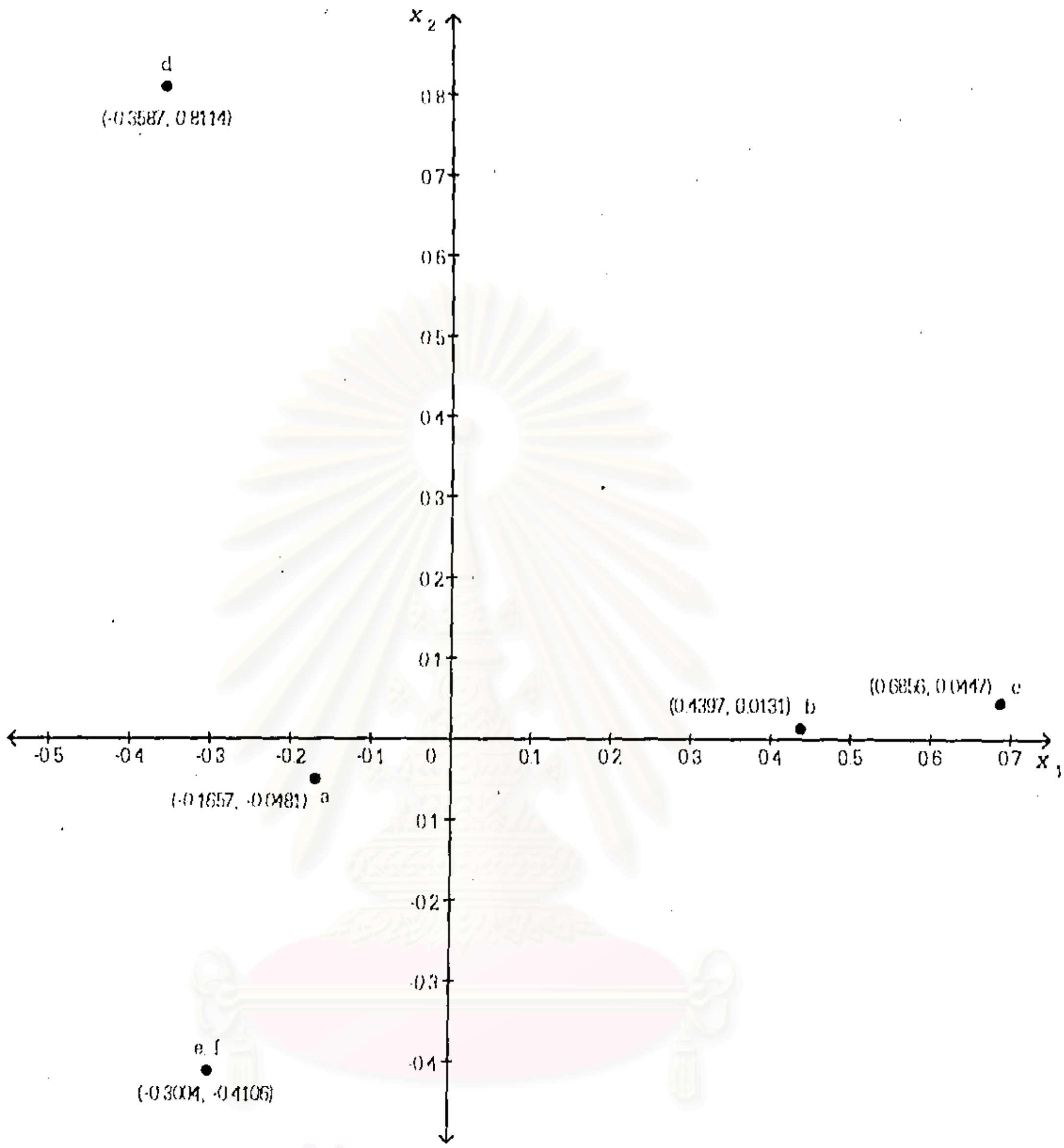
รูปที่ 2.3 กราฟแบบบริบูรณ์

ถ้าใช้สมการ (2.7) กับกราฟในรูปที่ 2.1 ซึ่งประกอบไปด้วยเส้นตรงและสามเหลี่ยม โดย $n = 6$ และ $b = 6$ จะได้ q ที่เหมาะสมเป็น floor($2b/n$) = 2 และได้ $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_2$ และ $\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_3$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.5) เมื่อนำไปใช้ในการวางตำแหน่ง จะได้ผลดังรูปที่ 2.4 ซึ่งระยะห่างของแต่ละจุดสอดคล้องกับระยะห่างของแต่ละจุดยอดของกราฟในรูปที่ 2.1 และหาผลการจัดกลุ่มที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มซึ่งนิยามตามสมการ (2.10) มีค่าน้อยที่สุดได้เป็นดังนี้

$$C_1 = \{a, e, f\},\ C_2 = \{b, c\},\ C_3 = \{d\}$$

ซึ่งตรงกับผลการจัดกลุ่มที่เหมาะสมเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.1

Chan, Schlag และ Zien [3] ใช้จำนวนพิกัดเท่ากับจำนวนกลุ่มที่ต้องการ และจัดกลุ่มโดยพิจารณาจากมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงตำแหน่งของจุดเท่านั้น ผลการจัดกลุ่มที่ได้จะใกล้เคียงกับผลการจัดกลุ่มที่ให้ค่า ratio-cut cost น้อยที่สุด วิธีการดังกล่าวให้ข้อกำหนดการเลือกจำนวนพิกัดที่ชัดเจน แต่อย่างไรก็ตาม ในระบบไฟฟ้ากำลังขนาดใหญ่ที่ต้องการจำนวนกลุ่มมาก ๆ จะทำให้ต้องคำนวณเวกเตอร์เฉพาะจำนวนมากขึ้นตามจำนวนกลุ่ม และหากภายหลังต้องการจำนวนกลุ่มที่เพิ่มขึ้น ก็จะต้องคำนวณเวกเตอร์เฉพาะเพิ่มด้วย ในขณะที่จำนวนพิกัดซึ่งหาจากสมการ (2.7) มีค่าไม่มากนัก โดยปกติจะมีค่าไม่เกิน 5 ทำให้เมื่อต้องการจำนวนกลุ่มมาก ๆ การจัดกลุ่มโดยพิจารณาจากระยะทางระหว่างเวกเตอร์แสดงตำแหน่งของจุดจะใช้จำนวนเวกเตอร์เฉพาะที่น้อยกว่า และถ้าต้องการจำนวนกลุ่มเพิ่มก็ไม่ต้องคำนวณเวกเตอร์เฉพาะเพิ่ม แต่ก็ยังมีความคลาดเคลื่อนในการเลือกจำนวนพิกัดที่เหมาะสมอยู่



รูปที่ 2.4 ผลการวางตำแหน่งกราฟตัวอย่าง เมื่อใช้จำนวนพิกัดเท่ากับ 2

2.2 การจัดกลุ่ม

หลังจากแทนบัสต่างๆ ด้วยจุดใน E" แล้ว ก็จะทำการจัดกลุ่มของจุดที่ใกล้กันไว้ในกลุ่มเดียวกันโดยวิธีแยกจำพวกเซนทรอยด์ (centroid sorting method) [1 และ 2] ดังนี้

พิจารณาการจัดกลุ่มของระบบ n บัสให้มีจำนวนกลุ่มเท่ากับ k

ให้ A_s^i เป็นพิกัดที่ s ของบัส i

C_i เป็นกลุ่มที่บรรจุบัส i

N_C เป็นจำนวนบัสของกลุ่ม C

B_s^C เป็นพิกัดที่ s ของกลุ่ม C มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของพิกัดที่ s ของทุกบัสในกลุ่ม C ดังนั้นจะได้

$$B_s^C = \left(\sum_{i \in C} A_s^i\right) / N_C \tag{2.8}$$

D_i^C เป็นระยะทางระหว่างจุดของบัส i กับจุดศูนย์กลางของกลุ่ม C นั่นคือ

$$D_i^C = \sqrt{\sum_{s=1}^{q} (A_s^i - B_s^C)^2} \tag{2.9}$$

e เป็นค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่ม มีค่าเท่ากับผลบวกกำลังสองของ $D_i^{C_i}$ นั่นคือ

$$e = \sum_{i=1}^{n} (D_i^{C_i})^2 \tag{2.10}$$

การจัดกลุ่มเริ่มต้นโดยการหากลุ่มเริ่มต้น (initial cluster) ดังนี้

ให้ S_i เป็นผลบวกของพิกัดที่ถูกถ่วงน้ำหนักของบัส i

และ w_s เป็นน้ำหนักที่ใช้ถ่วงพิกัดที่ s จะได้

$$S_i = \sum_{s=1}^{q} w_s A_s^i \tag{2.11}$$

ให้ S_{min} และ S_{max} เป็นค่าต่ำสุดและสูงสุดของ S_i ตามลำดับ จะกำหนด T_i เพื่อใช้หากลุ่มเริ่มต้นดังนี้

$$T_i = \text{floor}\left(1 + \frac{k(S_i - S_{min})}{(S_{max} - S_{min})}\right) \tag{2.12}$$

กลุ่มเริ่มต้น C_i หาได้จาก

$$C_i = \min\{k, T_i\} \tag{2.13}$$

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างการหาค่า $B_s^{C_i}$, $D_i^{C_i}$ ของแต่ละจุดยอด i ของกราฟในรูปที่ 2.1 และหาค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่ม e เมื่อใช้ผลการจัดกลุ่มเป็น

$$C_1 = \{a, e, f\},\ C_2 = \{b, c\},\ C_3 = \{d\}$$

ซึ่งเป็นผลการจัดกลุ่มที่ดีที่สุด และใช้ $q = 2$ ซึ่งได้ผลการวางตำแหน่งดังรูปที่ 2.4

เวกเตอร์แสดงตำแหน่งของจุด a คือ $\mathbf{z}_a = \begin{bmatrix} A_1^a & A_2^a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -0.1657 & -0.0481 \end{bmatrix}^T$

เวกเตอร์แสดงตำแหน่งของจุด e เท่ากับเวกเตอร์แสดงตำแหน่งของจุด f ดังนี้

$$\mathbf{z}_e = \begin{bmatrix} A_1^e & A_2^e \end{bmatrix}^T = \mathbf{z}_f = \begin{bmatrix} A_1^f & A_2^f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -0.3004 & -0.4106 \end{bmatrix}^T$$

เนื่องจาก $C_1 = \{a, e, f\}$ ดังนั้น $C_a = C_e = C_f = C_1$ จุดศูนย์กลางของกลุ่ม C_1 มีค่าเท่ากับ

$$\left(B_1^{C_1}, B_2^{C_1}\right)=\left(\frac{A_1^{a}+A_1^{e}+A_1^{f}}{3}, \frac{A_2^{a}+A_2^{e}+A_2^{f}}{3}\right)=(-0.2555, -0.2898)$$

ระยะทางระหว่างจุด a กับจุดศูนย์กลางกลุ่ม C_1 คือ

$$D_a^{C_1} = \sqrt{\sum_{s=1}^{2}(A_s^{a}-B_s^{C_1})^2} = 0.2578$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$D_e^{C_1} = \sqrt{\sum_{s=1}^{2}(A_s^{e}-B_s^{C_1})^2} = D_f^{C_1} = \sqrt{\sum_{s=1}^{2}(A_s^{f}-B_s^{C_1})^2} = 0.1289$$

เวกเตอร์แสดงตำแหน่งของจุด b คือ $\mathbf{z}_b = \begin{bmatrix} A_1^{b} & A_2^{b} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.4397 & 0.0131 \end{bmatrix}^T$

เวกเตอร์แสดงตำแหน่งของจุด c คือ $\mathbf{z}_c = \begin{bmatrix} A_1^{c} & A_2^{c} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.6856 & 0.0447 \end{bmatrix}^T$

เนื่องจาก $C_2 = \{b, c\}$ ดังนั้น $C_b = C_c = C_2$ จุดศูนย์กลางของกลุ่ม C_2 คือ

$$\left(B_1^{C_2}, B_2^{C_2}\right)=\left(\frac{A_1^{b}+A_1^{c}}{2}, \frac{A_2^{b}+A_2^{c}}{2}\right)=(0.5626, 0.0289)$$

และได้

$$D_b^{C_2} = \sqrt{\sum_{s=1}^{2}(A_s^{b}-B_s^{C_2})^2} = D_c^{C_2} = \sqrt{\sum_{s=1}^{2}(A_s^{c}-B_s^{C_2})^2} = 0.1239$$

เวกเตอร์แสดงตำแหน่งของจุด d คือ $\mathbf{z}_d = \begin{bmatrix} A_1^{d} & A_2^{d} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -0.3587 & 0.8114 \end{bmatrix}^T$

เนื่องจาก $C_3 = \{d\}$ ดังนั้น $C_d = C_3$ จุดศูนย์กลางของกลุ่ม C_3 คือ

$$\left(B_1^{C_3}, B_2^{C_3}\right)=\left(A_1^{d}, A_2^{d}\right)=(-0.3587, 0.8114)$$

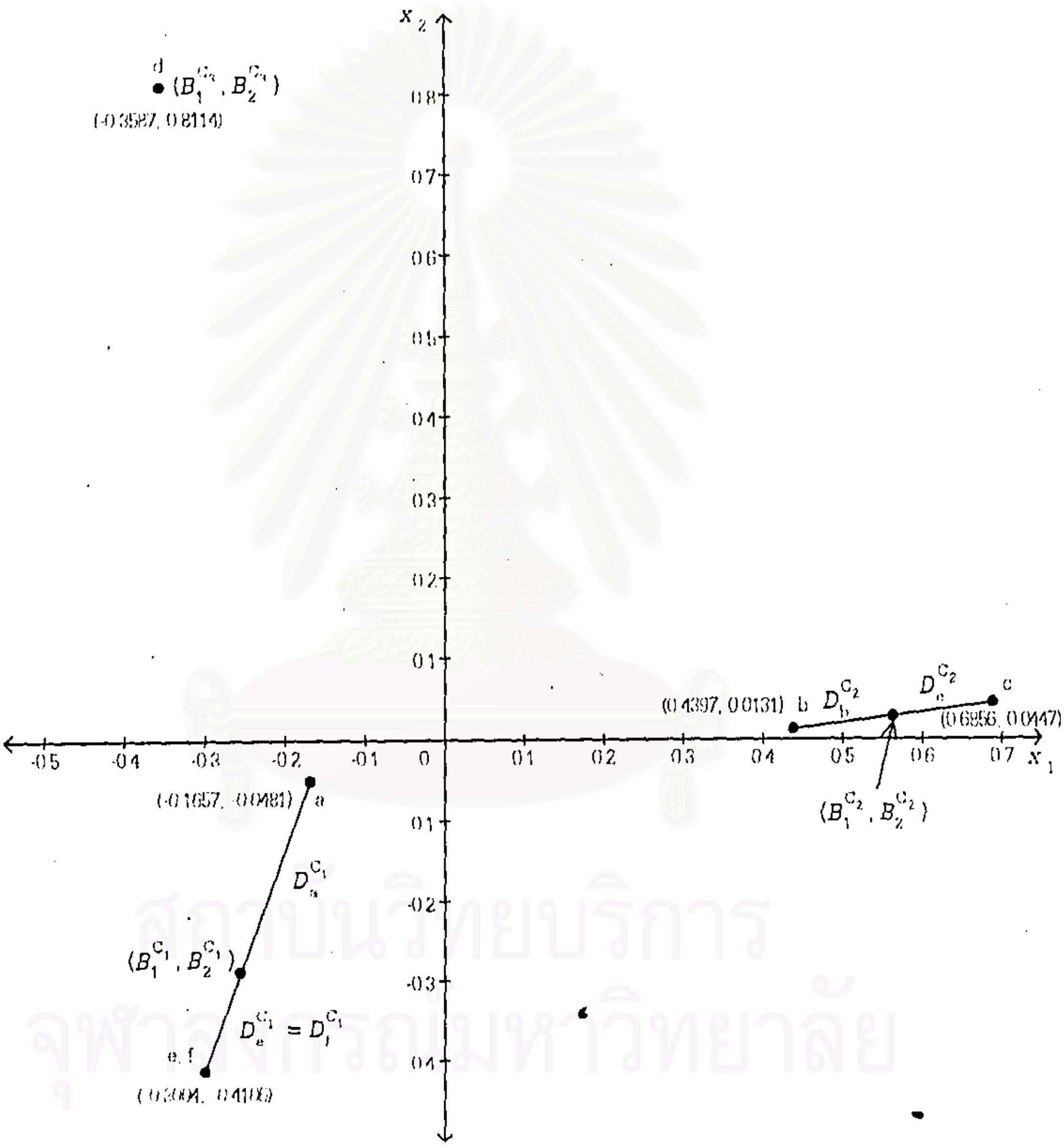
และได้ $D_d^{C_3} = 0$

ผลการคำนวณข้างต้นสามารถเขียนลงในผลการวางตำแหน่งของกราฟได้ดังรูปที่ 2.5 และสามารถคำนวณค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มตามสมการ (2.10) ได้ดังนี้

$$e = \sum_{i \in \{a,b,c,d,e,f\}} (D_i^{C_i})^2 = 0.2578^2 + 0.1239^2 + 0.1239^2 + 0^2 + 0.1289^2 + 0.1289^2 = 0.1304$$

ข้อควรระวังอย่างหนึ่งในการใช้ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มซึ่งคำนวณตามสมการ (2.10) คือ เราไม่สามารถใช้ค่าคลาดเคลื่อนตัวนี้ในการเปรียบเทียบผลการจัดกลุ่มที่ใช้จำนวนพิกัด q ต่างกันได้ เช่น ถ้าลดจำนวนพิกัด q ในตัวอย่างข้างต้นลงเหลือ 1 ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มสำหรับกรณีที่ q เป็น 1 จะเท่ากับผลรวมของกำลังสองของภาพฉาย (projection) บนแกนที่ 1 ของระยะทางระหว่างจุดกับศูนย์กลางกลุ่มในกรณีที่ q เป็น 2 ดังนั้นถ้าใช้จำนวนพิกัดน้อยลง ค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้ก็จะน้อยลงมาก ตัวอย่างเช่น

ถ้าใช้ผลการจัดเป็น C_1 = {a, d, e, f}, C_2 = {b}, C_3 = {c} โดยที่ q เป็น 1 จะคำนวณค่า e ตามสมการ (2.10) จากรูปที่ 2.2 ได้เป็น 0.0201 น้อยกว่าค่า e ของผลการจัดกลุ่มที่เหมาะสม (C_1 = {a, e, f}, C_2 = {b, c}, C_3 = {d}) โดยที่ q เป็น 2 ซึ่งได้เป็น 0.1304 แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าใช้ค่า q ที่เหมาะสมเท่ากัน คือ 2 ผลการจัดกลุ่มที่เหมาะสมข้างต้นจะมีค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มต่ำที่สุด



รูปที่ 2.5 จุดศูนย์กลางกลุ่มของกราฟตัวอย่าง เมื่อใช้จำนวนพิกัดเท่ากับ 2

การเลือกกลุ่มโดยใช้สมการ (2.13) นั้น เป็นการหากลุ่มเริ่มต้นโดยจะให้จุดที่มีค่า S_i ตามสมการ (2.11) ใกล้เคียงกันอยู่ในกลุ่มเดียวกัน แต่ในความเป็นจริง จุดที่อยู่ใกล้กันจะต้องมีค่าพิกัดที่ใกล้กันทุกค่า

ดังนั้นการเลือกกลุ่มเริ่มต้นโดยวิธีนี้จะมีความผิดพลาดถ้าใช้จำนวนพิกัดมากกว่า 1 กลุ่มเริ่มต้นที่ใช้มีความสำคัญต่อผลการจัดกลุ่มโดยวิธีการจัดกลุ่มซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไปเป็นอย่างมาก ถ้าได้กลุ่มเริ่มต้นที่ดีก็มีโอกาสที่จะได้ผลการจัดกลุ่มที่ดี Müller และ Quintana [1 และ 2] จะใช้ S_i ตามสมการ (2.11) เป็นผลบวกของทุกพิกัดของบัส i นั่นคือใช้ค่าถ่วงน้ำหนัก w_s เป็น 1 สำหรับทุกพิกัด หรือเป็นการให้ความสำคัญกับทุกพิกัดเท่ากันนั่นเอง จะพบว่าการเลือกใช้ค่าถ่วงน้ำหนักแบบนี้มีโอกาสที่จะให้กลุ่มเริ่มต้นที่ไม่เหมาะสมได้มาก หากจำนวนพิกัดมากกว่า 1 เช่น มีบางกลุ่มที่มีขนาดเริ่มต้นเล็กเกินไป หรือได้กลุ่มเริ่มต้นที่มีค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มสูง เป็นต้น ดังนั้นจึงควรให้ความสำคัญกับพิกัดที่มีความสำคัญมากกว่า โดยใช้ค่าถ่วงน้ำหนักที่มากกว่า พิกัดที่มาจากเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่าจะมีสำคัญมากกว่า ยกเว้นเวกเตอร์เฉพาะหนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่เป็นศูนย์ เช่น พิกัดที่มาจากเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุดที่ไม่เป็นศูนย์ จะมีความสำคัญมากที่สุด เพราะไม่ว่าจะใช้จำนวนพิกัดเท่าใด เวกเตอร์เฉพาะตัวนี้ก็จะถูกนำมาใช้เสมอ เป็นต้น ดังนั้นจึงแนะนำว่าควรให้ค่าถ่วงน้ำหนัก w_s มีค่ามากกว่าสำหรับพิกัดที่มาจากเวกเตอร์เฉพาะขนาดหนึ่งหน่วยที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่า เช่น กรณี $q = 2$ อาจใช้ $w_1 = 2$ และ $w_2 = 1$ เป็นต้น ความสำคัญของการใช้ค่าถ่วงน้ำหนักสามารถแสดงให้เห็นได้โดยใช้ตัวอย่างกราฟในรูปที่ 2.1 กรณีแบ่งเป็น 3 กลุ่ม และใช้ q เท่ากับ 2 ดังนี้

ถ้าใช้ $w_1 = w_2 = 1$ จะได้ S_a ตามสมการ (2.11) เป็นดังนี้

$$S_a = \sum_{s=1}^{2} w_s A_s^a = A_1^a + A_2^a = (-0.1657) + (-0.0481) = -0.2138$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $S_b = 0.4528$, $S_c = 0.7303$, $S_d = 0.4527$, $S_e = -0.7110$, $S_f = -0.7110$
ดังนั้น $S_{min} = -0.7110$, $S_{max} = 0.7303$ และคำนวณ T_a ตามสมการ (2.12) ได้ดังนี้

$$T_a = \text{floor}\left(1 + \frac{k(S_a - S_{min})}{(S_{max} - S_{min})}\right) = \text{floor}\left(1 + \frac{3(-0.2138 + 0.7110)}{(0.7303 + 0.7110)}\right) = 2$$

และจะได้กลุ่มเริ่มต้นของจุด a ซึ่งคำนวณตามสมการ (2.13) เป็นดังนี้

$$C_a = \min\{k, T_a\} = \min\{3, 2\} = 2$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $T_b = 3$, $T_c = 4$, $T_d = 3$, $T_e = 1$, $T_f = 1$ และจะได้กลุ่มเริ่มต้นของจุด b, c, d, e และ f เป็น $C_b = 3$, $C_c = 3$, $C_d = 3$, $C_e = 1$ และ $C_f = 1$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ผลการจัดกลุ่มเริ่มต้นเป็นดังนี้

$$C_1 = \{e, f\}, C_2 = \{a\}, C_3 = \{b, c, d\}$$

และมีค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มเป็น 1.0049 ในขณะที่ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มสำหรับกรณีการจัดกลุ่มที่ดีที่สุดเป็น 0.1304 จะเห็นว่ากลุ่มเริ่มต้นที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มสูง ทั้งนี้เนื่องมาจากการใช้ค่าถ่วงน้ำหนักที่เท่ากันทำให้ S_d ที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับ S_b มาก ทำให้จุด d ถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มเดียวกับจุด b และจุด c ทั้ง ๆ ที่จุด d อยู่ห่างจากจุด b และจุด c มาก

ถ้าใช้ $w_1 = 2$ และ $w_2 = 1$ จะได้

$$S_a = \sum_{s=1}^{2} w_s A_s^a = A_1^a + A_2^a = 2 \times (-0.1657) + (-0.0481) = -0.3795$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $S_b = 0.8925$, $S_c = 1.4159$, $S_d = 0.0940$, $S_e = -1.0114$, $S_f = -1.0114$
ดังนั้น $S_{min} = -1.0114$, $S_{max} = 1.4159$ และคำนวณ T_a ได้ดังนี้

$$T_a = \text{floor}\left(1 + \frac{k(S_a - S_{min})}{(S_{max} - S_{min})}\right) = \text{floor}\left(1 + \frac{3(-0.3795 + 1.0114)}{(1.4159 + 1.0114)}\right) = 1$$

จะได้กลุ่มเริ่มต้นของจุด a เป็น

$$C_a = \min(k, T_a) = \min(3, 1) = 1$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $T_b = 3$, $T_c = 4$, $T_d = 2$, $T_e = 1$, $T_f = 1$ และจะได้กลุ่มเริ่มต้นของจุด b, c, d, e และ f เป็น $C_b = 3$, $C_c = 3$, $C_d = 2$, $C_e = 1$, $C_f = 1$ ตามลำดับ ดังนั้นจะได้ผลการจัดกลุ่มเริ่มต้นเป็นดังนี้

$$C_1 = \{a, e, f\}, C_2 = \{d\}, C_3 = \{b, c\}$$

ซึ่งเป็นผลการจัดกลุ่มเป็น 3 กลุ่มที่ดีที่สุด ในตัวอย่างนี้จะเห็นว่าการใช้ค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 และ w_2 เป็น 2 และ 1 ตามลำดับ จะให้กลุ่มเริ่มต้นที่ดีกว่าการใช้ค่าถ่วงน้ำหนัก w_1 และ w_2 เป็น 1 เท่ากัน

หลังจากได้กลุ่มเริ่มต้นแล้ว จะทำการย้ายบัสเพื่อปรับปรุงให้ได้ผลการจัดกลุ่มที่ดีขึ้น แต่อย่างไรก็ตาม การจัดกลุ่มเพื่อให้ได้ผลการจัดกลุ่มที่ดีที่สุด หรือค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มน้อยที่สุดนั้น อาจใช้เวลามากจนไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติ เพราะมีรูปแบบของกลุ่มที่เป็นไปได้มากมาย ดังนั้นจะหาผลการจัดกลุ่มโดยใช้การย้ายบัสทีละบัสจากกลุ่มเดิมไปยังกลุ่มใหม่ที่ให้ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มลดลงมากที่สุด ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ กับทุกบัสจนไม่สามารถหาบัสที่ย้ายแล้วทำให้ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มลดลงก็จะหยุด วิธีการเช่นนี้จะให้ผลการจัดกลุ่มที่ดีโดยประมาณ แต่โดยทั่วไปจะไม่ใช่ผลการจัดกลุ่มที่ดีที่สุด เพราะอาจมีผลการจัดกลุ่มที่ดีกว่าหากย้ายบัสทีละมากกว่าหนึ่งบัส

ถ้าให้ $\Delta e^-(i, P)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มที่เปลี่ยนไปของกลุ่ม C_i เนื่องจากการย้ายบัส i จากกลุ่ม C_i ไปสู่กลุ่ม P และให้ $\Delta e^+(i, P)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มที่เปลี่ยนไปของกลุ่ม P เนื่องจากการรับบัส i จากกลุ่ม C_i จะทำการหากลุ่ม P ที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนรวมที่เปลี่ยนไปลดลงมากที่สุดหรือ $\Delta e^-(i, P)+\Delta e^+(i, P)$ มีค่าเป็นลบมากที่สุดนั่นเอง ในการคำนวณหาค่า $\Delta e^-(i, P)$ และ $\Delta e^+(i, P)$ ไม่จำเป็นต้องคำนวณหาจุดศูนย์กลางของกลุ่ม C_i และกลุ่ม P ทุกครั้งที่จะทดสอบการย้ายบัส i ซึ่งจะทำให้การจัดกลุ่มเสียเวลามากโดยเฉพาะถ้าจำนวนพิกัดหรือจำนวนกลุ่มมากขึ้น แต่จะพิสูจน์ได้ว่าค่า $\Delta e^-(i, P)$ และ $\Delta e^+(i, P)$ สามารถหาได้จากระยะทางกำลังสองของตำแหน่งบัส i เทียบกับจุดศูนย์กลางเดิมของกลุ่ม C_i และกลุ่ม P ก่อนการย้ายบัส i ดังนี้

$$\Delta e^{-}(i,\mathrm{P}) = -\frac{N_{\mathrm{C}_i}(D_i^{\mathrm{C}_i})^2}{N_{\mathrm{C}_i}-1} \tag{2.14}$$

$$\Delta e^{+}(i,\mathrm{P}) = \frac{N_{\mathrm{P}}(D_i^{\mathrm{P}})^2}{N_{\mathrm{P}}+1} \tag{2.15}$$

โดย $D_i^{\mathrm{C}_i}$ และ D_i^{P} คือ ระยะทางระหว่างตำแหน่งของบัส i กับจุดศูนย์กลางเดิมของกลุ่ม C_i และกลุ่ม P ตามลำดับ ส่วน N_{C_i} และ N_{P} คือ จำนวนบัสเดิมของกลุ่ม C_i และกลุ่ม P ตามลำดับ

การพิสูจน์สมการ (2.14) และ (2.15) เป็นดังนี้

<u>การพิสูจน์สมการ (2.14)</u>

พิจารณาการย้ายบัส i จากกลุ่ม C ซึ่งเป็นกลุ่มเดิมของบัส i ไปยังกลุ่ม P

ให้ B_s^{C} และ $B_{s,\mathrm{new}}^{\mathrm{C}}$ คือพิกัดที่ s ของกลุ่ม C ก่อนและหลังการย้ายบัส i ตามลำดับ

$\mathrm{N_C}$ เป็นจำนวนบัสในกลุ่ม C ก่อนการย้ายบัส i

จะได้ว่า
$$B_s^{\mathrm{C}} = \left(\sum_{k\in \mathrm{C}} A_s^k\right) / N_{\mathrm{C}}$$

และ
$$B_{s,\mathrm{new}}^{\mathrm{C}} = \left(\sum_{k\in \mathrm{C}-\{i\}} A_s^k\right) / (N_{\mathrm{C}}-1) = \frac{N_{\mathrm{C}}B_s^{\mathrm{C}} - A_s^i}{N_{\mathrm{C}}-1}$$

ให้ $\Delta e^{-}(i,\mathrm{P})$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เปลี่ยนไปของกลุ่ม C เนื่องจากการย้ายบัส i ไปยังกลุ่ม P จะได้

$$\Delta e^{-}(i,\mathrm{P}) = \sum_{k\in \mathrm{C}-\{i\}} \sum_{s=1}^{q} (A_s^k - B_{s,\mathrm{new}}^{\mathrm{C}})^2 - \sum_{k\in \mathrm{C}} \sum_{s=1}^{q} (A_s^k - B_s^{\mathrm{C}})^2$$

แทน $B_{s,\mathrm{new}}^{\mathrm{C}} = \dfrac{N_{\mathrm{C}}B_s^{\mathrm{C}} - A_s^i}{N_{\mathrm{C}}-1}$ ลงในสมการข้างต้นจะได้

$$\Delta e^{-}(i,\mathrm{P}) = \sum_{k\in \mathrm{C}-\{i\}} \sum_{s=1}^{q} \left(A_s^k - B_s^{\mathrm{C}} + \frac{A_s^i - B_s^{\mathrm{C}}}{N_{\mathrm{C}}-1}\right)^2 - \sum_{k\in \mathrm{C}} \sum_{s=1}^{q} (A_s^k - B_s^{\mathrm{C}})^2$$

$$= \sum_{k\in \mathrm{C}-\{i\}} \sum_{s=1}^{q} \left[(A_s^k - B_s^{\mathrm{C}})^2 + \frac{2(A_s^k - B_s^{\mathrm{C}})(A_s^i - B_s^{\mathrm{C}})}{N_{\mathrm{C}}-1} + \left(\frac{A_s^i - B_s^{\mathrm{C}}}{N_{\mathrm{C}}-1}\right)^2 \right] - \sum_{k\in \mathrm{C}} \sum_{s=1}^{q} (A_s^k - B_s^{\mathrm{C}})^2$$

$$= -\sum_{s=1}^{q} (A_s^i - B_s^{\mathrm{C}})^2 + \frac{2}{N_{\mathrm{C}}-1} \sum_{s=1}^{q} \left[(A_s^i - B_s^{\mathrm{C}}) \sum_{k\in \mathrm{C}-\{i\}} (A_s^k - B_s^{\mathrm{C}}) \right] + \frac{1}{N_{\mathrm{C}}-1} \sum_{s=1}^{q} (A_s^i - B_s^{\mathrm{C}})^2$$

$$= \frac{2-N_C}{N_C-1}\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^C)^2 + \frac{2}{N_C-1}\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^C)\left(\sum_{k\in C-\{i\}} A_s^k - (N_C-1)B_s^C\right)$$

แทน $\sum_{k\in C-\{i\}} A_s^k = N_C B_s^C - A_s^i$ จะได้

$$\Delta e^-(i, P) = -\frac{N_C}{N_C-1}\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^C)^2$$

ให้ D_i^C คือระยะทางระหว่างตำแหน่งของบัส i กับจุดศูนย์กลางเดิมของกลุ่ม C ก่อนการย้ายบัส i จะได้

$$D_i^C = \sqrt{\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^C)^2}$$

ดังนั้น
$$\Delta e^-(i, P) = -\frac{N_C (D_i^C)^2}{N_C - 1}$$
□

<u>การพิสูจน์สมการ (2.15)</u>

พิจารณาการย้ายบัส i จากกลุ่ม C ซึ่งเป็นกลุ่มเดิมของบัส i ไปยังกลุ่ม P

ให้ B_s^P และ $B_{s,\text{new}}^P$ คือพิกัดที่ s ของกลุ่ม P ก่อนและหลังการย้ายบัส i ตามลำดับ

จะได้ว่า
$$B_s^P = \left(\sum_{k\in P} A_s^k\right) / N_P$$

และ
$$B_{s,\text{new}}^P = \left(\sum_{k\in P\cup\{i\}} A_s^k\right) / (N_P + 1) = \frac{N_P B_s^P + A_s^i}{N_P + 1}$$

ให้ $\Delta e^+(i, P)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เปลี่ยนไปของกลุ่ม P เนื่องจากการรับบัส i จากกลุ่ม C จะได้

$$\Delta e^+(i, P) = \sum_{k\in P\cup\{i\}} \sum_{s=1}^{q}(A_s^k - B_{s,\text{new}}^P)^2 - \sum_{k\in P}\sum_{s=1}^{q}(A_s^k - B_s^P)^2$$

แทน $B_{s,\text{new}}^P = \dfrac{N_P B_s^P + A_s^i}{N_P + 1}$ ลงในสมการข้างต้นจะได้

$$\Delta e^+(i, P) = \sum_{k\in P\cup\{i\}} \sum_{s=1}^{q}\left(A_s^k - B_s^P - \frac{A_s^i - B_s^P}{N_P + 1}\right)^2 - \sum_{k\in P}\sum_{s=1}^{q}(A_s^k - B_s^P)^2$$

$$= \sum_{k\in \mathrm{P}\cup\{i\}} \sum_{s=1}^{q}\left[(A_s^k - B_s^{\mathrm{P}})^2 - \frac{2(A_s^k - B_s^{\mathrm{P}})(A_s^i - B_s^{\mathrm{P}})}{N_{\mathrm{P}}+1} + \left(\frac{A_s^i - B_s^{\mathrm{P}}}{N_{\mathrm{P}}+1}\right)^2 \right] - \sum_{k\in \mathrm{P}}\sum_{s=1}^{q}(A_s^k - B_s^{\mathrm{P}})^2$$

$$= \sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^{\mathrm{P}})^2 - \frac{2}{N_{\mathrm{P}}+1}\sum_{s=1}^{q}\left[(A_s^i - B_s^{\mathrm{P}}) \sum_{k\in \mathrm{P}\cup\{i\}}(A_s^k - B_s^{\mathrm{P}})\right] + \frac{1}{N_{\mathrm{P}}+1}\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^{\mathrm{P}})^2$$

$$= \frac{N_{\mathrm{P}}+2}{N_{\mathrm{P}}+1}\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^{\mathrm{P}})^2 - \frac{2}{N_{\mathrm{P}}+1}\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^{\mathrm{P}})\left(\sum_{k\in \mathrm{P}\cup\{i\}}A_s^k - (N_{\mathrm{P}}+1)B_s^{\mathrm{P}}\right)$$

แทน $\sum_{k\in \mathrm{P}\cup\{i\}} A_s^k = N_{\mathrm{P}}B_s^{\mathrm{P}} + A_s^i$ จะได้

$$\Delta e^{+}(i,\mathrm{P}) = \frac{N_{\mathrm{P}}}{N_{\mathrm{P}}+1}\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^{\mathrm{P}})^2$$

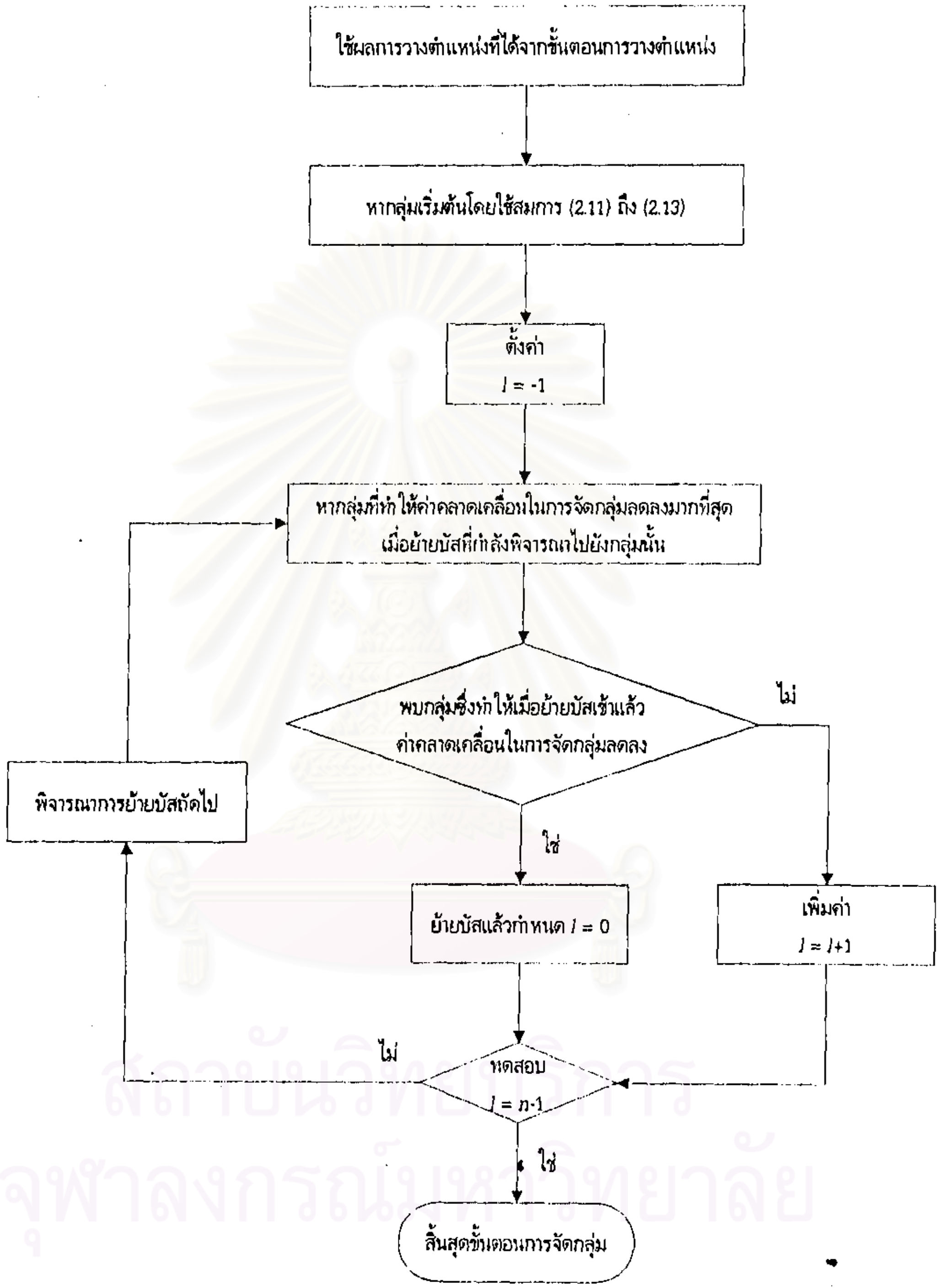
ให้ D_i^{P} คือระยะทางระหว่างตำแหน่งของบัส i กับจุดศูนย์กลางเดิมของกลุ่ม P ก่อนการย้ายบัส i จะได้ว่า

$$D_i^{\mathrm{P}} = \sqrt{\sum_{s=1}^{q}(A_s^i - B_s^{\mathrm{P}})^2}$$

ดังนั้น
$$\Delta e^{+}(i,\mathrm{P}) = \frac{N_{\mathrm{P}}(D_i^{\mathrm{P}})^2}{N_{\mathrm{P}}+1} \qquad \square$$

สำหรับแต่ละบัส i จะหากลุ่ม P ที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนรวมที่เปลี่ยนไป $\Delta e^{-}(i,\mathrm{P})+\Delta e^{+}(i,\mathrm{P})$ มีค่าเป็นลบมากที่สุด เมื่อหากลุ่ม P ที่ต้องการได้ จะทำการย้ายบัส i ไปสู่กลุ่ม P และคำนวณหาจุดศูนย์กลางของกลุ่ม C_i , จุดศูนย์กลางของกลุ่ม P, N_{C_i} และ N_{P} ภายหลังการย้าย ขั้นตอนการย้ายข้างต้นจะถูกทำกับทุก ๆ บัสจนไม่สามารถหาการย้ายที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มลดลงได้ก็จะหยุด

จากที่กล่าวมา สามารถสรุปขั้นตอนการจัดกลุ่มได้ดังรูปที่ 2.6



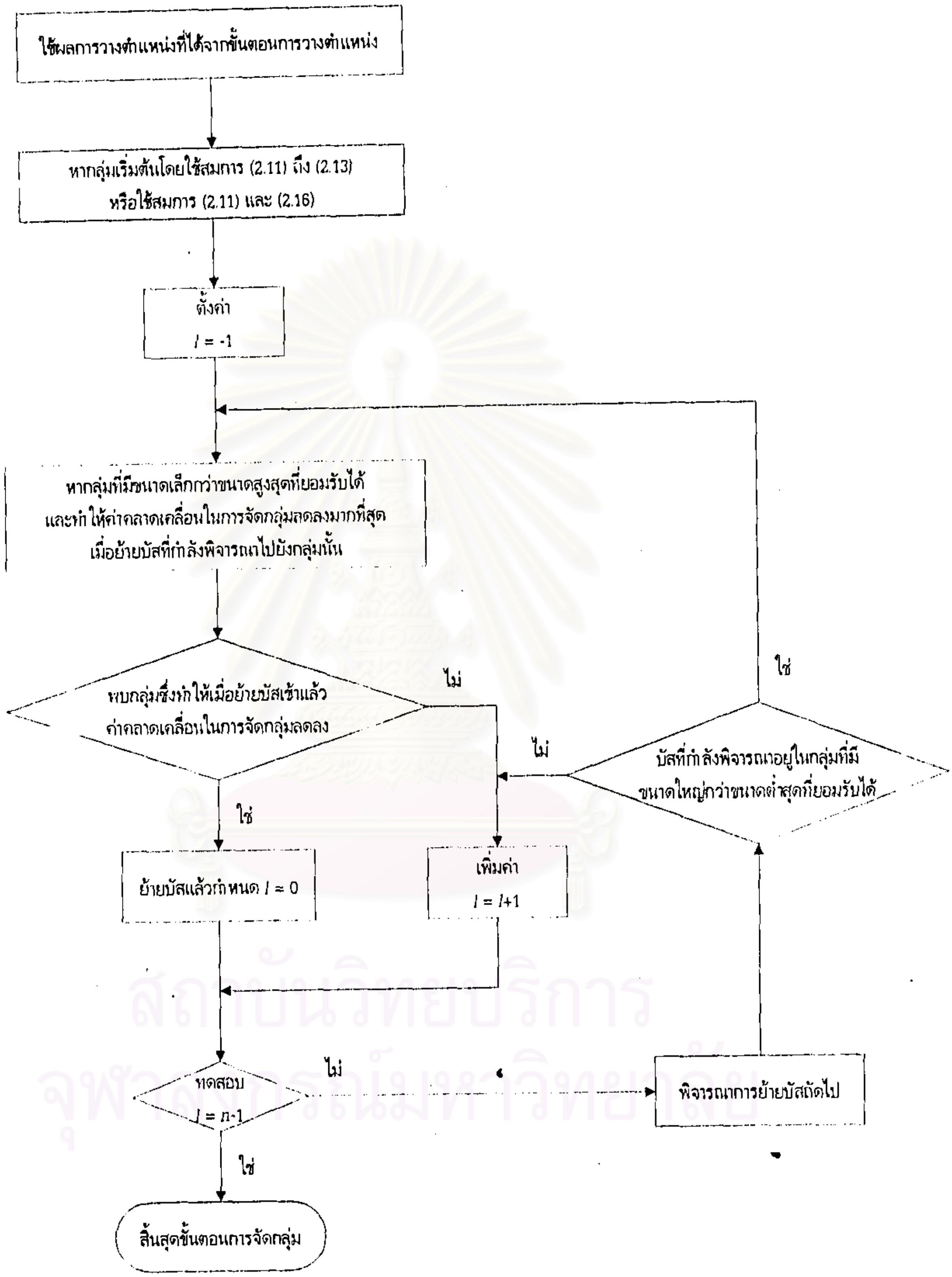
รูปที่ 2.6 ขั้นตอนการจัดกลุ่มที่ไม่มีการควบคุมขนาดของกลุ่ม

ในหลาย ๆ ครั้ง จะพบว่าการใช้สมการ (2.11) ถึง (2.13) อาจทำให้ไม่สามารถหากลุ่มเริ่มต้นที่มีจำนวนกลุ่มตามต้องการได้ เนื่องจากบางกลุ่มจะมีขนาดเป็นศูนย์ หรืออาจทำให้ได้ผลการจัดกลุ่มเริ่มต้นที่แต่ละกลุ่มมีขนาดใหญ่เล็กแตกต่างกันมาก จนทำให้ได้ผลการจัดกลุ่มสุดท้ายที่แต่ละกลุ่มมีขนาดแตกต่างกันมากเช่นกัน ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้ด้วยการควบคุมขนาดเริ่มต้นของแต่ละกลุ่มโดยเรียงลำดับค่า S_i ตามสมการ (2.11) จากน้อยไปมาก แล้วกำหนดขนาดเริ่มต้นของแต่ละกลุ่มให้เท่า ๆ กัน ถ้า S_i มีค่าน้อยเป็นอันดับที่ t_i ก็จะให้บัส i มีกลุ่มเริ่มต้นดังนี้

$$C_i = \mathrm{ceil}(kt_i/n) \tag{2.16}$$

แม้ว่าการหากลุ่มเริ่มต้นโดยใช้สมการ (2.16) มักจะได้กลุ่มเริ่มต้นที่มีค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มสูงกว่าการใช้สมการ (2.11) ถึง (2.13) แต่จะทำให้ได้กลุ่มเริ่มต้นที่มีขนาดเท่า ๆ กัน

นอกจากนั้นการจัดกลุ่มตามวิธีในรูปที่ 2.6 ซึ่งใช้การย้ายบัสทีละบัสจากกลุ่มเดิมไปสู่กลุ่มใหม่ที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มลดลงมากที่สุดโดยไม่มีการควบคุมขนาดของแต่ละกลุ่ม อาจทำให้บางกลุ่มมีขนาดเล็กหรือใหญ่เกินไป ดังนั้นเพื่อให้สามารถควบคุมขนาดของแต่ละกลุ่มได้ อาจใช้การหากลุ่มเริ่มต้นด้วยสมการ (2.11) ถึง (2.13) ร่วมกับการควบคุมการย้ายบัสทีละบัส โดยการไม่ย้ายบัสออกจากกลุ่มที่มีขนาดเล็กเกินกว่าที่กำหนด และไม่ย้ายบัสเข้ากลุ่มที่มีขนาดใหญ่เกินกว่าที่กำหนด นอกจากนั้นถ้าต้องการควบคุมขนาดของกลุ่มเริ่มต้นด้วยก็อาจใช้สมการ (2.11) และ (2.16) ในการหากลุ่มเริ่มต้นแทนการใช้สมการ (2.11) ถึง (2.13) วิธีการจัดกลุ่มแบบนี้สรุปได้ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ขั้นตอนการจัดกลุ่มที่มีการควบคุมขนาดของกลุ่ม

2.3 การปรับปรุง

เนื่องจากผลการจัดกลุ่มที่ได้จากขั้นตอนการจัดกลุ่ม อาจมีความผิดพลาดเนื่องจากไม่ใช่ผลการจัดกลุ่มที่ดีที่สุด หรืออาจไม่เหมาะสมในการนำไปใช้เป็นผลการแบ่งแยกสำหรับวิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลัง ดังนั้นขั้นตอนนี้จะทำการปรับปรุงผลการจัดกลุ่มที่ได้ให้เหมาะสมยิ่งขึ้น เพื่อป้องกันปัญหาต่อไปนี้

1) ขั้วบัสทั้งสองของหม้อแปลงใด ๆ อยู่ในกลุ่มที่ต่างกัน

การควบคุมพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับหม้อแปลงมักส่งผลกระทบต่อขั้วบัสทั้งสองของหม้อแปลงตัวนั้น ดังนั้นขั้วบัสทั้งสองของหม้อแปลงใด ๆ จึงควรอยู่ในกลุ่มเดียวกัน

ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยการพิจารณาจำนวนการเชื่อมโยงของแต่ละขั้วบัสของหม้อแปลงที่เป็นปัญหา แล้วย้ายขั้วบัสที่มีจำนวนการเชื่อมโยงกับกลุ่มของตัวเองน้อยกว่าไปยังกลุ่มของอีกขั้วบัสหนึ่ง เช่น ถ้าหม้อแปลงที่มีขั้วบัสเป็นบัส a และบัส b อยู่ในกลุ่มที่แตกต่างกัน คือ C_a และ C_b ตามลำดับ โดยบัส a มีจำนวนกิ่งที่เชื่อมต่อกับกลุ่ม C_a เป็น b_a ส่วนบัส b มีจำนวนกิ่งที่เชื่อมต่อกับกลุ่ม C_b เป็น b_b ตามลำดับ ถ้า b_a มากกว่า b_b ก็จะทำการย้ายบัส b ไปยังกลุ่ม C_a เป็นต้น นอกจากวิธีข้างต้นแล้ว ยังมีอีกวิธีหนึ่งที่สามารถใช้ในการแก้ไขปัญหานี้ได้ โดยหลังจากวางตำแหน่งบัสด้วยจุดแล้ว จะถือว่าขั้วบัสทั้งสองของหม้อแปลงใด ๆ เป็นจุดเดียวกัน โดยใช้จุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่างจุดทั้งสองซึ่งแทนขั้วบัสของหม้อแปลงแต่ละตัวมาใช้เป็นจุดตัวแทนหม้อแปลงนั้น จากนั้นจะทำขั้นตอนการจัดกลุ่มต่อไปซึ่งจะทำให้ขั้วบัสทั้งสองของหม้อแปลงใด ๆ อยู่ในกลุ่มเดียวกันเสมอ สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้วิธีแรกในการแก้ปัญหานี้

2) มีกลุ่มที่มีโครงข่ายย่อยแยกโดดบรรจุอยู่

การเลือกใช้จำนวนโคออร์ดิเนตที่ไม่เหมาะสม อาจทำให้บัสที่ไม่ได้เชื่อมโยงกันถูกแทนด้วยจุดที่ใกล้กันในขั้นตอนการวางตำแหน่งได้ ทำให้มีโอกาสที่จะได้ผลการจัดกลุ่มที่มีโครงข่ายย่อยแยกโดดสองโครงข่ายหรือมากกว่าซึ่งไม่เชื่อมต่อกันโดยตรง (เชื่อมต่อกันผ่านบัสในกลุ่มอื่น) อยู่ในกลุ่มเดียว

ปัญหานี้แก้ไขได้โดยหาโครงข่ายย่อยแยกโดดทั้งหมดในกลุ่มนั้น แล้วย้ายโครงข่ายย่อยแยกโดดยกเว้นโครงข่ายย่อยแยกโดดที่ใหญ่ที่สุดไปสู่กลุ่มที่มีจำนวนการเชื่อมโยงกับมันมากที่สุด

3) มีกลุ่มที่มีขนาดเล็กเกินไป

กลุ่มที่เหมาะสมในการนำไปใช้ในเป็นระบบสมมูลไม่ควรมีขนาดเล็กเกินไป เพราะถ้ากลุ่มที่มีขนาดเล็กเกินไปถูกนำไปใช้เป็นระบบสมมูล อาจทำให้ระบบสมมูลนั้นเล็กเกินไปในการวิเคราะห์และแก้ไขเหตุขัดข้องที่เกิดขึ้นในระบบได้ เนื่องจากพารามิเตอร์ที่สามารถใช้ได้ในการแก้ไขปัญหาจะน้อยลงตามขนาดของระบบสมมูล ผลการจัดกลุ่มที่ได้จากขั้นตอนการจัดกลุ่มในรูปที่ 2.6 ไม่ได้คำนึงถึงขนาดของกลุ่มว่าเล็กเกินไปหรือไม่ แต่จะจัดกลุ่มเพื่อให้ค่าคลาดเคลื่อนในการจัดกลุ่มมีค่าน้อยที่สุดเท่านั้น ดังนั้นปัญหาในกรณีนี้จึงอาจเกิด

ขึ้นได้ นอกจากนั้นแม้ว่าจะใช้สมการ (2.11) และ (2.16) ในการหากลุ่มเริ่มต้นร่วมกับการจัดกลุ่มตามขั้นตอนในรูปที่ 2.7 เพื่อควบคุมขนาดของกลุ่มแล้วก็ตาม แต่ปัญหาก็อาจเกิดขึ้นได้เช่นกัน เพราะภายหลังการแก้ไขปัญหาขั้วบัสของหม้อแปลงและปัญหาโครงข่ายย่อยแยกโดดข้างต้น ก็เป็นไปได้ที่จะมีกลุ่มที่มีขนาดเล็กเกินไปเกิดขึ้น

การแก้ไขปัญหาดังกล่าวสามารถทำได้โดยย้ายกลุ่มที่เป็นปัญหาทั้งกลุ่ม ไปสู่กลุ่มอื่นที่มีจำนวนการเชื่อมโยงกับกลุ่มนั้นมากที่สุด โดยคิดว่าบัสทุกบัสในกลุ่มที่เป็นปัญหานั้นเป็นบัสใหญ่เพียงบัสเดียว แล้วพิจารณาจำนวนการเชื่อมโยงของบัสใหญ่นั้นกับกลุ่มอื่น ๆ ถ้าบัสใหญ่นั้นมีจำนวนการเชื่อมโยงกับกลุ่มใดมากที่สุด ก็จะย้ายทุกบัสในกลุ่มที่เป็นปัญหาไปยังกลุ่มนั้น