การทำนายพฤติกรรมด้วยแบบจำลองของดินเหนียวภายใต้การกระทำของแรงแบบวัฏจักร

นายอภิชาติ อัศวเสนา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-03-1092-3

MODEL PREDICTION OF CYCLIC RESPONSE OF NORMALLY CONSOLIDATED CLAY

Mr.APICHAT AUSAVASENA

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2001

ISBN 974-03-1092-3

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การทำนายพฤติกรรมด้วยแบบจำลองของดินเหนียวภายใต้การกระทำของแรงแบบวัฏจักร
โดย	นายอภิชาติ อัศวเสนา
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

……………………………………….. คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

………………………………………… ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรฉัตร สัมพันธารักษ์)

……………………………………….. อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล)

………………………………………… กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย อุกฤษฎชน)

อภิชาติ อัศวเสนา : การทำนายพฤติกรรมด้วยแบบจำลองของดินเหนียวภายใต้การกระทำของแรงแบบวัฏจักร. (MODEL PREDICTION OF CYCLIC RESPONSE OF NORMALLY CONSOLIDATED CLAY) อ. ที่ปรึกษา: ผศ.ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล, 131 หน้า. ISBN 974-03-1092-3.

การศึกษาวิจัยในวิทยานิพนธ์เรื่องนี้ได้ทำการศึกษาและพัฒนาแบบจำลองแบบอีลาสโตพลาสติค เพื่อนำมาใช้คาดคะเนผลการทดสอบที่ทำการทดสอบกับตัวอย่างดินเหนียว โดยการให้แรงแบบวัฏจักรและแบบโมโนโทนิคใช้วิธีการทดสอบเป็นแบบไม่ระบายน้ำโดยใช้โมดิฟาย์แคมเคย์มาเป็นต้นแบบในการพัฒนาซึ่งใช้จำลองพฤติกรรมของดินเหนียวกรุงเทพฯในสภาพเปียกได้ดี ในการพัฒนาได้นำคิเนมาติคฮาร์ดเดนนิ่งฟังค์ชั่นและอนุญาติให้มีการเกิดความเครียดที่ย้อนกลับไม่ได้หรือความเครียดที่เกิดจากพลาสติคภายในพื้นผิวคลาก แสดงให้เห็นว่าความเครียดที่ย้อนกลับไม่ได้ที่เกิดภายในพื้นผิวคลากมีการเกิดขึ้นเป็นสัดส่วนกับขนาดของความเค้นที่วัดจากขอบนอกสุดของพื้นผิวคลากกับความเค้นที่เกิดขึ้นภายในพื้นผิวคลาก

จากผลการคำนวณพบว่าการใช้แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมาเปรียบเทียบกับผลการทดสอบดินจากเครื่องทดสอบแรงอัดสามแกนซึ่งให้แรงแบบโมโนโทนิคสามารถคำนวณได้ดีเมื่อนำมาใช้กับดินเหนียวกรุงเทพฯ โดยตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณได้แสดงอยู่ในบทที่ 5 ของวิทยานิพนธ์เล่มนี้ซึ่งตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณสำหรับดินเหนียวกรุงเทพฯ ในการวิจัยครั้งนี้มีค่า ϕ ประมาณ 10^0- 31^0 มีค่า CR (คอมเพรสชั่นเรโช) ประมาณ 0.1088 มีค่า RR (รีคอมเพรสชั่นเรโช) ประมาณ 0.0247 และมีค่า G ประมาณ 5000 กิโลปาลคาลและตัวแปรที่ทำการเพิ่มเข้าไปช่วยในการคำนวณการเคลื่อนตัวที่เกิดจากพลาสติค ซึ่งใช้ค่า A_c ประมาณ 0.60-0.75 ใช้ค่า B_c ประมาณ 0.92-4.9 ใช้ค่า m ประมาณ 4.10-6.10 และใช้ค่า h ประมาณ 0.00000001

ภาควิชา วิศวกรรมโยธา ลายมือชื่อนิสิต

สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา

ปีการศึกษา 2544

4270644021 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD: SOIL MODEL / MODIFIED CAM-CLAY / CYCLIC LOADING / BANGKOK CLAY

APICHAT AUSAVASENA: THESIS TITLE. MODEL PREDICTION OF CYCLIC RESPONSE OF NORMALLY CONSOLIDATED CLAY THESIS ADVISOR: ASST.PROF.DR.SUPOT TEACHAVORASINSKUN, 131 pp. ISBN 974-03-1092-3.

The objective of this research is to study and develop an elasto-plastic model to predicting behavior of soil samples in cyclic and monotonic loading. The modified cam-clay model is adopted as the main platform. It has been modified to properly simulate the behavior of Bangkok wet clay. A kinematic hardening function allowing the plastic strain development inside the main yield surface was developed. It expressed the the plastic strain (inside the yield surface) by proportionality the distance of the current stress condition to the bounding surface.

It was found that the developed model compared with experiment for monotonic loading. The results were good prediction with application to Bangkok wet clay. In summary the parameters used for Bangkok clay are $\phi \approx 10^0$-31^0 , CR $\approx$ 0.1088 , RR $\approx$ 0.0247 , G = 5000 kPa , A_c = 0.60-0.75 , B_c = 0.92-4.90 , m = 4.10-6.10 , and h = 0.00000001

Department Civil Engineering Student's signature

Field of study Civil Engineering Advisor's signature

Academic year 2001

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิทยานิพนธ์เรื่องนี้ ผู้เขียนกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ เตชวรสินสกุล อาจารย์ที่ปรึกษา ที่ได้ช่วยให้คำปรึกษาและแนะนำต่างๆและวิธีแก้ปัญหาต่างๆ ในการทำวิจัยมาด้วยดีตลอด และขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรฉัตร สัมพันธารักษ์ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย อุกฤษฎชน ที่ได้ร่วมเป็นคณะกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณ Geo-6 ที่ทำให้งานวิจัยครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

อภิชาติ อัศวเสนา

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง **หน้า**

สารบัญรูป

รูป **หน้า**

สารบัญรูป(ต่อ)

รูป **หน้า**

สารบัญรูป(ต่อ)

รูป **หน้า**

สารบัญรูป(ต่อ)

รูป หน้า

สารบัญรูป(ต่อ)

รูป **หน้า**

สารบัญรูป(ต่อ)

รูป **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

หลายปีมาแล้ว ที่มีการเริ่มศึกษา Soil Mechanics สมัยใหม่ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1920 เมื่อวิศวกรเพบปัญหาในเรื่องของความถูกต้องของการคำนวณหาพฤติกรรมของดินทั้ง การเคลื่อนตัวของดินและหน่วยแรงที่ถูกต้องเพราะคุณสมบัติของดินเป็น Anisotropic เนื่องจากการเกิดของดินตามธรรมชาติที่เกิดจากการตกตะกอนในแนวดิ่งทำให้คุณสมบัติในการรับกำลังไม่เป็น Isotropic ขึ้นอยู่กับลักษณะการเกิดนี้เอง ซึ่งทำให้การที่จะทำการคำนวณหาพฤติกรรมของดินมีความซับซ้อนมากขึ้นโดยเฉพาะพฤติกรรมในช่วงของ Plastic ของดินจึงได้มีการคิดทฤษฎีเพื่อที่จะอธิบายเกี่ยวกับพฤติกรรมในช่วงของการเกิดพลาสติกขึ้น (Theory of Plasticity) เพื่อมาทำให้การคำนวณถูกต้องแม่นยำมากยิ่งขึ้นโดยได้มีการพัฒนาโดยการใช้สมมุติฐาน Non-Linear Elastic , Elastic-Perfectly Plastic และ Elasto-Plastic ตามลำดับ

ในทฤษฎี Plasticity แบบดั้งเดิมมักสมมุติให้พฤติกรรมของดินภายใต้การลดแรง (Unloading) เป็นพฤติกรรมที่เป็นไปตามทฤษฎีของ Elasticity อย่างไรก็ตามการศึกษาวิจัยในห้องปฏิบัติการ เช่น การทดสอบ Liquedfaction ของดินทราย และการทดสอบพฤติกรรมของดินเหนียวภายใต้การกระทำของแรงซ้ำซาก ทำให้ทราบว่าภายใต้การลดแรง (Unloading) นั้น ดินก็มีพฤติกรรมเป็น Plastic เช่นกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ ขนาดของแรง จำนวนรอบ ความเร็วของการให้และลดแรงและชนิดของคลื่น ทำให้ต้องมีการปรับปรุงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาเพื่อให้สามารถคาดเดาพฤติกรรมของดินภายใต้การกระทำของแรงซ้ำซากเหล่านี้ได้อย่างเหมาะสม

จากที่ได้กล่าวมาแล้วเนื่องจากการเกิด Plastic ของดินมีความซับซ้อนมากในการคำนวณ ทฤษฎีที่สามารถเอื้อมเข้าไปถึงทำให้เกิดแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมา อย่างเช่น Elasto – Plastic อธิบายถึงพฤติกรรมในการเคลื่อนตัวมีการรวมกันทั้ง Elastic และ Plastic การใช้ Elasto-Plastic Model ในวิทยานิพนธ์เรื่องนี้จะได้ทำการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้สามารถคาดเดาพฤติกรรมของดินเหนียว ภายใต้การกระทำของแรงซ้ำซาก โดยจะได้ผนวกเอาทฤษฎีของ Bounding Surface และ Isotropic – Strain Hardening โดยทำการพัฒนาขึ้นเพื่อการคำนวณหาพฤติกรรมของดินในเรื่อง Stress Path , Stress-Strain และกำลังรับ Shear Strength ของดิน รวมถึงพฤติกรรมแบบ Cyclic Loading และ Consolidate Undrained (CU) ในเครื่องทดสอบ Triaxial โดยการคำนวณจะใช้ Yield Surface ทั้ง แบบ Isotropic-Strain Hardening และในช่วงการ Loading จะทำการคำนวณจาก Modified Cam - Clay แต่จะมีการเปลี่ยนตัวแปรบางตัวเพื่อให้เหมาะกับดินเหนียวกรุงเทพในช่วงของการเกิด Softening ซึ่งเป็นปัญหาที่มีในแบบจำลองก่อนหน้านี้ตัวแปรสามารถหาได้จากข้อมูลที่มีอยู่ซึ่งหาได้จากผลทดสอบ Gerneral Properties

วิธีการในการคำนวณใช้วิธี Strian Control โดยจะคิดเมื่อมีการเคลื่อนที่ของ Deformation ซึ่งจะเกิดการเปลี่ยนแปลงของ Yield Surface ทันทีเนื่องจากสมมุติฐานเป็น Associate Flow ในกรณีของ Normally Consolidated Clay และคล้าย Non - Associate Flow สำหรับ Over Consolidated Clay นี้เป็น Function ของปริมาณการเกิดในแบบ Normally Consolidated Clay และมีวิธีคำนวณ โดยสมมุติให้เกิด Total Deformation เกิดขึ้นจึงทำการคำนวณหาค่า Plastic Deformation แล้วจึงนำไปหักออกจาก Total Deformation จะได้ Elastic Deformation ซึ่ง Elastic Deformation นี้เองที่ทำให้เกิด Stress โดยจะทำการหา

Plastic Deformation จาก Flow Rule ใช้การคำนวณหา Hardening Modolus โดยใช้ Hardening Rule และการคำนวณจะใช้ Failure Criteria ของ Drucker-Prager (1956)

1.1 วัตถุประสงค์

เพื่อใช้ในการคำนวณหาพฤติกรรมที่สัมพันธ์กันระหว่างการเคลื่อนตัวและหน่วยแรง ของดินเหนียวในการทดสอบ Cyclic Loading โดยการใช้แบบจำลองทำการคำนวณหาแล้วนำมาเปรียบเทียบเพื่อให้สอดคล้องกับการทดสอบจริงในเครื่องทดสอบ Triaxial และทำการหาตัวแปรต่างๆ ที่เหมาะสมกับ ชนิดของดินที่ทำการทดสอบ โดยการคำนวณจะทำการเขียนโปรแกรมคำนวณเพื่อให้คิดได้ง่ายขึ้น

1.2 ขอบเขตของการวิจัย

ในการทำการวิจัยครั้งนี้ ใช้ Critical State Line ของ Drucker-Prager (1956) โดยจะแบ่งการวิจัยออกเป็นแต่ละส่วนได้ดังนี้

1.2.1 ในช่วงของ Loading ในช่วง Normally Consolidate Clay ใช้ Modified Cam-Clay Model โดยสมมุติว่าเป็น Associated flow Rule จะเกิด Plastic Deformation ขึ้นทันที เกิดการขยายของ Yield Surface , $f = I_1^{\,2} - I_1 I_1^{\,0} + \dfrac{9J_2}{M^2} = 0$ ในการคำนวณจะใช้ Isotropic – strain hardening คำนวณหาค่า Hardening Parameter

1.2.2 ในช่วงของ Loading ในช่วง Over Consolidate Clay ใช้ Modified Cam-Clay Model โดยใช้ Bounding Surface เข้ามาช่วยในการคำนวณ Plastic Deformation การขยายของ Yield Surface คิดตามวิธีของ Dafalias (1982) , ในการคำนวณจะยังใช้ Isotropic – strain hardening คำนวณหาค่า Hardening Parameter

1.2.3 ในการคำนวณการทดสอบแบบ Cyclic Loading ทำการ Unloading โดยให้เป็น Elastic และจะเกิด Plastic เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงทิศทางของ Principal Stress เนื่องมาจากวิธีของ Bounding Surface

1.2.4 ผลการคำนวณที่ได้ทำการแสดง Graph p-q , Graph stress-strain

1.2.5 ทำการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อช่วยให้ประสิทธิภาพในการคำนวณเร็วขึ้นซึ่งมีความจำเป็นมากของแต่ละ step ของการคำนวณมีความละเอียดมาก

1.2.6 ทำการเปรียบเทียบ stress และ strain ที่คำนวณออกมากับผลการทดสอบจากห้องทดลองซึ่งเมื่อเปรียบเทียบแล้วหาความสัมพันธ์ที่ใกล้เคียงที่สุด เพื่อหา parameter ต่างๆ เพื่อเอาตัวแปรนั้นมาใช้กับ Model เพื่อการนำไปใช้ประโยชน์ต่อไป

1.3 ประโยชน์ที่ได้รับจากการทำวิจัย

สามารถใช้แบบจำลองในการคาดคะเนผลการทดสอบ Cyclic จากเครื่องทดสอบ Triaxial ในการทดสอบดินเหนียวแบบ Consolidate Undrianed (CU) โดยจะได้ตัวแปรที่จะใช้ในการคำนวณของแบบจำลองซึ่งทำการปรับแก้ใหม่ให้เหมาะสมสำหรับดินเหนียวและจะได้ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนตัวและหน่วยแรง ซึ่ง

สามารถนำไปใช้ในโอกาสต่อไป เช่น การคำนวณใน Finite Element ซึ่งต้องการความถูกต้องของ การเคลื่อนตัวและหน่วยแรงเป็นอย่างมาก เพื่อแสดงพฤติกรรมของดินใน Element เล็กๆ เมื่ออยู่ภายใต้แรงกระทำในรูปแบบต่างๆ กัน

บทที่ 2
ทฤษฎีทั่วๆไปเกี่ยวกับ Model Prediction และผลงานในอดีต

จากพฤติกรรมของ Plastic Deformation ของดินมีความซับซ้อนมากจึงได้มีการใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับพฤติ-กรรมในช่วงของการเกิดพลาสติกขึ้น (Theory of Plasticity) ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทนำและมีการใช้หลายทฤษฎีนำมาสร้างแบบจำลองของแต่ละแบบโดยมีข้อดีและข้อเสียต่างกันไป ซึ่งในหัวข้อนี้จะอธิบายถึงแต่ละวิธีที่ใช้ในการคำนวณและตัวอย่างของแบบจำลองแต่ละแบบที่มีการสร้างขึ้น ซึ่งทฤษฎีเกี่ยวกับพฤติกรรมในช่วงของการเกิดพลาสติกขึ้น(Theory of Plasticity) โดย Elastic จาก Hook's Law ยังคงใช้ได้ในพฤติกรรมแบบ Elastic สามารถแบ่งออกได้ทั้งหมด 3 แบบ คือ Non-Linear Elastic , Elastic-Perfectly Plastic , Elasto-Plastic

2.1 Non - Linear Elastic

เนื่องจากพฤติกรรมของวัสดุไม่ได้เป็น Elastic เพียงอย่างเดียวตาม Hook's Law ด้วยเหตุผลนี้เองการใช้ Non– Linear Elastic จึงเป็นวิธีที่ดีวิธีหนึ่งในการคำนวณโดยวัสดุจะมีการยืดออกเมื่อมีแรงมากระทำแต่จะกลับไปที่จุดเดิมเมื่อมีการนำแรงออกจากวัสดุจากสมมุติฐานดังกล่าวซึ่งในความเป็นจริง วัสดุที่จะมีพฤติกรรมเป็น Non – Linear Elastic เป็นไปได้อยากมาก เพราะเวลาลดแรง (Unloading) ส่วนใหญ่แล้วจะไม่กลับมาที่จุดเริ่มต้น จะมี Plastic เกิดขึ้นอย่างถาวร แต่อย่างไรก็ดีเป็นแบบจำลองที่มีตัวแปรน้อย ทำความเข้าใจง่ายซึ่งแสดง Surface ของวัสดุประเภทนี้ได้ตามรูปที่ 2.1

2.1.1 Green Model

การใช้ Non - linear Elastic มาทำการสร้าง Model มีอย่างแพร่หลายในอดีตแต่มีการใช้สมมุติฐานการสร้างที่แตกต่างกัน ตัวอย่างเช่น Green Elastic Model มีสมมุติฐานมาจากพลังงานภายในของวัสดุที่สามารถสร้างเป็น สมการในรูปของ Third – Order Polynomial

$$W = c_0 + c_1 I_1 + c_2 I_1^2 + c_3 \bar{I}_2 + c_4 I_1^3 + c_5 I_1 \bar{I}_2 + c_6 \bar{I}_3$$

$$I_1 = \varepsilon_{ii}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}$$

$$\sigma_{ij} = (2c_2 I_1 + 3c_4 I_1^2 + c_5 \bar{I}_2)\delta_{ij} + (c_3 + c_5 I_1)\varepsilon_{ij} + c_6 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \quad \text{......... (2.1)}$$

ค่าคงที่ c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 หาได้จากทดสอบในห้องปฏิบัติการ

2.2 Elastic - Perfectly Plastic

ต่อมามีการพัฒนาจาก Non-Linear Elastic ขึ้นมาเป็น Elastic - Perfectly Plastic โดยเริ่มมีการนำมาประยุกต์กับ Failure Criteria นำมาใช้คำนวณหา Plastic Strain และการคำนวณเป็นระบบมากขึ้น ซึ่งนิยมมากมีหลายแบบจำลองที่ยังใช้มาจนถึงปัจจุบันอย่างเช่น Tresca Model , Von – Mises Model , Coulomb Model , Drucker – Prager Model ซึ่งในการคำนวณ Perfect Plasticity Model จะต้องมีการใช้ Deformation Theory และ Flow Theory เข้ามาด้วย

- Deformation Theory

ความสัมพันธ์ของ Strain สำหรับการเคลื่อนตัวของดินจะมีทั้ง Elastic และ Plastic โดยความเป็น Elastic มีค่าค่อนข้างน้อยสำหรับดินเหนียวที่เป็น Normally Consolidate Clay ซึ่งเราสามารถรวมเมื่อมีการเกิด Total Deformation ε_{ij} , เป็นผลมาจาก Elastic Deformation $\varepsilon_{ij}{}^{e}$, และ Plastic Deformation $\varepsilon_{ij}{}^{p}$ สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ตามสมการ (2.2)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}{}^{e} + \varepsilon_{ij}{}^{p} \qquad \text{...(2.2)}$$

สำหรับการนำไปใช้กับการคำนวณ ทั้งแบบ Loading – Unloading ของแต่ละแบบจำลองยังต้องการเงื่อนไขเพิ่มเติม ซึ่งขึ้นอยู่กับสมมุติฐานของแบบจำลองนั้นๆ

ตาราง 2.1 ข้อดี – ข้อเสียของการใช้ Deformation Theory

ข้อดี	ข้อเสีย
Deformation theory of plasticity	
- Simple formulation	- Continuity problem near or at neutral loading
- Allow hysteretic behavior	- With the exception of unloading , behavior is still path - independent
Variable moduli models	
- Simple	- Continuity problem near or at neutal loading
- Good fit of data	
- Allow hysteretic behavior	
- Easy to fit	
- Suitable for finite element implementation	

- Flow Theory

ในการคำนวณ Stress ซึ่งมาจากการเพิ่มขึ้นของ Strain สมมุติว่าการเพิ่มขึ้นของ Total Strain เป็นสามารถเขียนเป็นสมการ (2.2) และอยู่ในรูปของ Differential ในสมการ (2.3)

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}{}^{e} + d\varepsilon_{ij}{}^{p} \qquad \text{...(2.3)}$$

การเพิ่มของ Elastic Strian อธิบายได้โดยใช้ Hook 's Law โดยใช้ตัวแปร เช่น Bulk Modulus K , Shear Modulus G การที่จะหา Plastic Strain จะต้องมี

1. Yield Surface , f_c
2. วิธีที่จะคำนวณหา Plastic Strain ซึ่งมาจากสมการที่อยู่ในรูปของ Stress , $f(\sigma_{ij}) = f_c$

- Yield Criteria

จากการมองในรูป 3 มิติ สามารถสร้าง Yield Surface ได้ ซึ่งเรียกทางภาษาคณิตศาสตร์ว่า Yield Criterion และเป็นส่วนสำคัญในการที่จะหา Plastic Strain ที่เกิดขึ้นเนื่องมาจาก Stress เพิ่มสูงขึ้นจนสัมผัส Yield Surface เป็นพฤติกรรมแบบ Elastic – Plastic และเช่นเดียวกันเมื่อ Stress ยังอยู่ภายใน Yield Surface เป็นพฤติกรรมแบบ Elastic อย่างเดียวตามสมมุติฐานของ Elastic - Perfectly Plastic ซึ่งเราอาจเขียนรูปทั่วไปของสมการได้

$$f(\sigma_{ij}) = f_c$$

เมื่อ f_c คือ ค่าคงที่สำหรับ Perfectly Plastic Material

ทำการพิจารณา Perfectly Plastic Material ซึ่งมี Yield Surface ที่ไม่เคลื่อนที่ การที่จะเกิด Plastic Strain ได้ก็ต่อเมื่อ Stress Path เคลื่อนที่เข้ามาสัมผัส สำหรับ Loading Condition สามารถหา Plastic Flow ได้จาก Consistancy Condition แสดงอยู่ใน รูปที่ 2.2

$$f = f_c \qquad \text{และ} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$$

อย่างไรก็ดีจะเกิดพฤติกรรมแบบ Elastic เมื่อเกิดการลดลงของ Stress ทำให้อยู่ใน Domain

$$f < f_c$$

สามารถหาจุดเริ่มต้นของพฤติกรรมแบบ Elastic โดยเป็นจุดที่ Stress ยังอยู่บน Yield Surface

$$f = f_c \qquad \text{และ} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$$

- Flow Rule

Flow Rule เป็นการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างการเพิ่มขึ้นของ Plastic Strain ที่จะเกิดขึ้นเมื่อมีการกระทำอันเนื่องมาจาก Stress โดยความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนออกมาเป็นแนวคิดที่เรียกว่า Plastic Potential Function g , หาทิศทางของ Plastic Strain ได้จาก สมการ (2.4)

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{...(2.4)}$$

เมื่อ $d\lambda$ คือ Proprotionality Factor มีค่าเป็นบวกขึ้นอยู่กับ Stress และ History of Loading และถ้า Potential Surface มีค่าเท่ากับ Yield Surface ($f = g$) , เรียกว่า " Associate Flow Rule " ซึ่ง $d\varepsilon_{ij}{}^{p}$ จะตั้งฉากกับ Plastic Potential Surface เสมอแสดงอยู่ใน รูปที่ 2.3

- Basic Requirement

สมมุติฐานของ Associate Flow Rule เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับ Boundary Value Problem สำหรับ Perfectly Plastic และ วัสดุประเภท Work – Hardening

การที่ Plastic Deformation ไม่สามารถย้อนกลับนำมาสู่การคำนวณทางทฤษฎีและทำให้นำไปสู่ Irreversibility Condition ซึ่งอาจจะสามารถอธิบายได้ โดย งานที่เกิดขึ้นจาก แรง ทำให้เกิดการเปลี่ยนของทิศทางบวกของ Plastic Strain เราอาจพิจารณาจาก ปริมาตรต่อหน่วยของ Perfectly Plastic Material ของวัสดุที่เป็นเนื้อเดียวกันมี Yield Surface ใน รูปที่ 2.4 เริ่มแรกมีแรงกระทำทำให้เกิด Stress อยู่ที่ σ_{ij*} อยู่ภายใน Yield Surface เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำเกิดการเคลื่อนที่ของ Stress ไปในแนว ABC จนกระทั่งแตะ บริเวณผิวของ Yield Surface ซึ่งจะมีแต่ Elastic Stress เกิดขึ้นเท่านั้นในเส้นของ ABC และจะเกิด Plastic Flow เกิดขึ้นถ้าแตะ Yield Surface และระหว่างที่เกิด PLastic Flow จะเกิดการปล่อยพลังงานออกโดย จะกลับไปที่จุดเดิมอีกครั้งหนึ่งตามเส้น DE ในระหว่างที่เกิดการเคลื่อนที่ไปกลับของ Stress นั้น งานที่เกิดจาก Plastic Deformation ทั้งที่เกิดจากการให้แรง (Loading) และลดแรง (Unloading) สามารถแสดงอยู่ในเทอมของ $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij*})$ และ Plastic Strain Increment vector , $d\varepsilon_{ij}{}^{p}$ จะได้ทิศทางบวกของการเปลี่ยนของ Plastic Deformation เขียนเป็นสมการ (2.5)

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij*}) d\varepsilon_{ij}{}^{p} \geq 0 \qquad \text{...(2.5)}$$

- Generalized Stress – Strain Relations

การคำนวณ Stress ที่เพิ่มขึ้นทำได้โดยแทนค่า Hook 's Law และ Flow Rule ลงไปในสมการ (2.3) จะได้รูปของสมการใหม่เป็น

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}{}^{e} + d\varepsilon_{ij}{}^{p} = \frac{dI_1}{9K}\delta_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{..............(2.6)}$$

เมื่อ $d\lambda$ คือ Proprotionality Factor

$d\lambda = 0$ จะได้ $f < f_c$ หรือ $f = f_c$ แต่ $df < 0$

$d\lambda > 0$ จะได้ $f = f_c$ และ $df = 0$

ทำการหาค่า $d\lambda$ โดยการใช้ Consistancy Condition

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \qquad \text{...(2.7)}$$

จาก Yield Surface สามารถแสดงให้เห็นว่าการเพิ่มขึ้นของ Stress ยังสอดคล้องกับ Yield Criterion

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) + df = f(\sigma_{ij})$$

ทำการหา Stress โดยจัดรูปให้เป็นรูปของ Strain จะได้

$$d\sigma_{ij} = ds_{ij} + \frac{1}{3} dI_1 \delta_{ij} = 2G d\varepsilon_{ij} - 2G d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2G}{9K} \right) dI_1 \delta_{ij} \qquad \text{...(2.8)}$$

แทนลงใน Consistancy Condition สมการ (2.7) จะได้

$$2G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} - 2G d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2G}{9K} \right) dI_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} = 0$$

โดย First Invarant I_1 , หาได้จากการที่ $i = j$ จะได้

$$dI_1 = 3K \left(d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} \right) \qquad \text{..................................(2.9)}$$

ทำการแทน dI_1 ลงใน Consistancy Condition แล้วจัดรูปตัวแปรใหม่จะทำให้หา $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \dfrac{3K - 2G}{6G} d\varepsilon_{kk} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} + \dfrac{3K - 2G}{6G} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \delta_{mn} \right)^2} \qquad \text{..................(2.10)}$$

2.2.1 Tresca Model

ถ้า Hydrostatic Pressure มีค่าน้อยหรือไม่มีผลการทบต่อการเกิด Plastic Deformation และ Yield ของวัสดุสามารถแสดง Surface ได้ดังนี้

$$f(s_{ij}) = f_c$$

$$f(J_2, J_3) = f_c$$

สำหรับการใช้ Tresca Criterion (Maximum Shear Stress Criterion) เสนอว่าวัสดุจะเกิด yield เมื่อ Maximum Shear Stress มีค่าสูงขึ้นจนแตะจนถึงระดับที่วิกฤต สำหรับกรณี $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ Tresca Yield Condition สามารถเขียนออกเป็น สมการ (2.11)

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = k \qquad \text{.................................(2.11)}$$

เมื่อ σ_1, σ_3 คือ Maximum และ Minimum Principal Stresses และ

k คือ Stress ที่จุด Yield ของวัสดุสามารถหาได้จาก Pure Shear Test ซึ่งสามารถเขียนในรูปของ Principal Axis

$$\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2\right)\left((\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2\right)\left((\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2\right) = 0 \qquad \text{.........(2.12)}$$

หรืออาจเขียนได้ในรูปของ Stress invariants J_2 และ J_3

$$f - f_c = 4J_2^{\ 3} - 27J_3^{\ 2} - 36k^2 J_2^{\ 2} + 96k^4 J_2 - 64k^6 = 0 \qquad \text{.........(2.13)}$$

พิจารณาจุด Yield ใน การทดสอบ แทน $\sigma_1 = \sigma_y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ Tresca Criterion จะได้

$$\sigma_y = 2k$$

ทำการวาด Tresca Yield Criterion เป็นรูป 3 มิติ ในรูปที่ 2.5 (a) จะเห็นว่าจะได้รูป 6 เหลี่ยมขนาดกันแกนของ Hydrostatic Axis จะเห็นว่าในความเป็นจริงกำลังของดินน่าจะมีผลมาจาก Hydrostatic Pressure ด้วยจึงได้มีการปรับปรุงใหม่ซึ่งเรียกว่า“ Extended Tresca Criterion “ดังที่ได้แสดงอยู่ในรูปที่ 2.5 (b)

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{I_1 + c_1} = c_2$$

พิจารณาทำการคำนวณหา Stiffness Coefficients ของ Tresca Model ตามสมการ (2.14)

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = 0 \qquad \text{.................................(2.14.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = 12J_2{}^2 - 72k^2J_2 + 96k^4 \qquad \text{.................................(2.14.b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_3} = -54J_3 \qquad \text{.................................(2.14.c)}$$

2.2.2 Von Mises Model

ในการทำ Von Mises Yield Criterion (Maximum Shear Energy Criterion) คิดว่าจะมีการเกิดพฤติกรรมของ Plastic เริ่มเกิดเมื่อเกิดพลังงานสะสมจนถึงจุดวิกฤต , Distortional Energy (W_d) มีหน่วยเป็นพลังงานต่อปริมาตรของวัสดุเก็บสะสมอยู่ในวัสดุเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำและแนวความคิดนี้เองที่ W_d มีความเกี่ยวของโดยตรงกับ J_2 จึงได้มีการเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Octahedral Shear Stress Criterion ซึ่งสามารถแสดงรูปทั่วไปของสมการได้เป็น

$$f(s_{ij}) = f_c$$

$$f(J_2) = f_c$$

หรืออาจเขียนได้ในรูปของ Stress invariants

$$f - f_c = J_2 - k = 0 \qquad \text{.................................(2.15)}$$

สามารถเขียนในรูปของ Principal Axis

$$\frac{1}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}{}^2 + 6\sigma_{23}{}^2 + 6\sigma_{31}{}^2\right] - k^2 = 0$$

...(2.16)

พิจารณาจุด Yield ใน การทดสอบ แทน $\sigma_1 = \sigma_y , \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ Von Mises Criterion จะได้

$$\sigma_y = \sqrt{3}k$$

เมื่อเปรียบเทียบผลทดสอบจาก Simple Test จะเห็นว่า k ที่ได้จาก Von Mises Criterion มีค่าเท่ากับ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ของ k ที่ได้จาก Tresca Criterion โดยค่าสูงสุดที่คำนวณได้จาก Von Mises Criterion จะ

มากกว่าที่ได้จาก Tresca Criterion ไม่เกิน 15 % ถ้าใช้ผลทดสอบเดียวกัน ซึ่งสามารถ มองใน π - Plane จะเห็นว่า Tresca Criterion จะอยู่ภายใน Surface ของ Von Mises Criterion ดังรูปที่ 2.6

จะเห็นว่า Von Mises Criterion พิจารณาผลกระทบของ Intermediate Principal stress กับ Yield ด้วยขณะที่ Tresca Criterion ไม่ได้นำส่วนนี้มาคิดจะพิจารณาแต่ Maximum shear stress เท่านั้น อย่างไรก็ดีในการคำนวณโดยใช้ Numerical ต้องระวังในส่วนที่เป็นมุมที่ Yield Surface จะทำให้การคำนวณ Plastic Deformation ผิดพลาดได้

ตาราง 2.2 ข้อดี – ข้อเสียของ Tresca **และ** Von Mises Model

ข้อดี	ข้อเสีย
Tresca	
- Simple to use	- Only Total Stress
	- Corners
Von Mises	
- Simple to use	- Only Total Stress
- Yield Surface Smooth	

ทำการวาด Von Mises Yield Criterion เป็นรูป 3 มิติ ในรูปที่ 2.7 (a) จะเห็นว่ามีความคล้ายกับ Tresca Yield Criterion แต่จะเป็นทรงกระบอกขนาดกับแกนของ Hydrostatic Axis จึงได้มีการปรับปรุงใหม่ต่อมา ซึ่งเรียกว่า “ Extended Von Mises Criterion “ ทำให้ Yield Surface เปลี่ยนไปเป็น รูปที่ 2.7 (b)

$$\frac{\sqrt{J_2}}{I_1 + c_3} = c_4$$

พิจารณาทำการคำนวณหา Stiffness Coefficients ของ Von Mises Model ตามสมการ (2.17)

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = 0 \qquad \text{…………………………….(2.17.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \qquad \text{…………………………….(2.17.b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_3} = 0 \qquad \text{…………………………….(2.17.c)}$$

2.2.3 Coulomb Model

ในความเป็นจริงแล้วกำลังของดินขึ้นอยู่กับ Hydrostatic Pressure ด้วยเราสามารถใช้สมการของ Coulomb Criterion ซึ่งเสนอในปี 1773

$$f(I_1, J_2, J_3) = f_c$$

การใช้ Coulomb Criterion ดีกว่าทั้ง 2 Criterion ที่กล่าวมาแล้ว เพราะเป็นการเสนอขึ้นมาสำหรับ Geotechnical Materials และมีการนำเอา Hydrostatic Pressure มาพิจารณากับกำลังของเม็ดดิน (Granular Materials) โดยจะเกิดการวิบัติขึ้นเมื่อมี Shear Stress และ Normal Stress กระทำที่ Element มากกว่าค่าสูงสุดที่ Element จะรับได้ เขียนอยู่ในรูป สมการ (2.18)

$$|\tau| + \sigma \tan\phi - c = 0 \qquad \text{.................................(2.18)}$$

เมื่อ c, ϕ คือค่า Cohesion และ Angel Of Internal Friction ถ้า ϕ=0 สมการจะลดลงเหลือ τ=c กล้ายเป็น Tresca Criterion และ Pure shear c=k

กลับมาพิจารณา Coulomb Criterion โดยถ้าหาก $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ เป็น Principal stress และในเงื่อนไข $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = -\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi + c\cos\phi \qquad \text{...............(2.19)}$$

ทำการเปลี่ยนรูปสมการใหม่ในเทอมของ I_1, J_2, θ (Lode Angle)

$$\theta = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{\sqrt[3]{J_2{}^2}}\right]$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\theta + \frac{1}{3}I_1$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) + \frac{1}{3}I_1$$

$$\sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) + \frac{1}{3}I_1$$

ทำการแทนค่า $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ เพื่อเปลี่ยนสมการให้อยู่ในรูปของ I_1, J_2, θ

$$f - f_c = \frac{1}{3} I_1 \sin\phi + \sqrt{\frac{J_2}{3}} \left[(1 + \sin\phi)\cos\theta - (1 - \sin\phi)\cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \right] - c\cos\phi = 0$$

……(2.20)

หรือ

$$f - f_c = I_1 \sin\phi + \frac{1}{2}\left[3(1 - \sin\phi)\sin\theta - \sqrt{3}(1 + \sin\phi)\cos\theta \right]\sqrt{J_2} - 3c\cos\phi = 0$$

……(2.21)

เมื่อทำการวาด Yield Surface บน Principle Axis $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ จะได้รูป 6 เหลี่ยมที่ไม่สมมาตร ในรูปที่ 2.8 อย่างไรก็ดีจากการทดสอบในห้องปฏิบัติการปรากฏว่า จากการใช้ c, ϕ ใช้ไม่ได้ดีในการทดสอบหาแรงดึงจึงได้มีการปรับแก้ในการทดสอบแรงดึงให้มีค่าต่ำลง โดย Chen 1982

ตาราง 2.3 ข้อดี – ข้อเสียของ Coulomb Model

ข้อดี	ข้อเสีย
- Simple to use	- Corners
- Its validity is well establish for many soils	- Neglects the effects of intermediate principal stress

พิจารณาทำการคำนวณหา Stiffness Coefficients ของ Coulomb Model ตามสมการ (2.22)

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \sin\phi$$

……………………………(2.22.a)

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{4}\left[3(1 - \sin\phi)\sin\theta + \sqrt{3}(3 + \sin\phi)\cos\theta \right]\frac{1}{\sqrt{J_2}} + \frac{3\sqrt{3}J_3}{8J_2^{\,2}\sin 3\theta}\left[3(1 - \sin\phi)\cos\theta - \sqrt{3}(3 + \sin\phi)\sin\theta \right]$$

…(2.22.b)

$$\frac{\partial f}{\partial J_3} = \frac{-\sqrt{3}}{4J_2\sin 3\theta}\left[3(1 - \sin\phi)\cos\theta - \sqrt{3}(3 + \sin\phi)\sin\theta \right]$$

……(2.22.c)

2.2.4 Drucker – Prager Model

การใช้ Coumlomb Criterion จะต้องใช้ I_1, J_2 และ J_3 (หรือ θ) ซึ่งค่อนข้างที่จะยุ่งยากและมีปัญหาในการคำนวณ Plastic Deformation ที่มุมของ Yield Surface สำหรับการใช้งานโดยทั่วไปนิยม Surface ที่เรียบเพื่อนำไปใช้ใน Finite – Element ภายใต้การวิเคราะห์ของแรงที่มากาะทำ อย่างไรก็ดี Drucker – Prager Perfectly Plastic Model (Drucker and Prager , 1952) ทำการประมาณได้ทำการตัด J_3 ของ Coumlomb Criterion ออกไปทำให้รูปแบบของสมการง่ายขึ้นและทำให้ Yield Surface เมื่อมองใน π - Plane เป็นวงกลมเพราะตัดอิทธิพลของ J_3 ออกไป

$$f(I_1, J_2) = f_c$$

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k \qquad \text{.................................(2.23)}$$

โดย α, k ยังมีความสัมพันธ์กับ Coumlomb 's Material Constant (c, ϕ) ทำการวาด Yield Surface บน Principle Axis $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ จะได้รูปกรวยที่ขยายตาม Hydrostatc Axis ดูคล้ายกับ " Extended Von Mises Criterion " แสดงอยู่ใน รูปที่ 2.9

ถ้าทำการเปรียบเทียบระหว่าง Coumlomb Criterion กับ Drucker – Prager Criterion ที่จุดเดียวกันที่ด้าน Compression แทน $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ ใน Coumlomb Criterion เพื่อหาค่า α, k ตามลำดับ

$$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)} I_1 + \sqrt{J_2} = \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)} \qquad \text{.........................(2.24)}$$

ทำการเทียบสัมประสิทธ์ จะได้

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$$

$$k = \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$$

เช่นเดียวกันสำหรับด้าน Tension แทน $\theta = 0$

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$$

$$k = \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}$$

ตาราง 2.4 ข้อดี – ข้อเสียของ Drucker – Prager Model

ข้อดี	ข้อเสีย
- Simple to use	- Excessive plastic dilatancy at yielding
- Can be matched with the Coulomb Model by a proper selection of constants	- Can not reproduce the hysteretic behavior within the failure surface
- Computer codes available	- Can not predict the pore pressure build – up during an undrianed sub- failure cyclic shear loading
- Limit analysis techniques can be used	
- Satisfy the uniqueness requirement (Associated flow rule)	

พิจารณาทำการคำนวณหา Stiffness Coefficients ของ Drucker–Prager Model ตามสมการ (2.25)

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \alpha \qquad \text{..................................(2.25.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \qquad \text{..................................(2.25.b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_3} = 0 \qquad \text{..................................(2.25.c)}$$

2.3 Elasto – Plastic

จากการคำนวณของวิธี Perfectly Plasticity Model เห็นได้ว่า ถึงแม้จะมีการคำนึงถึงทั้ง Elastic และ Plastic แต่เมื่อนำไปประยุกต์ใช้กับดินที่อาจมี Plastic Strain เกิดขึ้นทันทีแม้ในกรณีของการอยู่ภายใน Yield Surface หรือ ขณะสัมผัสก็ดี ทำให้แบบจำลองแบบนี้ ทำให้เกิดความผิดพลาดขึ้นด้วยตัวทฤษฎีเอง การพัฒนาในลำดับต่อมาใน Elasto – Plastic ได้พยายามแก้ปัญหาเหล่านี้ให้หมดไป

โดยทฤษฎีพื้นฐานของ Plasticity สำหรับ Hardening Material มีความซับซ้อนกว่า Elastic Perfactly Plastic เนื่องจากการรวมกันของ Kinematic Hardening และ Isotropic Hardening เพื่อที่จะอธิบายดินที่อยู่ภายใต้การกระทำของแรงแบบ Monotonic และ Cyclic Loading ในการใช้ Elasto - Plastic มีพื้นฐานเหมือนกับ Perfect Plasticity Model แต่ต่างกันที่มี Hardening Rule เพิ่มเข้ามาซึ่งสามารถอธิบายได้ตามลำดับดังนี้

- Flow Theory

สำหรับวัสดุประเภท Work – Hardening มีสมมุตฐานที่เกี่ยวข้อง เช่น Loading Function , Hardening Rule , Flow Rule , Drucker ' s Postulate

- Loading Function

Loading Function ก็คือ Yield Function ของการเปลี่ยนรูปร่างของวัสดุ อันเนื่องมาจาก Plastic Deformation มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อเกิด Plastic Flow โดยทั่วๆไป จะเขียนในเทอมของ Stress State σ_{ij} , Plastic Strain $\varepsilon_{ij}{}^{p}$, Hardening Modulus k

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}{}^{p}, k)$$

การที่จะเกิด Elastic – Plastic ได้ก็ต่อเมื่อ Stress มีค่าสูงขึ้นจนถึงระดับที่สัมผัส Yield Surface แล้วทำให้เกิดการเคลื่อนตัวของ Boundary ตาม รูปที่ 2.10 สำหรับ Plastic Deformation ซึ่งกำหนดได้

$$f = 0 \qquad \text{และ} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$$

คล้ายกับ Perfectly Plastic Material จะเกิดพฤติกรรมแบบ Elastic ภายใต้

$$f < 0 \qquad \text{หรือ} \qquad f = 0 \qquad \text{และ} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$$

- Hardening Rule

Perfectly Plastic Material ได้ทำการประมาณพฤติกรรมของการเกิด Plastic Strain ไม่ค่อยละเอียดเท่าที่ควร จากผลการทดลองปรากฏว่า ในความเป็นจริงแล้วกระบวนการเพิ่มขึ้นของ Plastic Strain ทำให้ Yield Suface เปลี่ยนทั้งขนาด รูปร่าง และตำแหน่ง Hardening Rule จะบอกถึงรูปแบบการเปลี่ยนดังกล่าว

จากที่ผ่านมามีการเสนอหลายวิธีที่พยายามการเพิ่มขึ้นของ Yield Surface ซึ่งมีทั้งหมด 3 วิธี

1 . Isotropic Hardening
2. Kinematic Hardening
3. Mixed Hardening

จะเห็นว่าเมื่อเกิด Plastic Flow สำหรับ Isotropic Hardening จะเกิดการขยายของ Yield Surface แต่จุดศูนย์กลางจะไม่เปลี่ยนแปลง แต่สำหรับ Kinematic Hardening จะเห็นว่า Yield Surface ไม่เกิดการขยายตัวแต่จะเกิดการเคลื่อนตัวโดยหมุนรอบแกน Hydrostatic และจะเคลื่อนอยู่ใน Stress Space ส่วน Mixed Hardening จะรวมทั้ง 2 แบบแรกเข้าด้วยกัน

ที่ผ่านมาหลายๆ Model ที่เสนอออกมาซับซ้อนมาก ในการใช้ขึ้นอยู่กับสมมุติฐานของผู้สร้าง ในการใช้งาน Hardening จะมีแนวโน้มเป็น Mixed Hardening มากที่สุดเนื่องจากโดยสอดคล้องกับ Differential

ของ Yield Surface และต่อมามีการพัฒนาไปสู่พฤติกรรมของดินภายใต้สภาวะของแรงแบบ Cyclic Loading และ Dynamic Loading ซึ่งจะอธิบายต่อไป

- Flow Rule

การเพิ่มขึ้นของ Plastic Strain เป็นสัดส่วนของ Stress ใน Perfectly Plastic Material จะได้

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

เมื่อ $d\lambda$ คือ ขนาดของ Plastic Deformation

$\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ คือ ทิศทางของ Plastic Deformation

จาก $d\varepsilon_{ij}{}^{p}$ สามารถเขียน $d\lambda$ ได้เป็น

$$d\lambda = \frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} \qquad \text{.................................(2.26)}$$

เมื่อ H คือ Hadening Modulus ขึ้นอยู่กับ Stress , Strain และ History of Loading

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn}\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{.................................(2.27)}$$

เทอมข้างบน เป็น “ Associated Flow Rule “ ซึ่งเป็นแบบปกติที่ใช้กันทั่วไปแต่เนื่องจากพฤติกรรมของวัสดุทางวิศวกรรมส่วนมากไม่เป็นตามนั้นจึงได้มีการใช้สมมุติฐานเพิ่มขึ้น “ Non - Associated Flow Rule “ เข้ามาใช้ , Plastic Potential Function (g) สามารถเขียนสมการทั่วไปได้

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn}\right)\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{.................................(2.28)}$$

ซึ่งทิศทางของ Plastic Strain แสดงอยู่ใน รูป Unit Vector ใน รูปที่ 2.12 และ รูปที่ 2.13

- Drucker ‘ s Postulate

สำหรับวัสดุประเภท work – Hardening สามารถนิยามได้ว่า Drucker ‘ s Postulate สำหรับวัสดุที่มีเสถียรภาพจากผลงานการเสนอของ Drucker (1951) โดยการเพิ่มเติมจาก Basic Requirement ที่มาจากวัสดุประเภท Perfectly Plastic สามารถอธิบายโดยละเอียดได้

จาก Stress – Strain ในรูป 2.14 (a) การเพิ่มของ Stress , $d\sigma_{ij}$ ทำให้เกิดการเพิ่มขึ้นของ Strain , $d\varepsilon_{ij}$ ทำให้เกิด Scalar Product , $d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} > 0$ ส่วนที่แรเงาเป็นงานทิศทางบวกที่เกิดจากการกระทำของแรงภายนอก และทำให้วัสดุนั้นๆ อยู่ในสถานะที่มีเสถียรภาพ หรือเรียกว่า work – Hardening

และเช่นเดียวกันในกรณีของรูป 2.14 (b) จะเห็นว่าแรงภายนอกที่มากระทำ ทำให้เกิดงานที่เป็นลบขึ้น จากการลดลงของ Stress , $d\sigma_{ij}$ ทำให้ Scalar Product , $d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} < 0$ ทำให้วัสดุเกิดการ ไม่มีเสถียรภาพเกิดขึ้น หรือเรียกว่า วัสดุประเภท work – Softening

ทำการพิจารณาวัสดุประเภท work – Hardening เมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลย์เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำจากการศึกษาของ Drucker (1951) มีข้อเสนอแนะคือ

1. ระหว่างที่ทำการให้แรงกระทำจะได้งานที่มีทิศทางเป็นบวกเกิดขึ้น
2. สำหรับในการให้แรงกระทำแบบ Cyclic แบบเต็มรอบ จะได้งานที่มีทิศทางเป็นบวกเมื่อให้แรงและเมื่อทำการลดแรง ถ้าวัสดุมีความเป็น Elastic ทั้งหมดจะได้งานเท่ากับศูนย์

งานที่ได้เป็นงานที่เกิดจากการเคลื่อนตัวของดินไม่ใช่เกิดจากการกระทำของแรงภายนอกสำหรับรูปแบบของการนำไปใช้ในการคำนวณสามารถแสดงได้ ในเทอมของ

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} > 0$$

หรือถ้าเป็นการผสมกันจะได้

$$d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij}{}^{e} + d\varepsilon_{ij}{}^{p}) > 0$$

สำหรับในกรณีมีการลดแรงเข้ามาเกี่ยวด้วย

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}{}^{p} > 0$$

งานที่เกิดจาก Elastic เป็นศูนย์

ทำการพิจารณาจากวัสดุปรเภท Perfectly Plastic โดยใช้ รูปที่ 2.4 วัสดุที่เป็นเนื้อเดียวกัน เริ่มแรกมีแรงกระทำทำให้เกิด Stress , $d\sigma_{ij}$ อยู่ภายใน Yield Surface เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำเกิดการเคลื่อนที่ของ Stress ไปในแนว ABC จนกระทั่งแตะ บริเวณผิวของ Yield Surface ซึ่งจะมีแต่ Elastic Stress เกิดขึ้นเท่านั้นในเส้นของ ABC และจะเกิด Plastic Flow เกิดขึ้นถ้าแตะ Yield Surface และระหว่างที่เกิด PLastic Flow จะเกิดการปล่อยพลังงานออกโดย จะกลับไปที่จุดเดิมอีกครั้งหนึ่งตามเส้น DE ซึ่งจะไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทางเดินในตอนทำการให้แรง จะเห็นว่า Scalar Product ของ Stress Vector , $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}*)$ และงานที่เป็นที่เกิดจาก Plastic Strain สามารถเขียนเป็นสมการ

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}*)d\varepsilon_{ij}{}^{p} + d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}{}^{p} \geq 0$$

เมื่อ $\sigma_{ij}*$ เป็นจุดที่ทำการเลือกมาอ้างอิงสำหรับ Stress สำหรับวัสดุประเภท Perfectly Plastic ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}*)d\varepsilon_{ij}{}^{p} \geq 0$$

- **Hardening Plasticity Models**

ในรูปทั่วๆไปของ Hardening Plasticity Models เราอาจเขียนได้เป็น

$$f = (\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}{}^{p}, k) = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}{}^{p}) - k^2(\varepsilon_p) = 0$$

เมื่อ ε_p คือ Effective Plastic Strain ขึ้นอยู่กับ History of Loading หรือ Effective Plastic Strain Path

- **Isotropic Hardening Model**

Strain Hardening

Isotropic Strain – Hardening Models โดยทั่วๆไป จะรวมด้วย 2 อย่าง

1. Yield Surface ของการวิบัติของวัสดุแต่ละชนิด ที่เกิดจาก Shear Stress
2. Hardening Surface ซึ่งเกิดจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Plastic Volumetric ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดของ First Invariant I_1

ซึ่งรูปทั่วไปของสมการสามารถเขียนได้เป็น

$$f = f\left[\sigma_{ij}, x(\varepsilon_{ij}{}^{p}), \kappa(\varepsilon_p)\right]$$

เมื่อ σ_{ij} คือ Stress Tensor

$x(\varepsilon_{ij}{}^{p})$ คือ Hardening Parameter ซึ่งเป็น Function ของ $\varepsilon_{ij}{}^{p}$

$\kappa(\varepsilon_p)$ คือ Material Parameter κ ซึ่งเป็น Function ของ Effective Plastic Strain

$$\varepsilon_p = C\int \left(d\varepsilon_{ij}{}^{p} d\varepsilon_{ij}{}^{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

โดย C เป็นค่าคงที่ขึ้นอยู่กับ Yield Function เช่น

$$C = \sqrt{\frac{2}{3}}$$ สำหรับ Von Mises Yield Function

$$C = \frac{(\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}})}{(3\alpha^2 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}$$ สำหรับ Drucker – Prager Yield Function

โดยการใช้ Consistancy Condition จะได้

$$df_c = \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_{ij}{}^{p}} d\varepsilon_{ij}{}^{p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_p} d\varepsilon_p = 0$$

หรือ

$$df_c = \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f_c}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_{ij}{}^p} d\varepsilon_{ij}{}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_p} C (d\varepsilon_{ij}{}^p d\varepsilon_{ij}{}^p)^{\frac{1}{2}} = 0$$

โดยการแทน $d\varepsilon_{ij}{}^p$ สามารถหา Hardening Modulus ได้

$$H = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_{ij}{}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - C \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{d\varepsilon_p} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{.........(2.29)}$$

Work Hardening

พิจารณา Isotropic Work – Hardening Model สมการพื้นฐานสามารถเขียนได้เป็น

$$f = f\left[\sigma_{ij}, \kappa(W_p)\right]$$

เมื่อ κ เป็น Function ของ Plastic Work W_p

$$W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}{}^p$$

ใช้ Consistancy Condition จะได้

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{dW_p} dW_p = 0$$

หรือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{dW_p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}{}^p = 0$$

โดยการแทน $d\varepsilon_{ij}{}^p$ สามารถหา Hardening Modulus ได้

$$H = -\frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{d\kappa}{dW_p} \sigma_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{..................................(2.30)}$$

- Kinematic Hardening Model

Gerneral Derivation

Yield Function สำหรับ Pure Kinematic Hardening สามารถเขียนได้

$$f = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})$$

เมื่อกำหนดให้ α_{ij} ทำให้เกิดการเปลี่ยนของจุดศูนย์กลางของ Yield Surface ใน Stress Space โดยทั่วๆไปกำหนดให้เป็น Function ของ Plastic Strain , ε_{ij} ใช้ Consistancy Condition จะได้

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0$$

หรือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}{}^{p}} d\varepsilon_{ij}{}^{p} = 0$$

ทำการแทน $d\varepsilon_{ij}{}^{p}$ เพื่อต้องการหา Hardening Modulus

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}{}^{p}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \qquad \text{.................................(2.31)}$$

- **Mixed Hardening Model**

Gerneral Derivation

ทางวิศวกรรมของดิน แนวความคิดที่ทำการรวมกันระหว่าง Isotropic Hardening และ Kinematic Hardening เรียกว่า Mixed Hardening จะเห็นว่า Yield Surface เกิดทั้งการขยายตัวและเปลี่ยนตำแหน่งไปพร้อมกัน ซึ่งเป็นพฤติกรรมโดยทั่วๆไปของ Anisotropic Hardening ซึ่งสามารถรูปทั่วไปของสมการได้

$$f = f\left[\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, x(\varepsilon_{ij}{}^{p}), \kappa(\varepsilon_{p})\right]$$

ใช้ Consistancy Condition

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}(d\sigma_{ij} - d\alpha_{ij}) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_{ij}{}^{p}} d\varepsilon_{ij}{}^{p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{p}} C(d\varepsilon_{ij}{}^{p} d\varepsilon_{ij}{}^{p})^{\frac{1}{2}} = 0$$

หรือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}{}^{p}} d\varepsilon_{kl}{}^{p} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_{ij}{}^{p}} d\varepsilon_{ij}{}^{p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{p}} C(d\varepsilon_{ij}{}^{p} d\varepsilon_{ij}{}^{p})^{\frac{1}{2}} = 0$$

ทำการแทน $d\varepsilon_{ij}{}^{p}$ เพื่อต้องการหา Hardening Modulus

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}{}^{p}}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_{ij}{}^{p}}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa}\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{p}} C(d\varepsilon_{ij}{}^{p} d\varepsilon_{ij}{}^{p})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{......(2.32)}$$

- **Generalized Stress – Strain Relations**

ในทฤษฎี Elasto-Plastic บอกว่า Strain ที่เพิ่มขึ้น ประกอบด้วย Elastic Strain และ Plastic Strain ที่เพิ่มขึ้น จะเห็นว่า Plastic Strain ที่เพิ่มขึ้น อธิบายได้โดยกฎการไหล (Flow Rule) และค่า ε_{ij} ซึ่งได้จากการทดสอบ จะมีผลต่อค่า $\varepsilon_{ij}{}^{p}$ ซึ่งเกี่ยวข้องกับ Stress ที่เพิ่มขึ้น โดยใช้ความสัมพันธ์ Stiffness Matrix (C_{ijkl})

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}{}^{e}$$

แทนความสัมพันธ์ $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{kl}{}^{e} + d\varepsilon_{kl}{}^{p}$ จะได้

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \mathrm{C}_{ijkl}(\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \mathrm{d}\varepsilon_{kl}{}^{p})$$

จาก Flow Rule

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}})$$

แทนค่า $d\lambda$ ซึ่งอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้ $d\lambda = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn}\right]$

จะได้

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - \frac{1}{H}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn}\right]\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}})$$

เอา $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ คูณตลอด

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right) d\varepsilon_{kl} - C_{ijkl}\frac{1}{H}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn}\right]\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn}\left[1 + \frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right] = C_{ijkl}\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right] d\varepsilon_{kl}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{1 + \frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}$$

จะได้

$$\frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{H + \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}$$

$$d\lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{H + \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \qquad \text{.................................(2.33)}$$

3.3.1 Lade – Duncan Model

Failure and Loading Criteria

Lade และ Duncan (1973) ได้ทำการสังเกตลักษณะเฉพาะของ Cohesionless Soil โดยใช้การทดสอบในเครื่อง Triaxial กับดินทรายร่อนผ่านตะแกรงเบอร์ 0 ของเมือง Monterey ผลการทดสอบแสดงให้เห็นว่าบริเวณที่วิบัติสามารถที่จะแสดงถึงความแตกต่างของขนาดของ Intermediate Principal Stress , b และสามารถแสดงอยู่ในรูปของ

$$b = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

ภายใต้เงื่อนไขของ $\sigma_1 \le \sigma_2 \le \sigma_3 \le 0$ ขนาดของ b เป็นศูนย์เมื่อเป็น Triaxial Test เนื่องจาก $\sigma_2 = \sigma_3$ และเปลี่ยนตาม σ_2 จากรูปที่ 2.15 ได้แสดงความสัมพันธ์จากดินทรายที่แหล่งต่างๆ

Lade และ Duncan (1975) ได้เสนอกฎการวิบัติโดยสามารถเขียนอยู่ในเทอมของ Stress invariant ได้เป็น

$$\kappa_1 = \frac{I_1^{\,3}}{I_3}$$

เมื่อ I_1 และ I_3 คือค่า invariant ของ stress tensor

แบบจำลองที่สร้างขึ้นนี้เป็นแบบ isotropic elastic – plastic work – hardening คำนึงผลการวิบัติที่เกิดจากการทดสอบ Triaxial และจากรูปที่ 2.16 , 2.17 เป็นการนำผลทดสอบมาทำการเขียนให้อยู่ในรูปของสมการการวิบัติได้เป็น

$$f_f = I_1^{\,3} - \kappa_1 I_3 = 0 \qquad \text{.................................(2.34)}$$

หรือเขียนในรูปของเทอมอื่นของ stress

$$f_f = J_3 - \frac{1}{3} I_1 J_2 + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{\kappa_1} \right) I_1^{\ 3} = 0 \qquad \text{..........................(2.35)}$$

อยู่ในรูปของ loading surface จะเป็น

$$f_l = I_1^{\ 3} - \kappa \ I_3 = 0 \qquad \text{................................(2.36)}$$

หรือ

$$f_l = J_3 - \frac{1}{3} I_1 J_2 + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{\kappa} \right) I_1^{\ 3} = 0 \qquad \text{.............................(2.37)}$$

Flow Rule

Lade และ Duncan (1973) ทำการตรวจสอบผลการทดสอบของทิศทางของ Plastic Strain กับผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ Plasticity Theory ได้ผลเป็นที่น่าพอใจ ซึ่งได้แสดงผลการทดสอบอยู่ในรูปที่ 2.18 และ 2.19 ของ Triaxial Plane จะได้ว่าสำหรับดินทรายทั้งแน่นและไม่แน่น ทิศทางของ Plastic Strain เป็นสาเหตุทำให้เกิดเป็นมุมแหลมสำหรับทั้งการทดสอบแบบ Compression และ Extension แต่ไม่ได้ผลดีเท่าที่ควรกับผลใน Triaxial Plane

จากการเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Lade และ Duncan (1975) ได้เสนอเทอมที่คล้ายกับ Yield Function แต่เรียกว่า Plastic Potential Function , g นั่นคือ

$$g = I_1^{\ 3} - \kappa_2 I_3 = 0 \qquad \text{................................(2.38)}$$

หรืออาจแสดงในรูปของตัวแปรของ Stress แบบอื่นได้คือ

$$g = J_3 - \frac{1}{3} I_1 J_2 + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{\kappa_2} \right) I_1^{\ 3} = 0 \qquad \text{........................(2.39)}$$

เมื่อ κ_2 เป็นค่าคงที่ซึ่งขึ้นอยู่กับขนาดของ Stress และมีความสัมพันธ์กับทิศทางของ Plastic Strain บน Triaxail Plane สำหรับทั้ง Compression และ Extension ซึ่งได้แสดงตัวอย่างของผลการทดลองสำหรับดินทรายอัดแน่นในรูปที่ 2.20 และการเปลี่ยนแปลงของ κ_2 มีความสัมพันธ์กับค่า Stress , κ นั่นคือ

$$\kappa_2 = A\kappa + 27(1 - A)$$

เมื่อ A เป็นค่าที่หาได้จากเส้นตรงที่ได้จากจุดของข้อมูลการทดสอบ และขนาดของ κ_2 อยู่ระหว่าง 27 สำหรับกรณี Hydrostatic จนถึง $\kappa = \kappa_l$ ที่จุดวิบัติ

Isotropic Work – Hardening Rule

ขนาดของการเกิดของ Plastic Strain กับ Stress สามารถที่จะหาได้จาก Work – Hardening และการที่สมมุติฐานเป็น Non – associated flow rule ความสัมพันธ์ระหว่าง Plastic Work หาได้จาก

$$W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}{}^p$$

และจากผลการทดลองในรูปที่ 2.21 ทำให้สามารถหาค่าประมาณโดยใช้เป็น Function

$$\kappa - \kappa_t = \frac{W_p}{(a + dW_p)}$$

เมื่อ κ_t คือ ค่าเริ่มต้นโดยจะสมมุติว่ามีค่าเท่ากับ 27 จนถึง κ_t และช่วงนี้จะไม่มี Plastic Strain เกิดขึ้นและจะไม่เกิดงานที่เกิดงานจาก Plastic Strain จะมีและพฤติกรรมแบบ Elastic เกิดขึ้นจนกระทั่งถึงจุด $\kappa = \kappa_t$ ส่วนค่า a

$$a = Mp_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^l$$

เมื่อ p_a คือ atmospheric Pressure และ σ_3 คือ initial confining pressure ส่วนค่า M , l หาได้จากกราฟมาตราส่วนลอกการิทึม และค่า d หาได้จากค่าสูงสุดของ $(\kappa - \kappa_t)$ และจากสมการที่กล่าวมาแล้วนั้นสามารถคำนวณหางานที่เกิดจาก Plastic ได้จาก

$$dW_p = \frac{a d\kappa}{[1 - d(\kappa - \kappa_t)]^2}$$

เมื่อรู้ค่าจุดอ้างอิง Stress และ $d\kappa$ สามารถหา dW_p ได้และจากที่เป็น non – associates flow rule ทำให้การหาค่า Plastic Strain หาได้จาก

$$d\varepsilon_{ij}{}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

ทำการลดรูปสมการได้เป็น

$$d\lambda = \frac{dW_p}{3g}$$

แบบจำลองนี้ทำการปรับปรุงโดยคำนึงถึงผลจากตัวแปรหลายๆตัว เช่น Stress – Strain ของดินที่ไม่มีความเชื่อมแน่น , intermediate principal stress , shear dilatancy และ stress path ต่อมามีการนำไปใช้กับพฤติกรรมในแบบ 3 มิติของดินเหนียว (Lade และ Musante , 1978)

ตาราง 2.5 ข้อดี – ข้อเสีย ของ Lade – Duncan Model

ข้อดี	ข้อเสีย
- Simple	- Suitable for cohesionless soil
- Effect of intermediate principal stress	- Straight line meridian causes some contradictions at high compressive pressure
- Smooth	

Isotropic Work – Hardening เสนอโดย Lade และ Duncan (1973,1975) ให้ขนาดของ Loading Surface ถูกกำหนดโดยการเกิดของงานที่เกิดจากการเคลื่อนตัว สามารถแสดง Function ต่างๆที่จำเป็นสำหรับการคำนวณ

$$f = I_1^{\,3} - \kappa(W_p)I_3 \qquad \text{.................................(2.40)}$$

หรือ

$$f = I_1^{\,3} - \kappa(W_p)(\frac{1}{27}I_1^{\,3} - \frac{1}{3}I_1 J_2 + J_3) \qquad \text{....................(2.41)}$$

โดยค่า κ เป็นค่าคงที่ ขึ้นอยู่ขนาดของ Stress ที่เกิดขึ้น และเป็น Function กับงานที่เกิดจาก Plastic สำหรับ Plastic Potential Function เขียนเป็นสมการได้

$$g = I_1^{\,3} - \kappa_2(W_p)(\frac{1}{27}I_1^{\,3} - \frac{1}{3}I_1 J_2 + J_3) \qquad \text{....................(2.42)}$$

เมื่อ κ_2 เป็น Function ของ κ

ทำการหาค่า Stiffness Coefficient ของ Lade – Duncan Model ตามสมการ (2.43)

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = 3I_1^{\,2} - \kappa(W_p)(\frac{1}{9}I_1^{\,2} - \frac{1}{3}J_2) \qquad \text{........................(2.43.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{3}\kappa(W_p)I_1 \qquad \text{........................(2.43.b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_3} = -\kappa(W_p) \quad \text{.........................(2.43.c)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = 3I_1^{\,2} - \kappa_2(\frac{1}{9}I_1^{\,2} - \frac{1}{3}J_2) \quad \text{.........................(2.43.d)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_2} = \frac{1}{3}\kappa_2 I_1 \quad \text{.........................(2.43.e)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_3} = -\kappa_2 \quad \text{.........................(2.43.f)}$$

Hardening Modulus, H สำหรับในกรณี Isotropic Hardening เขียนอยู่ในรูปทั่วไป ตามสมการ (2.30)

$$H = -\frac{\partial f}{\partial \kappa}\frac{d\kappa}{dW_p}\sigma_{ij}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa} = -(\frac{1}{27}I_1^{\,3} - \frac{1}{3}I_1 J_2 + J_3)$$

$$\frac{d\kappa}{dW_p} = \frac{1}{a}\left[1 - d\,(\kappa - \kappa_t)\right]^2$$

$$\sigma_{ij}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 3g$$

แทนค่า $\frac{\partial f}{\partial \kappa}$ และ $\frac{d\kappa}{dW_p}$ ลงใน H

$$H = \frac{3g}{a}\left[1 - d\,(\kappa - \kappa_t)\right]^2\left(\frac{1}{27}I_1^{\,3} - \frac{1}{3}I_1 J_2 + J_3\right) \quad \text{............(2.44)}$$

โดยค่า a, d และ κ_t เป็นค่า Material Charecteristic หาได้จากการทดลองในห้องปฏิบัติการ

3.3.2 Cambridge Cam – Clay Model

การค้นคว้าวิจัยสำหรับการพัฒนาการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับดินจาก วัสดุประเภท Strain – Hardening เริ่มต้นจากมหาวิทยาลัยเคมบริดจ์ในประเทศอังกฤษ ภายใต้การนำของ Roscoe โดยการนำทฤษฎีของ Drucker et al. (1957) มาทำการมาพัฒนาใช้กับผลทดสอบ Triaxial แสดงในรูปที่ 2.22 – 2.26 ต่อมาเสนอในปี 1958 เป็นพื้นฐานของ Strain – Hardening สำหรับดิน และถัดมาการเสนอโดย Roscoe(1963) ได้ตีพิมพ์ออกมาในหนังสือชื่อ " Critical State Soil Mechanics " ซึ่งมีทฤษฎีที่สมบูรณ์เกี่ยวกับการอธิบาย Stress – Strain ที่ใช้ Strain – Hardening และต่อมา Schofield และ Wroth ,1968 เสนอแบบจำลอง

ที่ใช้จำลอง ในดินเหนียวอยู่ในสถานะแบบ Normally Consolidated และ Lightly Overconsolidated คือ Modified Cam – Clay Model และใช้ในดินทราย คือ Granta – Gravel Model และใช้สมมุติฐาน Volumetric Strain สามารถย้อนกลับได้บ้างส่วน Shearing Strain ไม่สามารถย้อนกลับได้ต่อมาในปี 1958 จากการเสนอของ Roscoe และ Parry แสดงได้ในรูปที่ 2.27 และสามารถสรุปได้

1. Rosce surface ตัดกับทางเดินของแรงของตัวอย่างในด้านเปียกของ Normally Consolidated และ Slightly Over Consolidated สำหรับทางเดินของแรงไปจนกระทั่งวิบัติ
2. Hvorslev surface ตัดกับทางเดินของแรงของตัวอย่างในด้านแห้งของ Heavily Consolidated สำหรับทางเดินของแรงไปจนกระทั่งวิบัติ
3. Critical State Line เป็นจุดวิบัติของการทดสอบแรงเฉือนทุกประเภททั้งการทดสอบแบบ Undrained และ Drained โดยจะเป็นเส้นที่เกิดจากการตัดกันของ Rosce และ Hvorslev Surface ที่เส้นจะทำให้เกิด Shear Distortion เกิดขึ้นมากโดย Stress ไม่เปลี่ยนแปลง
4. Elastic Wall เป็นพฤติกรรมแบบ Elastic เกิดขึ้นเมื่อตัวอย่างเป็นแบบ Over Consolidated

Rosce และ Hvorslev Surface ทั้งสองรวมเรียกว่า State Boundary Surface (e.g., Rosce และ Burland, 1968 ; Atkinson และ Bransby , 1978)

Roscoe อธิบายว่าถ้าทำการ Projection เส้น Critical State ในแกน p – q จะได้เป็นเส้นตรงที่ $e = 0$ ถ้ารู้จุดเริ่มจะทำให้สามารถคำนวณจุดวิบัติได้

จากการนำ Original Cam – Clay Model มาใช้โดยการสมมุติ Rosce Surface คล้าย ๆ กับรูปหัวลูกกระสุนปืนแต่จากการนำไปทำการคำนวณผลที่ได้คือจะให้ค่า Large Shear Deformation มากกว่าผลทดสอบที่ระดับของ Stress ที่น้อยกว่าด้วย เพื่อจะเป็นการปรับปรุงให้ดีขึ้น Burland (1965) ได้ทำเสนอให้โดยการเปลี่ยนเป็นรูปวงรี และเพิ่มขีดความสามารถโดย Rosce และ Burland (1968) ซึ่งต่อมารู้กันในชื่อ Modified Cam – Clay แสดงอยู่ในรูปที่ 2.28 ซึ่งใช้ได้ในแบบ 3 มิติและเป็นต้นแบบของ Model ต่อมามีการนำไปพัฒนาต่อให้มีความยืดหยุ่นมากขึ้น เช่น Cap Model , MII E1 , MIT E3 เป็นต้น

ตาราง 2.6 ข้อดี - ข้อเสียของ modified Cam – Clay Model

ข้อดี	ข้อเสีย
- Simple , qualitative judgements regarding material behavior are easily made	- Isotropic form , circular trace in deviatoric plane
- Material parameters may be determined from conventional triaxial test data	- not applicable to heavily over consolidated clays

Roscoe และ Burland (1968) ได้ทำการเสนอ Modified Cam – Clay Model ขึ้นโดยเป็นแบบจำลองแบบ Isitropic Nonlinear Elastic Strain – Hardening Plastic สมมุติว่าการเกิดของ Volometric Strain สามารถย้อนกลับได้บางส่วน และ สมมุติให้ Elastic Distortional Strain (Shearing Strain) มีค่าเป็นศูนย์และ Elastic Volumetric Strain เป็น Nonlinearly ขึ้นอยู่กับ Hydrostatic Pressure และไม่ขึ้นอยู่กับ Diviatoric Stress เป็นหลักการในการหาค่า Bulk Modulus และ Shear Modulus สามารถแสดงหลักการทั่วๆไปจาก ที่แสดงอยู่ในรูป 2.29

$$e = e_1 - \lambda \ln p$$

เมื่อ e คือ Void Ratio ของดิน โดยมีค่า λ เป็นค่า Material Constant และจากการถอนน้ำหนักออกจะได้

$$e = e_2 - \kappa \ln p$$

เมื่อ e_2 และ κ เป็นค่า Material Constant

พิจารณาการเปลี่ยนของ Void Ratio เมื่อเกิดการเปลี่ยนของ Hydrostatic Pressure สำหรับ Consolidation Line จะได้

$$de = -\lambda \frac{dp}{p}$$

เมื่อ p เป็น Current Hydrostatic Pressure และ dp เป็นการเพิ่มขึ้นของ Hydrostatic Pressure และสำหรับการถอนแรงออกจะได้

$$de = -\kappa \frac{dp}{p}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนของ Void Ratio , de และ Volumetric Strain $d\varepsilon_{kk}$ หรือ $d\varepsilon_{v}$

$$d\varepsilon_{kk} = \frac{de}{(1+e_0)}$$

หาการเพิ่มขึ้นของ Volumetric Strain ได้โดย

$$d\varepsilon_{kk} = -\frac{\lambda}{(1+e_0)p}dp$$

และสามารถหาส่วนที่เป็น Elastic ของการเพิ่มขึ้นของ Volumetric Strain , $d\varepsilon_{kk}{}^{e}$

$$d\varepsilon_{kk}{}^{e} = -\frac{\kappa}{(1+e_0)p}dp$$

ส่วนที่ย้อนกลับไม่ได้ ส่วนที่เป็น Plastic หาได้โดย

$$d\varepsilon_{kk}{}^{p} = -\frac{(\lambda-\kappa)}{(1+e_0)p}dp$$

เมื่อ Deformation Theory

$$d\varepsilon_{kk}{}^{p} = d\varepsilon_{kk} - d\varepsilon_{kk}{}^{e}$$

และหาค่า Elastic Bulk Modulus , K จะได้ Tangential Bulk Modulus

$$K = -\frac{(1+e_0)}{\kappa}p \qquad \text{..................................(2.45)}$$

จากการที่ทำการสมมุติให้ Distortional Strain มีค่าเป็นศูนย์ จะได้ Elastic Shear Modulus , G จะมีค่าสูงมากเมื่อเทียบกับ Elastic Bulk Modulus , K ถ้าจะให้ได้ผลที่ดีในการคำนวณ

สามารถเขียน Surface ของ Modified Cam – Clay ในแกนของ $p - \sqrt{J_2}$ เป็นรูปวงรี ในรูปที่ 2.30 สามารถเขียนในสมการเป็น

$$f = p^2 - p_0 p + \frac{J_2}{M^2} = 0 \qquad \text{..................................(2.46)}$$

เมื่อ M เป็นค่า Material Constant และ p_0 เป็นค่าที่ได้จาก Strain – Hardening ขึ้นอยู่กับค่า p หาได้จากจุดตัดของแกน p เราสามารถเขียนได้ใหม่ในรูปของ Invariants Stress , I_1, J_2

$$f = I_1^{\ 2} - I_1^{\ 0} I_1 + \frac{9}{M^2} J_2 = 0 \qquad \text{.................................(2.47)}$$

เมื่อ $I_1^{\ 0}$ เป็นค่า I_1 ที่จุดตัดของแกน
ความสัมพันธ์ของการการเปลี่ยนของตัวแปร Hardening Modulus , H และการเปลี่ยนของ Plastic Volumatric Strain , $d\varepsilon_{kk}^{\ p}$ สามารถหาได้โดย

$$d\varepsilon_{kk}^{\ p} = -\frac{(\lambda - \kappa)}{(1 + e_0) I_1^{\ 0}} dI_1^{\ 0} \qquad \text{.................................(2.48)}$$

หรือ

$$dI_1^{\ 0} = -\frac{(1 + e_0) I_1^{\ 0}}{(\lambda - \kappa)} d\varepsilon_{kk}^{\ p} \qquad \text{.................................(2.49)}$$

Critical State Line ที่ใช้สำหรับดินคือจุดตัดของ วงรีซึ่งสามารถหาได้จาก Von – Mises

$$\sqrt{J_2} = -Mp$$

สามารถยกตัวอย่างของแบบจำลองคร่าวๆ โดยการพิจารณา Stress Path ของ Lightly Overconsolidated Clay ในการทดสอบแบบ Drained Triaxial Compression Test ตามรูป 2.31 ที่จุดเริ่ม
ทดสอบ จากจุด A ถึง B เกิดการเปลี่ยนของ Elastic ใน Void Ratio ขั้นตอนการให้แรงยังต่อไปจนถึงจุด C โดยดำเนินไปกับ Elastic – Plastic จนกระทั่งไปถึงจุด D ซึ่งเป็นจุด Failure

ในรูป 3 มิติของ Modified Cam – Clay โดย Roscoe และ Burland (1968) แสดงในรูป 2.32 แสดง Hvorslev Surface ใช้ร่วมกับ Coulomb Surface มาเป็น Coulomb Criteria ที่จุด Failure ซึ่งมองในรูป 3 มิติเป็นรูป 6 เหลี่ยมปิรามิด วางในแนว Space Diagonal สำหรับ Roscoe Surface ซึ่งตัดกับ Hvorslev Surface ที่จุด ABCDEFA เส้นนี้เรียกว่า Critical - State Locus เป็นเส้นที่แบ่ง 2 Surface ไว้ด้วยกัน และการเปลี่ยนของขนาดของ Surface เป็นการเปลี่ยน Volume

การพัฒนาของ Cambridge Model มีอยู่มากมายหลายแบบ ใช้การคำนวณแบบวิธีเชิงตัวเลข ใช้วิธีแก้ปัญหาแบบ Boundary Value Problem แล้วนำไปคาดเคะเนพฤติกรรมของดินในห้องทดลอง

สำหรับ Modified Cam – Clay Model สามารถแสดง Function ของ Strain – Hardening Surface ได้ดังนี้ จาก

$$f = I_1^{\ 2} - I_1^{\ 0}(\varepsilon_{kk}^{\ p}) I_1 + \frac{9}{M^2} J_2 = 0$$

..................................(2.51)

โดย $I_1^{\,0}$ คือ Function ของ $\varepsilon_{kk}^{\;p}$

I_1 คือ จุดที่อยู่บน Yield Surface

M คือ Material Constant ของดิน

ทำการหาค่า Stiffness Coefficient ของ Modified Cam – Clay Model ตามสมการ (2.51)

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = 2I_1 - I_1^{\,0} \qquad \text{..................................(2.51.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{9}{M^2} \qquad \text{..................................(2.51.b)}$$

Hardening Modulus, H สำหรับในกรณี Isotropic Hardening ของ Modified Cam – Clay Model เขียนอยู่ในรูป

$$H = -\frac{\partial f}{\partial I_1^{\,0}}\frac{\partial I_1^{\,0}}{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}}\frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\;p}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{..................................(2.52)}$$

ทำการแทนค่าต่างๆใน H จะได้

$$H = -\frac{3(1+e_0)I_1^{\,0}I_1}{(\lambda - \kappa)}(2I_1 - I_1^{\,0}) \qquad \text{..................................(2.53)}$$

3.3.3 Generalized Cap Models

จากการศึกษาต่อมาโดยนำแนวความคิดแบบ State Boundary Surface โดยเฉพาะนำเอา Rosce Surface มาทำการปรับปรุงใหม่ โดย Dimaggio และ Sandler (1971) , Baladi และ Rohani (1979) โดยมีชื่อเรียกโดยทั่วไปว่า Cap Model

Cap Model ใช้การคำนวณแบบ Increment Theory สำหรับการคำนวณในส่วน Hardening Plasticity ของวัสดุที่มีคุณสมบัติไม่ขึ้นอยู่กับ อุณหภูมิและเวลา การคำนวณให้ผลดีโดยมีความต่อเนื่องและมีคำตอบเดียวและมีเสถียรภาพตามกฎของ Drucker's Postulate เริ่มแรกใช้กับดินทรายซึ่งก็ให้ผลที่ดีมากจึงมีการพัฒนาต่อมายังดินเหนียวและหิน (Sandler et al., 1976 ; Sandler , 1979 ; Baladi และ Sandler , 1981)

Loading Function สำหรับ Cap Model ที่แสดงในรูปที่ 2.33 สมมุติว่าเป็นแบบ Isotropic และประกอบขึ้นด้วย 2 ส่วน คือ Failure Surface สำหรับวัสดุประเภท Perfactly Plastic , $f_f = (I_1, J_2) = 0$ และ Elliptic Strain – Hardening Cap , $f_c = (I_1, J_2, x) = 0$

โดย Cap จะขยายออกตามแนวแกนของ Hydrostatic Axis การเคลื่อนที่ของ Cap จะโดนควบคุมโดย การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของ Volumetric Strain และ Hardening Parameter , x

$$x = x(\varepsilon_{kk}^{\;p}) \quad \text{หรือ} \quad x(\varepsilon_v^{\;p})$$

คุณสมบัติของ Dilatency และ Compaction อาจจะอธิบายในเทอมนี้

ตัวอย่างโดยการพิจารณาตัวอย่างที่มีการ Consolidated ไปที่จุด A ตามรูปที่ 2.34 จะได้ Plastic Strain ที่สามารถคำนวณได้จากสมการ $x = x(\varepsilon_{kk}{}^{p})$ ถ้าตัวอย่างถูกควบคุมโดย ต้องเดินไปจาก A ถึง B และเกิด Yield ขึ้นที่จุด B จากการที่สมมุติฐานเป็น Associated flow rule ทำให้เกิดการขยายตัวของ Plastic Volumetric เป็นผลที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนของ Hardening Parameter , x จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า Strain – Hardening ไม่สามารถย้อนกลับได้ ทำให้การหดตัวของ Cap เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งไปอยู่ที่จุด B ทำให้การเพิ่มขึ้นของ ทิศทางของ Plastic strain อยู่ในแนวดิ่ง และ Plastic Volumetric หยุดการขยายตัว ซึ่งกลไกแบบนี้เป็นเหตุผลสำคัญที่ทำให้สามารถควบคุม dilatancy ได้ซึ่งเป็นความต้องการสำหรับดินหลาย ๆ ชนิด

Model นี้ยังนำมาใช้กับหิน (Sandler และ Baron , 1976) โดยยอมให้ Cap (Hardening) เกิดการขยายตัวเท่านั้นไม่ให้เกิดการหดตัวขึ้นเลย ในกรณีนี้สมมุติว่าการเคลื่อนตัวขึ้นอยู่กับขนาดมากที่สุดของ Plastic Volumetric Strain และ Cap ไม่สามารถย้อนกลับได้ ซึ่งการสร้างขึ้นมานี้เพื่อให้สามารถคำนวณขนาดของ dilatency ที่มีขนาดสูงๆได้ จะเกิดกับหิน ซึ่งทราบมาจากการสังเกตการวิบัติของหินที่ Confining Pressure ต่ำๆ จะเห็นว่าสมการต่างๆที่แสดงที่อยู่ในรูปของ Perfectly Plastic และ Strain – Hardening สำหรับ Cap Model นี้ทำให้สามารถนำไปคำนวณได้หลากหลายสำหรับคุณสมบัติของวัสดุ

Cap Model ยังได้มีการนำไปพัฒนาเพื่อให้มีขีดความสามารถมากขึ้น โดยการเพิ่มผลการทบของอัตราการให้แรง และพฤติกรรมของ Anisotropic ภายใน Yield Surface และพฤติกรรมของ Viscoplastic ระหว่างการ Yield (e.g., Nelson , 1978 ; Sandler และ Baron , 1979) มีการนำไปประยุกต์อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งนำไปคำนวณการเคลื่อนตัวของดินในสภาวะ แผ่นดินไหว (e.g., Nelson , 1971 ; Sandler และ Baron , 1976 ; Nelson และ Baladi , 1977)

แสดงการพัฒนาของ Cap จากอดีตจนถึงปัจจุบันที่ใช้การคำนวณแบบ Strain – Hardening Model สรุปทั้งหมดอยู่ใน Chen (1980 , 1982) และ Mizuno และ Chen (1986)

ตาราง 2.7 ข้อดี - ข้อเสียของ Cap Model

ข้อดี	ข้อเสีย
- Satisfy the theoretical requirements of stability	- Trial and error method to fit test data
- Give a proper control of plastic dilatation	- Isotropic in form, circular trace in deviatoric plane
- Applicaable to several material	- Relatively complicated

โดยทั่วๆไปมีรูปแบบของ Cap Models ที่นิยมใช้กันอยู่หลายแบบ เช่น

1 . แบบเป็นวงรี (Elliptic Cap Model)

Elliptic Cap Model

1.1 Failure Function สมมุติให้เหมือนกับ Drucker –Prager Function

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \qquad \text{...(2.54)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \alpha \qquad \text{...(2.55.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \qquad \text{...(2.55.b)}$$

เมื่อ α และ k เป็นค่าคงที่ของดินที่มีความสัมพันธ์กับ Cohesion ϕ และ angle of friction c และจากการเสนอของ Sandler (1976) , Baladi และ Rohani (1979) เป็นรูปสมการใหม่

$$f = \sqrt{J_2} - \left[a - be^{cI_1}\right] = 0 \qquad \text{...(2.56)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = bce^{cI_1} \qquad \text{...(2.57.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \qquad \text{...(2.57.b)}$$

เมื่อ a, b และ c หาได้จาก Material Constant

และอีกรูปหนึ่งโดยการเสนอของ Desai (1982)

$$f = \alpha I_1 + \beta e^{\gamma I_1} + \sqrt{J_2} - \theta \qquad \text{...(2.58)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \alpha + \beta\gamma e^{\gamma I_1} \qquad \text{...(2.59.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \qquad \text{...(2.59.b)}$$

เมื่อ α, β, γ และ θ สามารถหาได้จากการทดสอบในห้องปฏิบัติการ

1.2 Strain – Hardening สามารถเขียนอยู่ในรูปของ รูปครึ่งวงรีได้ด้วย

$$f = \left[I_1 - L(l)\right]^2 + R^2 J_2 - \left[x - L(l)\right]^2 = 0 \qquad \text{...(2.60)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = 2\left[I_1 - L(l)\right] \quad \text{.................................(2.61.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = R^2 \quad \text{.................................(2.61.b)}$$

เมื่อ l คือ ขนาดของ I_1 ที่จุดศูนย์กลางของ วงรี และ $L(l) = l$ สำหรับ $l < 0$ กรณีแรงอัด และ $L(l) = 0$ กรณีแรงดึง $l > 0$ โดยมี R เป็นอัตราส่วนระหว่างแกนเอกและแกนโทของวงรี ซึ่งอาจจะเป็นค่าคงที่หรือเป็น Function ของ $L(l)$ และ x เป็น Hardening Function ที่ขึ้นอยู่กับ $\varepsilon_{kk}{}^{p}$

$$x = \frac{1}{D}\ln\frac{(1+\varepsilon_{kk}{}^{p})}{W} \quad \text{.................................(2.62)}$$

เมื่อ D และ W เป็นค่าคงที่ของวัสดุ สำหรับการเพิ่มขึ้นของ $\varepsilon_{kk}{}^{p}$

$d\varepsilon_{kk}{}^{p} = d\varepsilon_{kk}{}^{p}$ ถ้า $\varepsilon_{kk}{}^{p} \le 0$ หรือ $l < I_1$ และ $l < 0$

$= 0$ อย่างอื่น

สำหรับ Hardening Modulus , H กรณี Isotropic Hardening ของ Elliptic Cap

$$H = 12\,\frac{\{x - L(l)\}\{I_1 - L(l)\}}{D(\varepsilon_v{}^{p} + W)} \quad \text{.................................(2.63)}$$

2. แบบเป็นระนาบ (Simple Plane Cap Model)

Simple Plane Cap Model

Bathe (1980) , Sandler (1976) ใช้ Plane Cap สำหรับ Rock Material ซึ่งคล้ายกับ Cap Model แสดงอยู่ใน รูปที่ 2.36 และเสนอสมการต่างๆในการคำนวณดังนี้

2.1. Faiilure Surface ใช้ของ Drucker – Prager มีความคล้ายกับ

$$f_f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$$

2.2 Compression Plane Cap Surface

$$f_c = I_1 - x(\varepsilon_{kk}{}^{p}) = 0 \quad \text{.................................(2.64)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = 1 \qquad \text{......................................(2.65.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = 0 \qquad \text{......................................(2.65.b)}$$

สำหรับ Hardening Modulus , H กรณี Isotropic Hardening ของ Plane Cap

$$H = \frac{3}{D(\varepsilon_v{}^p + W)} \qquad \text{......................................(2.66)}$$

2.3 Tension Cut – Off Limit Plane

บทที่ 3
แนวทางดำเนินการวิจัย

แนวทางการทำการวิจัยครั้งนี้ ใช้ต้นแบบของ Surface Modified Cam-Clay แต่ทำการปรับแก้ Surface ให้มีความยืดหยุ่นมากขึ้นโดยกำหนดตัวแปรใหม่โดยเพิ่มตัวแปร 2 ตัว เพื่อการคำนวณ Normally Consolidated Clay และเพิ่มตัวแปร 2 ตัว สำหรับ Bounding Surface โดยให้สมารถหาได้จากเครื่องมือที่มีอยู่ อาจจะเป็นรูปแบบของ Function หรือค่าคงที่ ซึ่งสามารถแสดง Flow Chart ของการคำนวณในรูปที่ 3.1 และมีวิธีการคำนวณตามลำดับดังนี้

3.1. รับค่า Parameter สำหรับการคำนวณ ซึ่งมีทั้งหมด 9 ตัว สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท

3.1.1 สำหรับคุณสมบัติของดิน เพื่อการคำนวณในช่วง Normally Consolidated Clay

$$\lambda, \kappa, \phi, e_0, G, A_c, B_c$$

3.1.2 สำหรับคุณสมบัติของดิน เพื่อการคำนวณในช่วง Over Consolidated Clay

$$m \;, \; h$$

3.2. รับค่า $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ และหาค่าเริ่มต้นสำหรับการคำนวณ

3.3. คำนวณโดยใช้ Strian Control ทำการกำหนด Axial Strain Increment , $d\varepsilon_a$

3.4. คำนวณ Strain Increment

จาก Undrained Condition , $\Delta\varepsilon_v = 0$

$$\Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_r = 0$$

$$\Delta\varepsilon_r = -\frac{\Delta\varepsilon_a}{2}$$

3.5. คำนวณหาคุณสมบัติของดิน G , K

$$K = \frac{(1+e_0)}{\kappa} p'$$

3.6 คำนวณหา plastic strain ที่เพิ่มขึ้น

สำหรับการใช้ Yield Surface

$$f_c = I_1^2 - 2B_c I_1 I_1^0 + \frac{9J_2}{M^2} - I_1^{0^2} + B_c I_1^{0^2} = 0$$

3.6.1 คำนวณ $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}}$$

3.6.2 คำนวณ hardening (H)

สำหรับการใช้ Yield Surface ในกรณี Normally Consolidated Clay

$$H = 12\,\frac{(1+e_0)}{(\lambda-\kappa)}(2B_c I_1^{\,0} - B_c I_1 - I_1^{\,0})(I_1 - B_c I_1^{\,0})I_1^{\,0}$$

สำหรับการใช้ Yield Surface ในกรณี Over Consolidated Clay

$$H' = H + H(I_1, \sqrt{J_2}, \varepsilon_{kk}^{\ p})\,\frac{\delta}{(\delta_0 - \delta)}$$

3.6.3 คำนวณหา $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl}}{H + \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}\,\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}}$$

เนื่องจากเป็น Associate Flow Rule จะได้ $f = g$

$$d\lambda = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}\, d\varepsilon_{kl}}{H + \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}\,\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}$$

3.6.4 คำนวณหา $d\varepsilon_{ij}^{\ p}$

$$d\varepsilon_{ij}^{\ p} = d\lambda\,\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

เนื่องจากเป็น Associate Flow Rule จะได้ $f = g$

$$d\varepsilon_{ij}^{\ p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

3.7. คำนวณหา elastic strain และ stress ที่เพิ่มขึ้น

3.7.1 คำนวณหา $d\varepsilon_{ij}^{\ e}$

$$d\varepsilon_{ij}^{\ e} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{\ p}$$

3.7.2 คำนวณหา $d\sigma_{ij}$

$$d\sigma_{ij} = C_{ij} d\varepsilon_{ij}^{\ e}$$

3.8. คำนวณหา Stress และ Strain ที่เกิดขึ้นใน การคำนวณขั้นถัดไป

$$New\sigma_{ij} = Old\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}$$

$$New\varepsilon_{ij} = Old\varepsilon_{ij} + d\varepsilon_{ij}$$

3.9. คำนวณหา plastic strain ที่เกิดขึ้นใน การคำนวณขั้นถัดไป

$$New\varepsilon_{v}^{\ p} = Old\varepsilon_{v}^{\ p} - d\varepsilon_{v}^{\ p}$$

3.10. เมื่อได้ค่าเริ่มต้นในการคำนวณขั้นถัดไป จากนั้นทำการคำนวณ โดยกลับไปที่ ข้อ 5. ทำการคำนวณหาค่า E ,G , K ใหม่และจาก Stress ที่ได้ทำการคำนวณหา I_1 , J_2 ใหม่เพื่อใช้ในการคำนวณโดยจะทำการคำนวณไปเรื่อยๆ จะหยุดเมื่อ แตะ Critical State Line ของ Drucker-Prager (1956)

$$f_f = \alpha_f I_1 - \sqrt{J_2}$$

บทที่ 4
ทฤษฎีที่ใช้ในการสร้างแบบจำลอง

จะเห็นว่าในบทที่ 2 สำหรับ Cap Model มีการใช้การลองผิดลองถูกในการหาตัวแปรที่จะใช้คาดคะเนพฤติกรรมของดินเป็นอย่างมาก เพราะเนื่องจากตัวแปรเกือบทั้งหมดอยู่ที่ Yield Function และ Hardening Parameters (H) ซึ่งเป็นการยากที่จะหาตัวแปรเหล่านั้นจากการทดสอบ แต่อย่างไรก็ดีในการวิจัยที่ทำกันต่อๆกันมาได้มีการเสนอสมการที่จะหาตัวแปรเหล่านั้น ให้อยู่ในรูปของฟังค์ชันของการทดสอบที่ได้จากเครื่องทดสอบแรงอัดแบบสามแกน เพื่อให้ใช้งานง่ายขึ้นในทางปฏิบัติ

จากการใช้ Original Cam-Clay แบบดั้งเดิมที่ใช้ Yield Function เป็นรูปกระสุนปืนดังแสดงในรูปที่ 2.29 และใช้ Work Hardening ในการคำนวณจนถึงการใช้ Modified Cam-Clay ที่ใช้กันในปัจจุบันและเปลี่ยนเป็น Strain Hardening เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น เมื่อนำมาใช้กับดินเหนียวในกรุงเทพฯ ปรากฏว่าไม่สามารถคาดคะเนได้ดีเท่าที่ควรเพราะความอ่อนของดินเหนียวในเขตกรุงเทพฯเอง ทำให้เห็นว่าถ้าจะให้ผลการคำนวณดีขึ้นควรจะใช้ Yield Surface ที่แคบลง

จากการพัฒนาแบบจำลอง Non–Linear Elastic , Elastic-Perfectly Plastic มาจนถึง Elasto-Plastic มีการใช้ทฤษฎีการเคลื่อนตัวและทฤษฎีการไหล เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาตลอดจนใช้ Hardening Rule และมีการวิเคราะห์ที่เป็นขั้นตอนที่มีการยอมรับกันมากขึ้น ในการสร้างแบบจำลองในการวิจัยครั้งนี้ใช้แบบจำลองแบบ Elasto-Plastic ในการสร้างแบบจำลองคิดว่า Plastic Deformation เกิดขึ้นทันทีหรือ Associate Flow Rule และใช้ Modified Cam-Clay เป็นต้นแบบมาใช้ในช่วงที่พฤติกรรมของดินเป็น Normally Consolidated Clay ซึ่งนิยมกันมากในการใช้กับแบบจำลองโดยปรับแก้ตัวแปรบางตัวเพื่อให้แบบจำลองมีความอ่อนลงเหมาะกับดินกรุงเทพฯ และให้สามารถหาได้จากการ Trial & Error ซึ่งใช้อย่างแพร่หลายใน Cap Model ซึ่งมีความจำเป็นมากเพราะว่าในความจริงการสร้างแบบจำลองที่สามารถคาดคะเนพฤติกรรมถ้าใช้ตามทฤษฎีอย่างเดียวไม่สามารถให้ผลที่ต้องการได้ไม่ว่าทฤษฎีที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองนั้นๆ จะดีสักเพียงไหนก็ตาม ดังนั้น ในการนำมาใช้กับดินกรุงเทพ ที่มีความอ่อนมากจึงควรมีการปรับแก้ Yield Surface เพื่อให้มีความเหมาะสมมากขึ้น และในช่วงที่พฤติกรรมของดินเป็น Over Consolidated Clay ใช้วิธีของ Multi Surface ที่มีความนิยมมากคือ Bounding Surface ซึ่งทำให้สามารถขยายขีดความของ Modified Cam – Clay เพื่อให้ใช้กับ Over Consolidated Clay และการทดสอบ Cyclic Loading สามารถอธิบายการพัฒนาการคำนวณของแบบจำลองจาก Modified Cam-Clay ได้ดังนี้

Modified Cam-Clay

จากสมการวงรีสามารถเขียนในรูปของ Modified Cam – Clay ใน รูปที่ 2.29

$$\frac{\left(p-\frac{p_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{p_0}{2}\right)^2}+\frac{q^2}{\left(\frac{Mp_0}{2}\right)^2}=1 \qquad \text{..(4.1)}$$

โดย $$M = \frac{6\sin\phi}{(3-\sin\phi)}$$

$$\left(p - \frac{p_0}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{M^2} = \left(\frac{p_0}{2}\right)^2$$

$$p^2 - pp_0 + \left(\frac{p_0}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{M^2} = \left(\frac{p_0}{2}\right)^2$$

จะได้

$$f = p^2 - pp_0 + \frac{q^2}{M^2} = 0 \qquad \text{...(4.2)}$$

แทนค่า $p = \frac{I_1}{3}$ และ $q = \sqrt{J_2}$

$$f = \left(\frac{I_1}{3}\right)^2 - \frac{I_1}{3}\frac{I_1^{\,0}}{3} + \frac{J_2}{M^2} = 0 \qquad \text{...(4.3)}$$

$$f = I_1^{\,2} - I_1 I_1^{\,0} + \frac{9J_2}{M^2} = 0 \qquad \text{..(4.4. a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = 2I_1 - I_1^{\,0} \qquad \text{..(4.4. b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{9}{M^2} \qquad \text{..(4.4. c)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{..(4.4. d)}$$

เมื่อ $d\varepsilon_{kk}^{\ p} = -\frac{(\lambda-\kappa)}{(1+e)I_1^{\,0}}dI_1^{\,0}$ หรือ $dI_1^{\,0} = -\frac{(1+e)I_1^{\,0}}{(\lambda-\kappa)}d\varepsilon_{kk}^{\ p}$

จาก Isotropic Hardening ในกรณีของ Strain Hardening จะได้

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial I_1^{\,0}}\frac{\partial I_1^{\,0}}{\partial \varepsilon_{kk}^{\ p}}\frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\ p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\ p}}d\varepsilon_{ij}^{\ p} = 0$$

จาก Consistency Equation , $df = 0$ Stress ถึง Yield Point จะสามารถหา Hardening โดยแทน $d\varepsilon_{ij}^{\;p}$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial I_1^{\;0}} \frac{\partial I_1^{\;0}}{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\;p}} \left(\frac{1}{H} \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 0$$

$$H = -\frac{\partial f}{\partial I_1^{\;0}} \frac{\partial I_1^{\;0}}{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\;p}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{.....................................(4.5)}$$

จากสมมุติฐานเป็น Associate Flow Rule จะได้

$$H = -\frac{\partial f}{\partial I_1^{\;0}} \frac{\partial I_1^{\;0}}{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\;p}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{.....................................(4.6)}$$

ทำการหาค่าต่างๆ ที่จำเป็น

$$\frac{\partial f}{\partial I_1^{\;0}} = -I_1 \qquad \text{...(4.7.a)}$$

$$\frac{\partial I_1^{\;0}}{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}} = -\frac{(1-e)}{(\lambda-\kappa)} I_1^{\;0} \qquad \text{...(4.7.b)}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\;p}} = \delta_{ij} \qquad \text{...(4.7.c)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \left(2I_1 - I_1^{\;0}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{M^2} \begin{pmatrix} \sigma_1 - \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \frac{I_1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\;p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\;p}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \left(2I_1 - I_1^{\;0}\right) + \frac{9}{M^2}\left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3}\right) + \\ &\quad \left(2I_1 - I_1^{\;0}\right) + \frac{9}{M^2}\left(\sigma_2 - \frac{I_1}{3}\right) + \\ &\quad \left(2I_1 - I_1^{\;0}\right) + \frac{9}{M^2}\left(\sigma_3 - \frac{I_1}{3}\right) \\ &= 3\left(2I_1 - I_1^{\;0}\right) \end{aligned}$$

แทนลงในสมการ (4.6)

$$H = -3\frac{(1+e)}{(\lambda-\kappa)}\left(2I_1 - I_1^{\,0}\right)I_1^{\,0}I_1 \qquad \text{.....................................(4.8)}$$

4.1 การพัฒนาแบบจำลองเพื่อการวิจัย

จากการศึกษาพบว่าถึงแม้จะมีการพัฒนาแบบจำลองที่ดีมากขนาดไหนก็ตาม การใช้ทฤษฎีสำหรับการสร้างแบบจำลองนั้นๆ ข้อกำหนดต่างๆเป็นการพยายามที่จะสะท้อนถึงพฤติกรรมของ ดินจริงๆที่อยู่ภายใต้สภาวะของการให้แรง (Loading) และลดแรง (Unloading) แต่ก็ยังไม่สามารถทำนายผลการทดสอบได้ดีถ้าไม่มีการใช้วิธี Empirical เข้ามาประยุกต์ใช้ด้วยโดยพบว่าการใช้ Modified Cam-Clay ก็เหมือนกันโดยจะได้ผลในดินอ่อนแต่การที่จะปรับให้ผลการคำนวณได้ตรงกับดินแต่ละที่นั้นยังทำได้อยาก ต้องใช้ร่วมกับ Critical State เพื่อแสดงการวิบัติของดินในการพัฒนาแบบจำลองเพื่อทำการวิจัยครั้งนี้ได้ลองใช้แบบจำลองต่างๆมาทำการพัฒนาเพื่อให้สามารถคาดคะเนผลการทดสอบการให้แรงแบบวัฏจักร จากการใช้ Cap Surface ปรากฏว่าประยุกต์ใช้ได้ดีในวัสดุแต่ละประเภทแต่มีข้อเสียคือ ใช้การ Empirical มากเกินไปค่อนข้างสับสนในการหาตัวแปรมาใส่ในแบบจำลองแต่ก็ใช้ได้ดีในการทำให้เกิด Peak ในดินอ่อนแต่มีข้อดี คือ สามารถประยุกต์ได้กับดินหลายประเภท

ดังนั้นจากปัญหาดังกล่าวได้มีการลองใช้แบบจำลองโดยใช้การคำนวณแบบผสมกันระหว่าง Cap Surface และกับ Modified Cam-Clay โดยเลือกข้อดีของแต่ละแบบจำลองมาใช้ คือ Cap Surface สามารถสร้าง Peak ในดินอ่อนได้ดีแต่การหาค่าคงที่ของตัวแปรซับซ้อนมาก และ Modified Cam-Clay หาค่าคงที่ได้ง่ายมากแต่มีข้อจำกัดในการหาจุด Peak ในดินอ่อนในตำแหน่งที่ต้องการให้เกิดโดยยังใช้สำหรับ Normally Consolidated Clay ยังใช้ Associate Flow Rule เหมือนเดิม การคำนวณผสม Trial & Error ลงไปด้วยโดยไปปรับความโค้งของ Yield Surface ให้แคบลงเปลี่ยนทิศทางเดินของความเค้นให้สามารถควบคุมได้ง่ายขึ้น สามารถแสดงวิธีการต่างๆจาก Modified Cam-Clay ในรูปที่ 4.1 และสามารถเขียนเป็นสมการวงรี ในแกนของ Invariant Stress

$$\frac{\left(I_1 - B_c I_1^{\,0}\right)^2}{\left(I_1^{\,0} - B_c I_1^{\,0}\right)^2} + \frac{9J_2}{M^2\left(I_1^{\,0} - B_c I_1^{\,0}\right)^2} = 1 \qquad \text{.........................(4.9)}$$

โดย $M = A_c M_c$, $M = A_c \dfrac{6\ \sin\phi}{(3 - \sin\phi)}$

$$\left(I_1 - B_c I_1^{\,0}\right)^2 + \frac{9J_2}{M^2} = \left(I_1 - B_c I_1^{\,0}\right)^2$$

$$I_1^{\,2} - 2B_c I_1 I_1^{\,0} + B_c^{\,2} I_1^{\,02} + \frac{9J_2}{M^2} = I_1^{\,02} - 2B_c I_1^{\,02} + B_c^{\,2} I_1^{\,02}$$

จะได้

$$f = I_1^{2} - 2B_c I_1 I_1^{0} + \frac{9J_2}{M^2} - I_1^{0^2} + 2B_c I_1^{0^2} = 0 \qquad \text{............(4.10)}$$

จากสมการข้างบนจะเห็นว่าเมื่อค่า $B_c = 0.5$ สมการจะกลายเป็น Modified Cam–Clay ในสมการ (4.1) ทำการหา Stiffness Coefficient ได้ในสมการ (4.11)

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = 2I_1 - 2B_c I_1^{0} \qquad \text{............(4.11.a)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_2} = \frac{9}{M^2} \qquad \text{............(4.11.b)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{............(4.11.c)}$$

เมื่อ

$$d\varepsilon_{kk}^{\ p} = -\frac{(\lambda-\kappa)}{(1+e)I_1^{0}} dI_1^{0} \qquad \text{หรือ} \qquad dI_1^{0} = -\frac{(1+e)I_1^{0}}{(\lambda-\kappa)} d\varepsilon_{kk}^{\ p}$$

จาก Isotropic Hardening ในกรณีของ Strain Hardening จากสมการ(2) ทำการหาค่าต่างๆที่เกี่ยวข้องกัน จากสมการ(2)

$$H = -\frac{\partial f}{\partial I_1^{0}}\frac{\partial I_1^{0}}{\partial \varepsilon_{kk}^{\ p}}\frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\ p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\ p}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \text{............(4.12)}$$

จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial I_1^{0}} = -2B_c I_1 - 2I_1^{0} + 4B_c I_1^{0} \qquad \text{............(4.13.a)}$$

$$\frac{\partial I_1^{0}}{\partial \varepsilon_{kk}^{\ p}} = -\frac{(1-e)}{(\lambda-\kappa)} I_1^{0} \qquad \text{............(4.13.b)}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{kk}^{\ p}}{\partial \varepsilon_{ij}^{\ p}} = \delta_{ij} \qquad \text{............(4.13.c)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \left(2I_1 - 2B_c I_1{}^0\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{M^2}\begin{pmatrix} \sigma_1 - \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \frac{I_1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{kk}{}^p}{\partial \varepsilon_{ij}{}^p}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \left(2I_1 - 2B_c I_1{}^0\right) + \frac{9}{M^2}\left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3}\right) + \\ &\quad \left(2I_1 - 2B_c I_1{}^0\right) + \frac{9}{M^2}\left(\sigma_2 - \frac{I_1}{3}\right) + \\ &\quad \left(2I_1 - 2B_c I_1{}^0\right) + \frac{9}{M^2}\left(\sigma_3 - \frac{I_1}{3}\right) \\ &= 3\left(2I_1 - 2B_c I_1{}^0\right) \end{aligned}$$

แทนลงในสมการ (4.6) จะได้

$$H = 12\frac{(1+e)}{(\lambda - \kappa)}\left(2B_c I_1{}^0 - B_c I_1 - I_1{}^0\right)\left(I_1 - B_c I_1{}^0\right)I_1{}^0 \qquad \text{...........(4.14)}$$

รูปที่ 4.2 แสดงผลการคำนวณโดยใช้ Modified Cam-Clay จะเห็นว่าเมื่อเปรียบเทียบกับดินจากการเจาะบริเวณสนามฟุตบอลในจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โดยทำการทดสอบ Consolidated Undrained ปรากฏว่าไม่สามารถลด Peak ลงมาให้ตรงกับผลทดสอบได้ดีเท่าที่ควร เพราะว่า Modified Cam-Clay สร้างมาเพื่อการใช้กับดินเหนียวที่ประเทศอังกฤษมีการใช้ Surface ที่เป็นวงรีที่มีรัศมีค่อนข้างกว้างเกินไป สำหรับดินเหนียวกรุงเทพฯ แต่อย่างไรก็ดีจากการคำนวณโดยการให้ Surface สามารถยืดหยุ่นได้ปรากฏว่า สามารถใช้ได้ดีกับดินอ่อนทั่วๆไปทั้งกรณี Isotropic Consolidation และ Anisotropic Consolidation ในระดับหนึ่ง กรณี Loading และ Unloading

จากการคำนวณสามารถเปรียบเทียบการใช้ตัวแปรระหว่างแบบจำลองที่แสดงอยู่จาก รูปที่ 4.2 ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.1 แสดงตัวอย่างตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณ

ชื่อของตัวแปร	Modified Cam – Clay	แบบจำลองที่สร้างขึ้นใหม่
λ	0.28133	0.28133
κ	0.09989	0.09989
ϕ	0.567	0.567
e	1.70	1.70
G (kPa)	8000	8000
B_c	-	0.60
A_c	-	1.25

4.2 **การพัฒนาแบบจำลองเพื่อใช้สำหรับ** Over Consolidated Clay

จากการคำนวณในหัวข้อที่แล้วเป็นการใช้ในกรณีของดินเหนียวอ่อน ที่อยู่ในสภาพพฤติกรรมแบบ Normally Consolidated Clay โดยการปรับปรุงทำการเพิ่ม ตัวแปรขึ้นมาใหม่ 2 ตัวแปรมีจุดประสงค์เพื่อทำการควบคุม Peak ที่วิธีหาใช้วิธีแบบ Emprirical แบบ Cap Model เพื่อให้ง่ายต่อการหาตัวแปร

ในการใช้ Modified Cam – Clay แบบดั้งเดิม เมื่อนำมาใช้กับดินเหนียวในสภาพที่ดินมีค่า OCR สูง ๆ ซึ่งจะมีความเป็น Elastic มากเมื่อเทียบกับ Plastic Strain จึงพอยอมรับได้แต่เมื่อนำไปใช้กับดินที่เป็น Slightly Over Consolidated Clay ซึ่งจะเกิด Plastic Strain มากเมื่อเทียบกับ Elastic Strain และเพื่อที่จะอธิบายพฤติกรรมบริเวณนี้เอง ในการคำนวณที่นิยมใช้กันมาก คือ ใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับเรื่องของ Multi Surface เพราะจากการที่ Yield Surface ขยายออกแต่ไม่หดเข้ามาเพราะฉนั้นการใช้วิธีคำนวณแบบเดิมจึงใช้ไม่ได้เพราะจะต้องคำนึงถึงการเพิ่มขึ้นของ Plastic Strain ด้วย ถ้าไม่มีการใช้ทฤษฎี Multi Surface เข้ามาจะเห็นว่าเมื่อ Stress อยู่ภายใน Surface จะมีสภาวะเป็น Elastic ไม่เกิด Plastic Strain ภายใน ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในกรณีของดินเหนียวถึงแม้ว่าดินจะอยู่ภายใน สภาพของการเป็น Over Consolidated Clay ก็ตามแต่ดินก็ยังมี Plastic Strain เกิดขึ้นแต่น้อยกว่า ในกรณีของ Normally Consolidated Clay ในอดีตในการที่จะใช้การใช้แบบจำลองสำหรับการคาดคะเนพฤติกรรมของดินภายใต้สภาพของการเป็น Over Consolidated Clay นี้มีการใช้ Non-Associated Flow Rule เข้ามาจะเห็นได้ เช่น Lade-Duncan Model (1973) ที่มีการนำทฤษฎีนี้ไปใช้แต่เนื่องจาก Non-Associated Flow Rule มีความยุ่งยากมากจากการหา Plastic Strain จะต้องมีการ Differental Function ทั้ง g และ F ด้วย ทำให้การควบคุม Plastic Strain เป็นไปได้ยากมากซึ่งต่อมา Dafalias (1982) ทำการเสนอ Bounding Surface ซึ่งต่อมาเป็นที่นิยมมากในการนำไปใช้ประยุกต์กับแบบจำลองต่างๆ มากมาย ซึ่งจะกล่าวต่อไปในเรื่องของ Multi-Surface

การที่จะนำเอา Multi Surface มาใช้ก็ยังแบ่งออกเป็นอีก 2 ทฤษฎี ที่นิยมใช้กันเอามาพัฒนาแบบจำลองเพื่อคำนวณ แบ่งออกเป็น

1. Bounding Surface
2. Two Surface

ทั้ง 2 วิธีที่กล่าวมาต่างกันที่ จะมีวิธีคำนวณ Hardening Modulus ต่างกัน แต่ก็ยึดหลักการที่เหมือนกัน คือ เป็นการทำการ Non-Linear Interpolate ค่า Hardening Modulus มาจากการคำนวณแบบ Normally Consolidated Clay ซึ่งการคำนวณโดยในแบบจำลองนี้ใช้วิธีของ Bounding Surface โดยใช้วิธีแก้ปัญหาแบบ Boundary Value Problem

การคำนวณ Plastic Strain ของ Bounding Surface ต้องทำการคำนวณโดยการคิด Hardening Modulus ที่มาจาก Nc State แล้วใช้การ Interpolate ค่า Hardening Modulus ของ Oc State ตามแบบของ Bounding Surface ซึ่งเสนอโดย Dafalias , 1982 แสดงอยู่ในรูปที่ 4.3 โดยเสนอว่าค่า Hardening Modulus ของ Oc State สามารถหาได้จากสมการคือ

$$H_{oc} = H + H(I_1, \sqrt{J_2}, \varepsilon_{kk}{}^{p}) \frac{\delta}{(\delta_0 - \delta)} \qquad \text{.........................(4.15)}$$

โดย

$$H = 12 \frac{(1+e)}{(\lambda - \kappa)} \left(2B_c I_1{}^0 - B_c I_1 - I_1{}^0\right)\left(I_1 - B_c I_1{}^0\right) I_1{}^0 \qquad \text{.........(4.16)}$$

$\delta_0 =$ จุดอ้างอิงของ Stress Point ในที่นี้ใช้ $I_1{}^0$

$\delta =$ ระยะที่วัดจาก σ_{ij} ถึง $\bar{\sigma}_{ij}$

$$H(I_1, \sqrt{J_2}, \varepsilon_{kk}{}^{p}) = \frac{(1+e)}{(\lambda - \kappa)} \left(1 + \left|\frac{M_c}{\eta}\right|^m\right) h \qquad \text{..................(4.17)}$$

$\eta =$ มุมระหว่าง $\dfrac{\sqrt{J_2}}{I_1}$

โดยค่า m , h เป็นค่า Material Constant

ผลการคำนวณโดยใช้ Bounding Surface ได้แสดงผลการคำนวณตามรูปที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.4 ถึง รูปที่ 4.31 การคำนวณใช้ Isotropic Consolidation

บทที่ 5
การคำนวณหาค่าคงที่สำหรับการใช้งาน

จากบทที่แล้วเป็นการอธิบายถึงหลักการพื้นฐานที่ใช้ในการพัฒนาและตัวอย่างการใช้งาน ส่วนการนำมาใช้ประยุกต์กับการทดสอบ Consolidated Undrained กับดินเหนียวกรุงเทพฯ และวิธีการหาตัวแปรต่างๆ ซึ่งหามาได้จากการทดสอบและการคำนวณ ซึ่งแบบจำลองนี้สามารถใช้กับการทดสอบในห้องปฏิบัติการของการทดสอบแบบ Compression และ Extension โดยต่อมาได้เอาตัวแปรที่ได้จากการปรับแก้นั้นมาทำการคาดคะเนพฤติกรรมของดินเหนียวภายใต้การกระทำของแรงแบบวัฏจักร Cyclic Loading แบบจำลองที่ได้วิจัยครั้งนี้พบว่าสามารถใช้กับดินเหนียวที่ Normalize ได้และเหมาะสมกับการใช้วิธี Shansep

แบบจำลองที่ได้ปรับปรุงสำหรับการทดสอบในการวิจัยนี้นั้นมีตัวแปรทั้งหมด 9 ตัว ซึ่งมีวิธีหามาจากการทดสอบในห้องปฏิบัติการเองและจากการคำนวณโดยการ Trial & Error โดยสามารถสรุปตัวแปรทั้งหมดรวมทั้งคุณสมบัติต่างๆได้เป็น

5.1 Compression index , λ

หาได้จากการทดสอบ Isotropic Consolidation แบบ 3 มิติ จึงเป็นการคำนึงถึงการกระทำของแรงแบบ 3 มิติ ซึ่งมีผลต่อการเกิดของ Plastic Strain

5.2 Recompression index , κ

ได้จากการลดแรงของการทดสอบแบบ Isotropic Consolidation โดยจะมีผลต่อการเกิด Plastic Strain เช่นกัน จะเกิดมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับ κ κ ซึ่ง ที่ได้นี้จากทฤษฎีของ Modified Cam – Clay สามารถนำไปหา Stiffness และค่า Bulk Modulus ที่ได้จากวิธีนี้จะเป็น Tangent Bulk Modulus , K

5.3 Void ratio , e

เป็นค่าเริ่มต้นของสัดส่วนช่วงว่างหาได้จากกราฟ e – log p ที่ได้มาจากการทดสอบ Isotropic Consolidation โดยปกติแล้วค่าสัดส่วนช่วงว่างเป็นค่าที่เปลี่ยนไปตามสภาพวะของดินในขณะนั้นมีค่าไม่คงที่เพราะฉะนั้นนิยมใช้การตรวจสอบจากค่า Compression Ratio (CR) และ Recompression Ratio (RR) ซึ่งเป็นค่าคงที่ของดิน จึงทำให้เห็นว่าค่า λ , κ และ e มีความสัมพันธ์กัน

5.4 Shear modulus , G

ในการพัฒนาสำหรับ Elasto – Plastic Model สำหรับ Normally Consolidated Clay จะเห็นว่า Elastic Strain มีค่าน้อยเมื่อนำไปเทียบกับ Plastic Strain แต่กับ Over Consolidated Clay ค่าดังกล่าวทั้ง 2 ค่าอาจจะมีค่าเท่าๆ กัน หรือ Plastic Strain มีค่าน้อยกว่า Elastic Strain มาก

สำหรับ modified cam – clay พฤติกรรมทางด้าน elastic (unloading behavior) อธิบายได้โดย ค่ามุมของเส้น swelling , κ ซึ่งนำไปหา Tangent elastic bulk modulus , K

$$K = \left\{\frac{1 + e_0}{\kappa}\right\} p$$

จาก Isotropic Elastic หาได้จากสูตรข้างบน และส่วน Elastic Shear Modulus มีวิธีหาที่ยุ่งยากมากกว่าเนื่องจากค่า Elastic Shear Modulus จะเปลี่ยนไปตามขนาดของการเคลื่อนตัวและระดับของความเค้นในการนำไปประยุกต์ใช้กับแบบจำลองส่วนใหญ่นิยมให้เป็นค่าคงที่ ซึ่งอาจจะหาได้จาก

5.4.1 $\frac{G}{K}$ = Constant (i.e. Poisson's ratio , υ = constant)

5.4.2 G = Constant (υ varies)

นอกจากนั้น Wroth (1971) ได้ทำการวิจัยโดยให้ความเข้าใจที่มากขึ้นกับคุณสมบัติในทางกลศาสตร์ของดินโดยแนะนำว่า G สามารถหาได้จาก Function ของ $G = f(p, e, R)$

$$\left(\frac{G}{p}\right)_{oc} = \left(\frac{G}{p}\right)_{nc} (1 + C \ln R)$$

เมื่อ $\left(\frac{G}{p}\right)_{nc}$ และ C สมมุติว่าเป็นค่าคงที่ของวัสดุ

5.5 Angle of friction , ϕ

มุมเสียดทานภายในของดินจากผลการทดสอบ Triaxial ซึ่งเสนอโดย Couloum จะมีผลกับพฤติกรรมของแบบจำลอง คือ จะเป็นตัวควบคุมทิศทางการเคลื่อนที่ของ Plastic Deformation จากการคำนวณโดยใช้พื้นผิวคลาก (Yield Surface) และจะมีความสัมพันธ์กับค่า A_c และ B_c ซึ่งค่าดังกล่าวจะเป็นตัวแปรในการควบคุม Plastic Deformation เช่นกัน

5.6 Yield Suface Parameter , A_c

เป็นค่าคงที่ของ Surface ทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปของ Yield Surface ซึ่งถ้ามีค่าเท่ากับ 0.5 จะเป็น Modified Cam – Clay และถ้ามีค่าน้อยๆ จะมีผลให้เกิด Strain Softening มาก Plastic Strain เกิดมากโดยถ้ามีค่ามากๆ จะเกิด Plastic Strain น้อย โดยค่า A_c และ B_c นี้หาได้จากการใช้วิธีลองผิดลอง

ถูกโดยเทียบกับข้อมูลในเครื่องทดสอบที่ได้มาจากการทดสอบ Consolidated Undrained ของดินเหนียว ที่อยู่ในสภาพ Normally Consolidation

5.7 Yield Suface Parameter , B_c

เป็นค่าคงที่ของ Surface ทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปของ Yield Surface ใช้ประกอบกันกับค่า A_c โดยถ้ามีค่าน้อยๆ จะมีผลให้ค่ากำลังรับแรงเฉือน Undrianed Shear ต่ำและถ้ามากจะให้ค่ากำลังรับแรงเฉือน Undrianed Shear สูง

5.8 Bounding Surface Parameter , m

ใช้ควบคุมพฤติกรรมของการเกิด Plastic Strain ของกรณี Over Consolidated Clay ซึ่งเสนอโดย Dafalias (1982) ซึ่งมีการนำไปใช้กับแบบจำลอง Elasto – Plastic อย่างกว้างขวางในกรณีของ multi surface ค่า m และ h นี้หาได้จากการลองผิดลองถูก โดยนำผลที่จากการคำนวณไปเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้มาจากการทดสอบ Consolidated Undrained ของดินเหนียวที่อยู่ในสภาพ Over Consolidation

$$H_{oc} = H + H(I_1, \sqrt{J_2}, \varepsilon_{kk}{}^{p}) \frac{\delta}{(\delta_0 - \delta)}$$

โดย

$$H = 12 \frac{(1+e)}{(\lambda - \kappa)} \left(2B_c I_1{}^0 - B_c I_1 - I_1{}^0\right)\left(I_1 - B_c I_1{}^0\right) I_1{}^0$$

$$H(I_1, \sqrt{J_2}, \varepsilon_{kk}{}^{p}) = \frac{(1+e)}{(\lambda - \kappa)} \left(1 + \left|\frac{M_c}{\eta}\right|^m\right) h$$

5.9 Bounding Surface Parameter , h

ใช้ควบคุมพฤติกรรมของการเกิด Plastic Strain ของกรณี Over Consolidated Clay ซึ่งเสนอโดย Dafalias (1982) เหมือนกันกับค่า m

การนำแบบจำลองไปใช้ในการทดสอบ Cyclic Loading นั้นจะต้องมีการทำการหาค่าคงที่ของแบบจำลองสำหรับดินแต่ละชนิดให้เสร็จเรียบร้อยก่อน โดยการยึดจากกรณี Monotonic Loading เป็นหลักจากการทำการทดสอบในห้องปฏิบัติการ การวิจัยนี้ได้มีการนำดินเหนียวในกรุงเทพที่ต่างๆมาทำการวิเคราะห์ทำการคำนวณหาค่าต่างๆ สำหรับดิน

5.10 ดินเหนียวที่บริเวณบางพลี

Brenner (1982) ทำการทดสอบ CIUC ของดินเหนียวบริเวณบางพลี จังหวัดสมุทรปราการ แสดงผลการทดสอบในรูปที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณบางพลี (σ_p = 105 kPa)

Input Parameters	
ϕ	28.94°
λ	0.281
κ	0.100
e_0	1.7
G (kPa)	8000
m_0	4.75
h	0.00000001
A_c	0.68
B_c	1.55

5.11 ดินเหนียวที่บริเวณป้อมพระจุลฯ จังหวัด สมุทรปราการ

Manzoor Ali (1978) ทำการทดสอบในสนามกับดินเหนียวบริเวณบางพลี โดยอยู่ห่างไปทางใต้ของกรุงเทพฯ ประมาณ 40 กิโลเมตร แถบบริเวณปากแม่น้ำเจ้าพระยา ซึ่งมีลักษณะคล้ายๆกับดินเหนียวบริเวณในกรุงเทพฯที่ประกอบไปด้วยดินเหนียวเป็นชั้นบางๆ มีกำลังรับแรงเฉือนต่ำและมีความสามารถในการอัดตัวได้สูง จากข้อมูลหลุมเจาะสามารถบอกได้ว่า เป็นดินที่อ่อนมาก จากผิวดินไปจนถึง 17.00 เมตรจึงจะพบดินทรายอัดแน่นและดินเหนียวผสมด้วยดินร่วนตามลำดับ ซึ่งดินที่ใช้ทำการทดสอบเป็นดินที่อยู่ในความลึก 1.7-2.2 เมตร และนำมาทำการทดสอบกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำ

การเตรียมตัวอย่างใช้ตัวอย่างขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.4 นิ้ว และมีความสูง 2.8 นิ้ว ทดสอบโดยใช้วิธีการควบคุมการเคลื่อนที่ของการเคลื่อนตัวในแนวแกน โดยใช้อัตราเร็วในการทดสอบ 0.0018 นิ้ว/นาที ซึ่งได้ผลการทดสอบ และ General Properties แสดงผลทดสอบอยู่ในรูปที่ 5.4-5.6 , 5.8-5.14

ตาราง 5.2 คุณสมบัติทั่วไปของดินเหนียวบริเวณป้อมพระจุลฯ จังหวัด สมุทรปราการ

Properties	Depth 0 - 3.0 m	Depth 3.0 – 8.0 m
insitu water content (%)	100 ± 30	65 ± 10
insitu viod ratio	2.75 ± 0.10	1.8 ± 0.20
degree of saturation (%)	95 ± 2	96 ± 4
specific gravity	2.73 ± 0.1	2.7 ± 0.01
liquid limit (%)	102 ± 9	80 ± 6
plastic limit (%)	40 ± 5	29 ± 2
plastic index (%)	62 ± 7	51 ± 7
liquidity index (%)	87 ± 28	67 ± 13
total unit weight (t/m^2)	1.45 ± 0.04	1.58 ± 0.05
colour	light brown to grey	grey
organic matter content (%)	4.3 ± 0.3	3.37 ± 0.67

ตาราง 5.3 การใช้ความดันในการทดสอบของตัวอย่าง

series	type of test	Depth (m)	Consolidation state	test no.	isotropic Consolidation Pressure (kPa)	description
$I_{(a)}$	CIUC	1.7 – 2.2	Isotropic	1 2 3 4	5 15 25 40	cell pressure Kept constant Measurement of pore Pressure , axial strain and deviator stress

ตาราง 5.4 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณป้อมพระจุลฯ (σ_p = 36 kPa)

Input Parameters	
ϕ	10^{o}
λ	0.7309
κ	0.1658
e_0	3.7
G (kPa)	5000
m_0	6.1
H	0.00000001
A_c	0.68
B_c	4.9

5.12 ดินเหนียวที่บริเวณหนองงูเห่า

Shawkat Ali (1975)ทำการศึกษาตัวอย่างดินโดยทำการตกตะกอนในห้องทดสอบจากดินบริเวณหนองงูเห่า ซึ่งอยู่ห่างจากกรุงเทพฯประมาณ 30 กิโลเมตร ที่ระดับความลึก 1.5 เมตร ความชื้นของตัวอย่างดินขณะที่ทำการผสม118 %และมีเกลือ NaCL อยู่ 10 มิลลิกรรม/ลิตร ทำการผสมดินประมาณ 1.5 ชั่วโมงความชื้นเพิ่มขึ้นเป็น 300 % และในน้ำที่วัดได้จากแรงดันของน้ำมีเกลือ NaCL อยู่ 35 มิลลิกรรม/ลิตร ทำการร่อนผ่านตะแกรงเบอร์ 60 (B.S) และทำการเก็บไว้ในที่กักเก็บทำด้วยพลาสติคขนาดใหญ่

การตกตะกอนทำในแทงค์ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 นิ้ว ซึ่งถูกออกแบบมาโดย AIT ในแทงค์มีเกลือ NaCL อยู่ 35 มิลลิกรรม/ โดยตัวอย่างทั้งหมดที่ทำการทดสอบมีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 1.4 นิ้ว และมีความสูง 2.8 นิ้ว ทำการทดสอบโดยใช้ Isotropic Consolidation รวมทั้งทำการวัด Pore Pressure ด้วย ผลทดสอบแสดงความแตกต่างของ OCR ทั้งหมด 4 ตัวอย่างในแต่ละ Maximum Past Pressure แสดงผลทดสอบอยู่ในรูปที่ 5.16 ,5.18 ,5.20 ,5.22 ,5.24 ,5.26 ,5.28 ,5.30 ,5.32

ตาราง 5.5 คุณสมบัติทั่วไปของดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า

Properties	Depth 1.5 m
water content (average %)	95
liquid limit (%)	110
plastic limit (%)	43
clay size fraction (< 2μ)	56
Activity	1.2
liquidity index	0.77
specific gravity of solids	2.71

ตาราง 5.6 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า (σ_p = 10 psi)

Input Parameters	
ϕ	27.8°
λ	0.357
κ	0.081
e_0	2.28
G (lbs)	2000
m_0	4.25
h	0.00001
A_c	0.60
B_c	1.40

ตาราง 5.7 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า (σ_p = 100 psi)

Input Parameters	
ϕ	22.57°
λ	0.357
κ	0.081
e_0	2.28
G (lbs)	2500
m_0	3.40
h	0.00001
A_c	0.60
B_c	1.15

ตาราง 5.8 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า (σ_p = 500 psi)

Input Parameters	
ϕ	21.34°
λ	0.357
κ	0.081
e_0	2.28
G (lbs)	3000
m_0	5.20
h	0.00000001
A_c	0.62
B_c	1.30

ตาราง 5.9 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า (σ_p = 1000 psi)

Input Parameters	
ϕ	15.54°
λ	0.357
κ	0.081
e_0	2.28
G (lbs)	6000
m_0	4.10
h	0.00000001
A_c	0.70
B_c	2.00

Chi – Ho Wang (1974) ทดสอบดินที่ความลึก 1.0 – 1.5 เมตร และ 2.5 – 3.0 เมตร โดยใช้กระบอกบางเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 นิ้ว ในบริเวณที่สร้างสนามบินสุวรรณภูมิ บริเวณที่ทำการศึกษาการทรุดตัวของทางวิ่ง โดยใช้ Back Pressure เท่ากับ 30 psi ทิ้งไว้ให้อิ่มตัวด้วยน้ำ 24 ชั่วโมง จะทำการทดสอบเมื่อ 95 % ของการอิ่มตัวด้วยน้ำ ทดสอบโดยใช้วิธีการควบคุมการเคลื่อนที่ของการเคลื่อนตัวในแนวแกน โดยใช้อัตราเร็วในการทดสอบ 0.0018 นิ้ว/นาที ซึ่งได้แสดงผลทดสอบอยู่ในรูปที่ 5.33 ,5.35

ตาราง 5.10 คุณสมบัติทั่วไปของดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า

Properties	Depth 1.1 – 1.3 m	Depth 2.6 – 2.9 m
natural water content (%)	101 ± 4	120 ± 7
natural void ratio	2.82	3.2
degree of saturation	97 ± 2	100 ± 1
specific gravity	2.72 ± 0.02	2.73 ± 0.02
liquid limit (%)	96.5 ± 1.5	121 ± 2
plastic limit (%)	31.5 ± 0.5	39 ± 2
plastic index	65 ± 2	82 ± 4
activity	0.97	1.2
dry density (g / cc)	0.71	0.65
color	dark brown	grey
grain size distribution		
sand (%)	4	7
silt (%)	29	25
clay (%)	67	68
Ko value	0.7 ± 0.02	0.65 ± 0.02
organic matter content (%)	3.98	4.34
salt content (mg Nacl / 100 g soil)	505	1200
PH	7.0	7.5

General Soil Properties of Weathered Nong Ngoo Hao Clay [after Wang (1974)]

ตาราง 5.11 คุณสมบัติทั่วไปของดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า

Properties	Depth 1.0 – 1.2 m	Depth 2.5 – 2.7 m
natural water content (%)	96 ± 3	123 ± 3
natural void ratio	2.73 ± 0.08	3.25 ± 0.2
degree of saturation	95 ± 2	100 ± 1
specific gravity	2.73 ± 0.01	2.72 ± 0.01
liquid limit (%)	96.5 ± 1.5	121 ± 2
plastic limit (%)	31.5 ± 0.5	39 ± 2
plastic index	65 ± 2	82 ± 4
activity	0.97	1.2
dry density (pcf)	45.6 ± 1.3	39.7 ± 1.7
color	light brown	grey
grain size distribution		
sand (%)	4	7
silt (%)	29	25
clay (%)	67 ± 0.5	68 ± 1
organic matter content (%)	4.0	4.35 ± 0.05
salt content (gm / liter)	5	7.5
PH	5.8 ± 0.6	8.75 ± 1

General Soil Properties of Weathered Nong Ngoo Hao Clay [after Chang (1974)]

ตาราง 5.12 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า (σ_p = 20 psi)

Input Parameters	
ϕ	25.12°
λ	0.7309
κ	0.1658
e_0	3.70
G (lbs)	1160
m_0	5.40
h	0.00000001
A_c	0.75
B_c	1.90

ตาราง 5.13 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า Anisotropic (σ_p = 20 psi)

Input Parameters	
ϕ	31.37°
λ	0.7309
κ	0.1658
e_0	3.70
G (lbs)	1160
m_0	5.90
h	0.00000001
A_c	0.72
B_c	1.71

Hwang Zue-Ming (1975) ทำการทดสอบดินเหนียวที่บริเวณหนองงูเห่า ซึ่งอยู่ห่างจากกรุงเทพฯ ไป 20 กิโลเมตร ตัวอย่างดินถูกเก็บในระดับความลึก 2.50-3.00 เมตร ซึ่งเป็นดินเหนียวที่กำลังย่อยสลายทำการเก็บโดยใช้กระบอกบางเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 นิ้ว ทิ้งไว้ระยะเวลา 1-5 วัน จนกระทั่งดินเกิดการอิ่มตัวด้วยน้ำ 95 % แสดงอยู่ในรูปที่ 5.38 ,5.40

ตาราง 5.14 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียวบริเวณหนองงูเห่า (σ_p = 60 psi)

Input Parameters	
ϕ	20.14°
λ	0.7309
κ	0.1658
e_0	3.70
G (lbs)	2500
m_0	4.70
h	0.0000005
A_c	0.55
B_c	0.92

5.13 Pietrafitta Clay

ตาราง 5.15 แสดงตัวแปรที่ใช้คำนวณดินเหนียว Pietrafitta (σ_p = 760 kPa)

Input Parameters	
ϕ	24.50°
λ	0.357
κ	0.081
e_0	2.28
G (kPa)	8000
m_0	4.50
h	0.0000001
A_c	0.67
B_c	1.40

บทที่ 6
บทสรุป

จากการทำการวิจัยโดยการศึกษาแบบจำลองต่างๆ และนำมาหาข้อดีและข้อเสียของแต่ละแบบจำลองพบว่าในแต่ละแบบจำลองก็มีข้อดีและข้อเสียต่างๆกันไปขึ้นอยู่กับสมมุติฐานในการสร้างของผู้สร้าง และถึงแม้จะมีใช้ทฤษฎีอย่างดีแต่แบบจำลองก็ยังมีข้อผิดพลาดอยู่ ที่มีการใช้กันมากในการสร้างแบบจำลองคือการสร้างตัวแปรแบบใช้การหาโดยวิธีลองผิดลองถูกมาใช้ในการปรับแก้ พื้นผิวคลากของแบบจำลองเพื่อทำให้แบบจำลองมีความยืดหยุ่นมากขึ้น จากการวิจัยโดยการนำแบบจำลองของโมดิฟายด์แคมเคย์มาทำการศึกษาข้อดีและข้อเสียพบว่าจะมีความยืดหยุ่นน้อย และจะได้ค่ากำลังรับแรงเฉือนสูงเกินไปเมื่อเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากดินกรุงเทพฯ การศึกษาที่ผ่านมาสามารถบอกเกี่ยวกับแบบจำลองได้ดังนี้

1. แบบจำลองประเภทอีลาสติคเฟอร์เฟคลีพลาสติคอย่างเช่น แบบจำลองของคูลอมบ์ แบบจำลองของเทสก้าและแบบจำลองของวอนเมสสิจที่นิยมใช้กันมากในการนำไปประยุกต์ใช้กับไฟไนท์อิลิเมนต์นั้นไม่เหมาะอย่างยิ่ง ในการใช้กับดินเหนียวกรุงเทพฯเพราะเนื่องจากดินเหนียวมีความเป็นพลาสติคสูงเนื่องจากเป็นดินเหนียวที่เกิดใหม่ เป็นดินเหนียวที่อยู่ในสภาพแบบอัดแน่นปกติ แต่เนื่องจากตัวแบบจำลองไม่มีการขยายตัวของพื้นผิวคลากและภายในพื้นผิวคลากดินเหนียวจะมีพฤติกรรมแบบอีลาสติคอย่างเดียว ซึ่งต่างจากผลการทดสอบอย่างเห็นได้ชัดโดยตัวอย่างดินเหนียวกรุงเทพฯที่ได้จากหลุมเจาะที่นำมาทำการทดสอบอาจจะเกิดการเคลื่อนตัวที่เกิดจากพลาสติคในทันทีที่มีการให้แรงกระทำ เพราะฉะนั้นในการใช้แบบจำลองแบบอีลาสติคเฟอร์เฟคลีพลาสติค จึงให้ค่าต่ำกว่าความเป็นจริงมากในการนำไปใช้ในการคำนวณออกแบบเกี่ยวกับงานในปฐพีกลศาสตร์ของดินและนอกจากนั้นในขั้นตอนการคำนวณแบบจำลองแบบนี้ ส่วนใหญ่จะมีการกำหนดระดับของกำลังรับแรงเฉือน เพื่อให้ตัวอย่างดินเหนียวเกิดการวิบัติจากการที่ผู้เขียนทำการวิจัยแบบจำลองประเภทนี้กับดินเหนียวกรุงเทพฯ พบว่าไม่ควรจะใช้แบบจำลองประเภทนี้ในการคำนวณ แบบจำลองที่น่าจะเหมาะสมกับดินเหนียวในกรุงเทพฯ น่าจะเป็นแบบจำลองอย่างน้อยควรจะเป็นอีลาสโตพลาสติค ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

2. แบบจำลองประเภทอีลาสโตพลาสติคที่มีความนิยมมาก ในการใช้งานปฐพีกลศาสตร์ของดินอย่างเช่น แบบจำลองของโมดิฟายด์แคมเคย์และแบบจำลองของแค็บ แบบจำลองประเภทนี้พัฒนาต่อมาจากแบบจำลองประเภทอีลาสติคเฟอร์เฟคลีพลาสติคสามารถอธิบายถึงพฤติกรรมของดินได้มากขึ้น มีการเคลื่อนและเปลี่ยนรูปของพื้นผิวคลากเมื่อมีแรงมากระทำ ใช้สำหรับดินเหนียวที่อยู่ในสภาพแบบอัดแน่นปกติ จากการนำมาเปรียบเทียบการคำนวณกับผลการทดสอบที่ได้จากเครื่องอัดตัวสามแกนพบว่าใช้ได้ดีพอใช้กับดินเหนียวกรุงเทพฯ โดยตัวแปรที่หาได้จากผลการทดสอบที่ใส่ในการคำนวณจะให้ผลการคำนวณที่ต่ำเกินไป ผลทดสอบกำลังรับแรงเฉือนของดินอาจจะสูงกว่าผลที่ได้จากกับการคำนวณได้ถึง 2 เท่าตัว ส่วนใหญ่แบบจำลองประเภทนี้จะต้องใช้ร่วมกับสถานะวิกฤตของดิน อย่างไรก็ดีแบบจำลองของโมดิฟายด์แคมเคย์นี้เป็นต้นแบบให้แบบจำลองที่ทำการพัฒนาต่อไปอีกหลายแบบจำลอง ในการวิจัยครั้งนี้ก็ได้ทำการปรับปรุงแบบจำลองให้มีเสถียรภาพมากขึ้นเพื่อนำมาใช้กับดินเหนียวกรุงเทพฯ

3. แบบจำลองที่เสนอในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ทำการพัฒนามาจากแบบจำลองประเภทอีลาสโตพลาสติคโมดิฟายด์แคมเคย์ซึ่งสามารถนำไปใช้กับดินเหนียวที่อยู่ในสภาพอัดแน่นปกติและอัดแน่นเกินตัวโดยแบบจำลองสามารถใช้กับดินเหนียวกรุงเทพฯได้ดีและได้ทำการหาตัวแปรเพื่อใช้กับดินกรุงเทพฯที่สถานที่ต่างๆ ซึ่งผลการ

ทดสอบกำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำในดินเหนียวมีค่ากำลังรับแรงเฉือนขึ้นอยู่กับวิธีการทดสอบและสภาพของดินเหนียวซึ่ง ซึ่งได้ทำการสรุปแสดงตัวแปรต่างๆที่ใช้ในการคำนวณในบทที่ 5

4. ในการพัฒนาแบบจำลองนั้นมีตัวแปรที่จะต้องใช้ทั้งหมด 9 ตัว ซึ่งวิธีหาได้แสดงอยู่ในบทที่ 5 โดยได้อธิบายถึงวิธีการหาแต่ความสำคัญของตัวแปรนั้นๆ ที่มีต่อผลการคำนวณของแบบจำลอง หาได้จากในการทดสอบตัวอย่างดินเหนียวและการคำนวณแบบวิธีทางคณิตศาสตร์

5. การคำนวณเพื่อคาดคะเนพฤติกรรมของดินเหนียวที่อยู่ในสภาพแบบอัดแน่นเกินตัว นิยมการใช้มัลติเซอร์เฟสเข้ามาใช้ในการคำนวณในการวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีเบาว์ดิ่งเซอร์เฟสเข้ามาช่วยในการคำนวณ ซึ่งเป็นทฤษฎีที่พัฒนาต่อมาจากนอนแอดโซซิเอดโฟว์ โดยจะทำให้สามารถคำนวณได้ง่ายขึ้นเนื่องจากนอนแอดโซซิเอดโฟว์จะทำให้การควบคุมการเคลื่อนตัวที่เกิดจากพลาสติคได้ยากกว่า

6. เมื่อนำแบบจำลองที่พัฒนามานั้นมา ทำการเปรียบเทียบกับข้อมูลผลการทดสอบดินที่ได้จากการทดสอบจากเครื่องอัดตัวสามแกน พบว่าให้ผลไม่ดีเท่าที่ควรในการใช้คาดคะเนในกรณีที่ดินเหนียวอยู่ในสภาพอัดแน่นเกินตัวมากกว่า 8

7. พบว่าในทดสอบในกรณีของการทดสอบดินเหนียวแบบแอนไอโซโทปิค รูปร่างของพื้นผิวคลากควรจะเป็นรูปวงรีที่มีแกนเอกวางตัวในลักษณะทำมุมกับแกนนอน ซึ่งจะมีผลต่อการเกิดการเคลื่อนตัวที่เกิดจากพลาสติคและทางเดินของความเค้นเป็นอย่างมาก

รายการอ้างอิง

Anandarajah, A. and Yannis, F. D. An Anisotropic Hardenning Bounding Surface Constitutive Model for Clays . Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics . Nagoya : 1-5 April 1985.

Burland, J. B. , Rampello, S. , Georgiannou, V. N. , and Calabresi, G. A Laboratory Study of The Strength of Four Stiff Clays . Geotechnique 46 No 3 1996 : pp. 491-514.

Chen, W. F. and Atef, F. S. Constitutive Equations for Engineering Materials . Volume1 Elasticity and Modeling : John Wiley Sons Inc. , 1982.

Chen, W. F. and Mizuno, E. Non-Linear Analysis in Soil Mechanics . Elsevier Science Publishers B. V , 1990.

Hwang, Z. M. Stress-Strain Behavior and Strength Characteristics of Weathered Nong ngoo Hao Clay . Thesis (M.Eng) . Civil Engineering Asian Institute of Technology (Bangkok Thailand) , 1975.

Ko, H. Y. and Sture, S. State of the Art : Data Reduction and Application for Analytical Modeling . Laboratory Shear Strength of Soil ASTM STP 740 R. N. Yong and F. C. Townsend, Eds., American Society for Testing and Materials 1981 : pp. 329-386.

Leonard, R. H. , Yannis, F. D. and Jay S. N. Numericial Implementation of A Bounding Surface Soil Plasticity Model . International Symposium on Numerical Models in Geomechanics . Zurich : 13-17 Sep 1982.

Manzoor, A. Stress–Strain Behavior and Strength Charecteristics of Soft Pom Prachul Clay . Thesis (M.Eng) . Civil Engineering Asian Institute of Technology (Bangkok Thailand) , April 1978.

Ramsamooj, D. V. and Alwash, A. J. Model Prediction of Cyclic Response of Soils . ASCE Vol. 116 No.7 July 1990 : pp.1053-1071.

Wang, C. H. Undrained Shear Strength Characteristics of Nong Ngoo Hao Weathered Clay Under K_0 Conditions . Thesis (M.Eng) . Civil Engineering Asian Institute of Technology (Bangkok Thailand) , 1974.

Whittle, A. J. A Constitute Model For Overconsolidated Clays with Application to The Cyclic Loading of Friction Piles . Disseratation (Ph.D) . Civil Engineering Engineering Massachusetts Institute of Technology , July 1987.

Seung, R. K. Stress-Strain Behavior and Strength Characteristics of Lightly Overconsolidated Clays . Disseratation (Ph.D) . Civil Engineering Asian Institute of Technology (Bangkok Thailand), 1991.

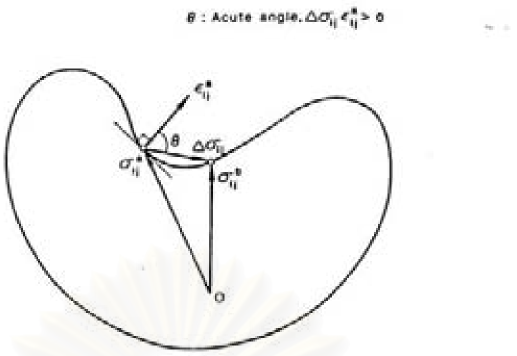
รายการอ้างอิง(ต่อ)

Shawkat, A. The Relation of Stress Path Behavior of An Overconsolidated Saturated Clay to Maximum Past Pressure . Thesis (M.Eng) . Civil Engineering Asian Institute of Technology (Bangkok Thailand) , 1975.

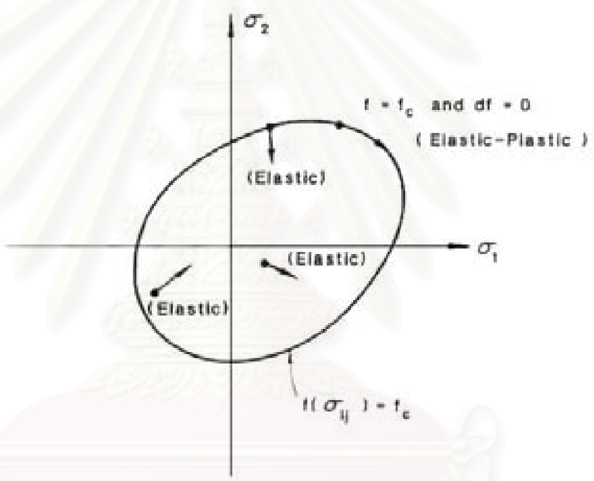
Yannis, F. D. and Leonard, R. H. A Bounding Surface Plasticity Model . International Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading Swansea , 7-11 Jan 1980.

Zahurul, H. Stress-Strain Behavior and Shear Strength Characteristics of Stiff Bangkok Clays . Thesis (M.Eng) . Civil Engineering Asian Institute of Technology (Bangkok Thailand) , April 1976.

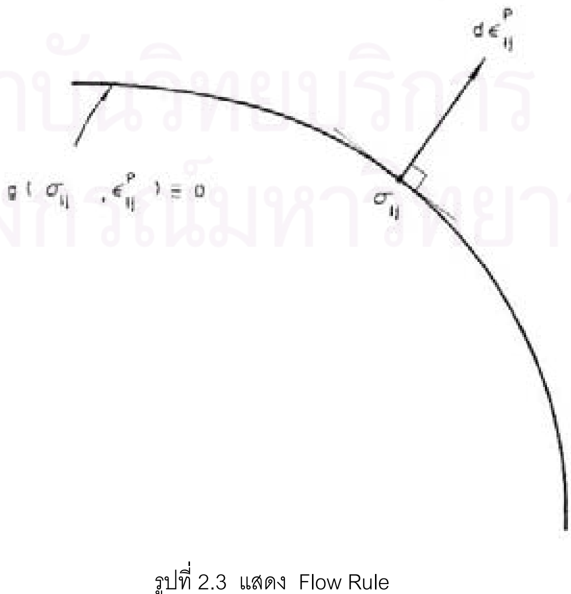
ภาคผนวก ก. แสดงรูปประกอบ บทที่ 1-5



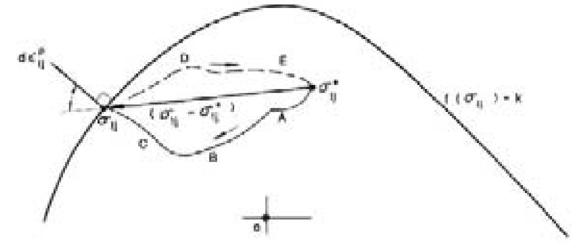
รูปที่ 2.1 แสดง Surface ของวัสดุ Non – Linear Elastic



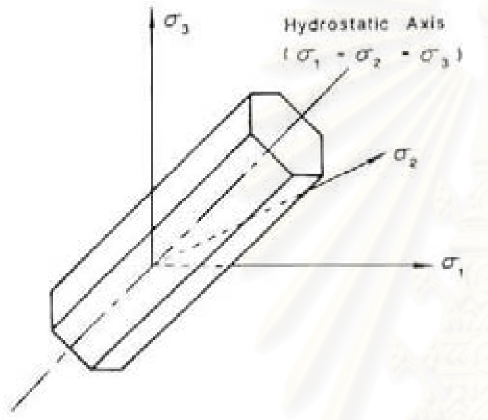
รูปที่ 2.2 แสดง Yield Surface ของ Perfectly Plastic Materrial



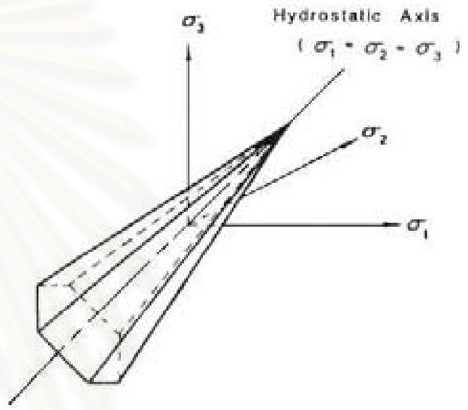
รูปที่ 2.3 แสดง Flow Rule



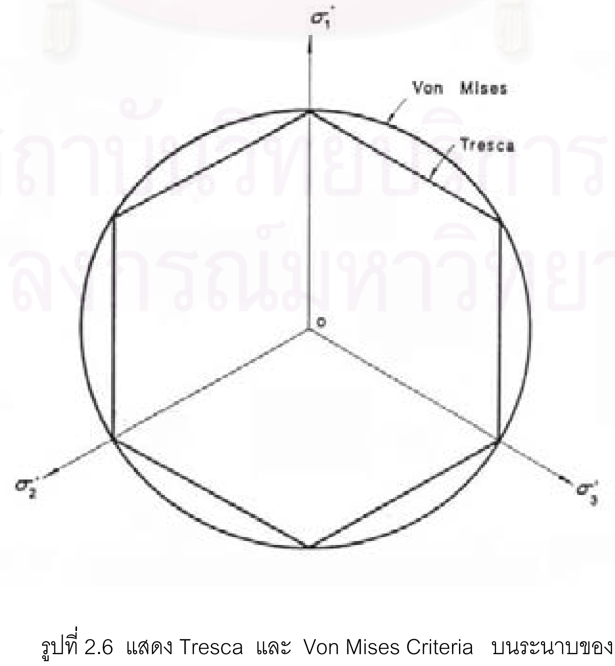
รูปที่ 2.4 แสดงการเคลื่อนที่ของ Stress โดยเกิดจากแรงภายนอก และเกิด Plastic Strain



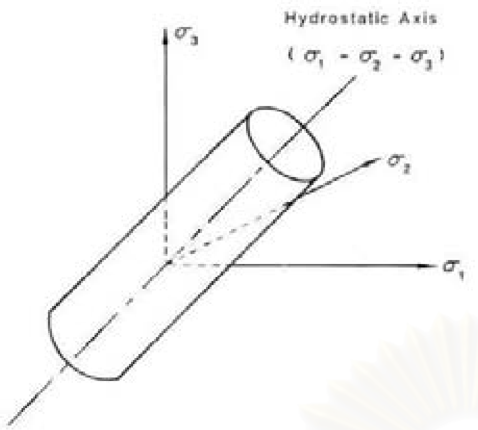
รูปที่ 2.5 (a) แสดง Yield Surface ของ Tresca Model



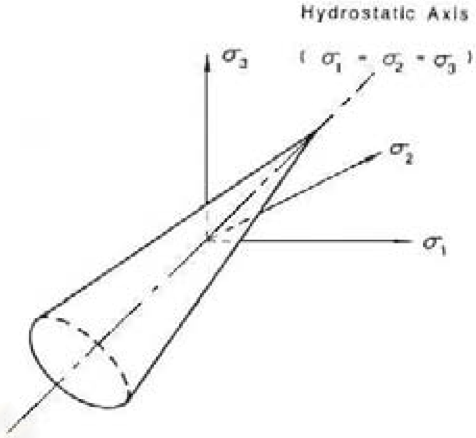
รูปที่ 2.5 (b) แสดง Yield Surface ของ extand Tresca Model



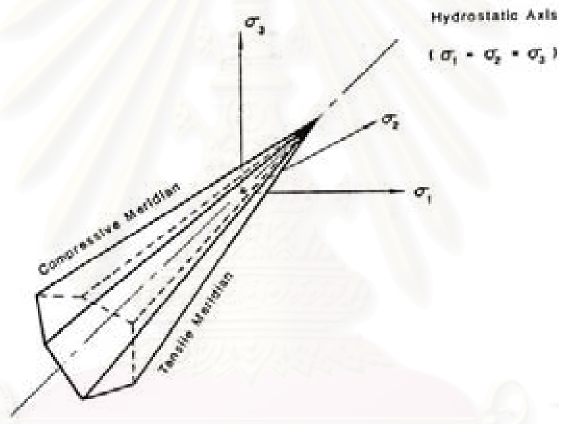
รูปที่ 2.6 แสดง Tresca และ Von Mises Criteria บนระนาบของ π



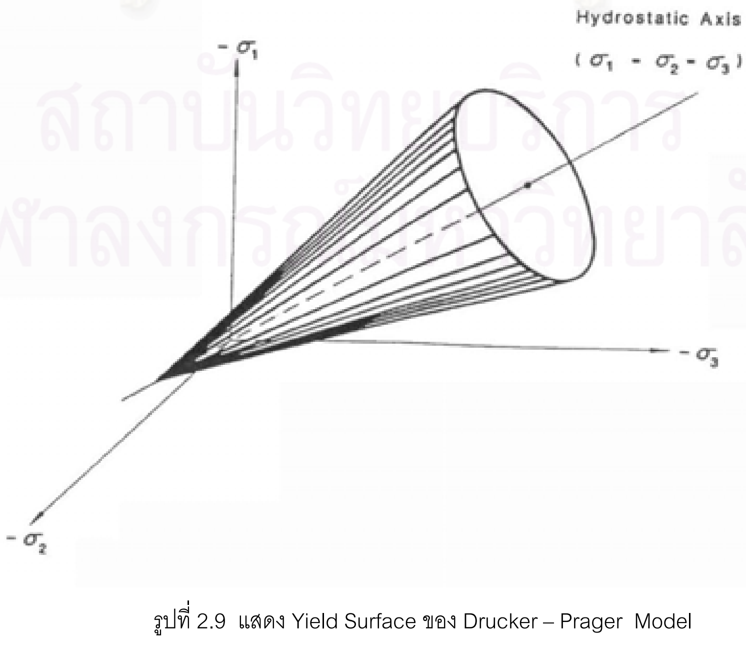
รูปที่ 2.7 (a) แสดง Yield Surface ของ Von Mises Model



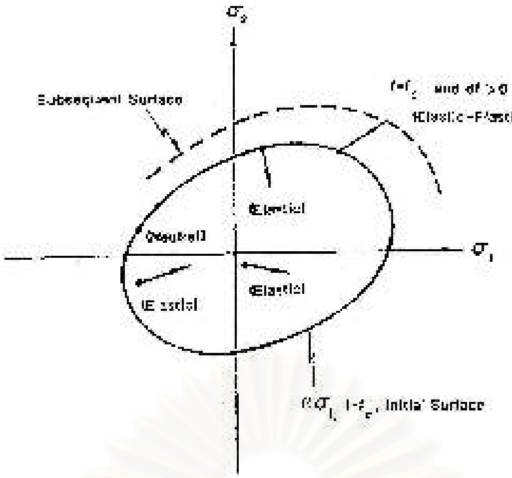
รูปที่ 2.7 (b) แสดง Yield Surface ของ extand Von Mises Model



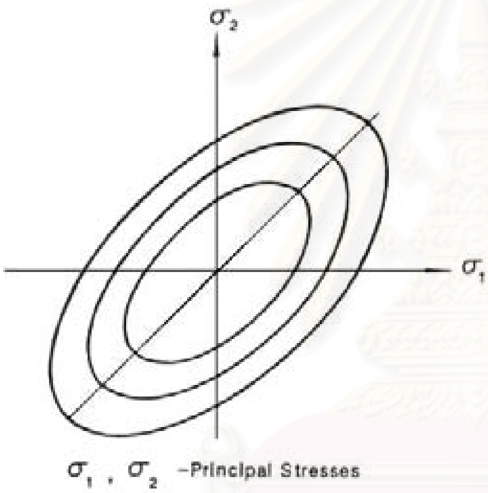
รูปที่ 2.8 แสดง Yield Surface ของ Coulomb Model



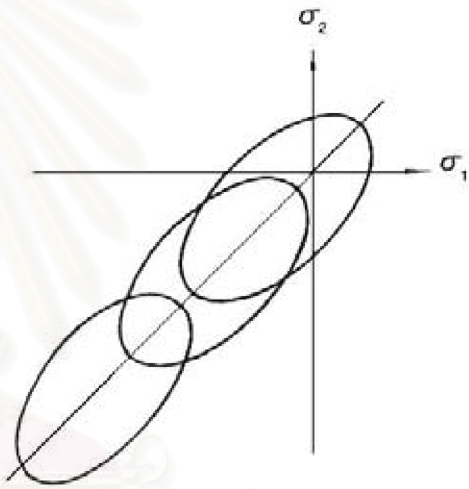
รูปที่ 2.9 แสดง Yield Surface ของ Drucker – Prager Model



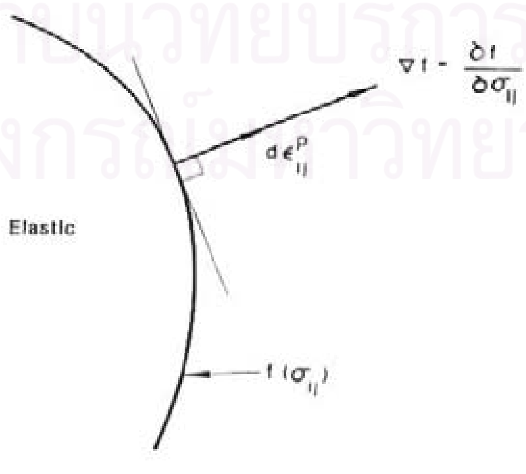
รูปที่ 2.10 แสดง Yield Surface ของวัสดุประเภท Hardening Material



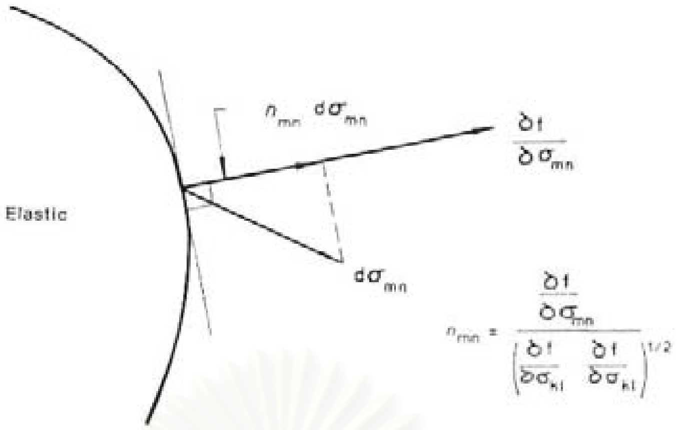
รูปที่ 2.11 (a) Isotropic Hardening



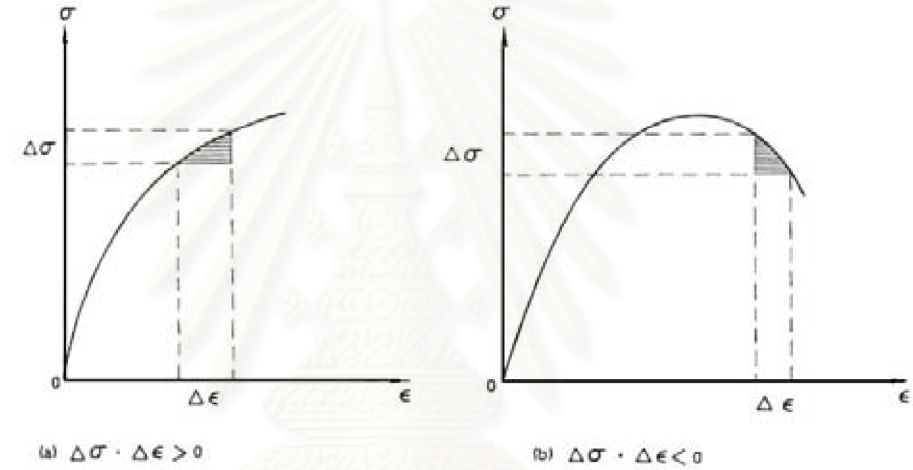
รูปที่ 2.11 (b) kinematic Hardening



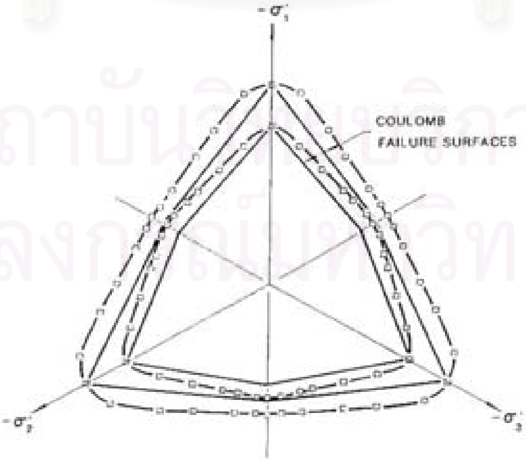
รูปที่ 2.12 แสดงทิศทางของ Plastic Strain



รูปที่ 2.13 แสดงขนาดของ Plastic Strain เป็นสัดส่วนกับ Stress Increment ในทิศทางของ normal Stress

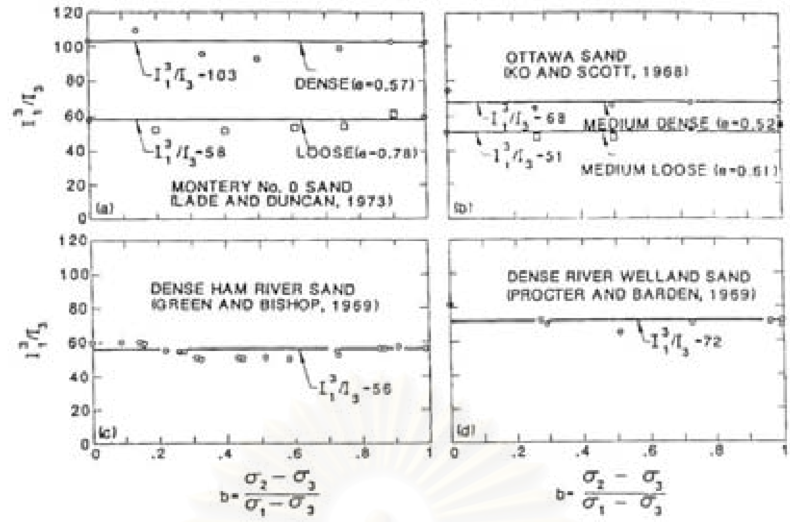


รูปที่ 2.14 Drucker 's Stability Postulate สำหรับวัสดุประเภทที่มี Hardening (a) Stable Material (b) Unstable Material

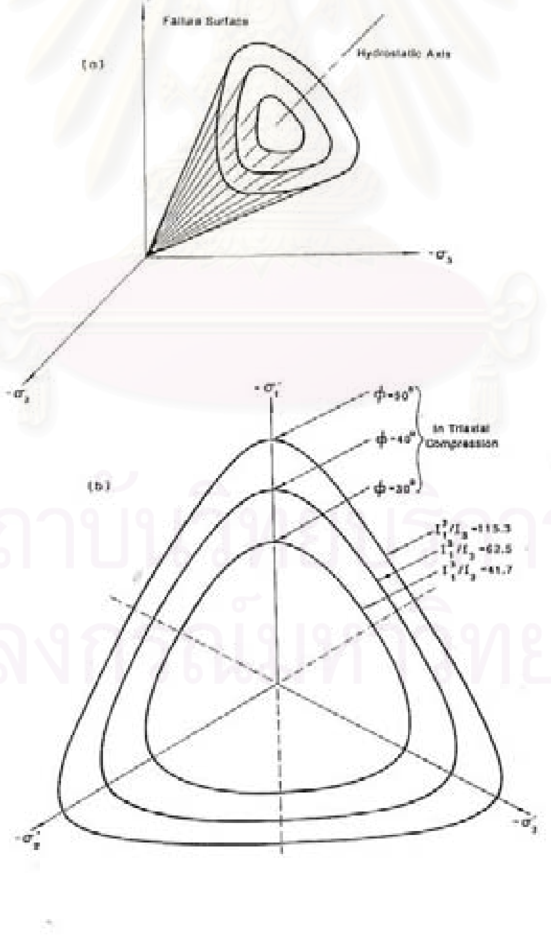


รูปที่ 2.15 Failure Surface บน Deviatoric Plane สำหรับดินทรายอัดแน่นและไม่แน่น ที่ Manterey No. 1

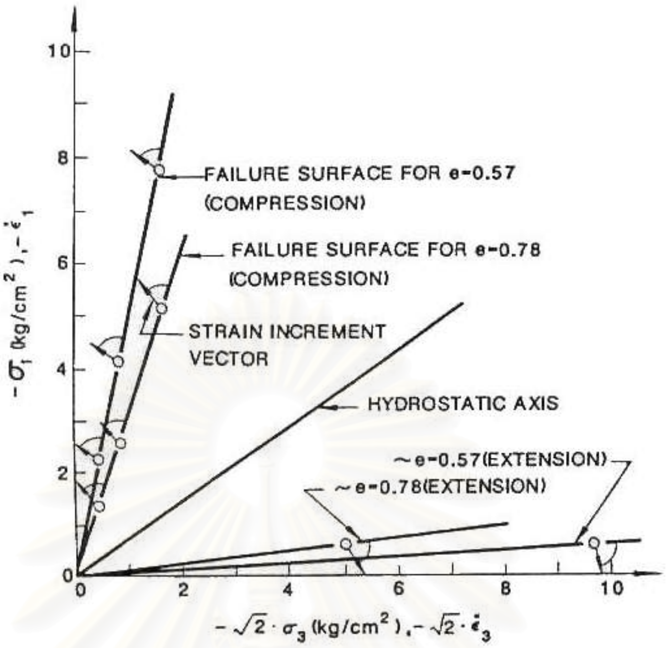
(Lade and Duncan ,1973)



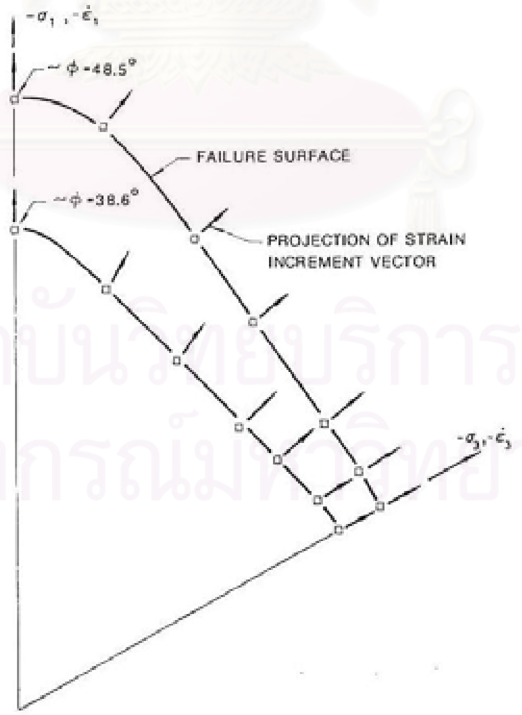
รูปที่ 2.16 การเปรียบเทียบของ Failure Criteria จากผลทดสอบจาก Cubical Triaxial จากทราย 4 ตัวอย่าง (Lade and Duncan , 1975)



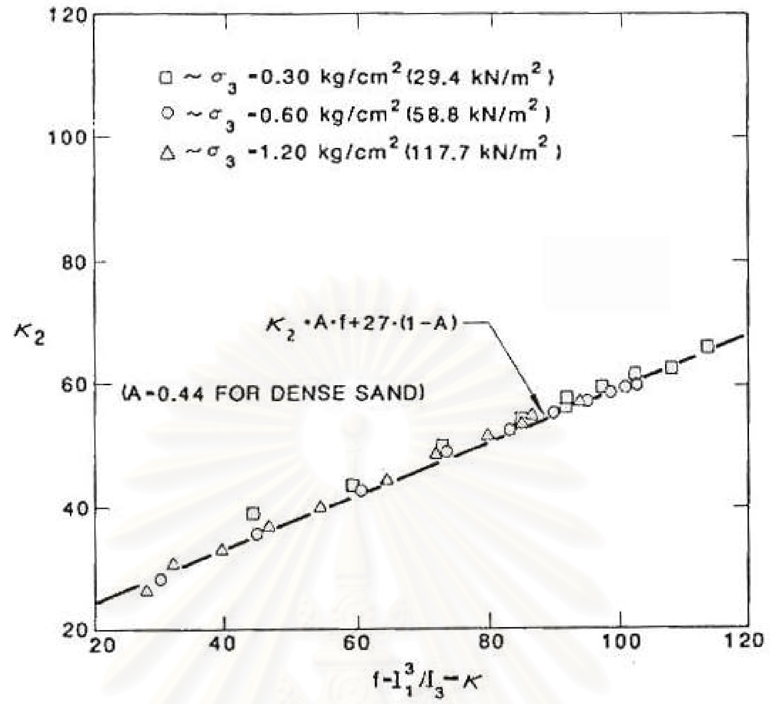
รูปที่ 2.17 (a) General Shape ของ Principal Stress Space (b) Cross Section บนระนาบ π (Lade and Duncan Model , 1975)



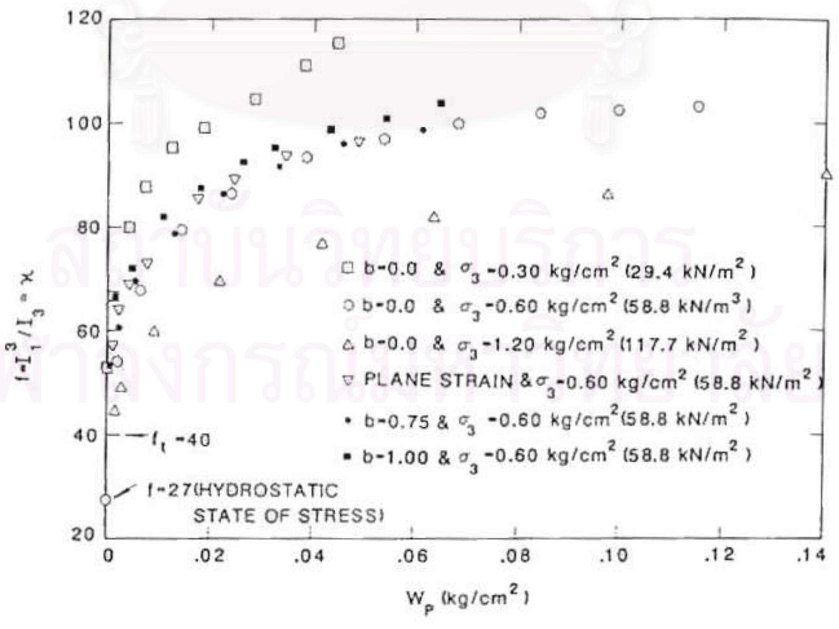
รูปที่ 2.18 ทิศทางของ Strain Increment Vector ใน Triaxial Plane สำหรับดินทรายอัดแน่นและอัดไม่แน่น Monterey No. 0 (Lade and Duncan , 1973)



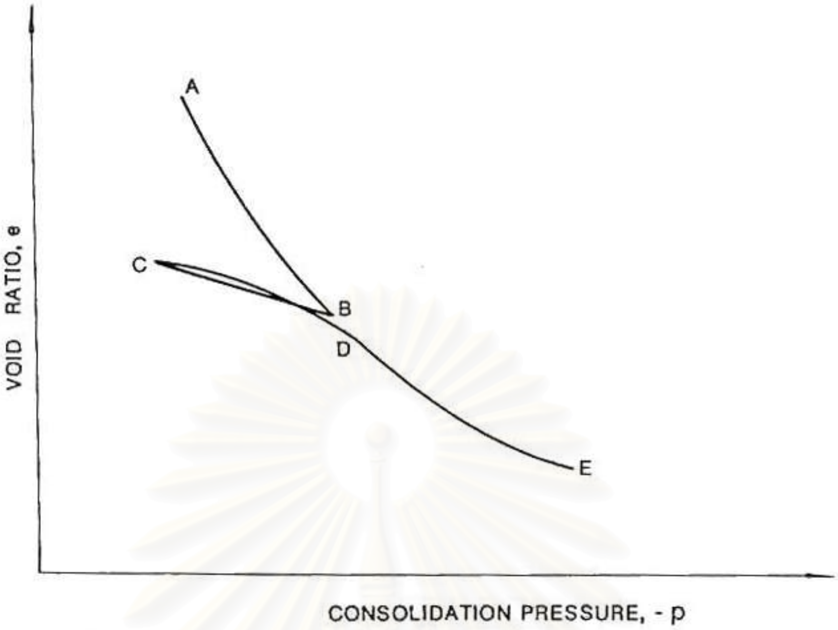
รูปที่ 2.19 ทิศทางของ Strain Increment Vector สำหรับดินทรายอัดแน่นและอัดไม่แน่น



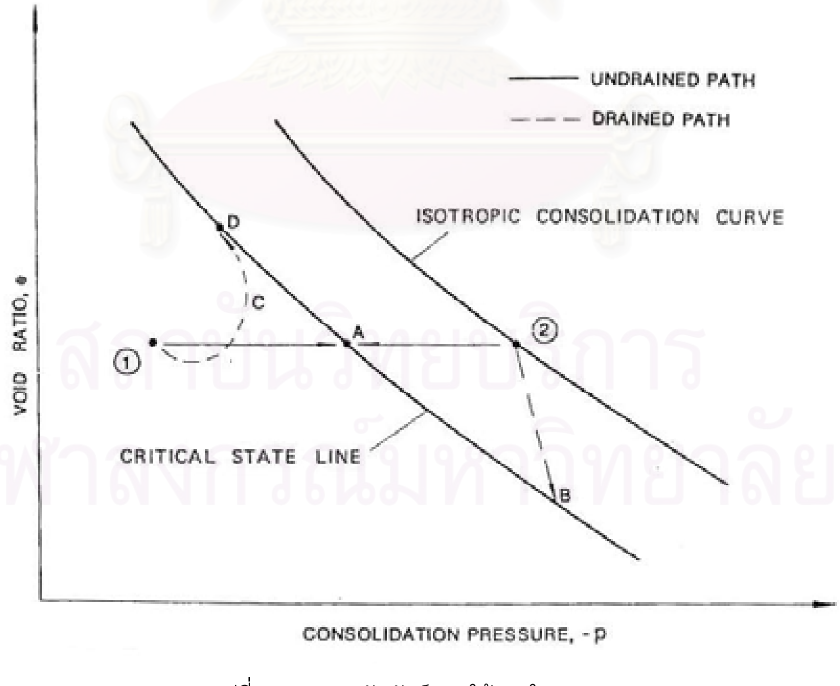
รูปที่ 2.20 การเปลี่ยนแปลงค่า κ_2 กับ $f = \frac{I_1^{\ 3}}{I_3}$ สำหรับดินทรายอัดแน่นที่ Monterey No.0 (Lade and Duncan , 1975)



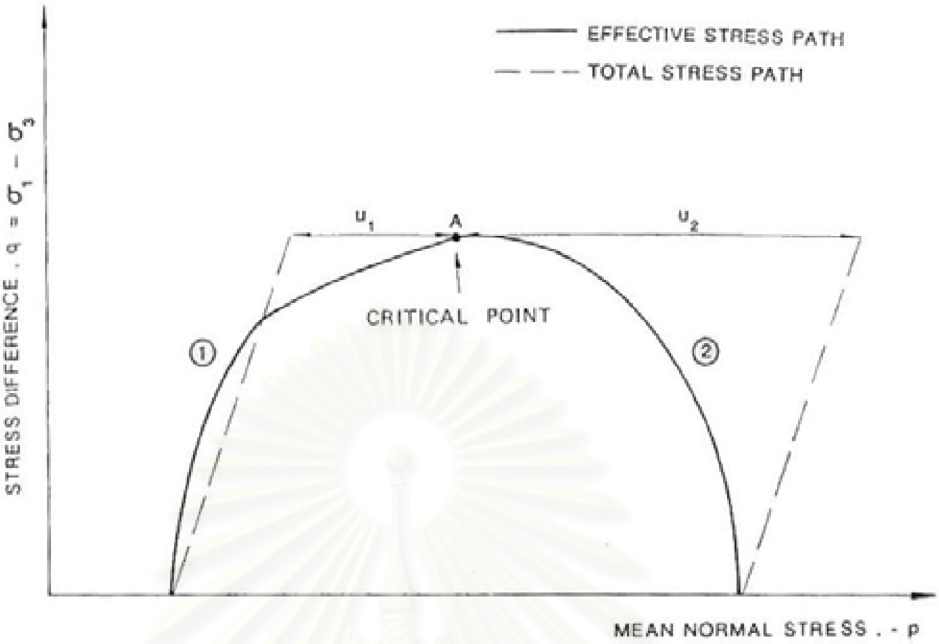
รูปที่ 2.21 ความสัมพันธ์ระหว่างงานที่เกิดจาก Plastic Work และ Stress Level สำหรับดินทรายอัดแน่นที่ Monterey No.0 (Lade and Duncan , 1975)



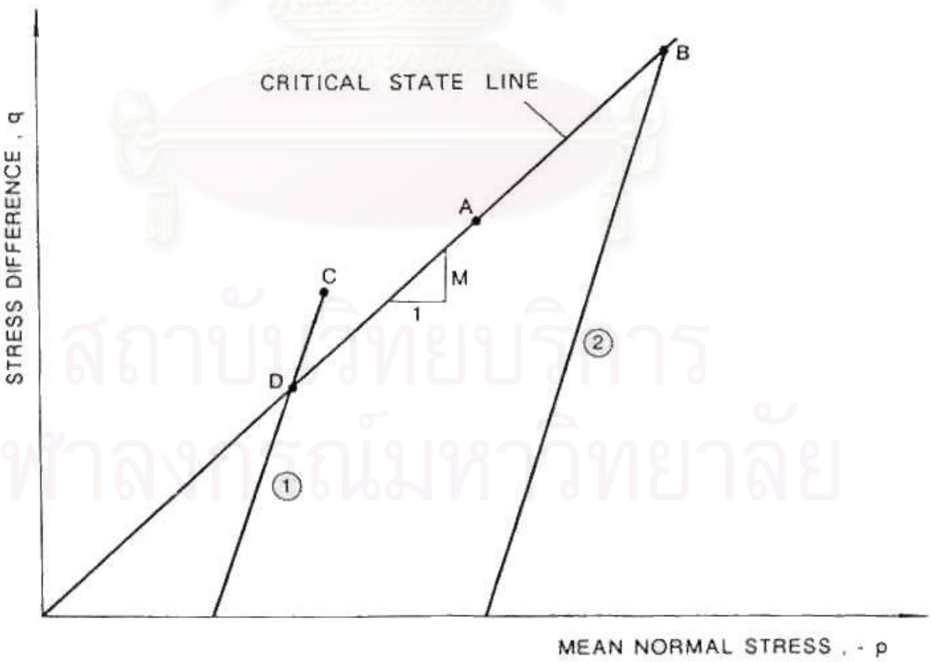
รูปที่ 2.22 Isotropic Consolidation Curve



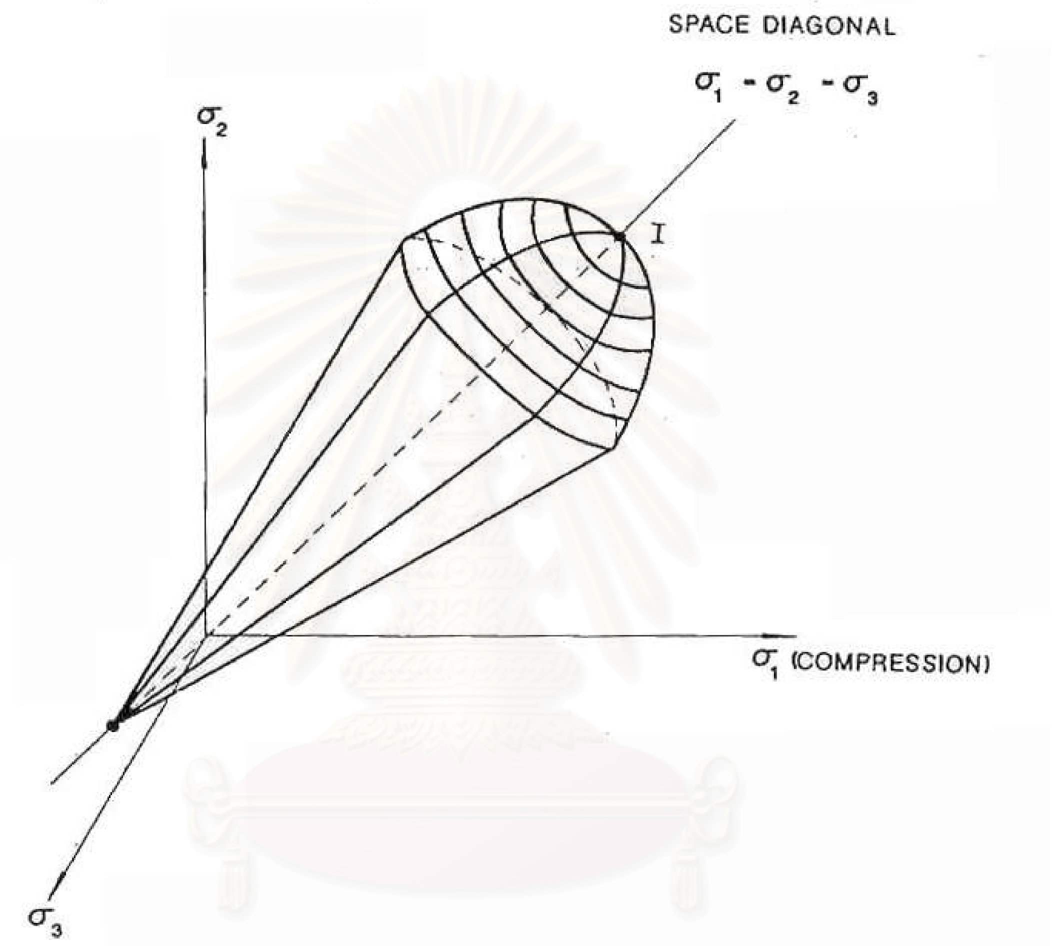
รูปที่ 2.23 ความสัมพันธ์ขณะให้แรง ในระนาบ e – p



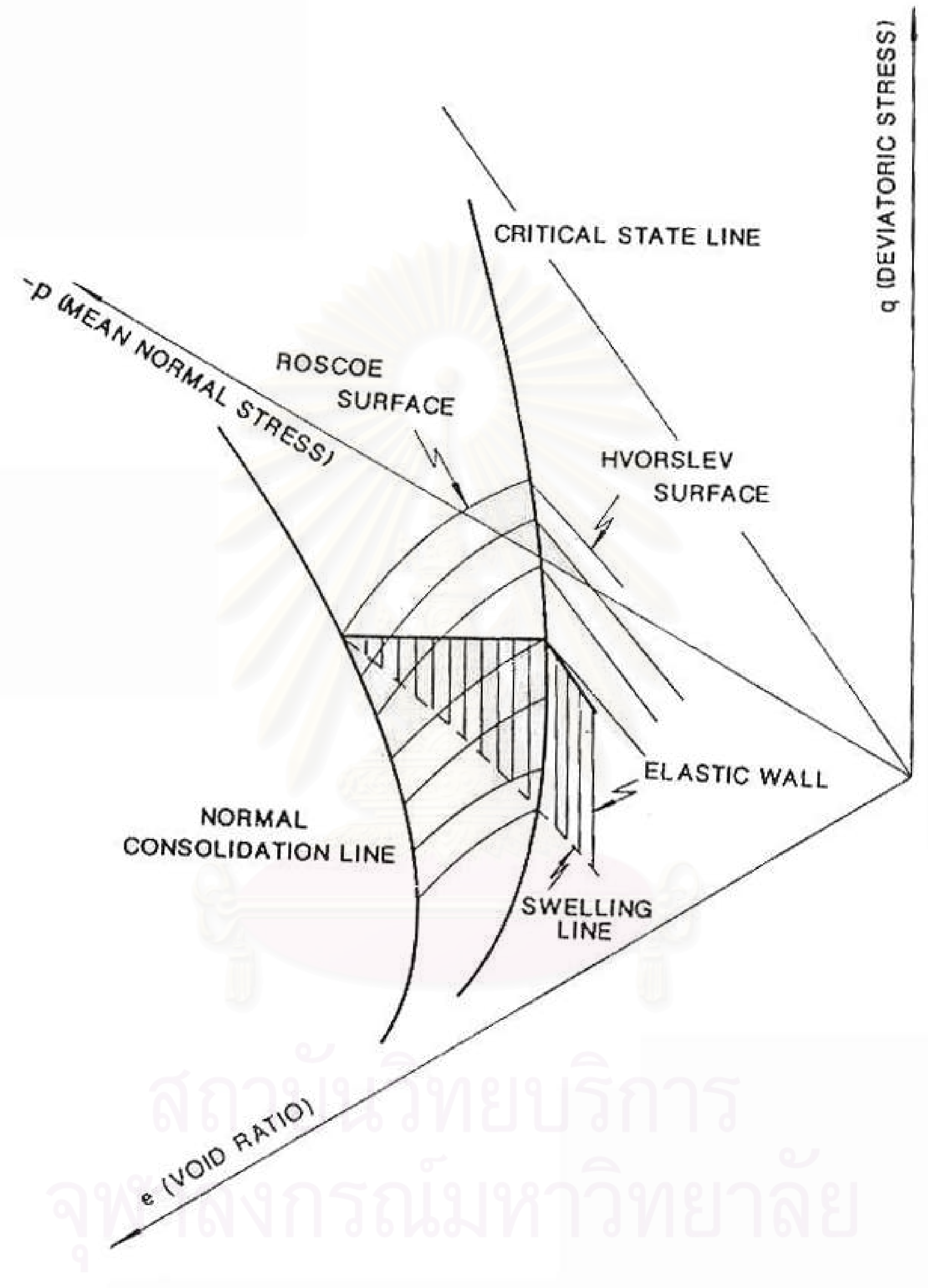
รูปที่ 2.24 Stress Path ของการทดสอบ Consolidated Undrained



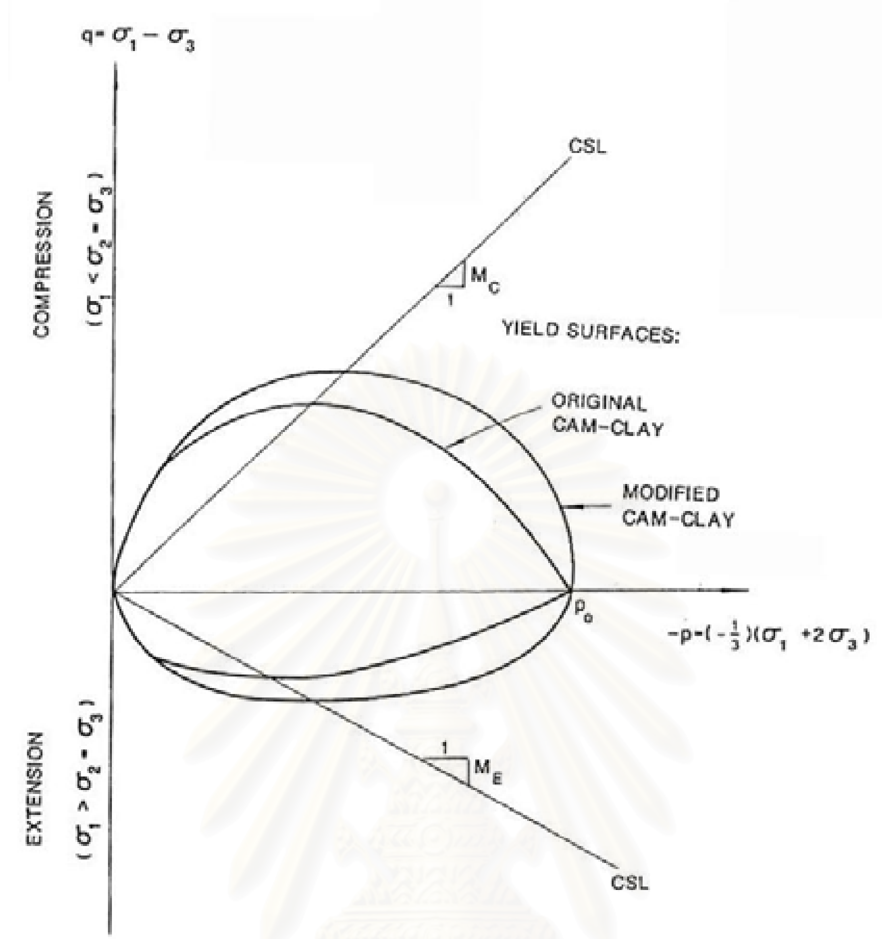
รูปที่ 2.25 Stress Path ของการทดสอบ Consolidated drained



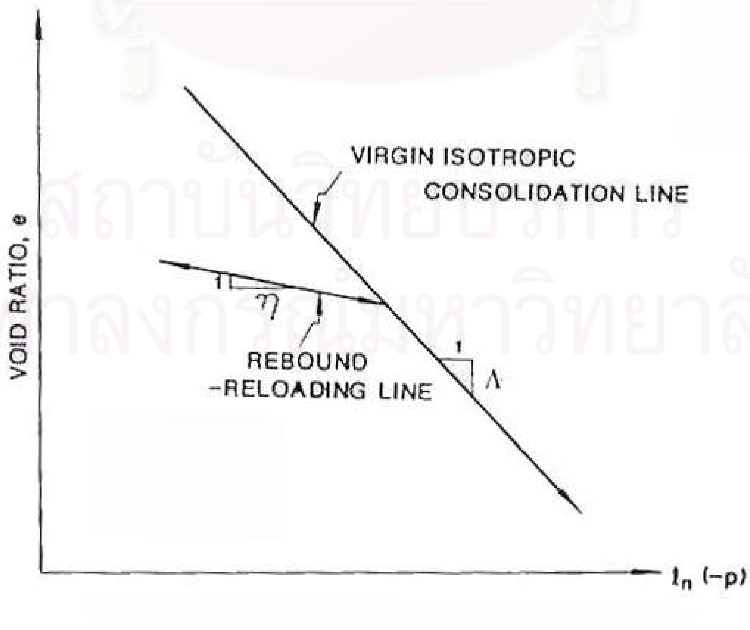
รูปที่ 2.26 การใช้ Drucker – Prager ร่วมกับแบบจำลองที่มี Strain Hardening เข้ามาด้วย



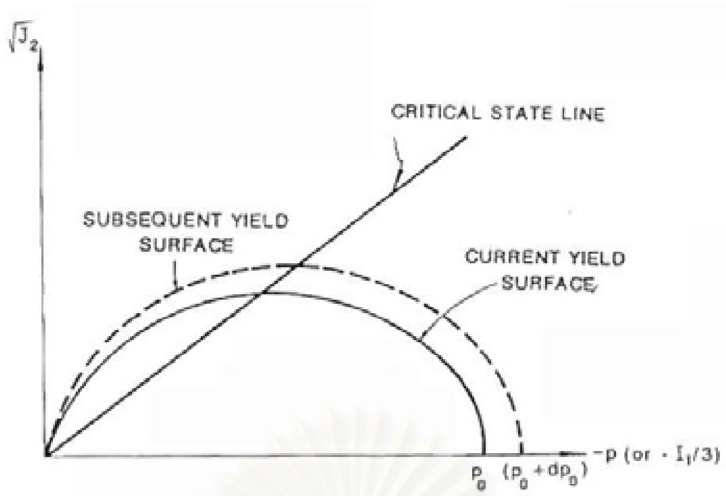
รูปที่ 2.27 State Boundary surface และ elastic wall



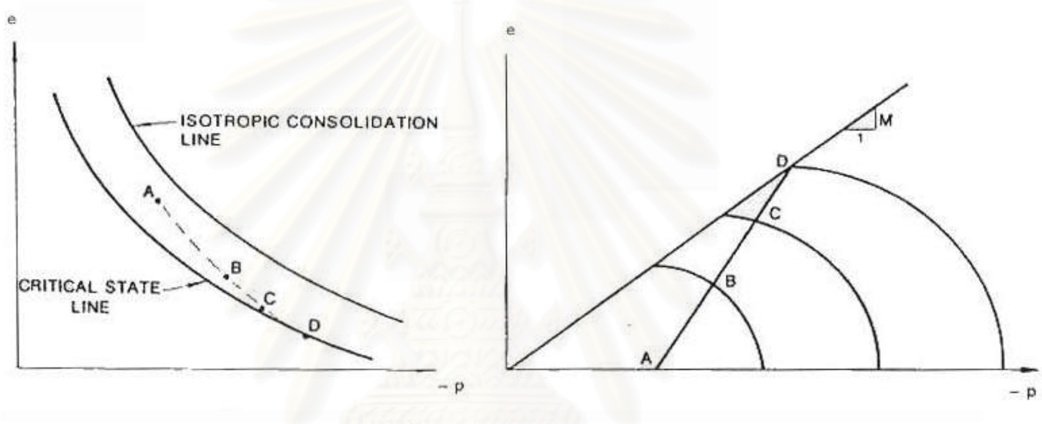
รูปที่ 2.28 Cam – clay yield surface ของระนาบ p - q



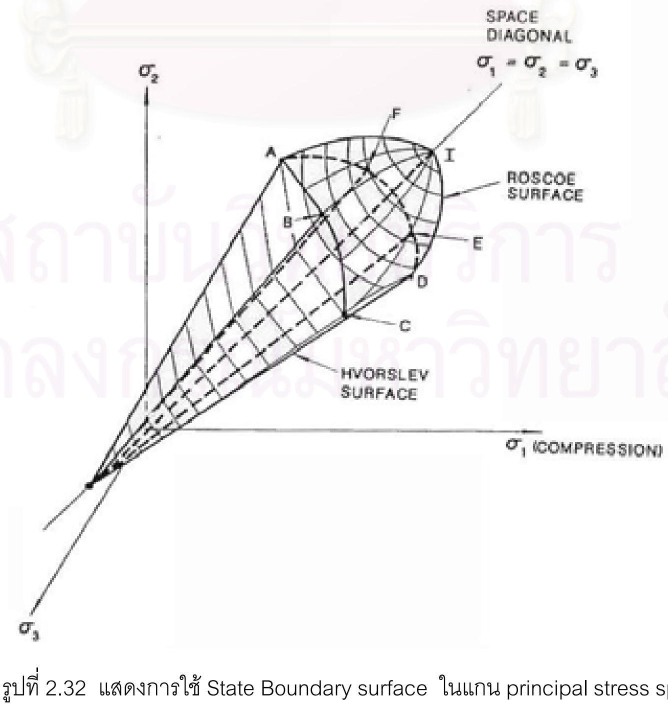
รูปที่ 2.29 ความสัมพันธ์ของดินกับ hydrostatic pressure ในสมมุติฐานของ Modified – Cam clay Model



รูปที่ 2.30 Modified Cam – clay yield surface ในแกน $p-\sqrt{J_2}$

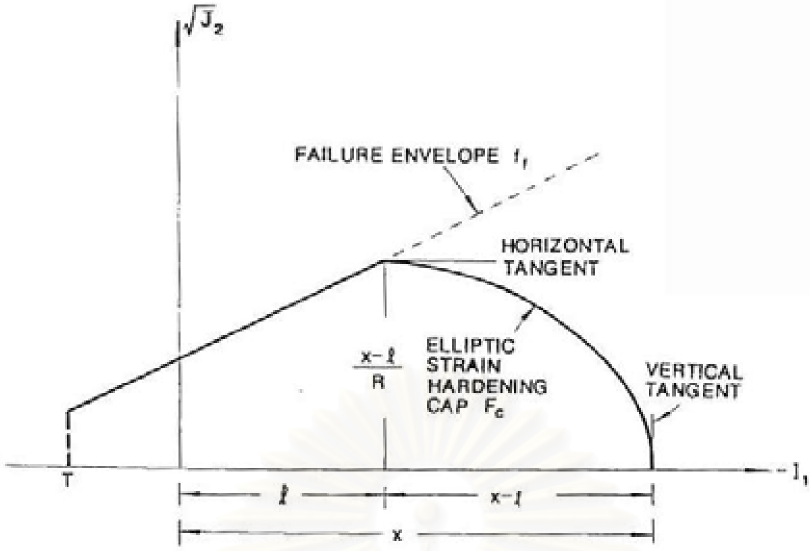


รูปที่ 2.31 Modified Cam – clay ของการเกิด Hardening (a) แกน e – p (b) แกน p - q

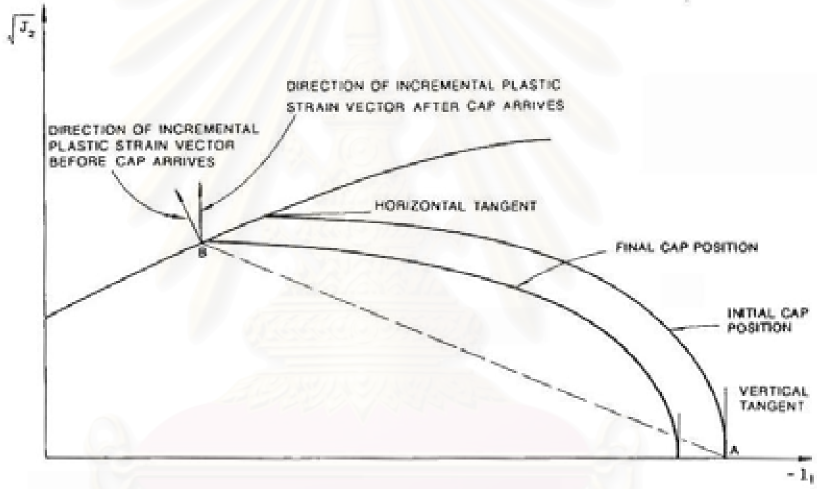


รูปที่ 2.32 แสดงการใช้ State Boundary surface ในแกน principal stress space

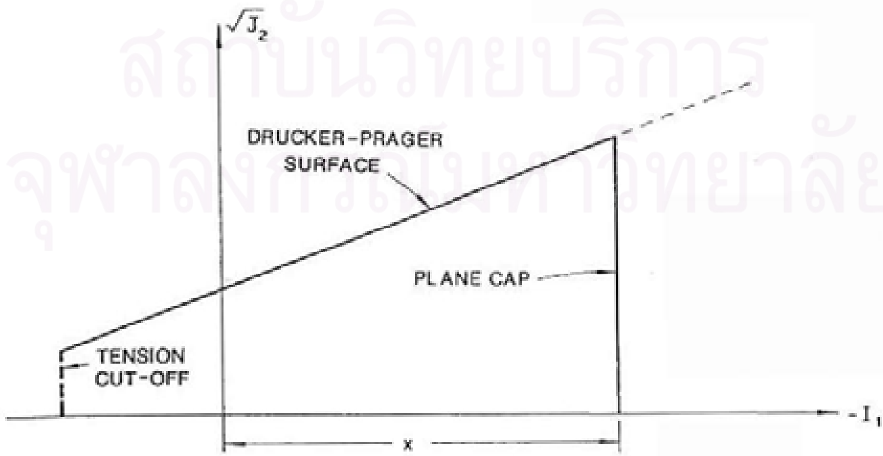
โดยใช้ร่วมกับ strain – hardening cap model (Atkinson and Bransby , 1978)



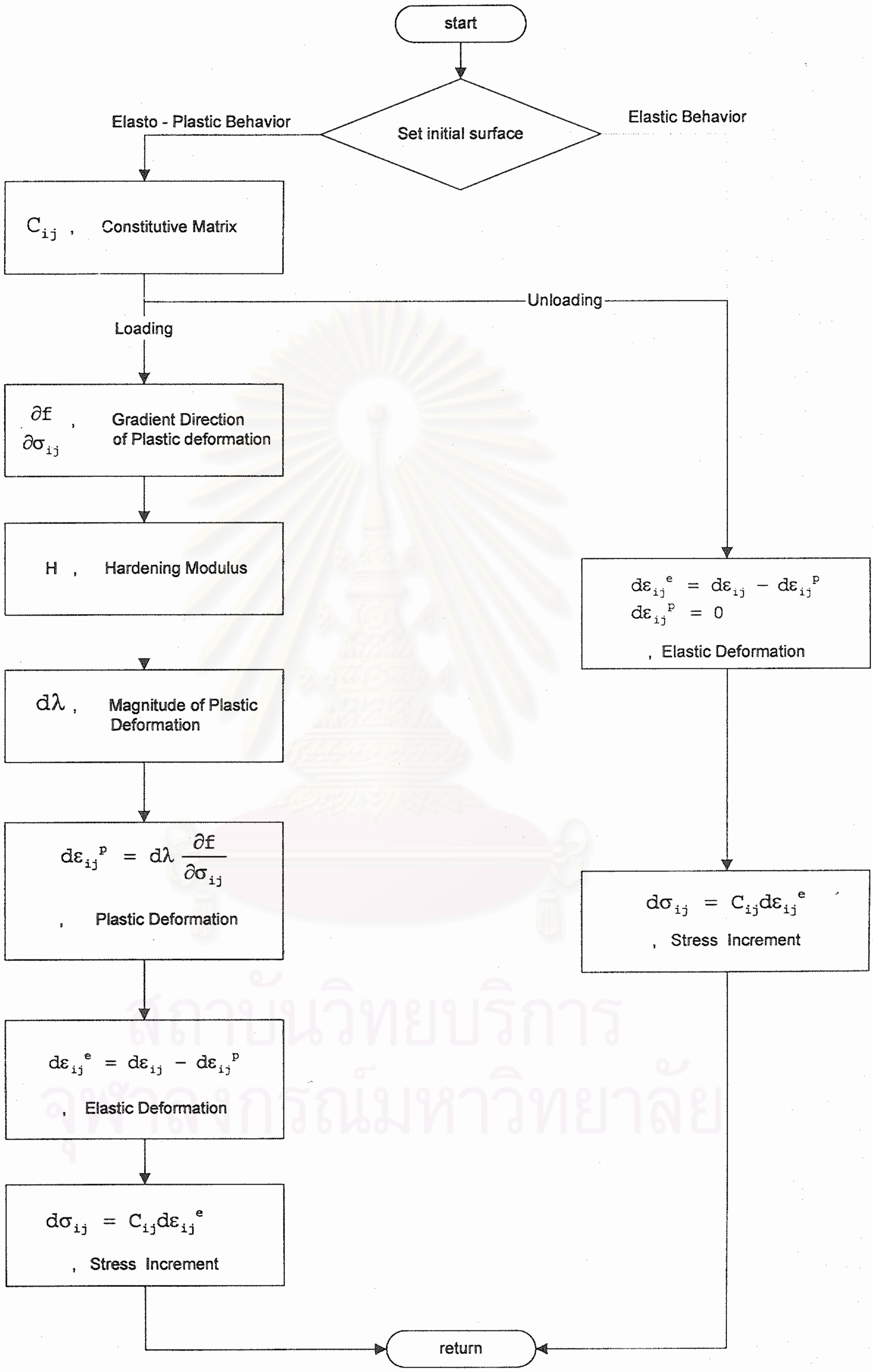
รูปที่ 2.33 Elliptic cap model ในแกน $I_1 - \sqrt{J_2}$



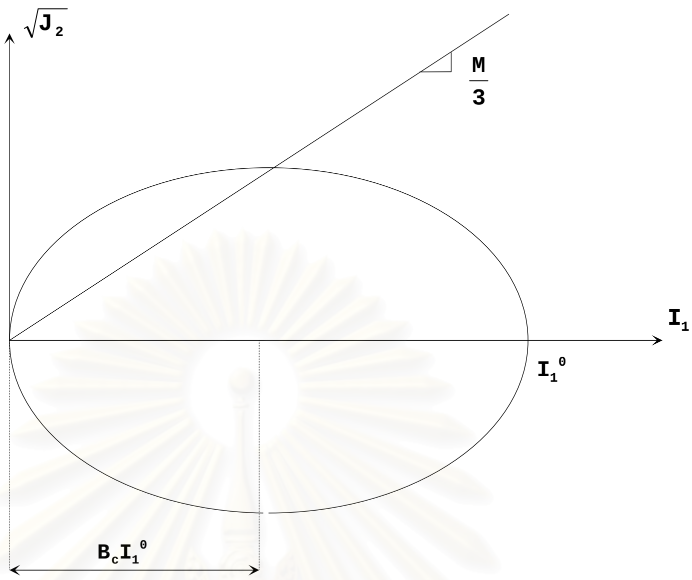
รูปที่ 2.34 การควบคุม plastic dilatation ของ cap model



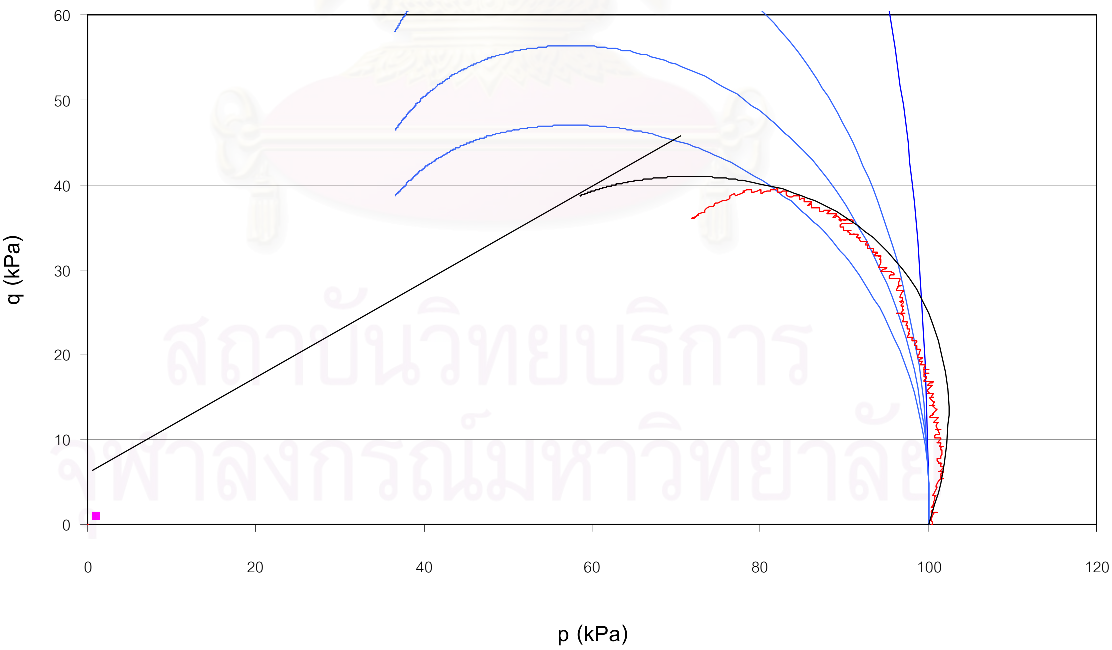
รูปที่ 2.35 cap model แบบระนาบ ในแกนของ $I_1 - \sqrt{J_2}$



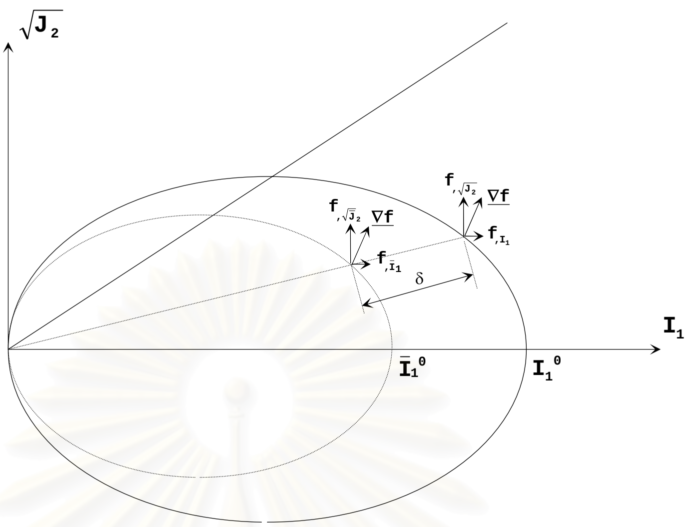
รูปที่ 3.1 แสดง flow chart ของการคำนวณ



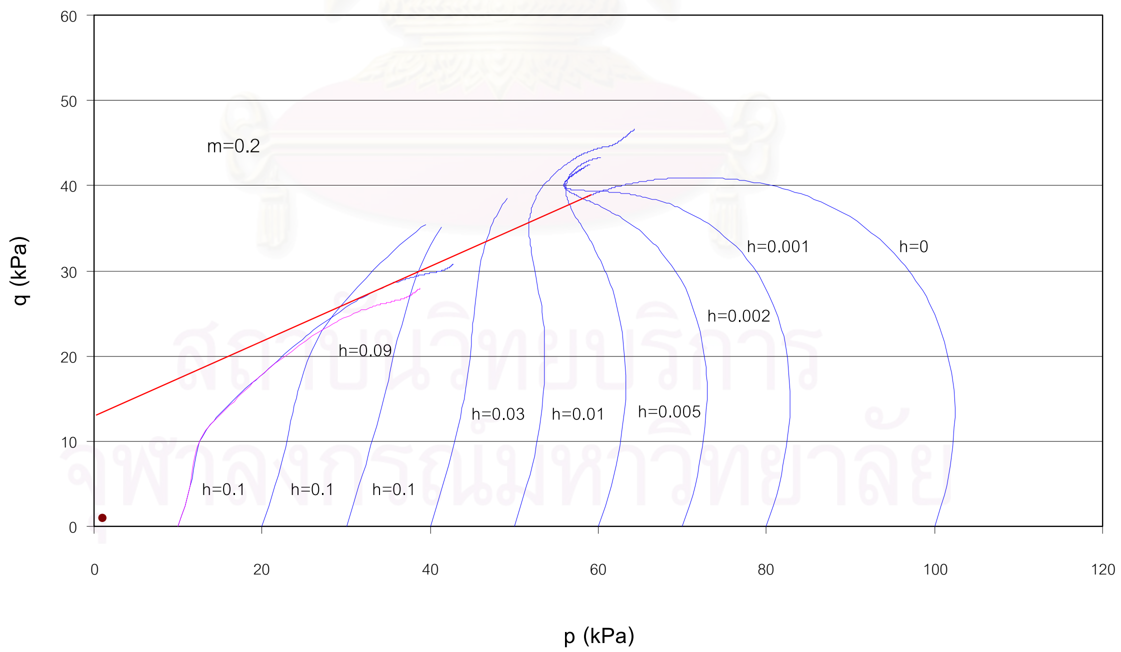
รูปที่ 4.1 แสดง Yield Surface ของแบบจำลองที่ปรับปรุงใหม่



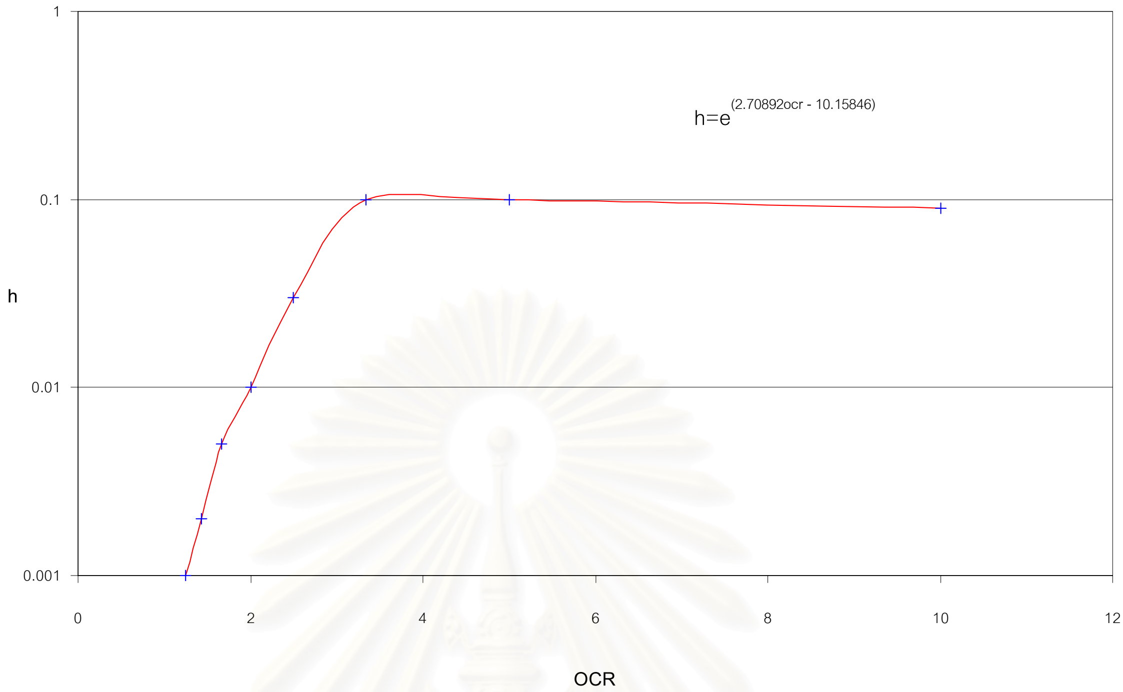
รูปที่ 4.2 แสดง stress – path ของ Modified Cam – Clay เปรียบเทียบกับแบบจำลองที่ปรับปรุง Yield Surface ใหม่ ซึ่งให้ผลการคำนวณที่ปรับแก้กับผลทดสอบที่ดีกว่า



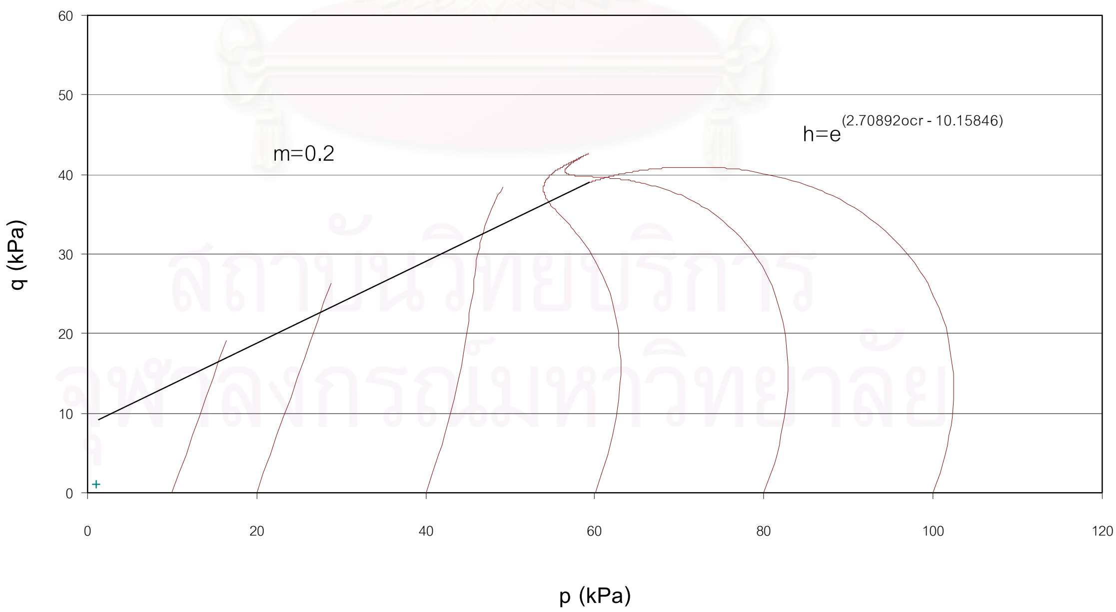
รูปที่ 4.3 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของ Strain Hardening Surface สำหรับ Bounding Surface



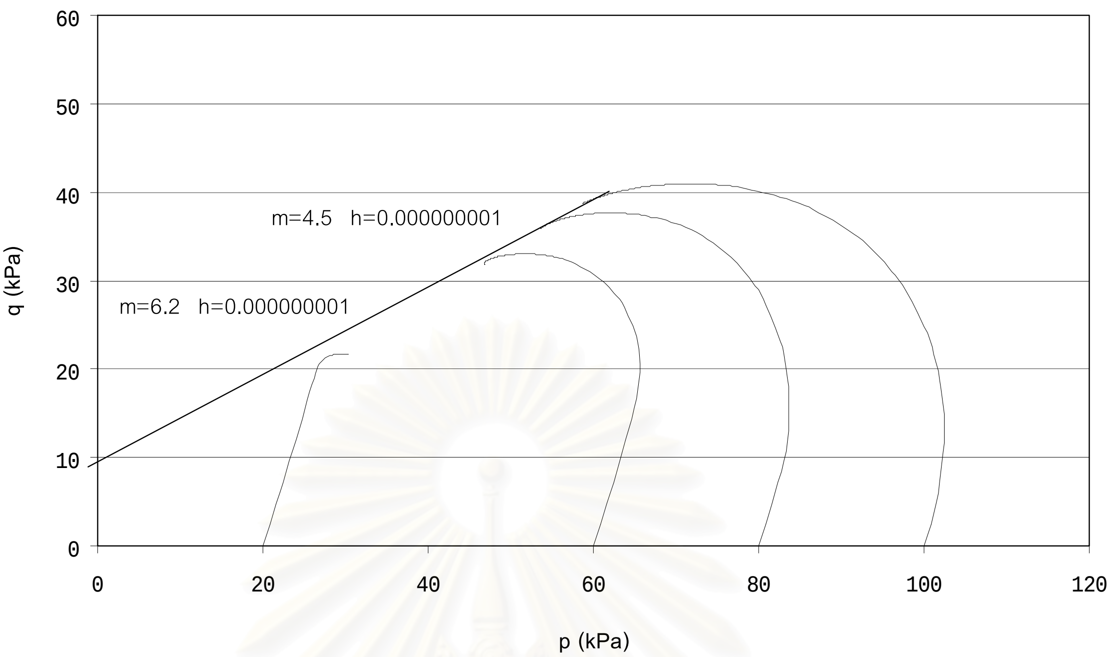
รูปที่ 4.4 แสดง stress – path ของการใช้ Bounding surface โดยเปลี่ยนค่า m , h



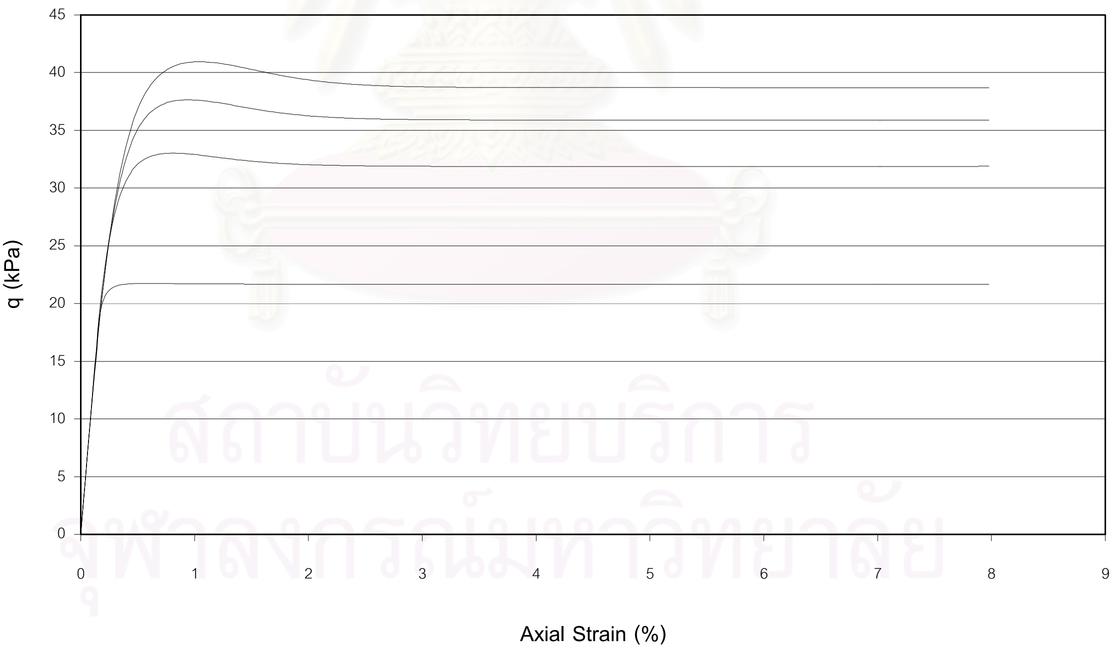
รูปที่ 4.5 แสดง OCR & h ในรูป exponential function สำหรับ Bounding Surface



รูปที่ 4.6 แสดง stress – path ของการใช้ Bounding Surface โดยใช้ exponential function

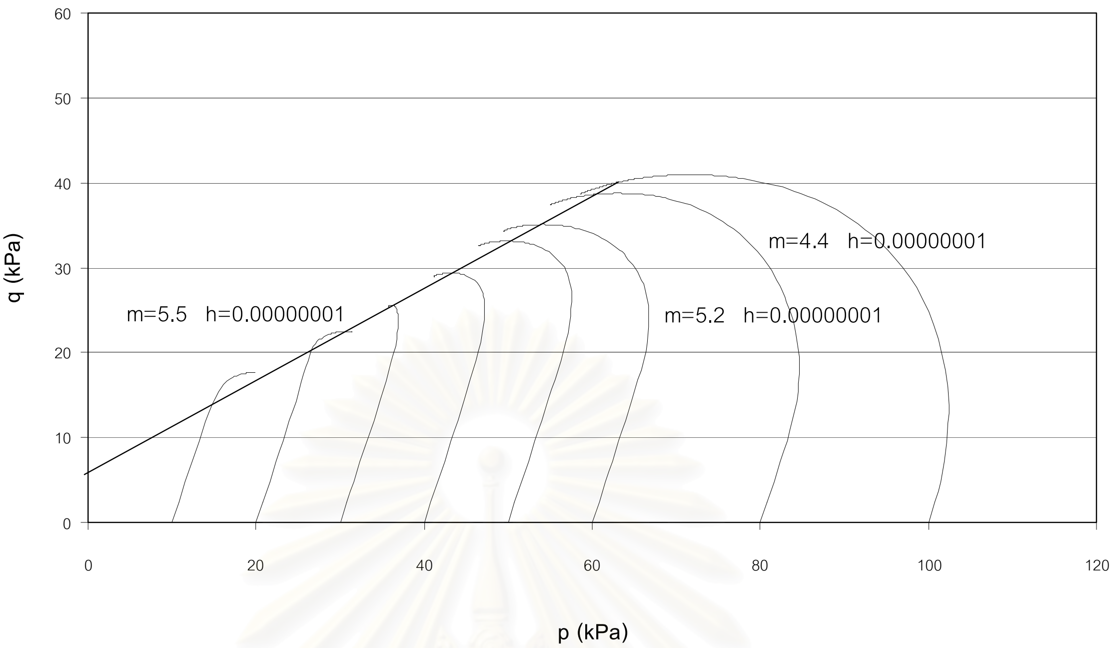


รูปที่ 4.7 แสดง stress – path

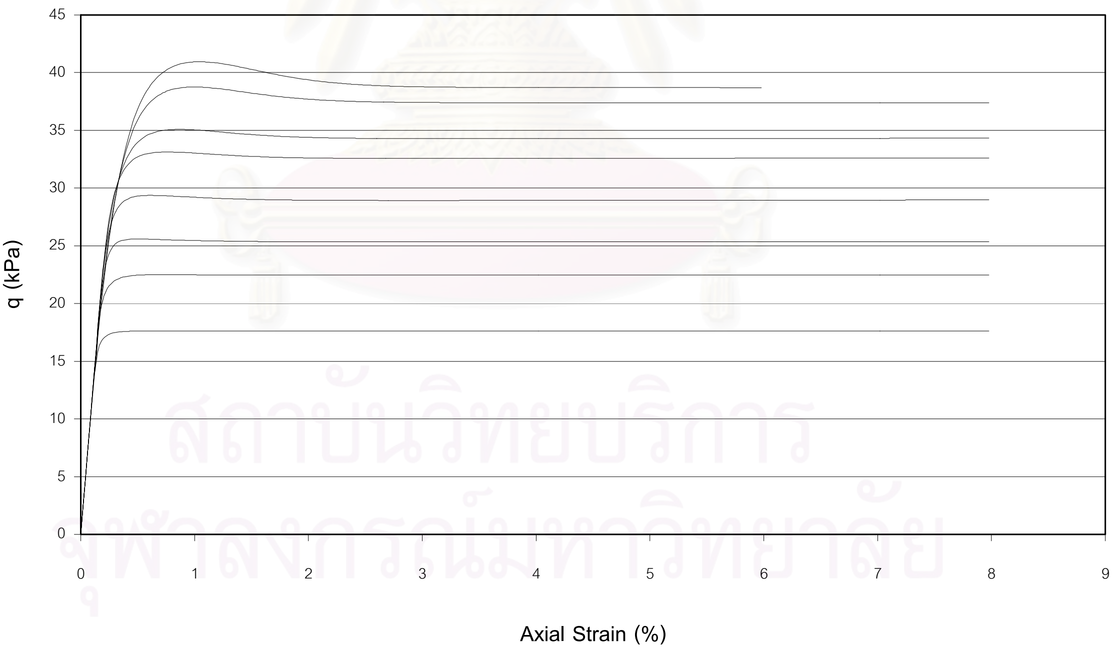


รูปที่ 4.8 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%)

รูปที่ 4.7 และ 4.8 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ตัวแปรตาม รูปที่ 4.17 h=0.000000001

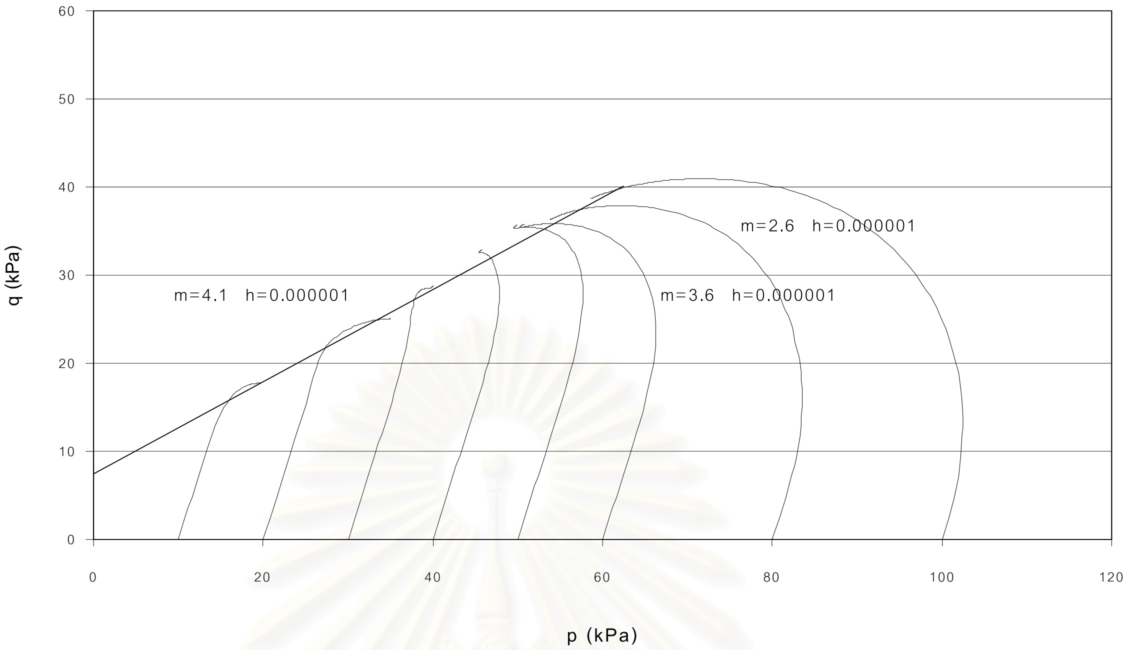


รูปที่ 4.9 แสดง stress - path

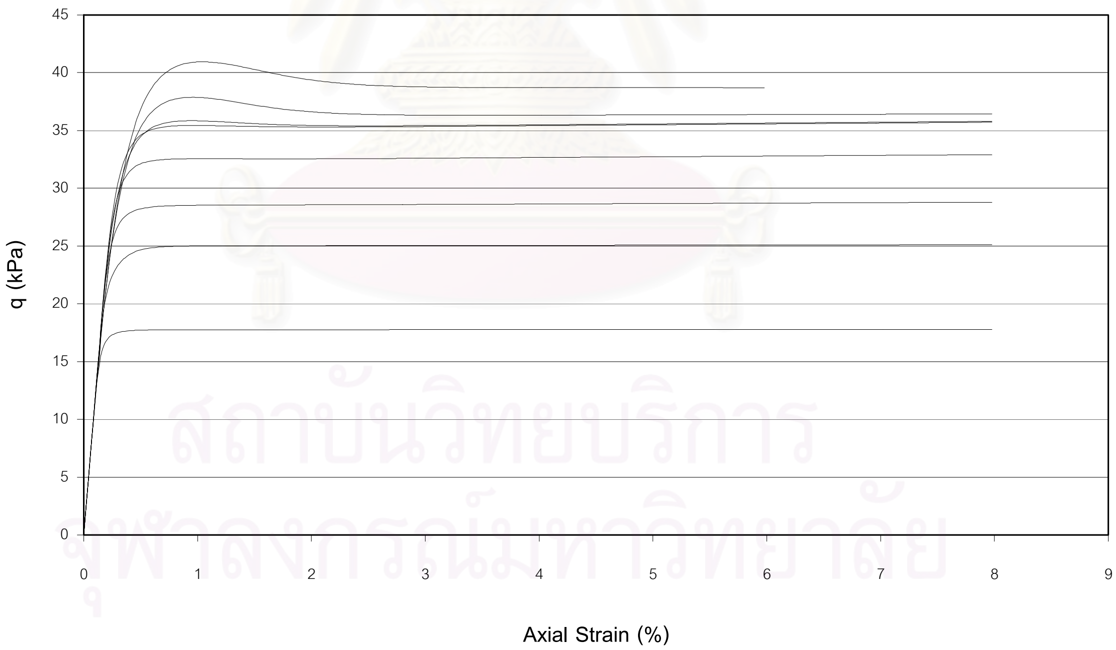


รูปที่ 4.10 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%)

รูปที่ 4.9 และ 4.10 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ตัวแปรตาม รูปที่ 4.17 h=0.00000001

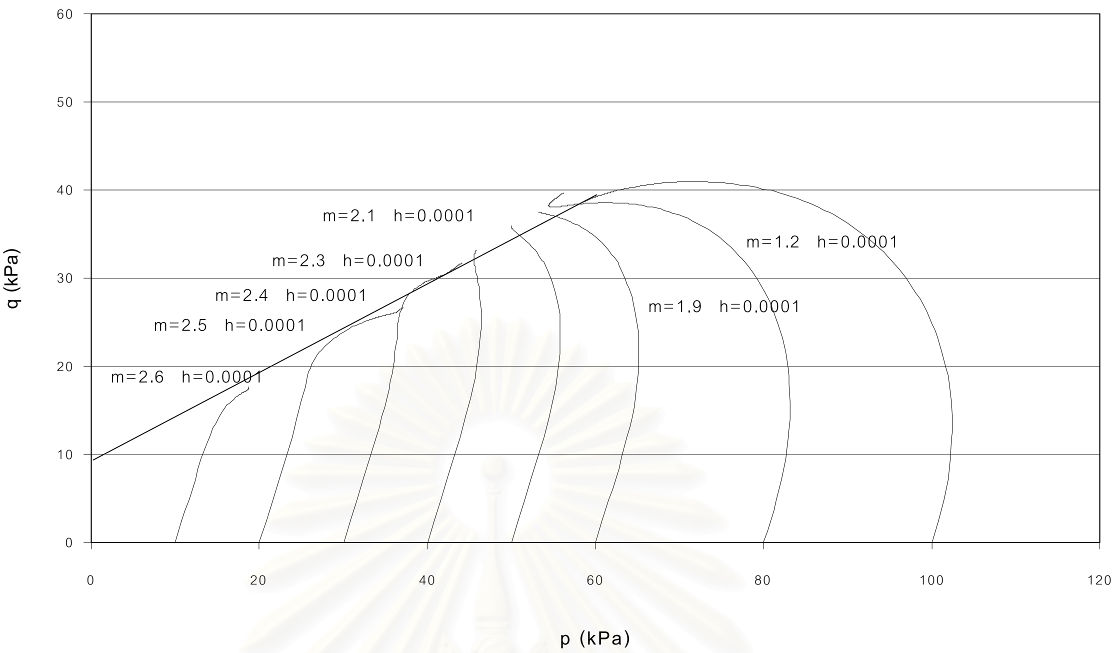


รูปที่ 4.11 แสดง stress - path

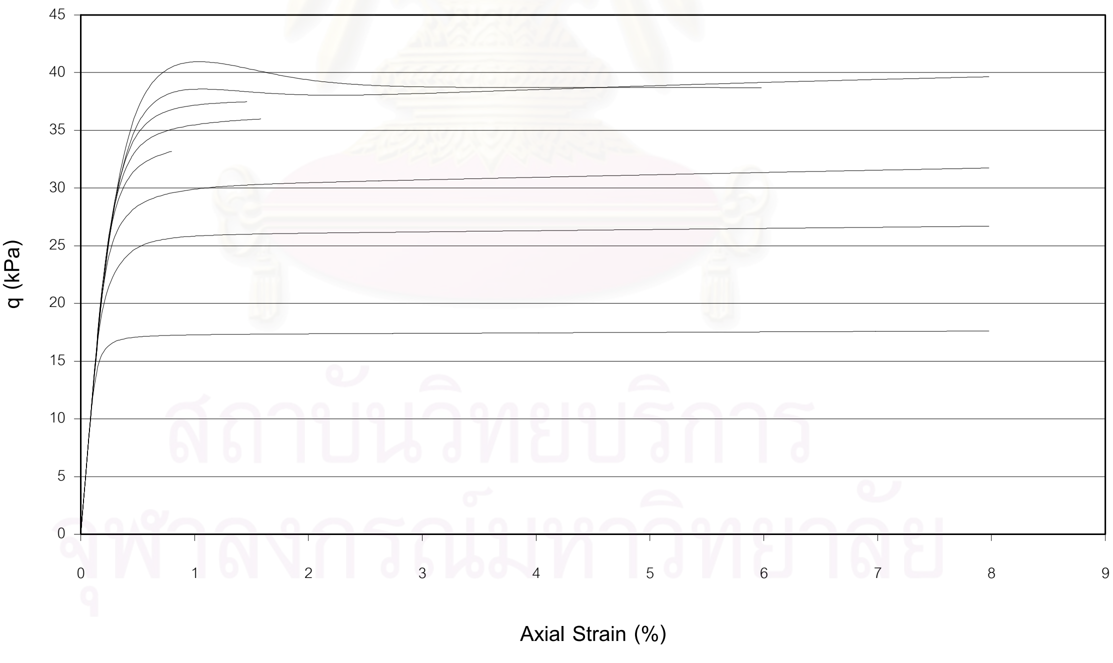


รูปที่ 4.12 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%)

รูปที่ 4.11 และ 4.12 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ตัวแปรตาม รูปที่ 4.17 h=0.000001

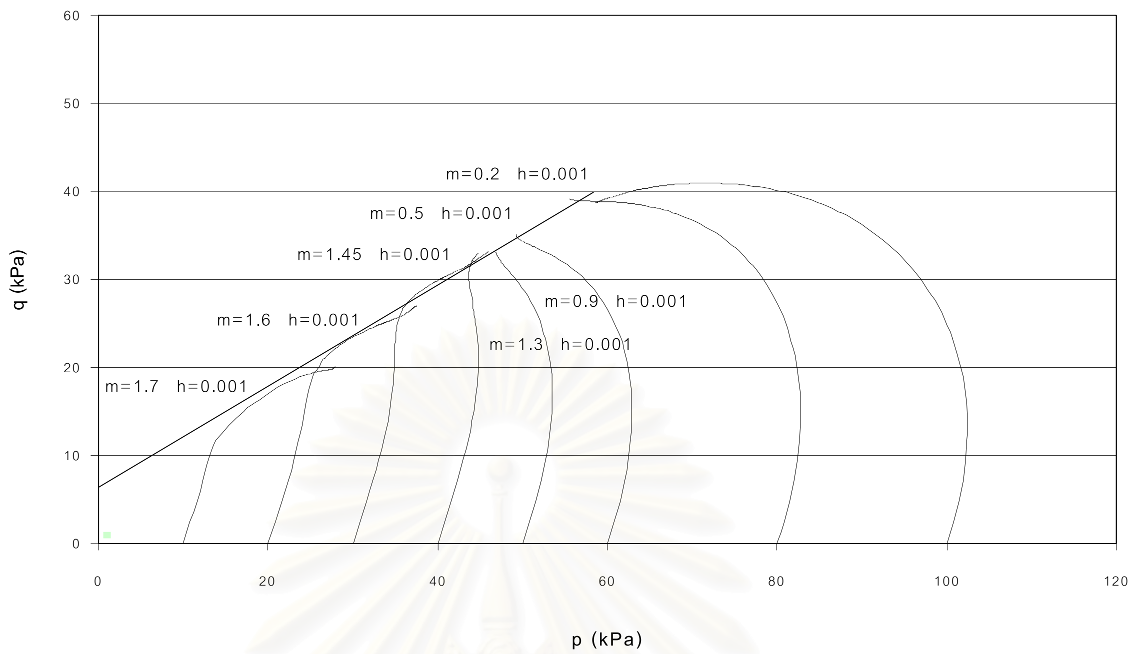


รูปที่ 4.13 แสดง stress - path

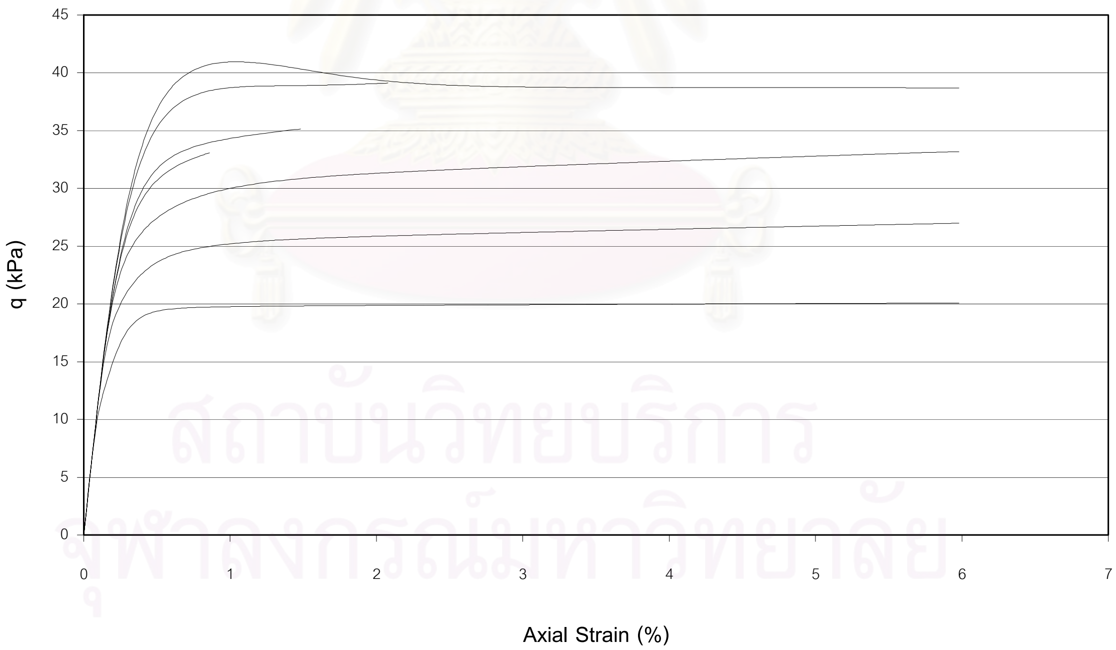


รูปที่ 4.14 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%)

รูปที่ 4.13 และ 4.14 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ตัวแปรตาม รูปที่ 4.17 h=0.0001

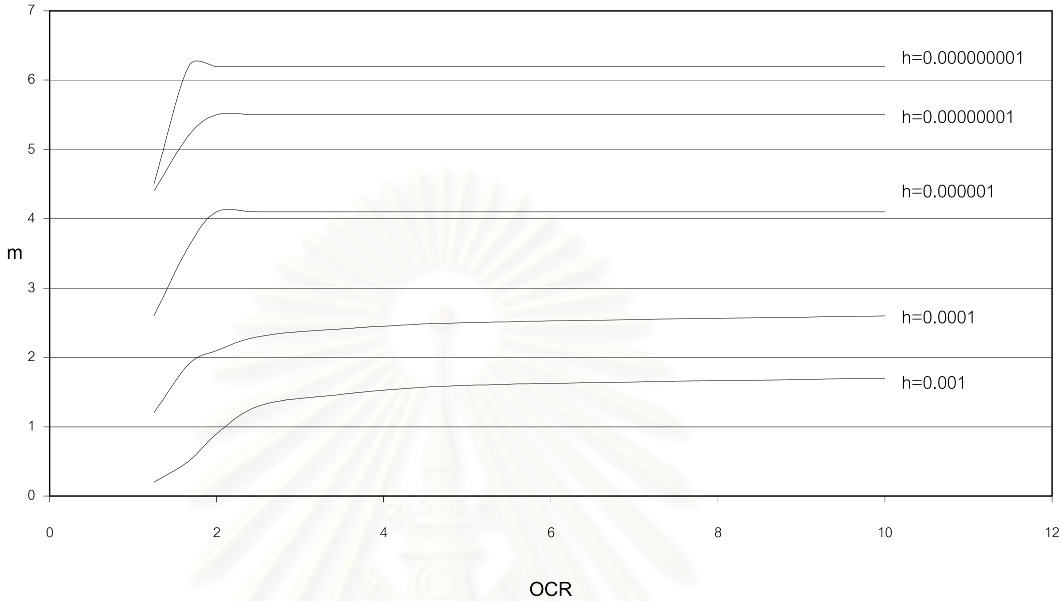


รูปที่ 4.15 แสดง stress - path



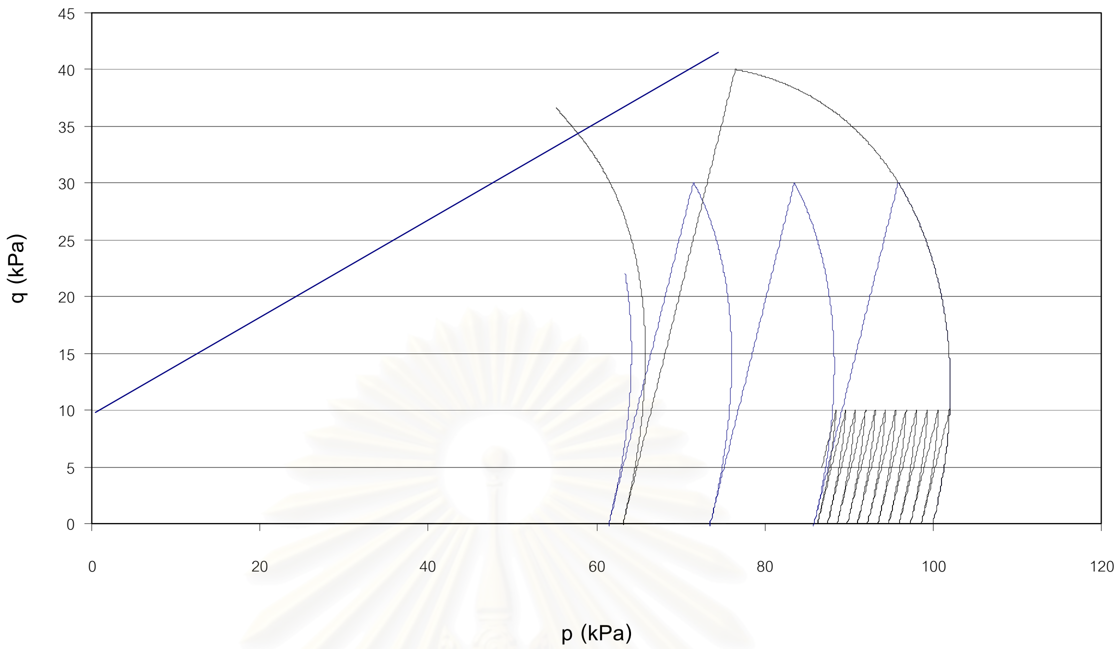
รูปที่ 4.16 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%)

รูปที่ 4.15 และ 4.16 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ตัวแปรตาม รูปที่ 4.17 h=0.001

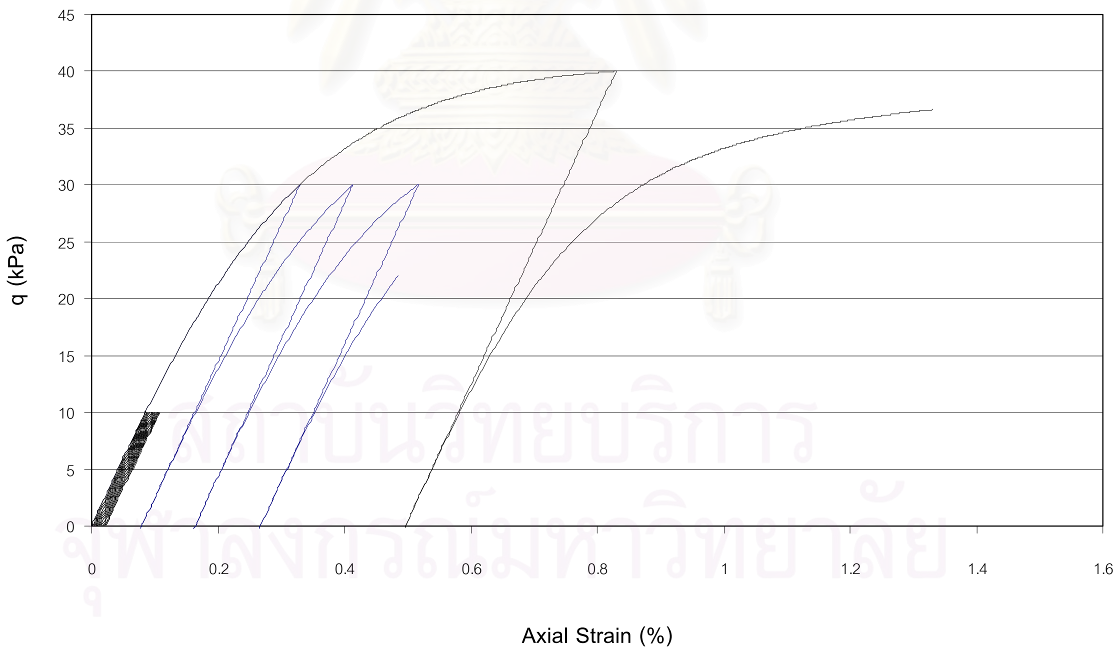


รูปที่ 4.17 แสดง OCR & m ที่ค่า h ต่างกัน เพื่อใช้กับ Bounding Surface ,

$$H(I_1, \sqrt{J_2}, \varepsilon_{kk}{}^{p}) = \frac{(1+e)}{(\lambda-\kappa)}\left(1+\left|\frac{M_c}{\eta}\right|^{m}\right)h$$

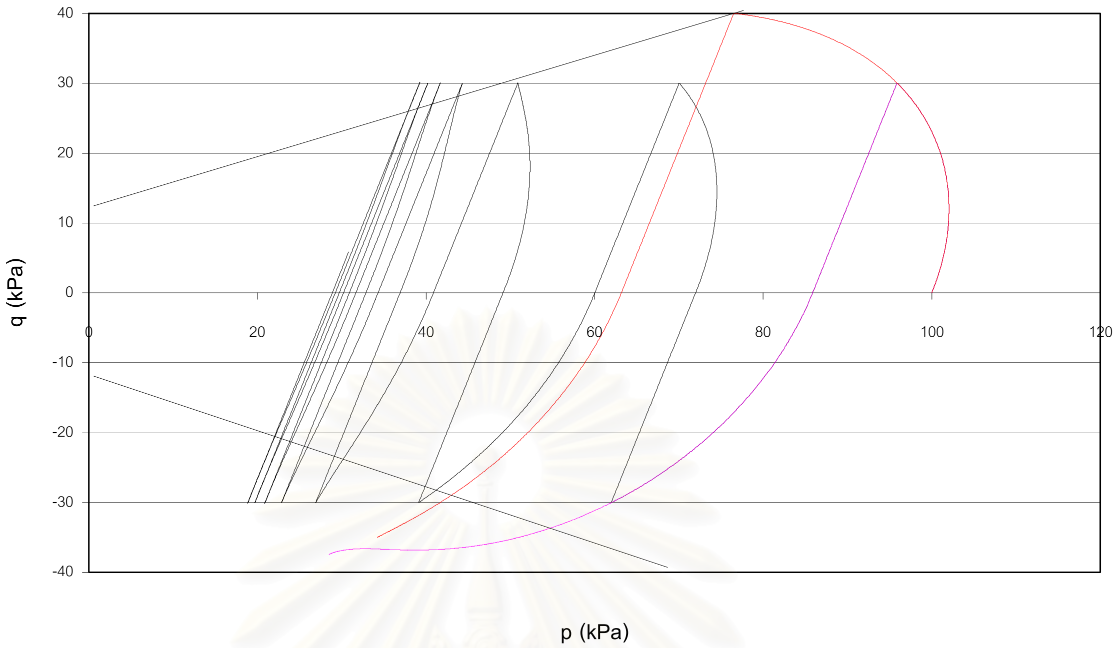


รูปที่ 4.18 แสดง stress – path ของ cyclic loading แบบ half cycle

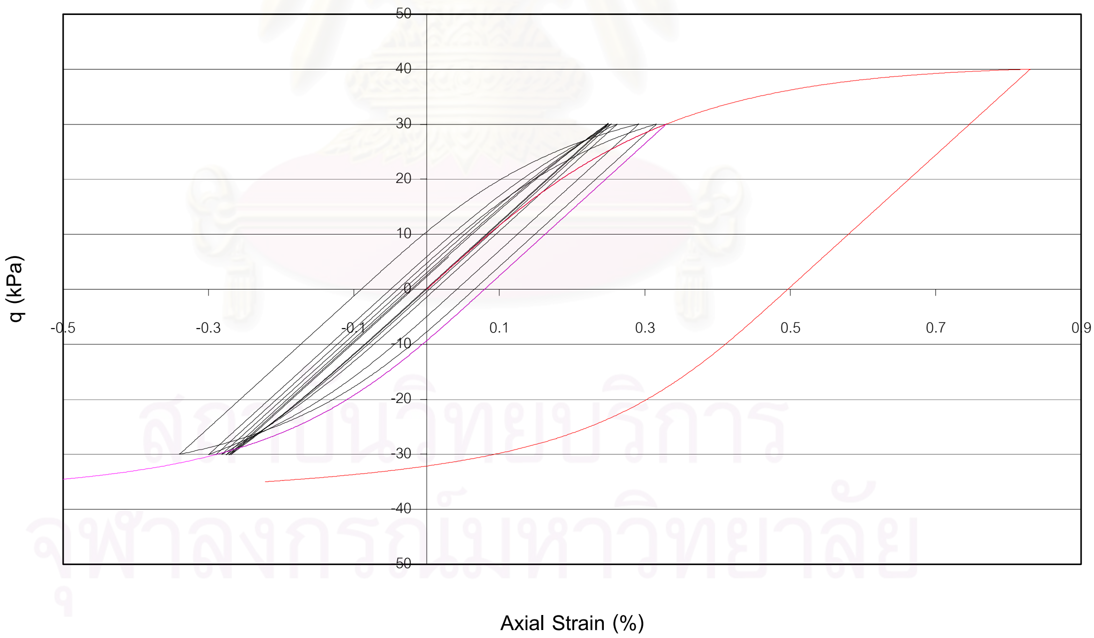


รูปที่ 4.19 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%) ของ cyclic loading แบบ half cycle

รูปที่ 4.18 และ 4.19 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ m เป็น exponential function

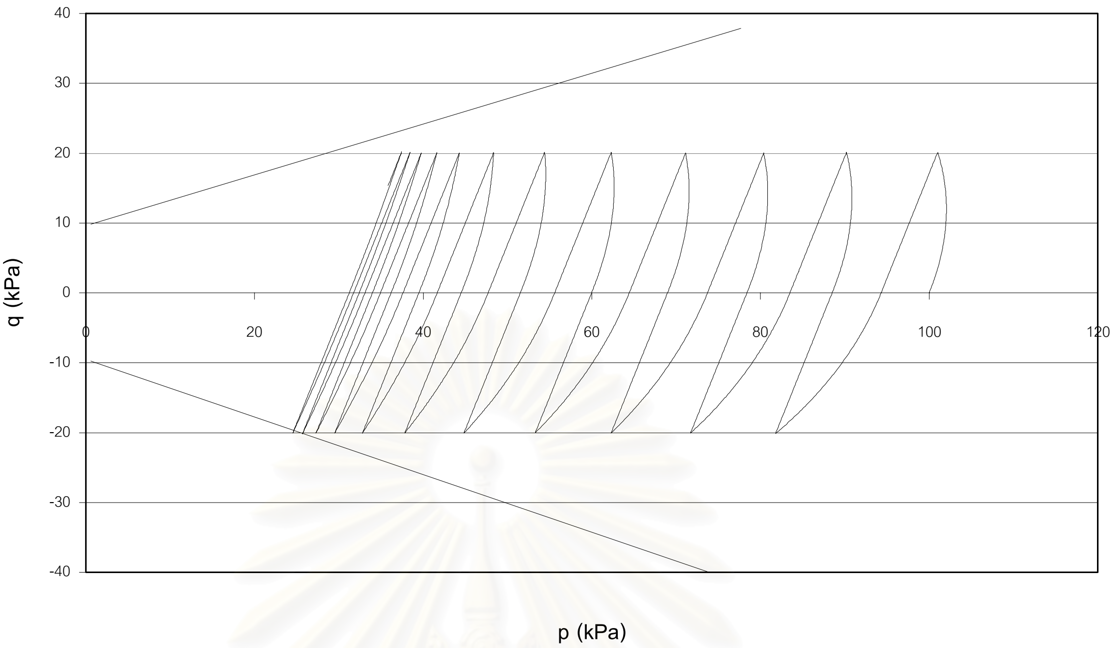


รูปที่ 4.20 แสดง stress – path ของ cyclic loading แบบ full cycle

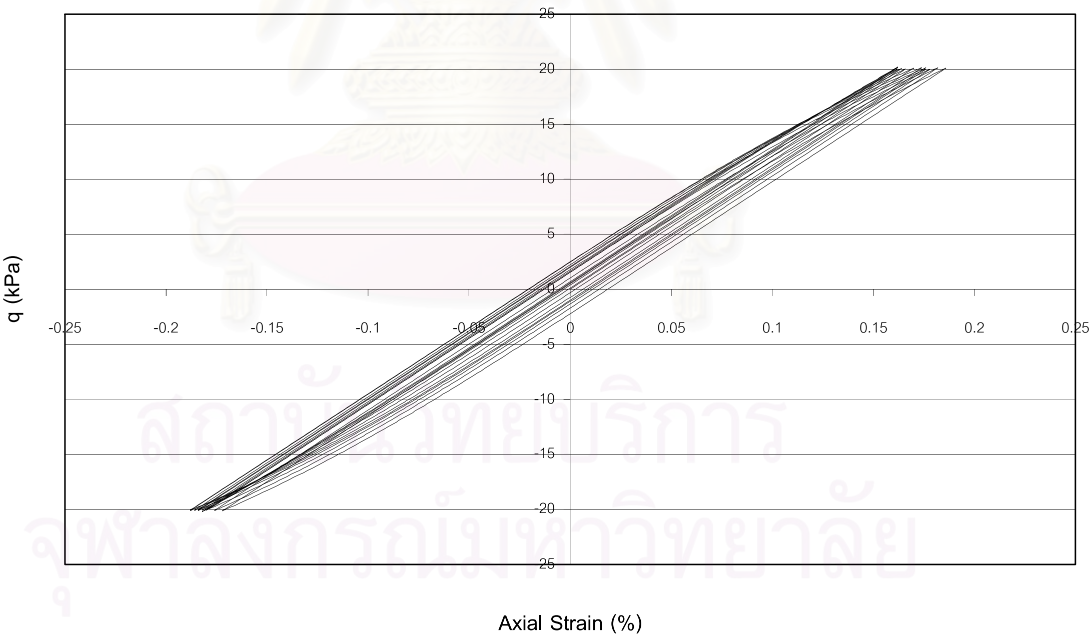


รูปที่ 4.21 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%) ของ cyclic loading แบบ full cycle

รูปที่ 4.20 และ 4.21 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ m เป็น exponential function

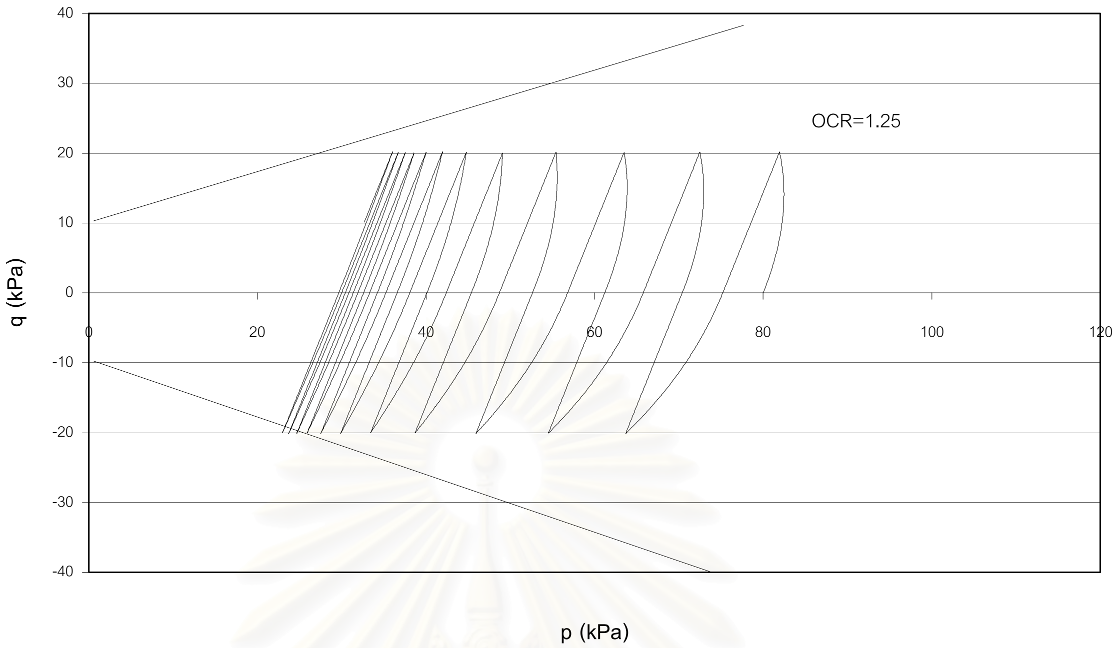


รูปที่ 4.22 แสดง stress – path ของ cyclic loading แบบ full cycle

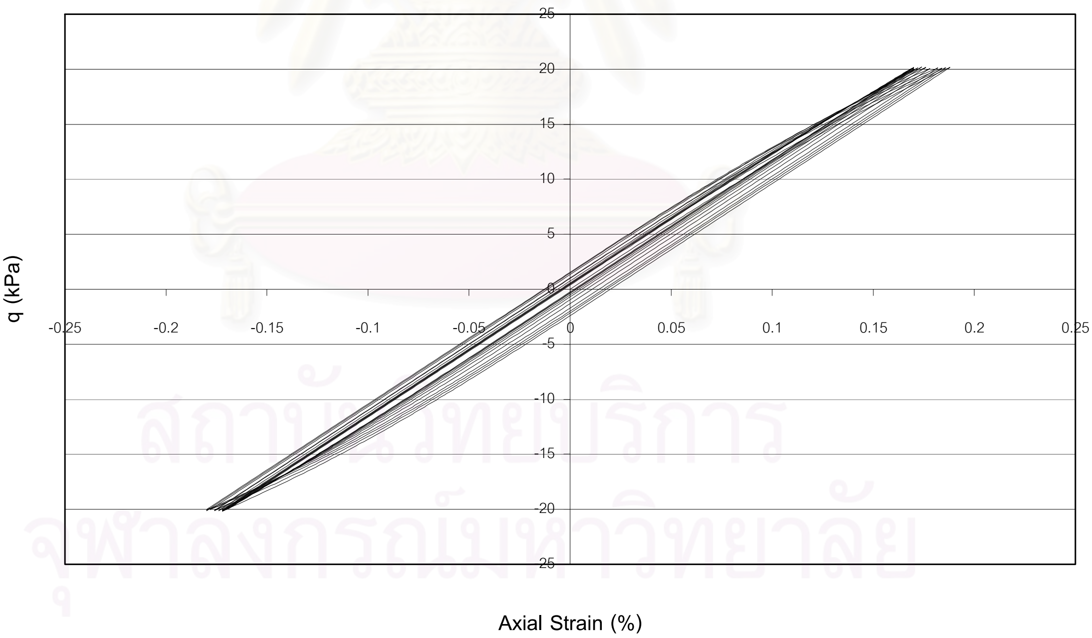


รูปที่ 4.23 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%) ของ cyclic loading แบบ full cycle

รูปที่ 4.22 และ 4.23 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ m เป็น exponential function

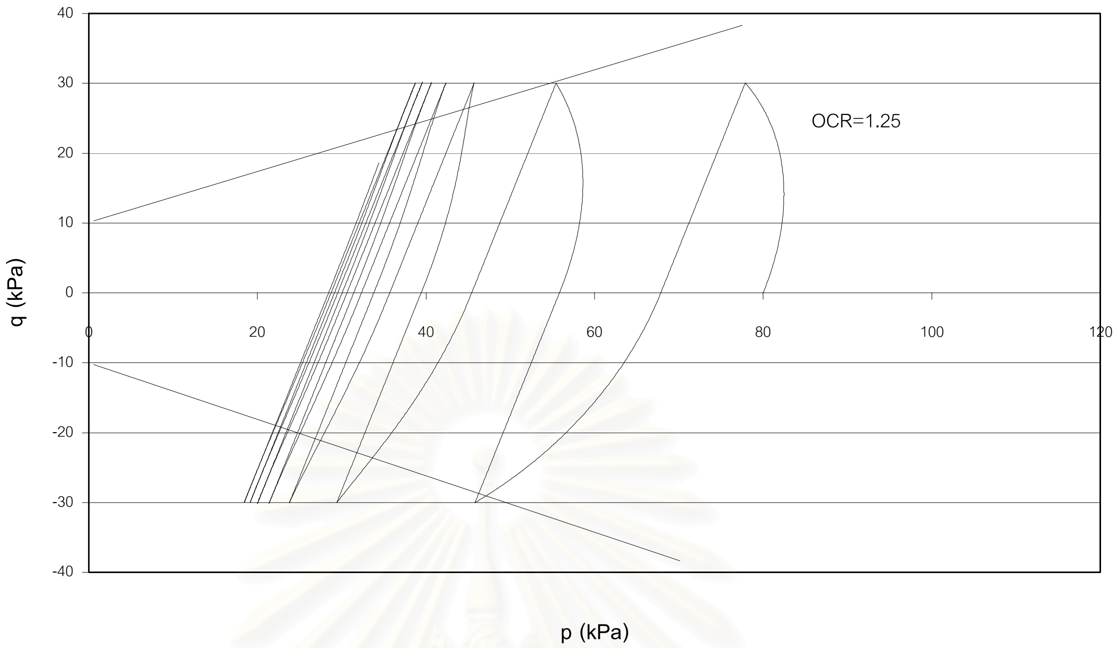


รูปที่ 4.24 แสดง stress – path ของ cyclic loading แบบ full cycle

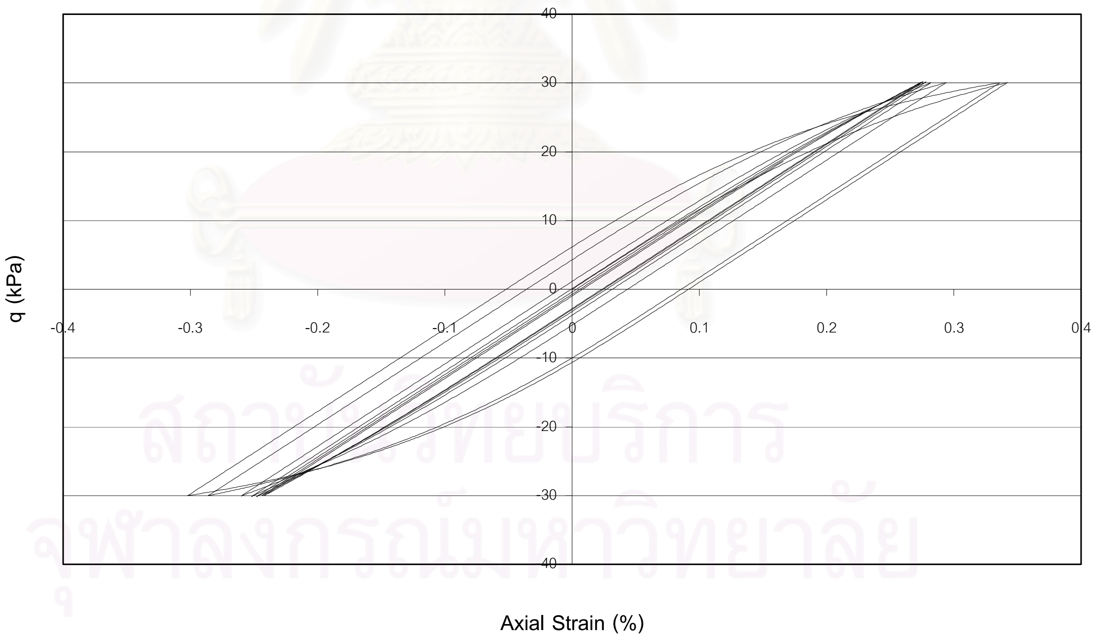


รูปที่ 4.25 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%) ของ cyclic loading แบบ full cycle

รูปที่ 4.24 และ 4.25 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ m เป็น exponential function

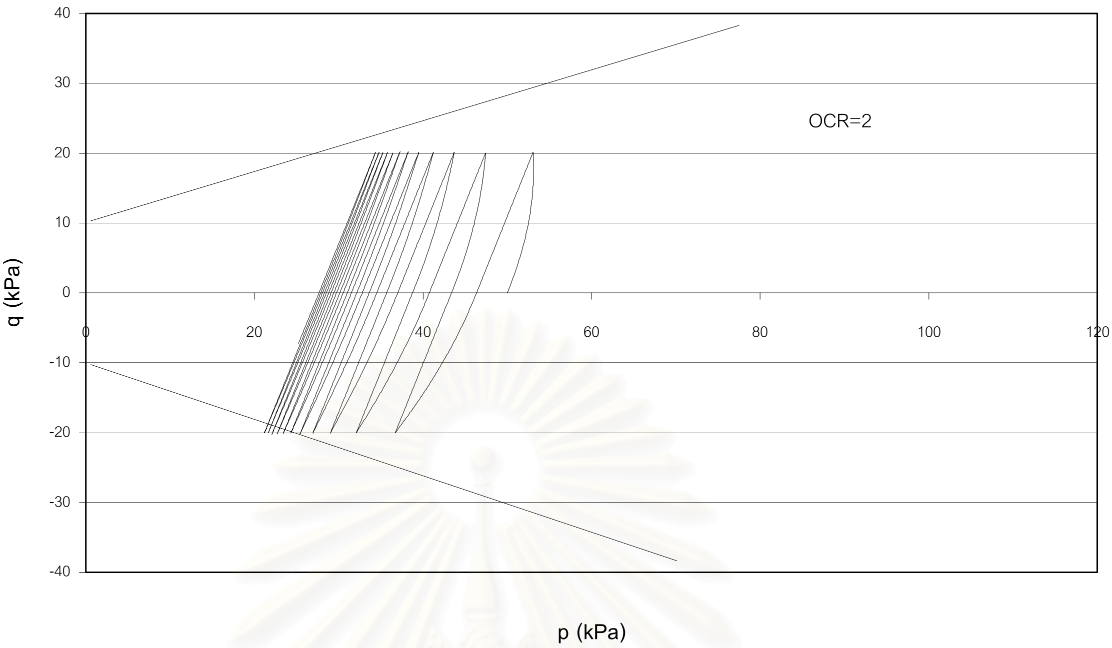


รูปที่ 4.26 แสดง stress – path ของ cyclic loading แบบ full cycle

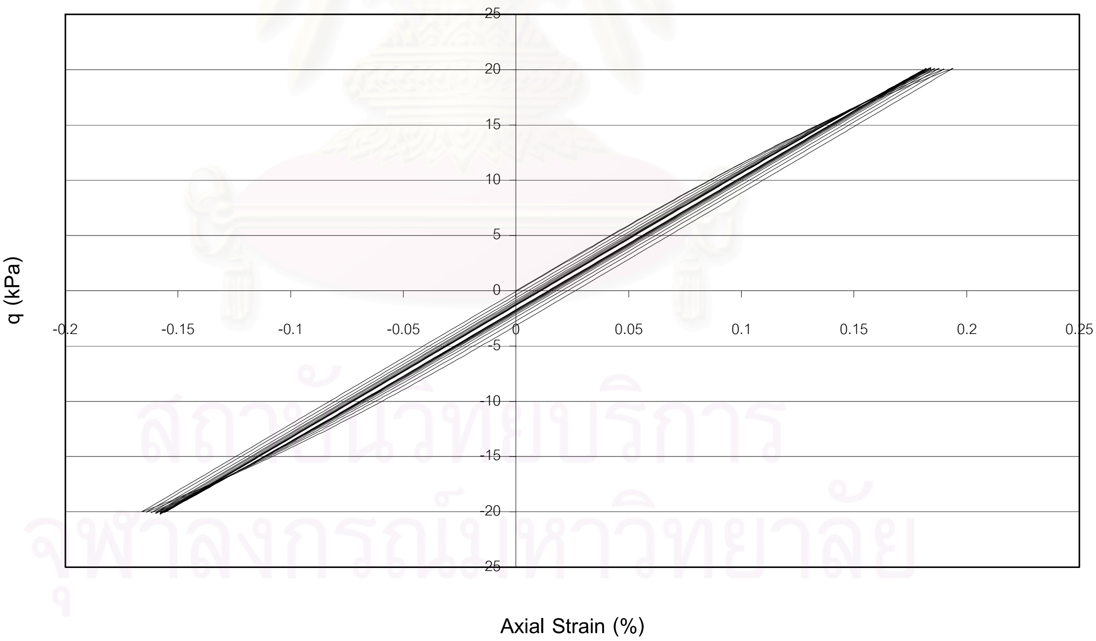


รูปที่ 4.27 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%) ของ cyclic loading แบบ full cycle

รูปที่ 4.26 และ 4.27 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ m เป็น exponential function

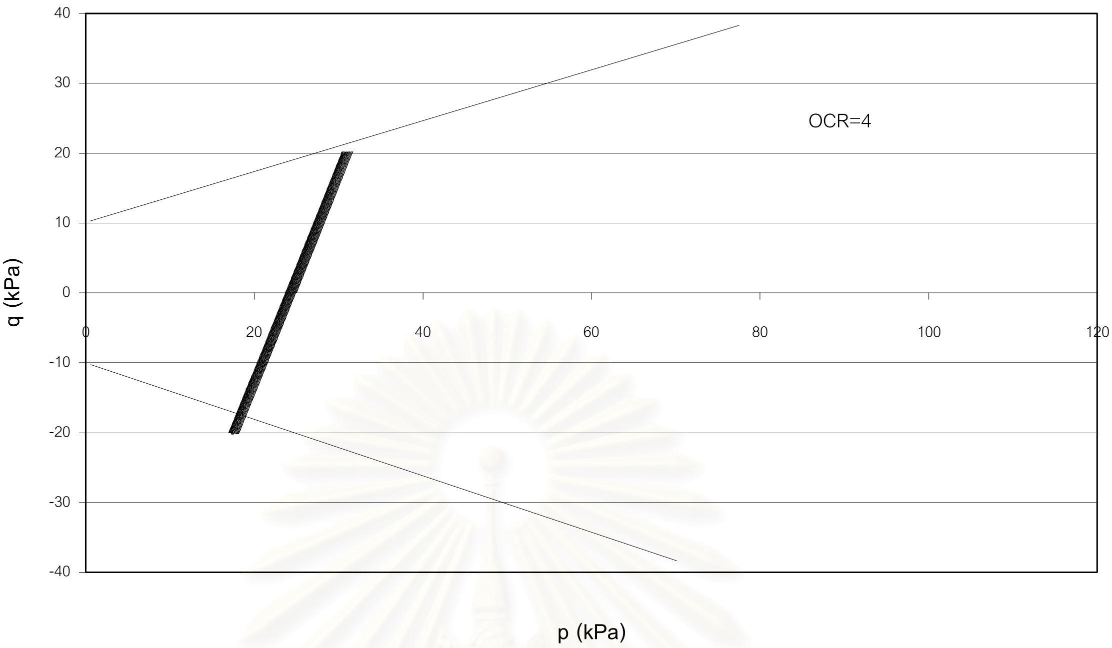


รูปที่ 4.28 แสดง stress – path ของ cyclic loading แบบ full cycle

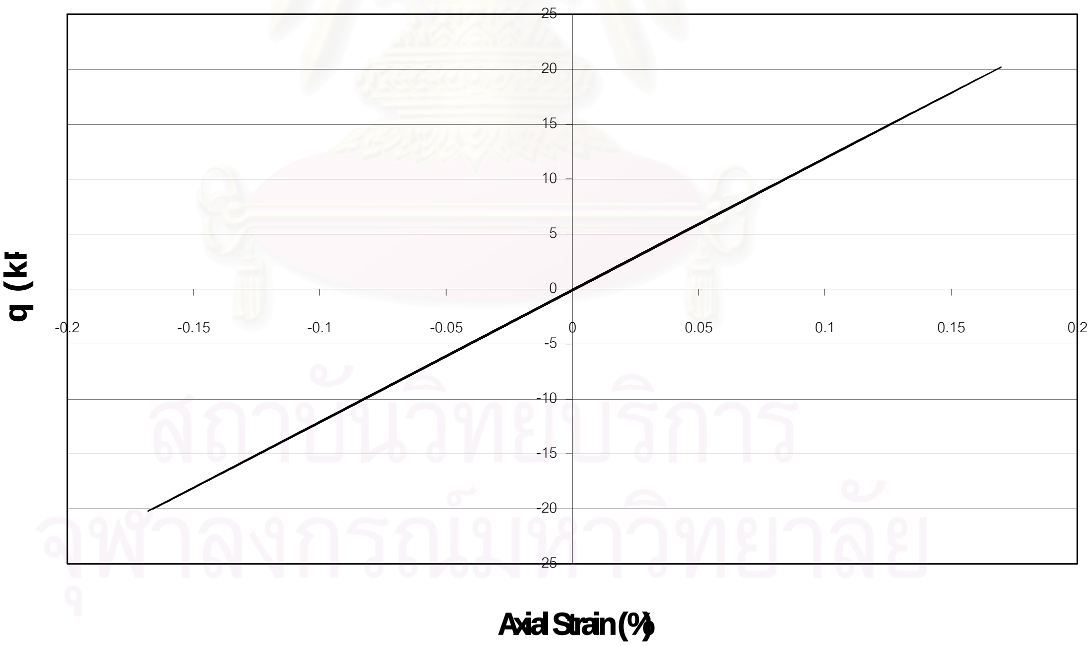


รูปที่ 4.29 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%) ของ cyclic loading แบบ full cycle

รูปที่ 4.28 และ 4.29 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ m เป็น exponential function

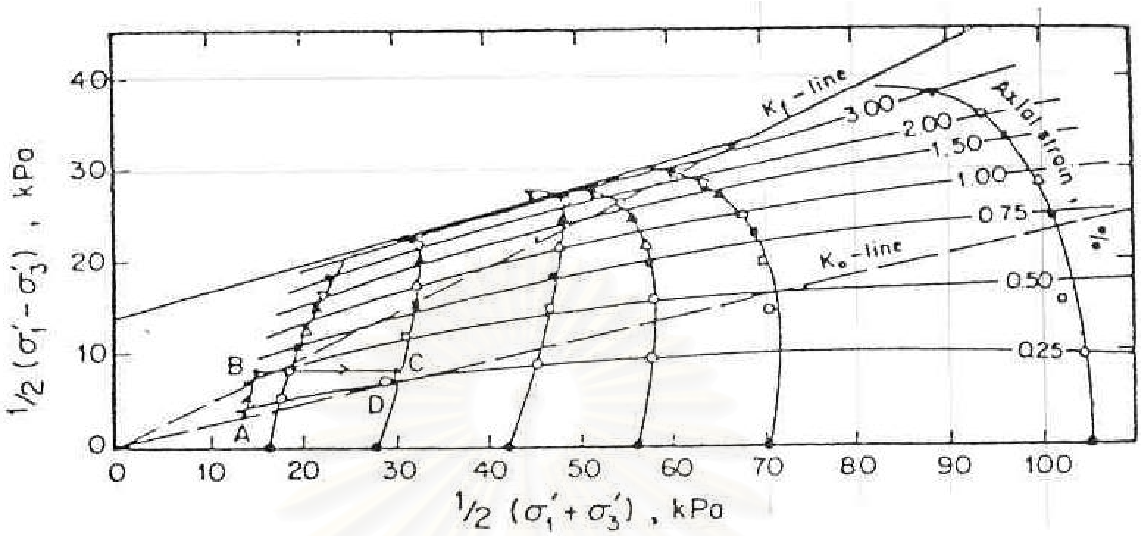


รูปที่ 4.30 แสดง stress – path ของ cyclic loading แบบ full cycle

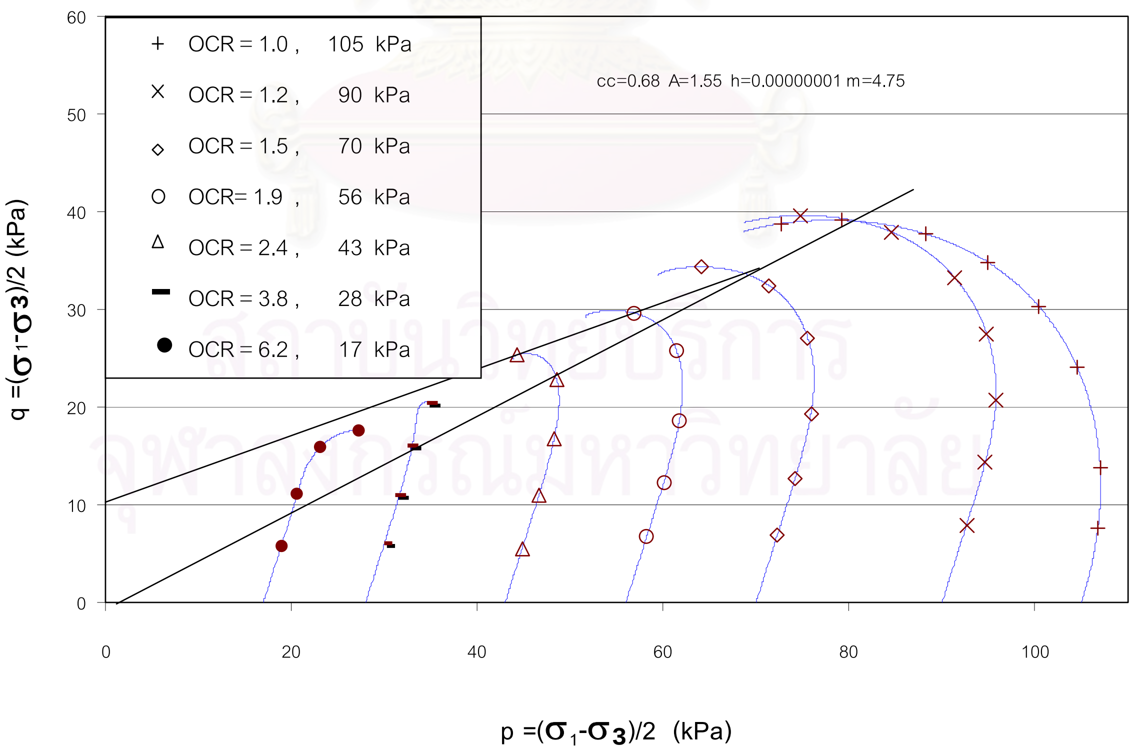


รูปที่ 4.31 แสดง q (kPa) & Axial Strain (%) ของ cyclic loading แบบ full cycle

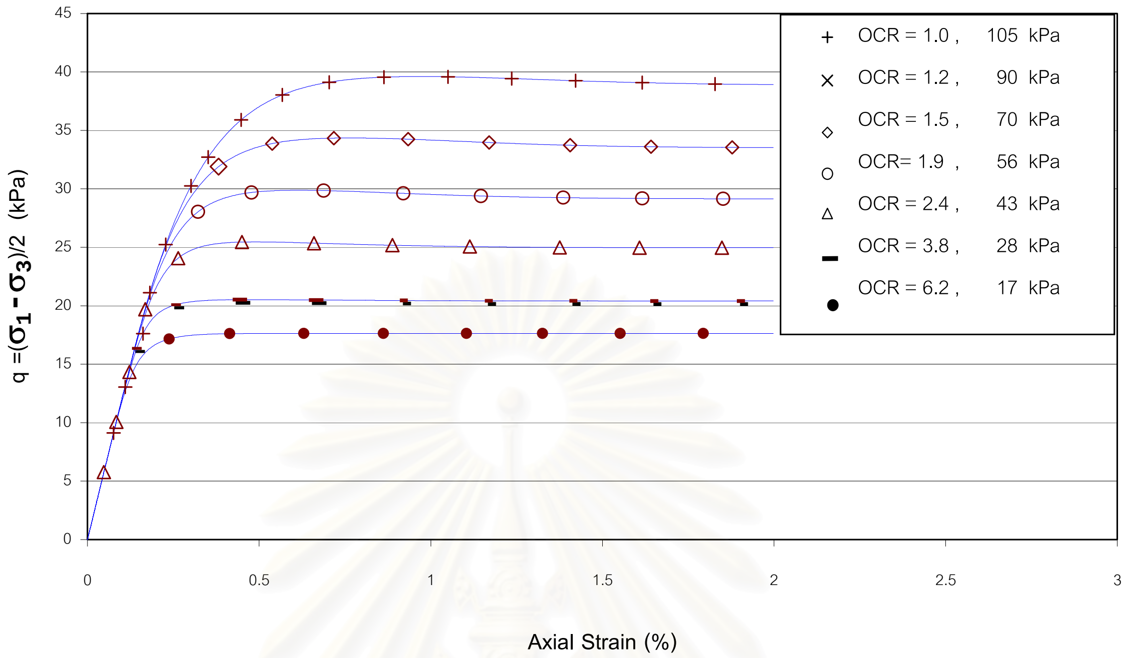
รูปที่ 4.30 และ 4.31 แสดงผลการคำนวณที่ได้จาก Bounding Surface โดยใช้ m เป็น exponential function



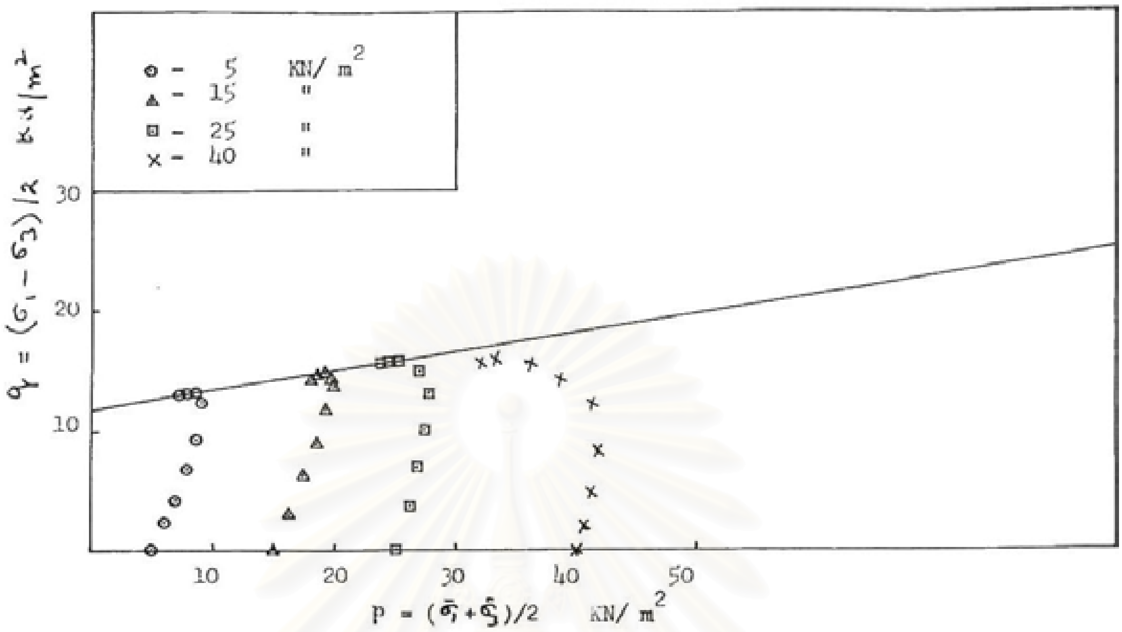
รูปที่ 5.1 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



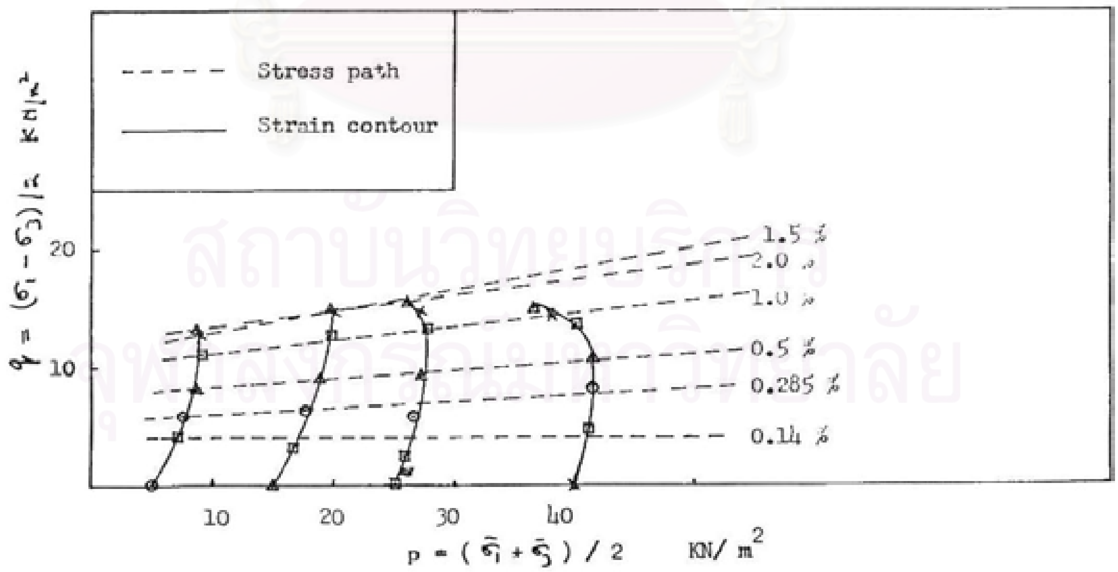
รูปที่ 5.2 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



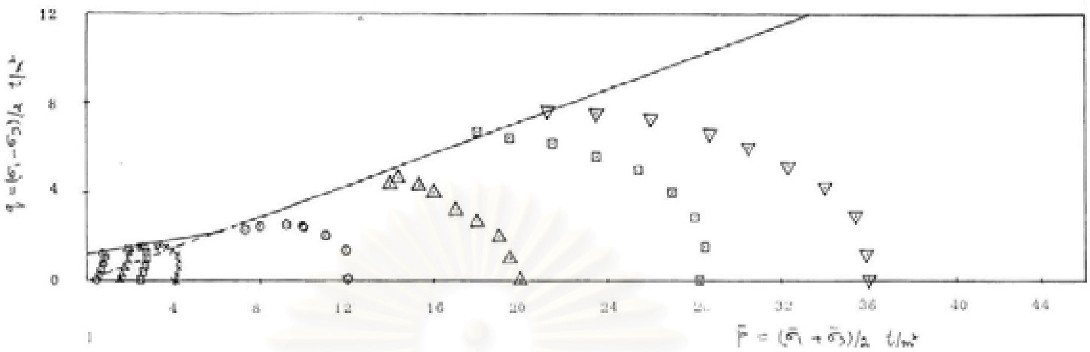
รูปที่ 5.3 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



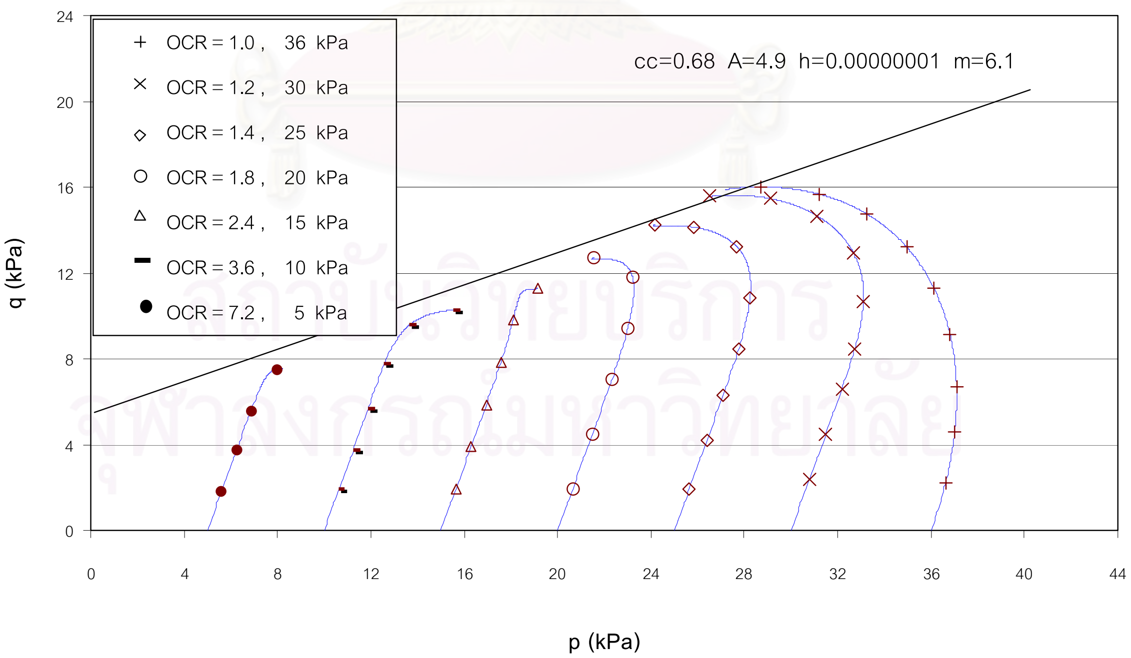
รูปที่ 5.4 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



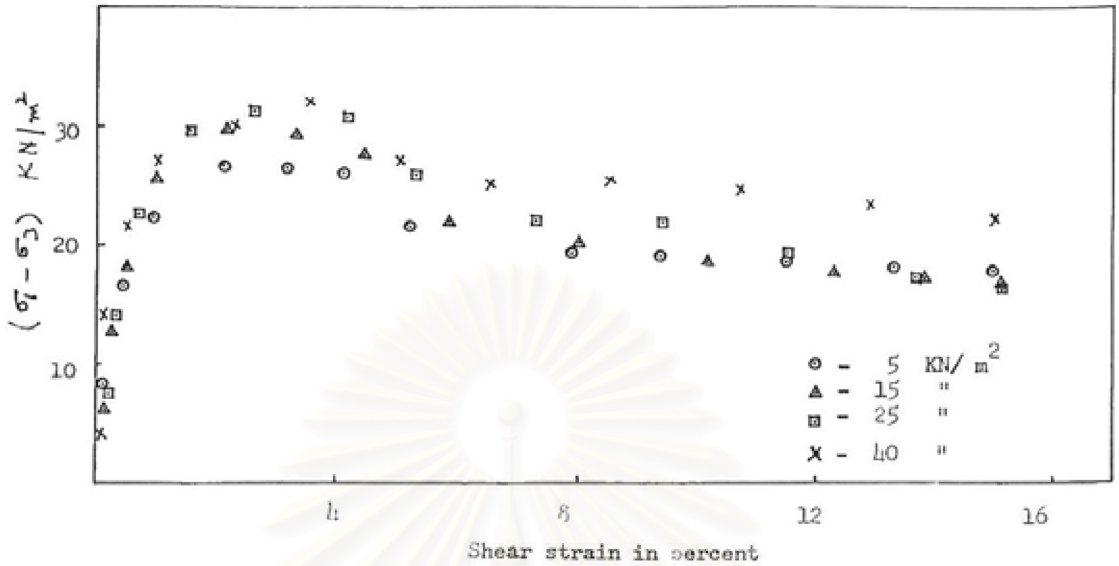
รูปที่ 5.5 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



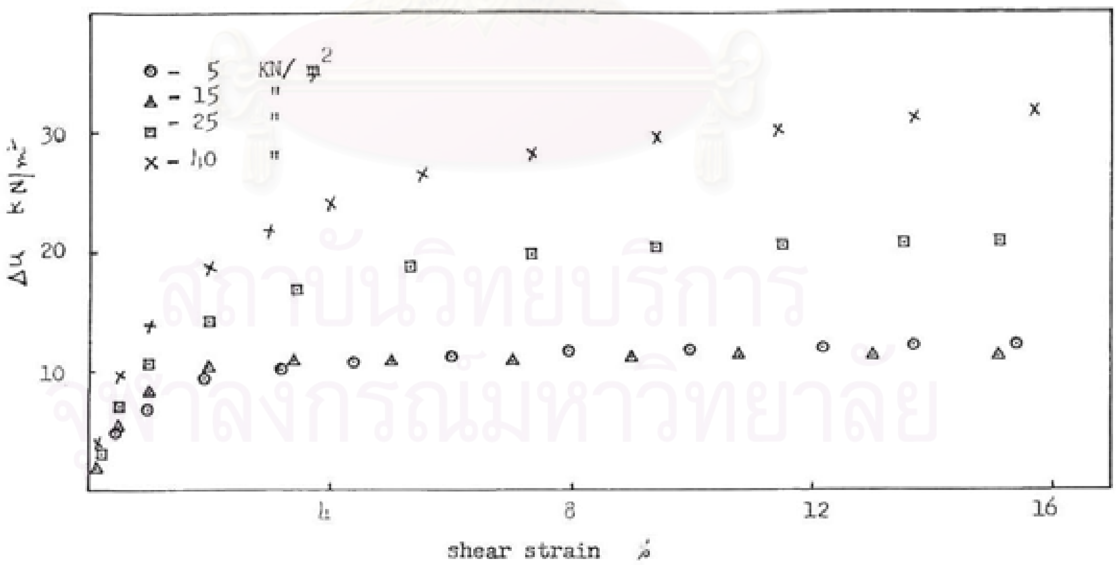
รูปที่ 5.6 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



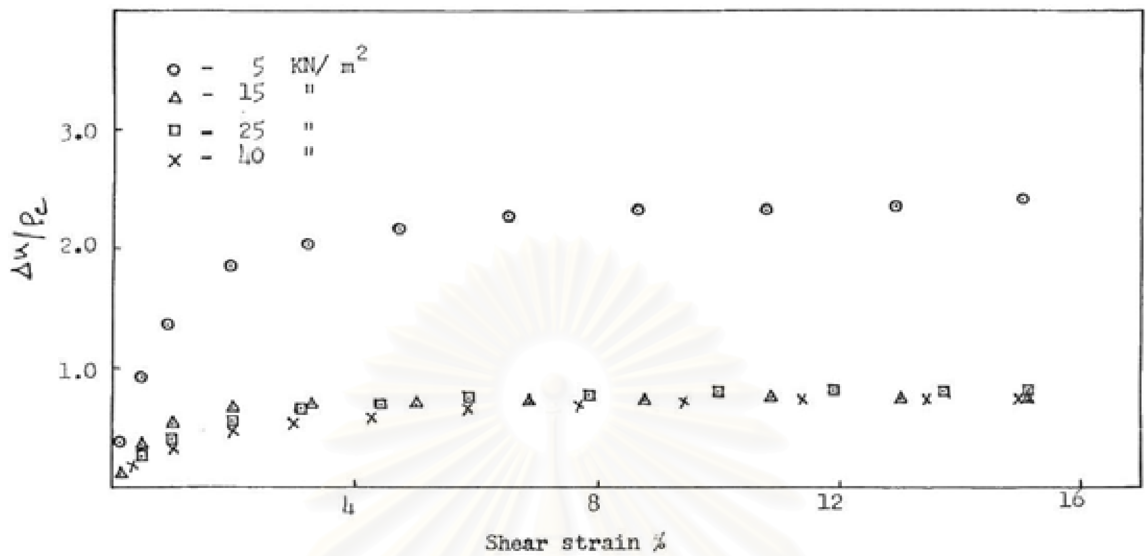
รูปที่ 5.7 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



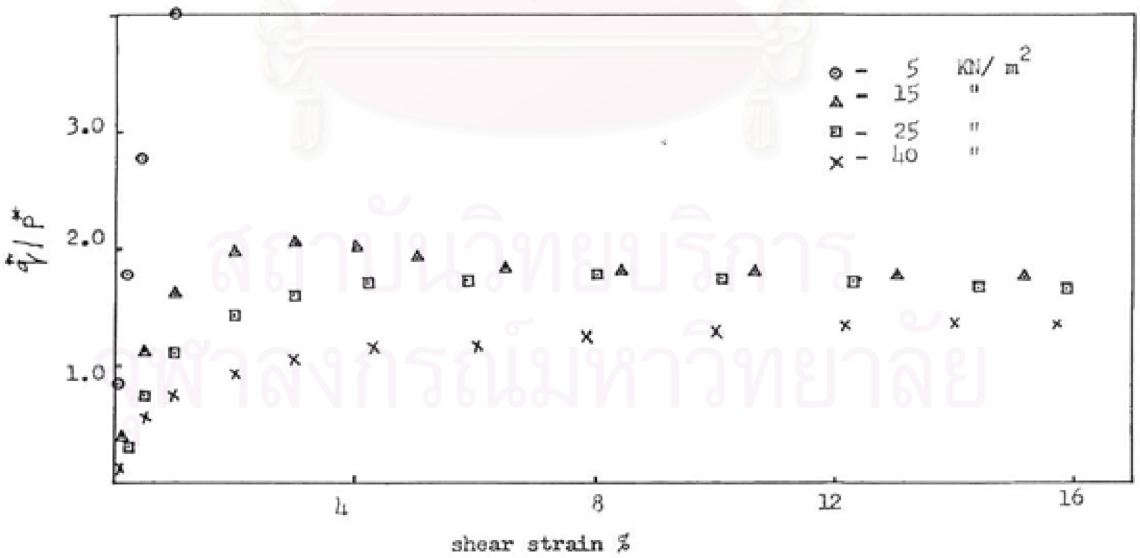
รูปที่ 5.8 แสดง Shear stress & Shear strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



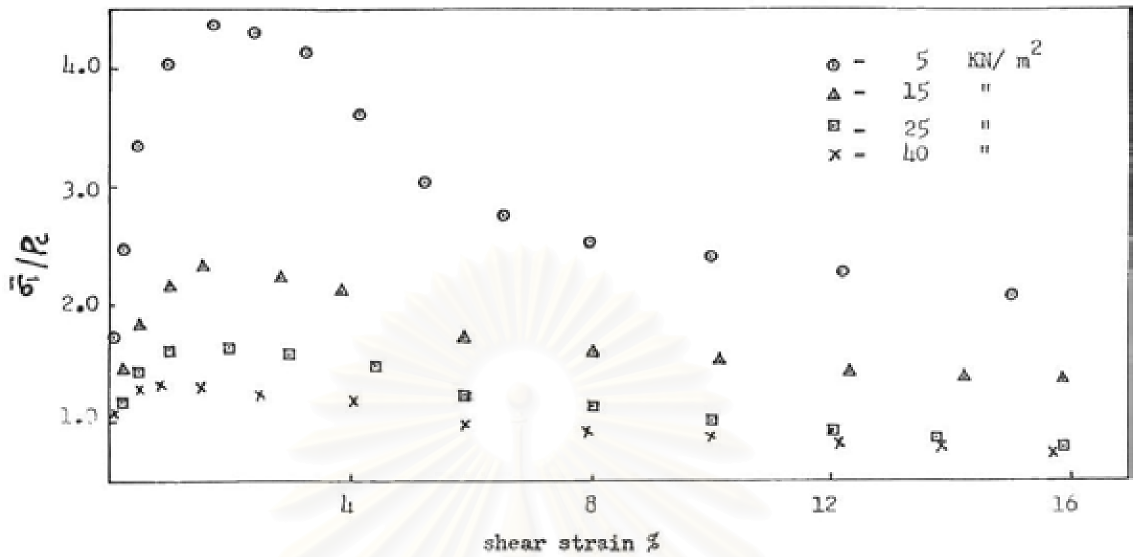
รูปที่ 5.9 แสดง Pure pressure & Shear strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



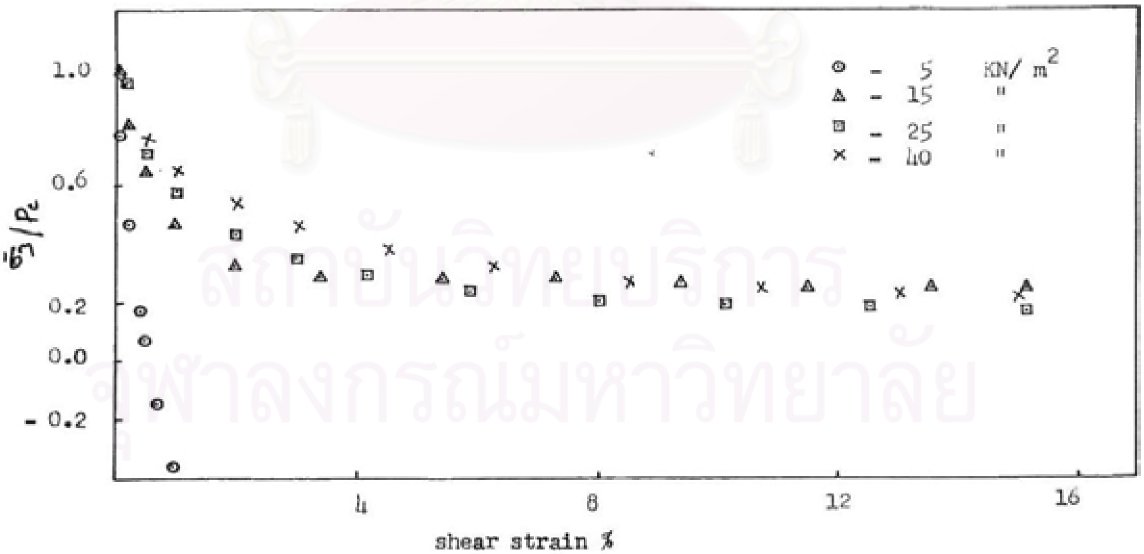
รูปที่ 5.10 แสดง Normalized Pure pressure & Shear strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



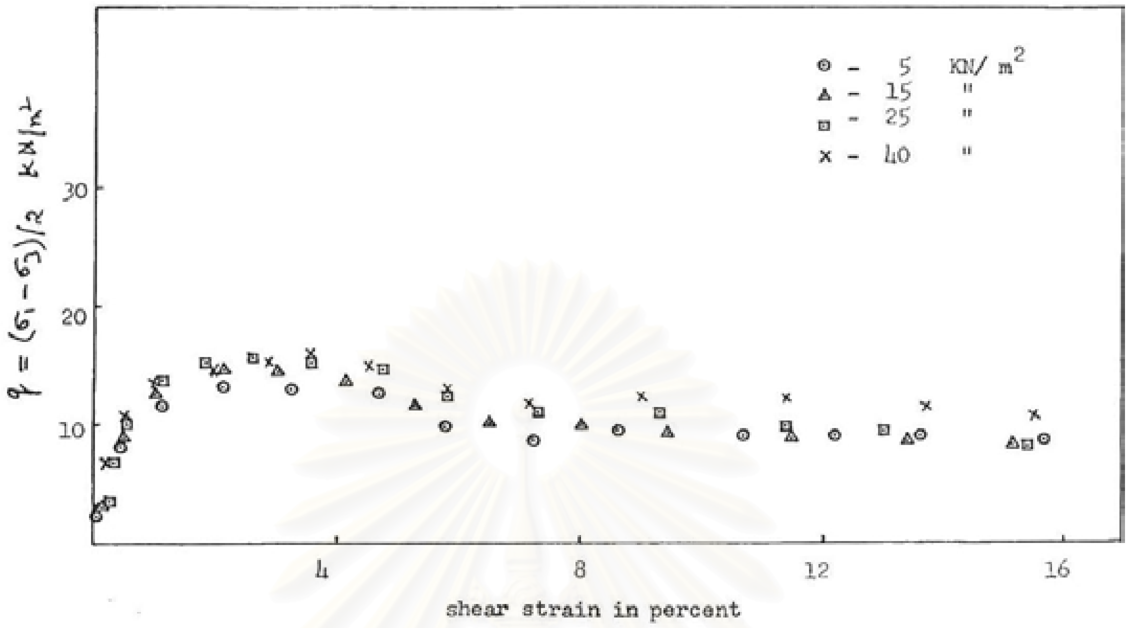
รูปที่ 5.11 แสดง Normalized Shear stress & Shear strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



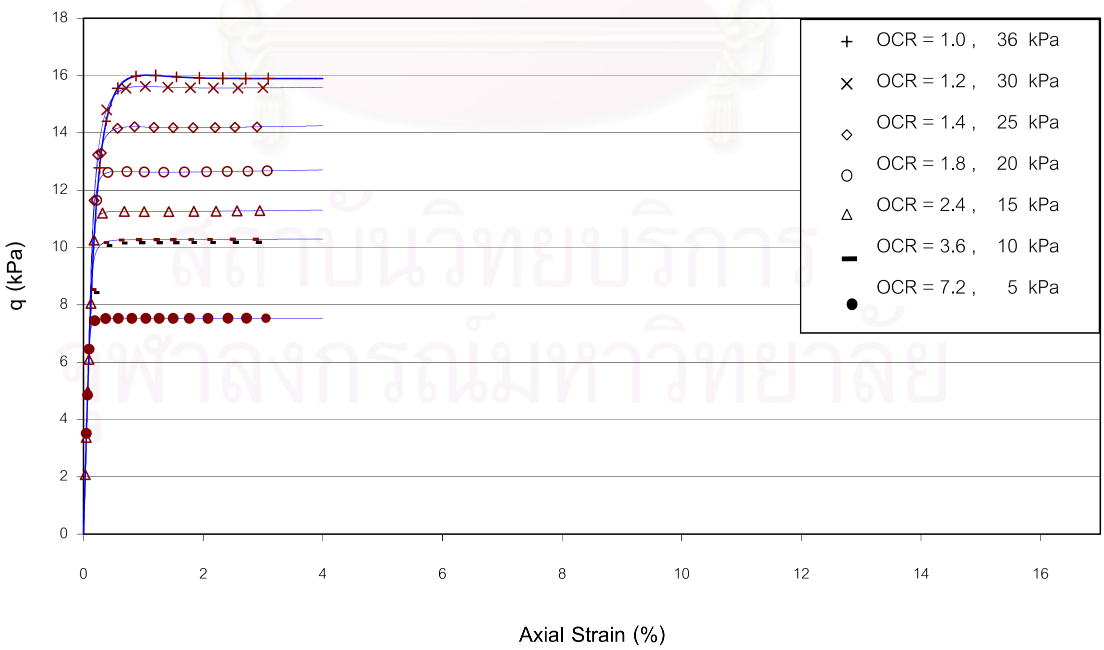
รูปที่ 5.12 แสดง Normalized Major stress & Shear strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



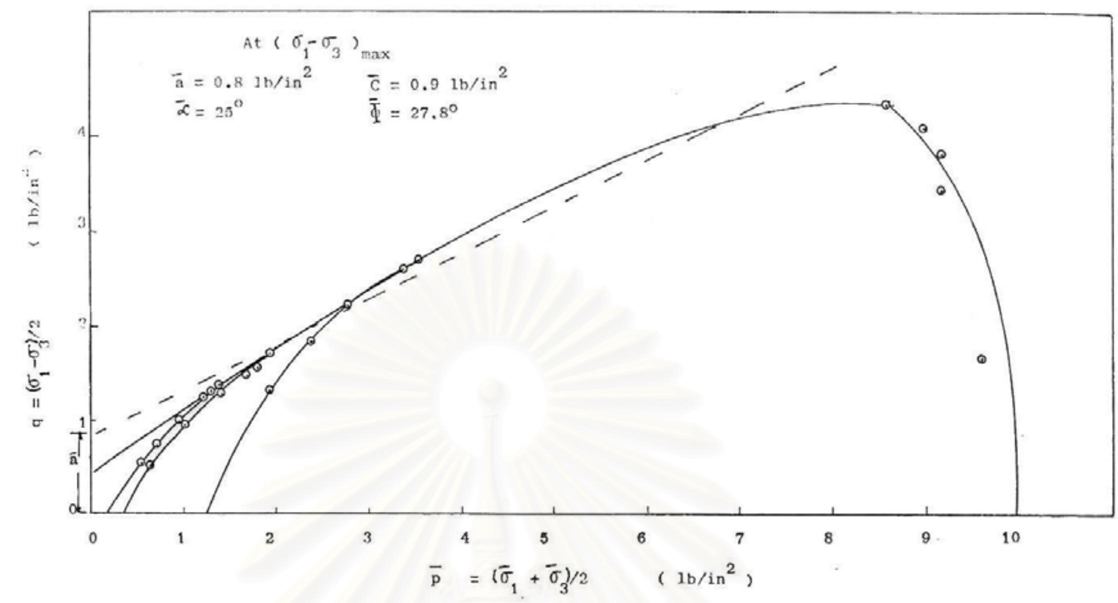
รูปที่ 5.13 แสดง Normalized Minor stress & Shear strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



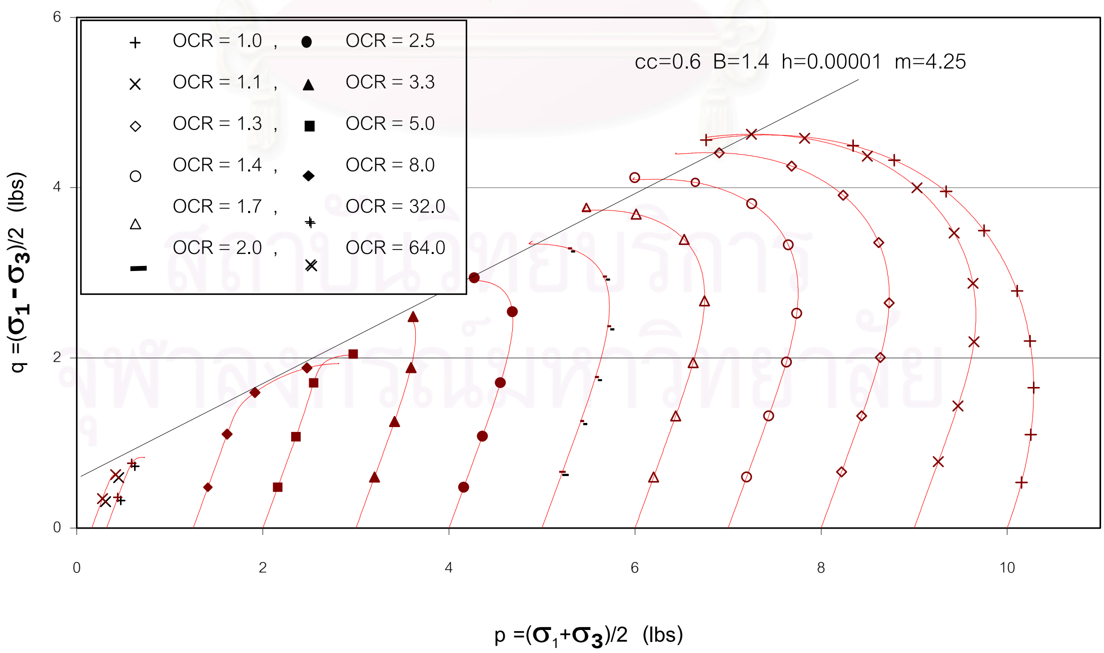
รูปที่ 5.14 แสดง Shear stress & Shear strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



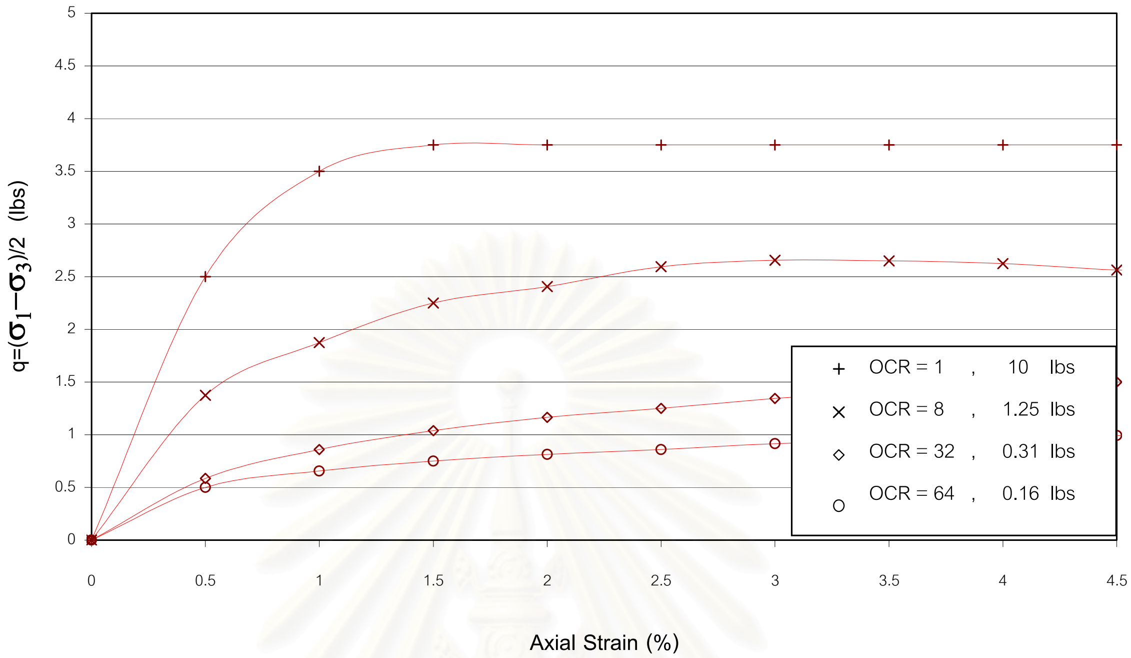
รูปที่ 5.15 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



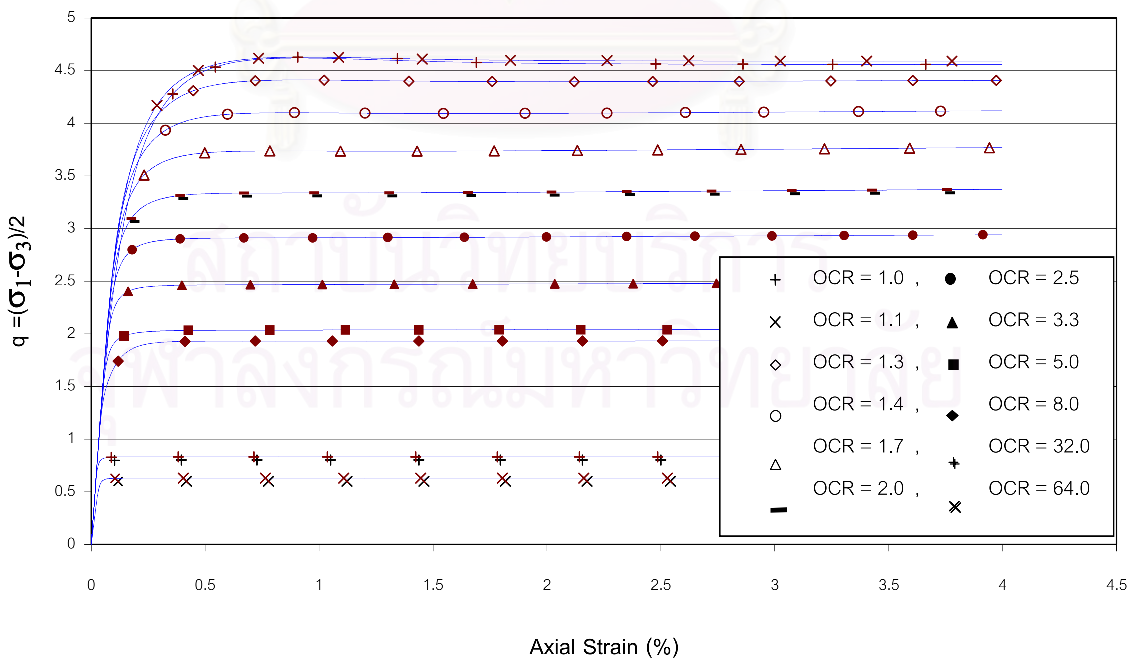
รูปที่ 5.16 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



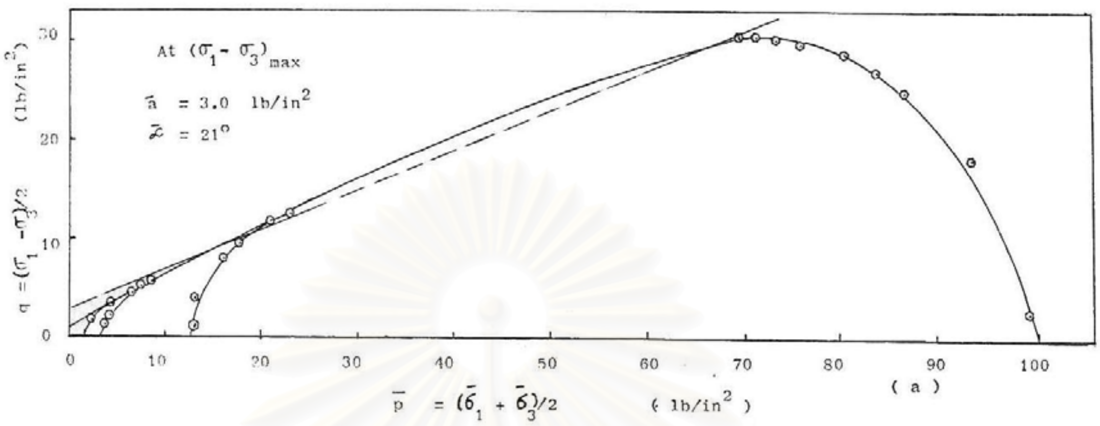
รูปที่ 5.17 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



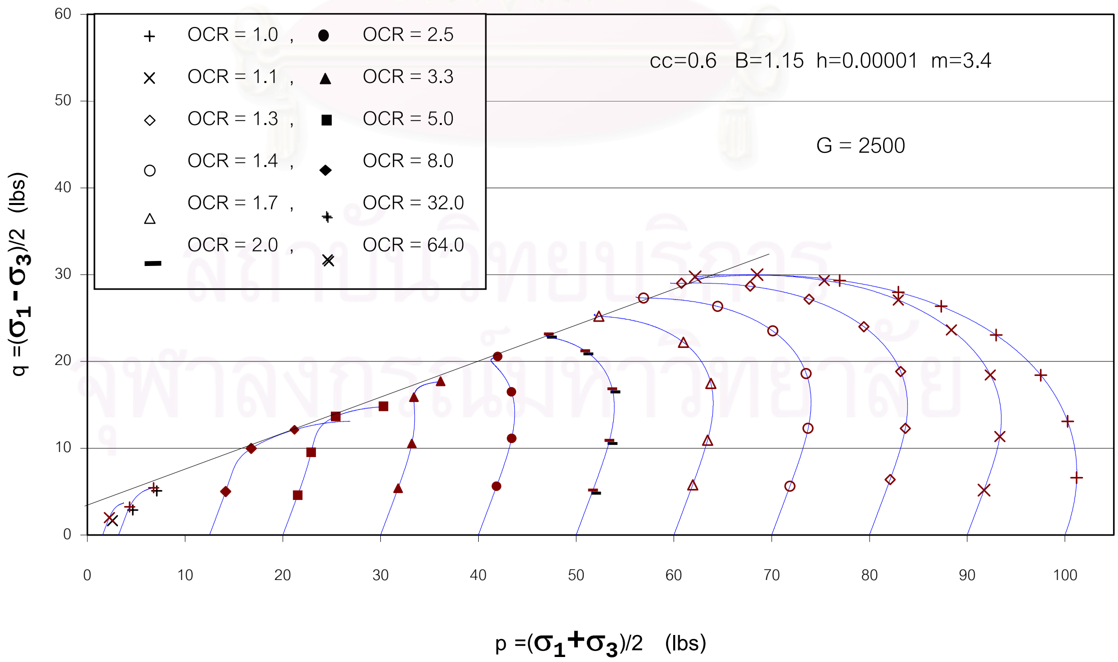
รูปที่ 5.18 แสดง Shear stress & Axial strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



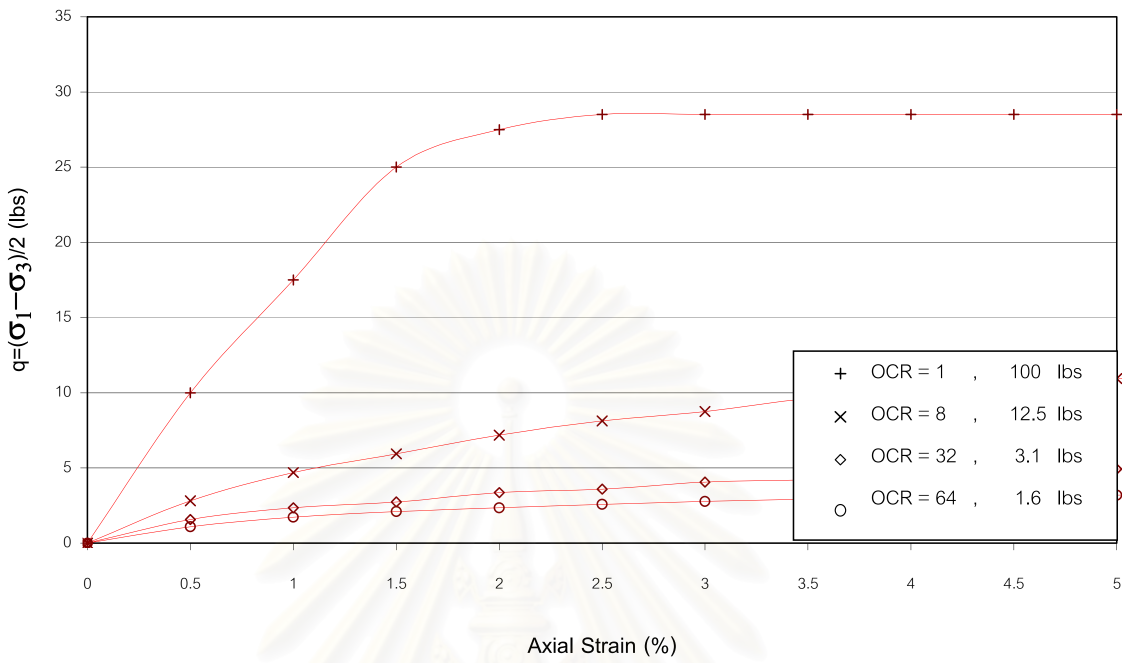
รูปที่ 5.19 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



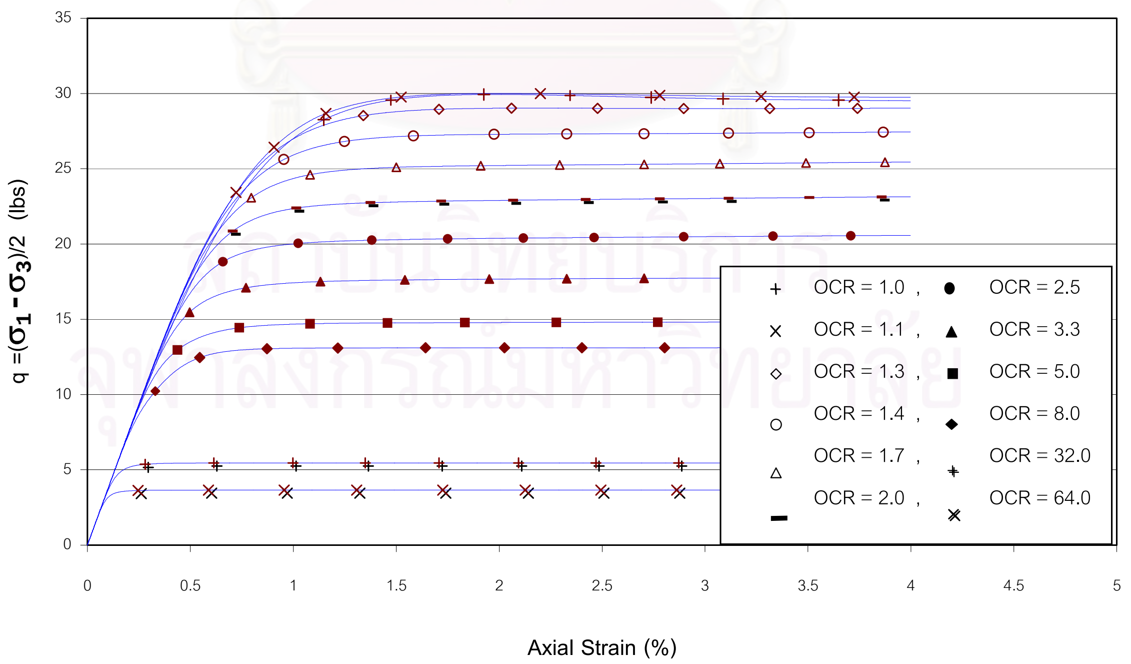
รูปที่ 5.20 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



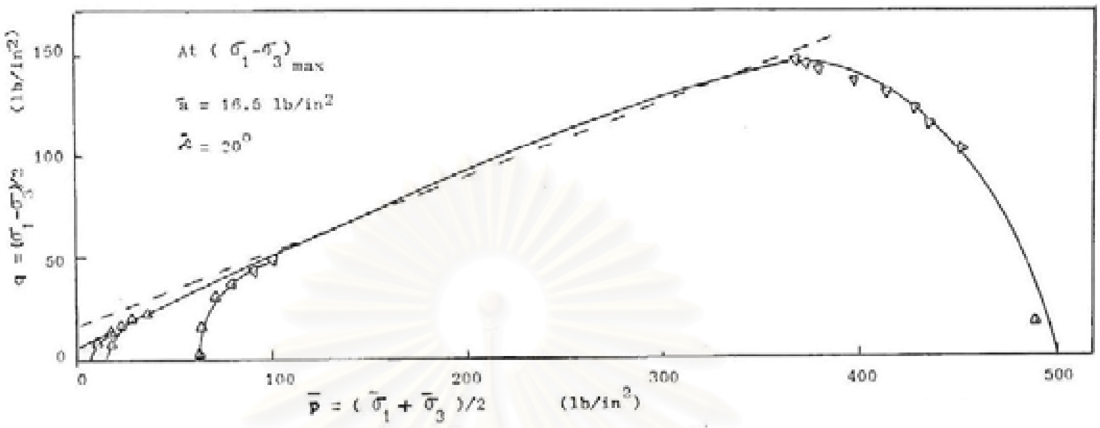
รูปที่ 5.21 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



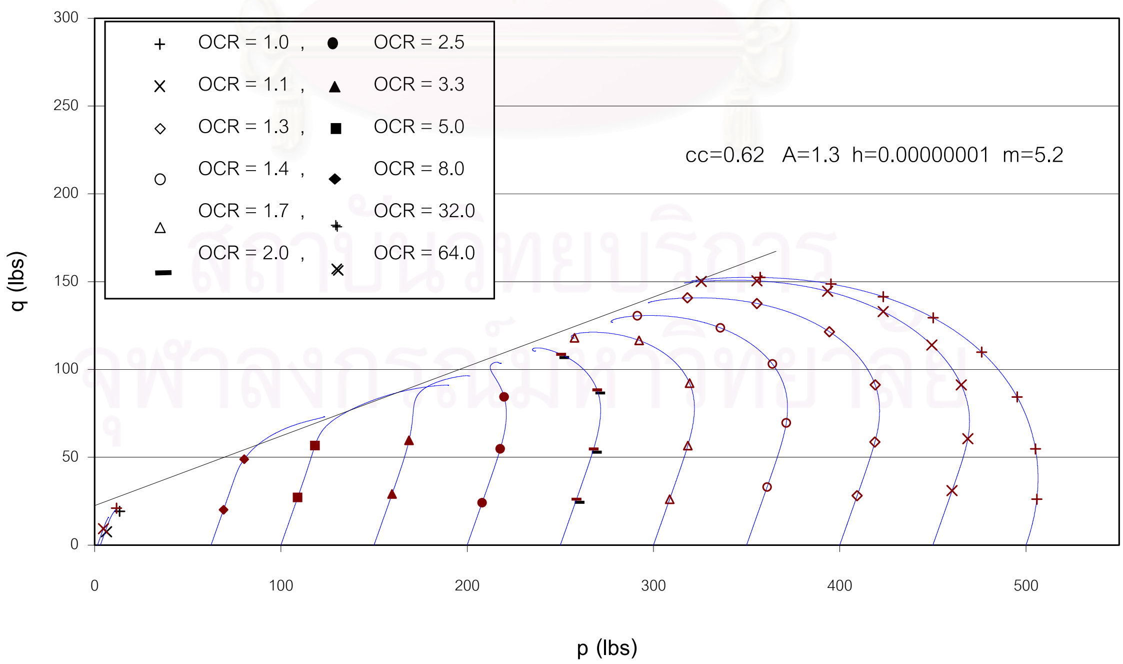
รูปที่ 5.22 แสดง Shear stress & Axial strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



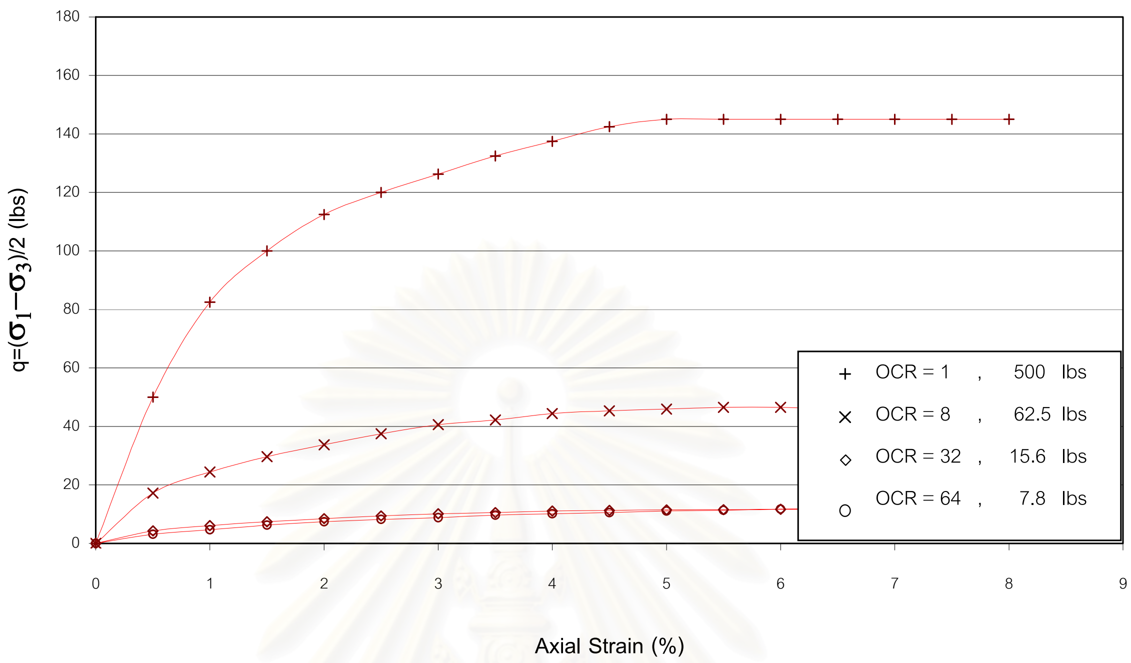
รูปที่ 5.23 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



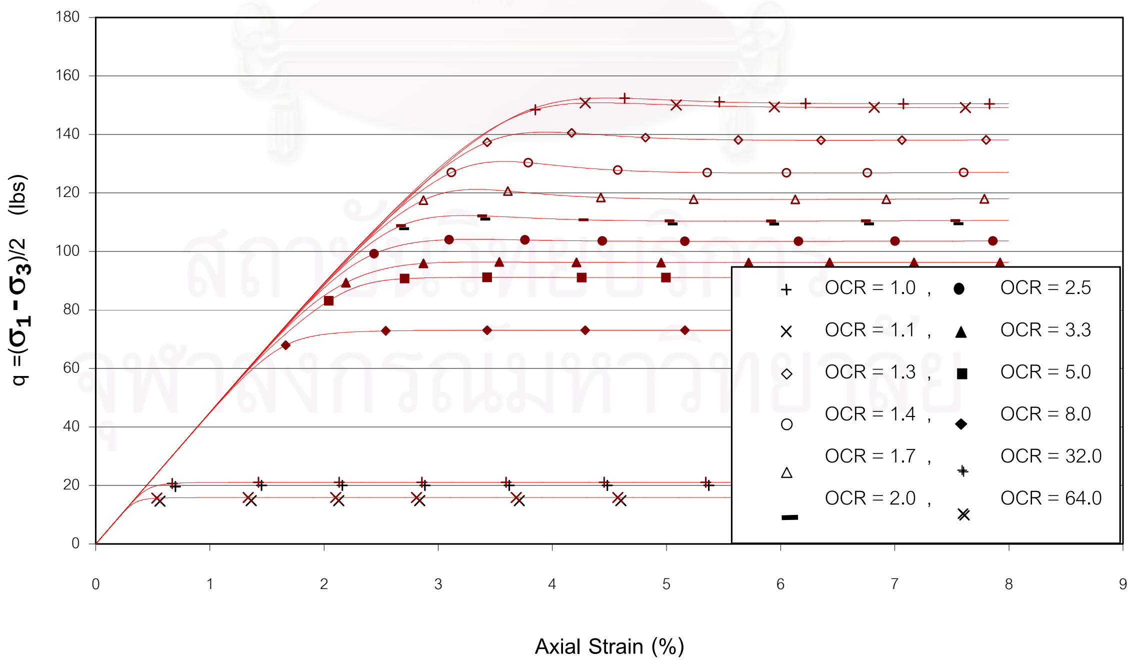
รูปที่ 5.24 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



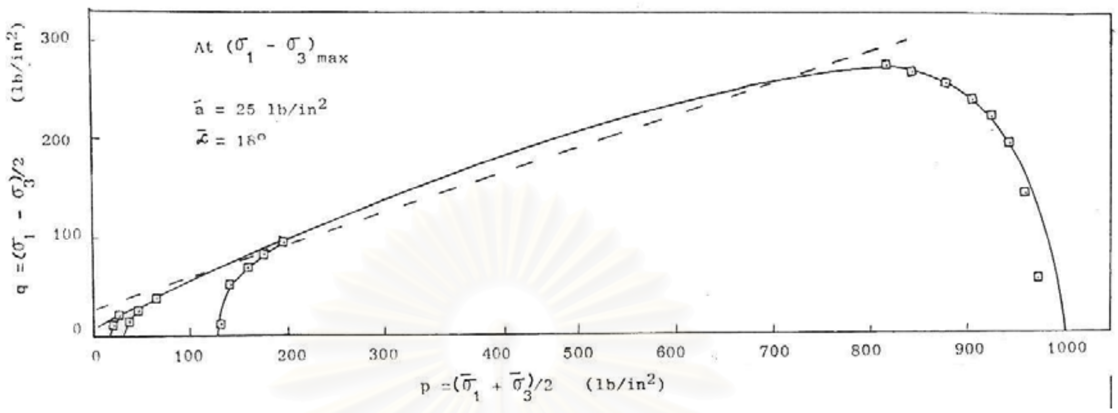
รูปที่ 5.25 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



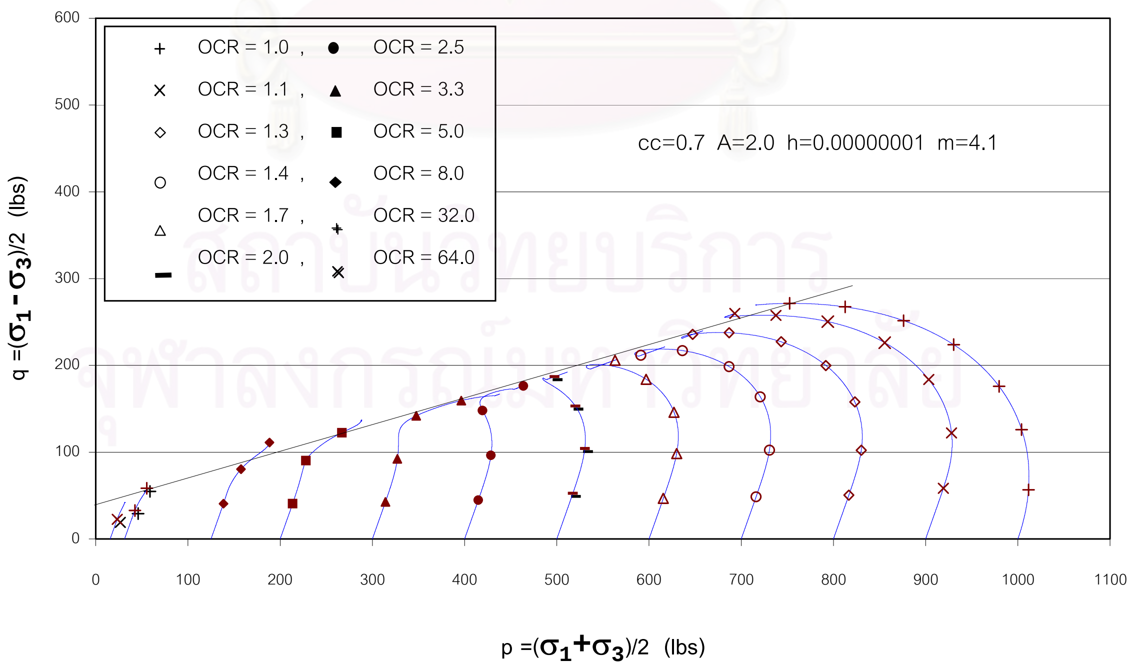
รูปที่ 5.26 แสดง Shear stress & Axial strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



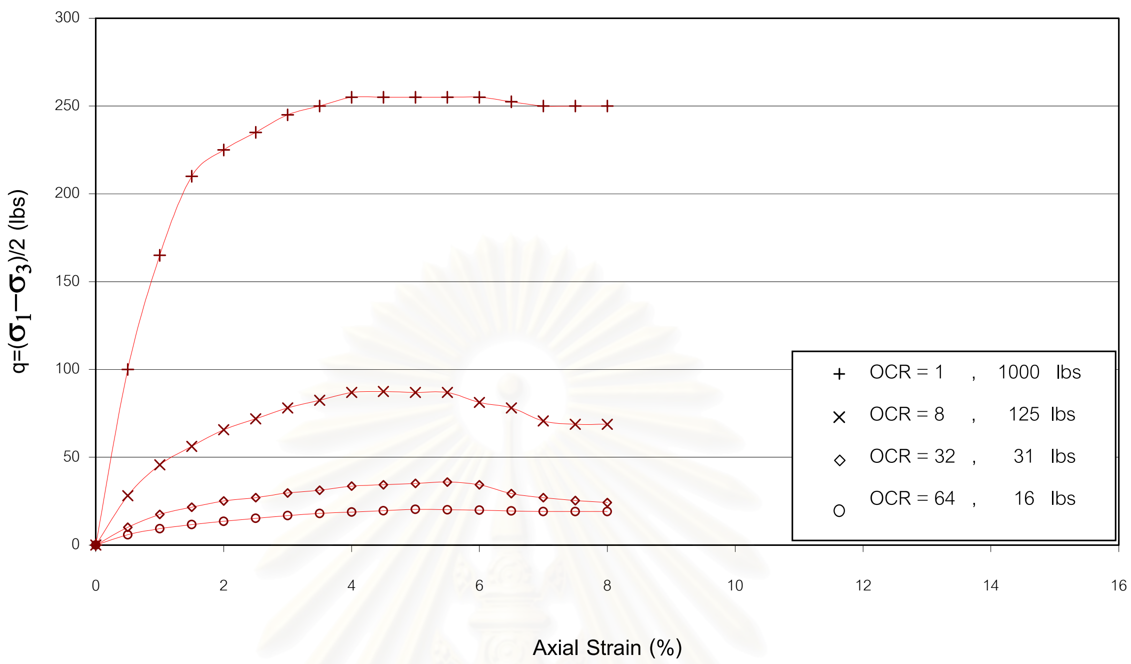
รูปที่ 5.27 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



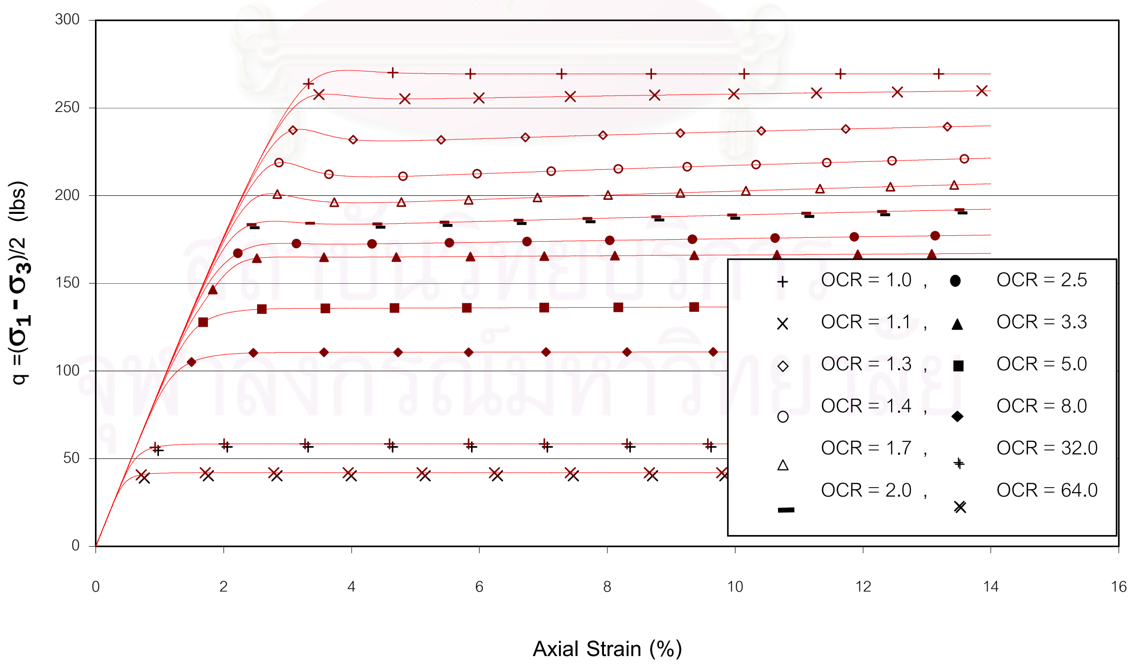
รูปที่ 5.28 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



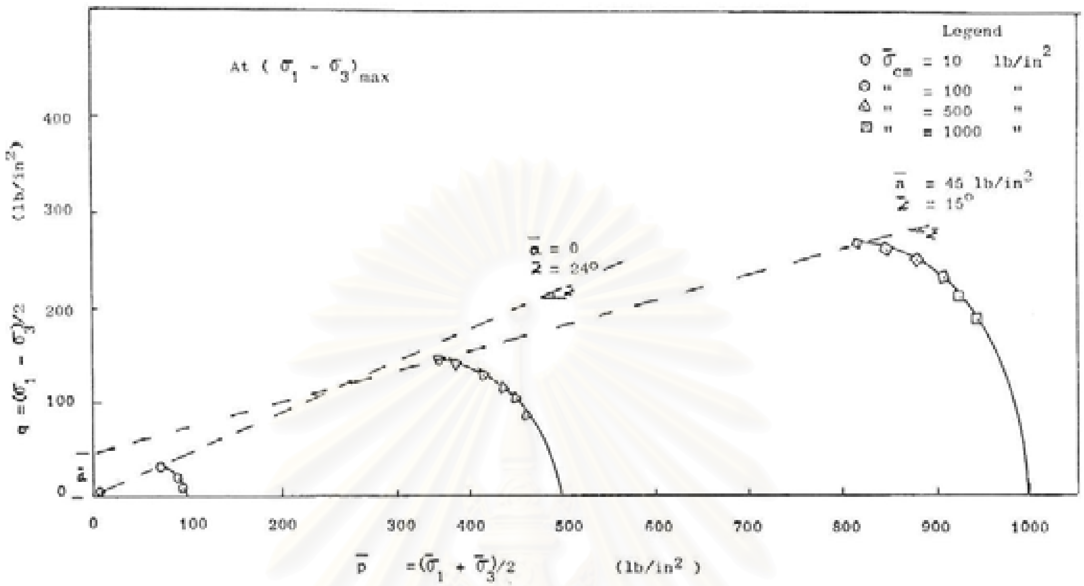
รูปที่ 5.29 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



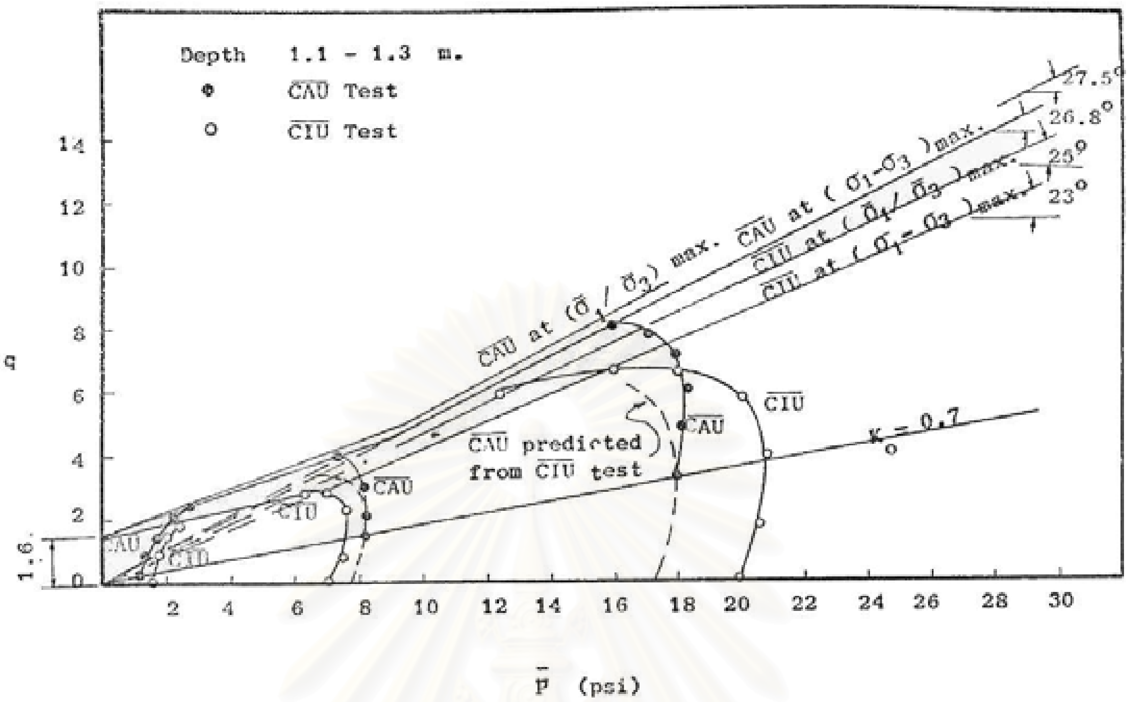
รูปที่ 5.30 แสดง Shear stress & Axial strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



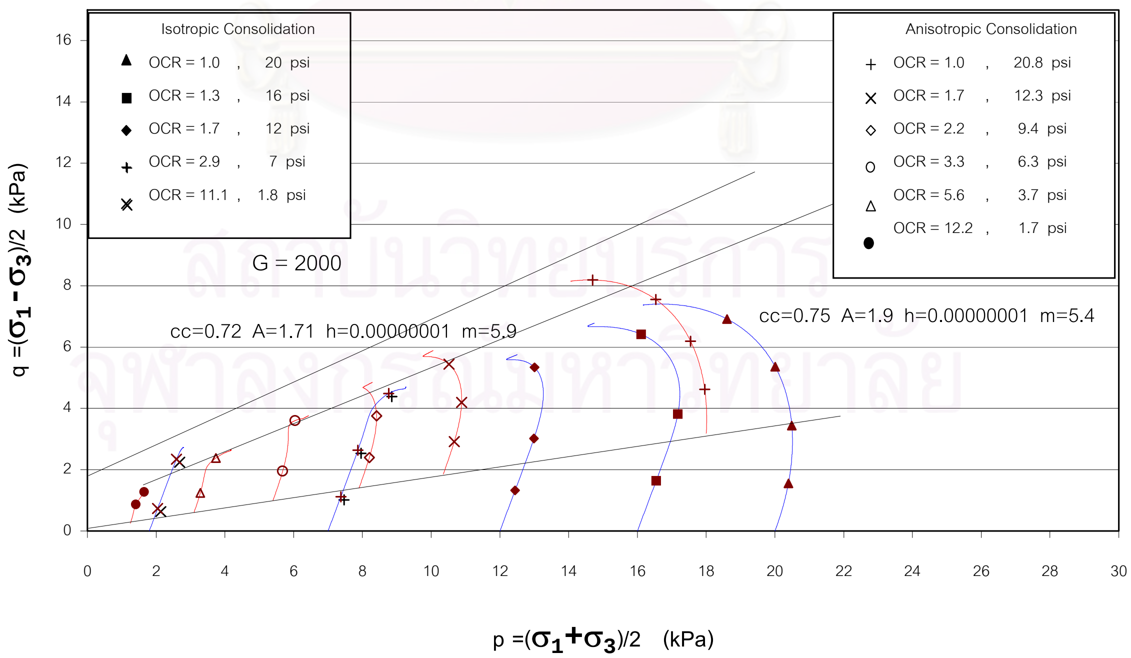
รูปที่ 5.31 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



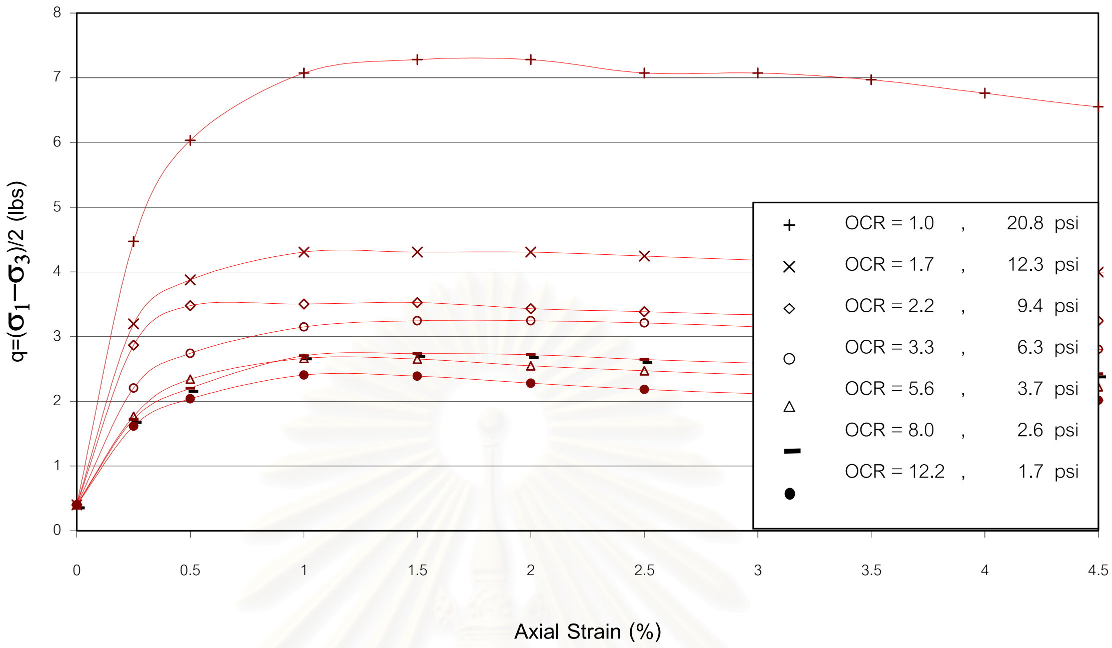
รูปที่ 5.32 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



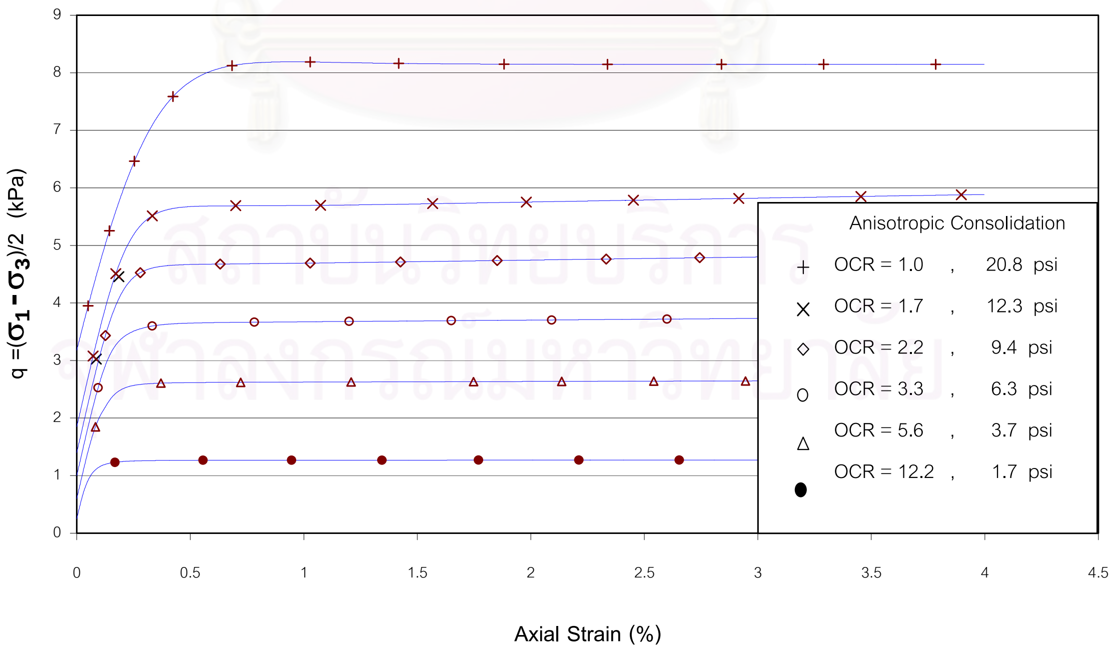
รูปที่ 5.33 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



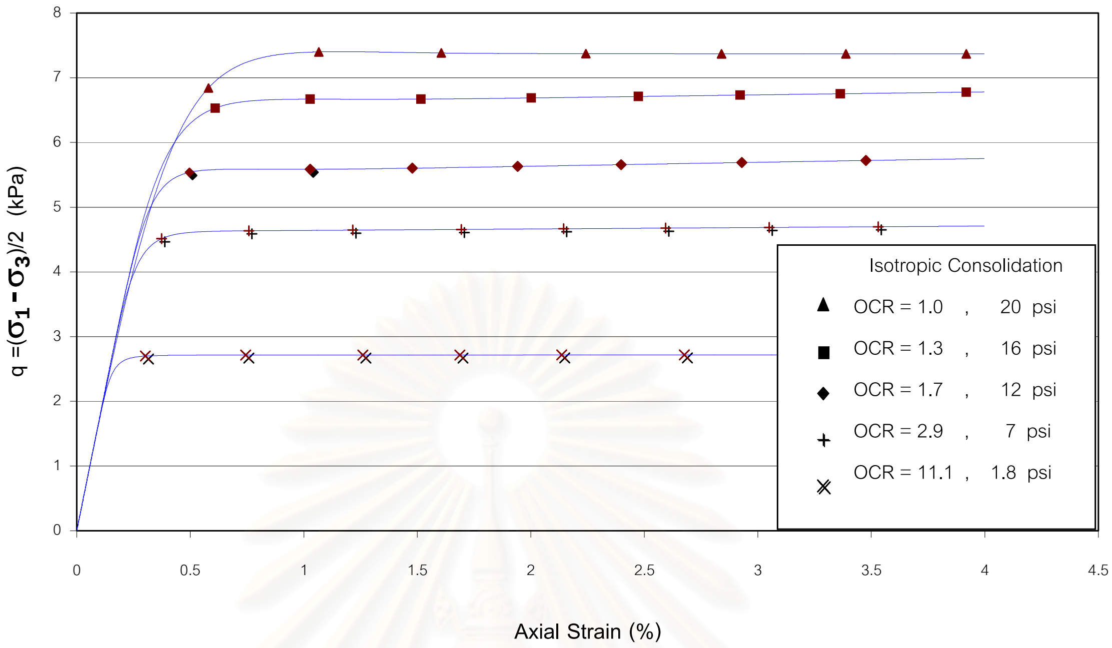
รูปที่ 5.34 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



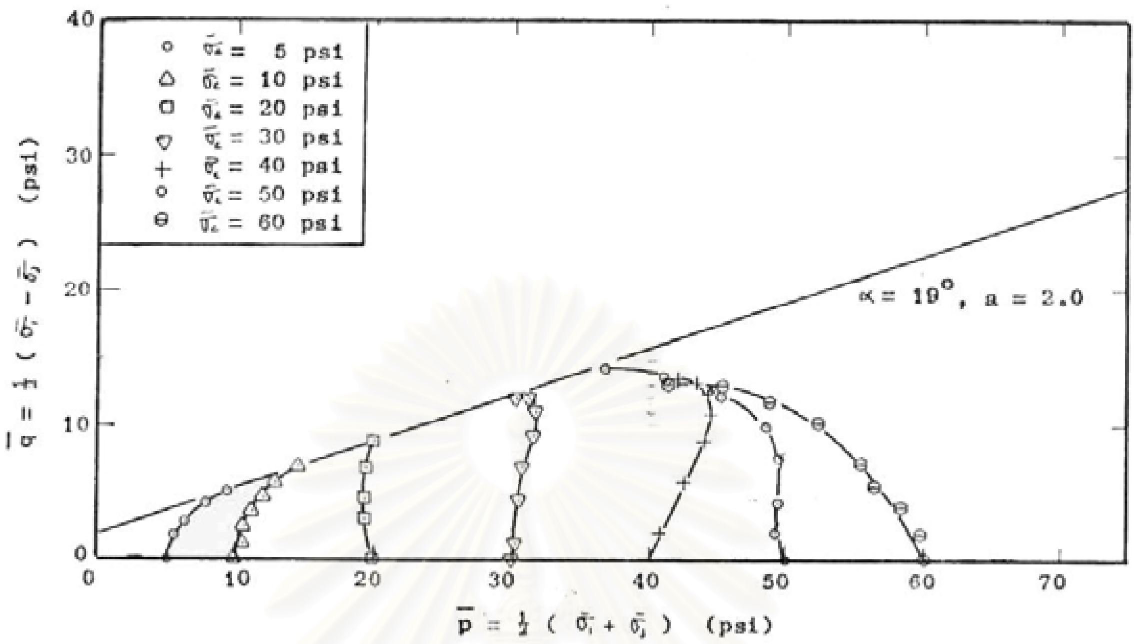
รูปที่ 5.35 แสดง Shear stress & Axial strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



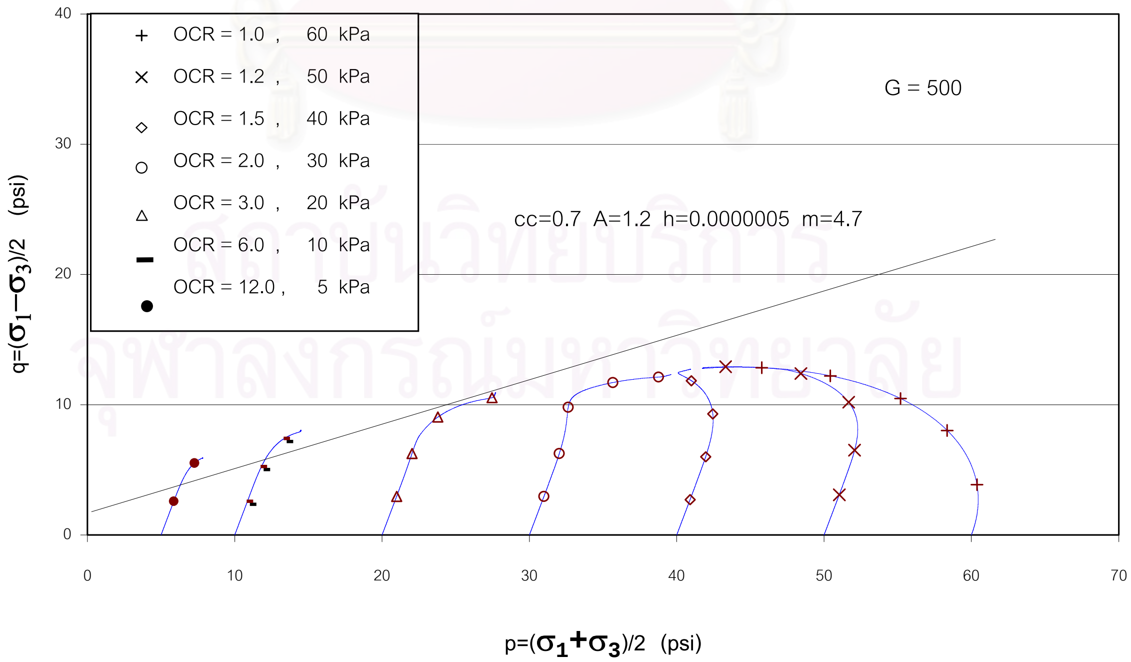
รูปที่ 5.36 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



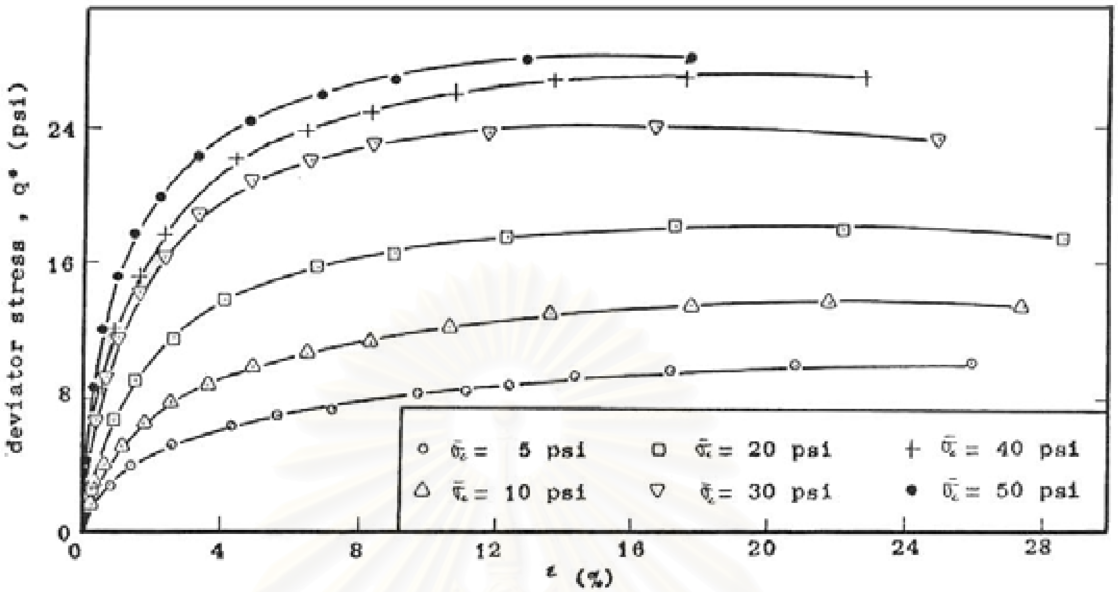
รูปที่ 5.37 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



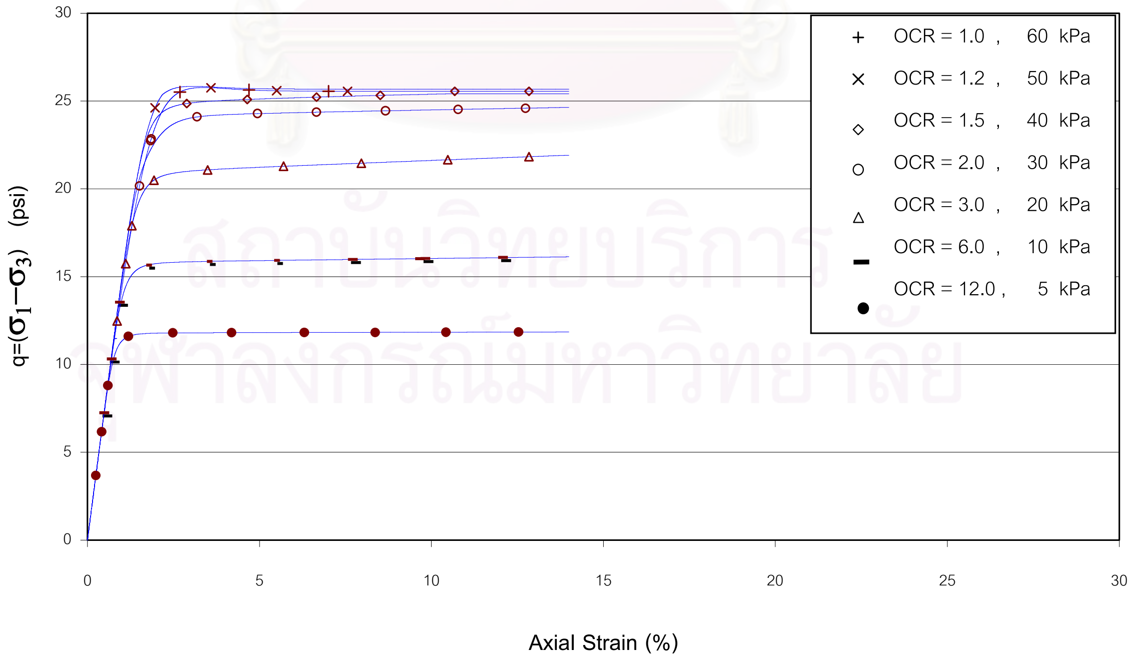
รูปที่ 5.38 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



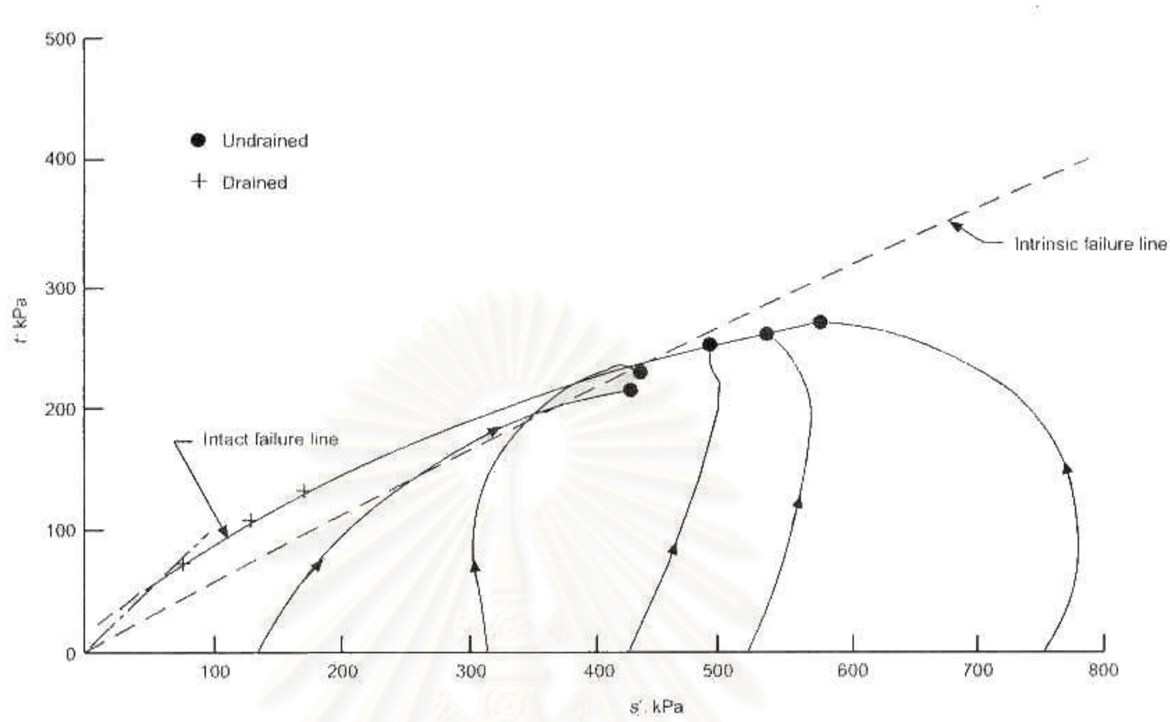
รูปที่ 5.39 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



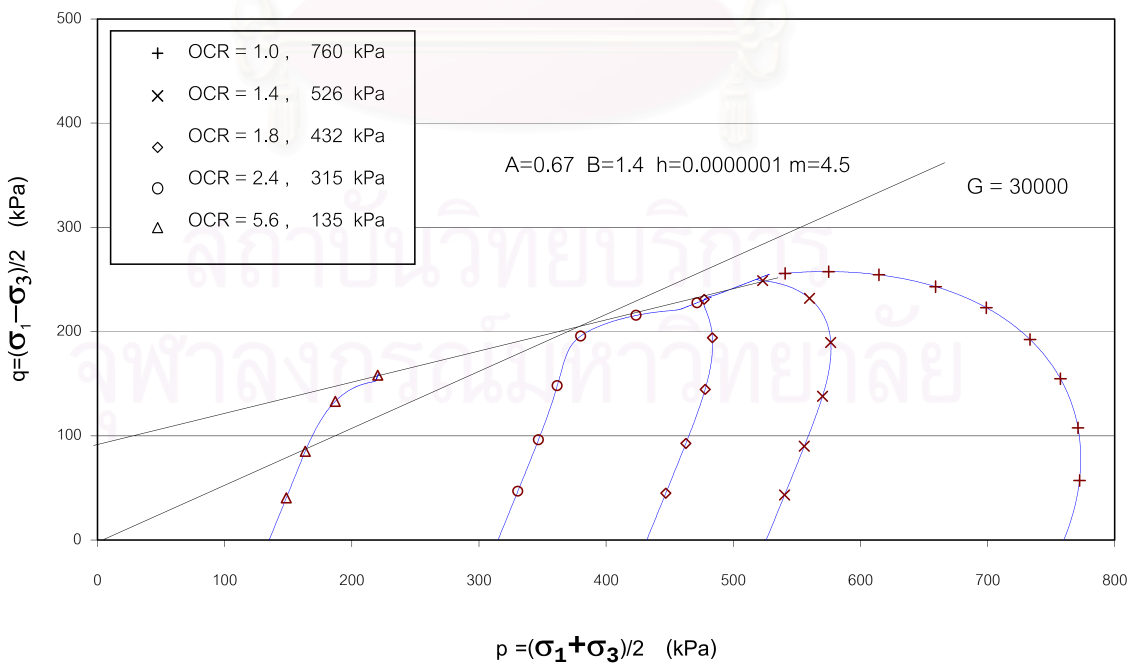
รูปที่ 5.40 แสดง Shear stress & Axial strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



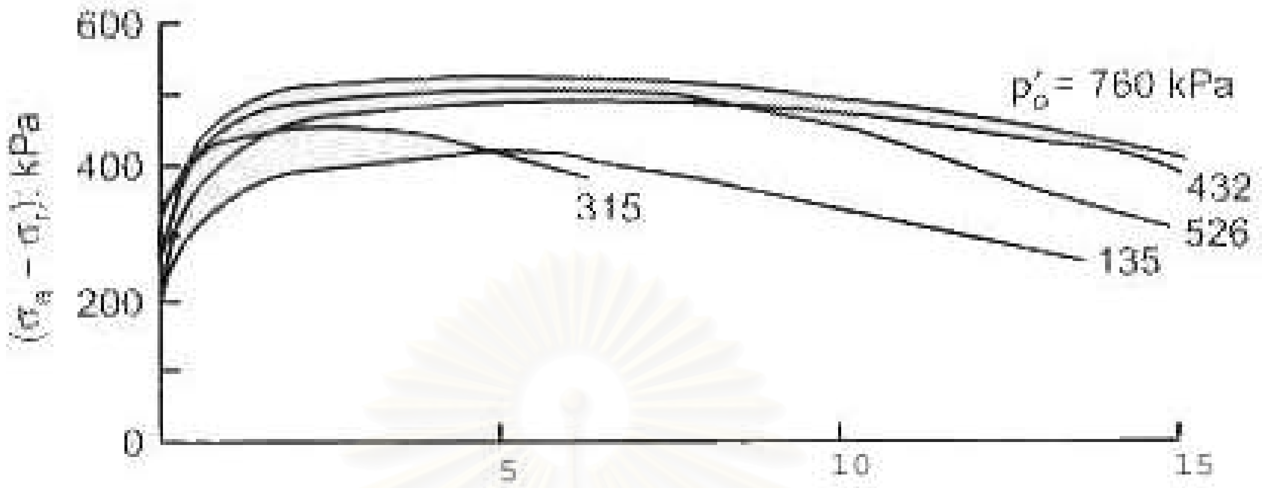
รูปที่ 5.41 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



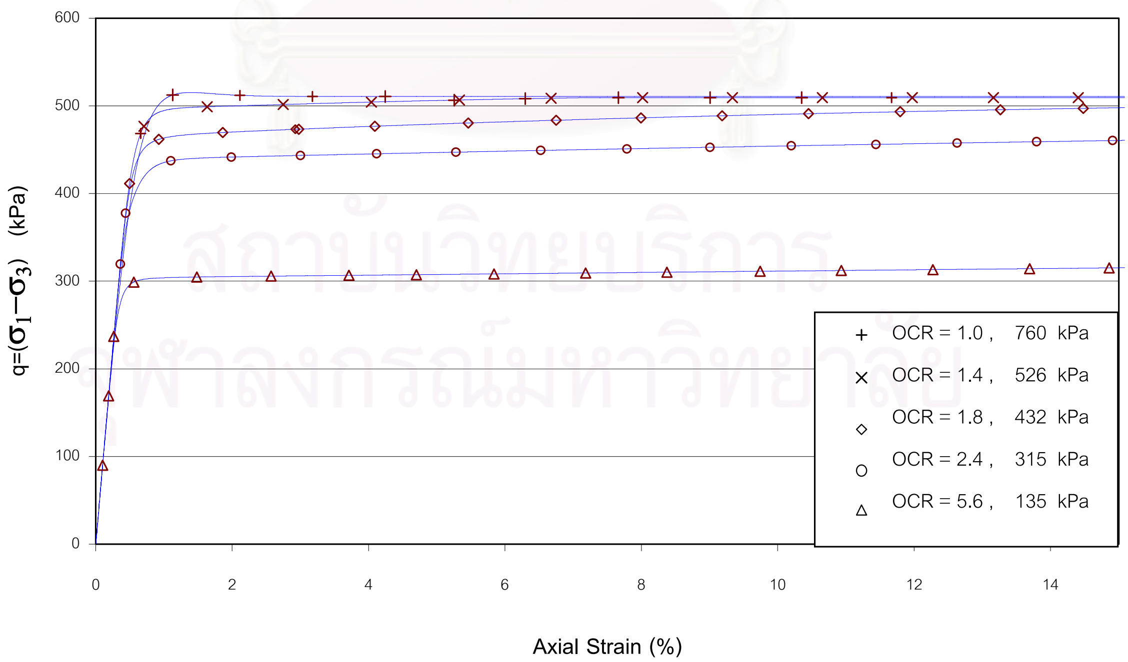
รูปที่ 5.42 แสดง stress – path ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



รูปที่ 5.43 แสดง stress – path จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง



รูปที่ 5.44 แสดง Shear stress & Axial strain (%) ของการทดสอบ Consolidated Undrianed



รูปที่ 5.45 แสดง Shear stress (kPa) & Axial strain (%) จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลอง

ภาคผนวก ข. แสดงวิธีคำนวณโดยใช้โปรแกรมวิชัลเบสิค 6.0

```
Option Explicit
    Dim pr As Double
    Dim Rann As Double
    Dim Kapp As Double
    Dim e0 As Double
    Dim SMG As Double
    Dim SMK As Double:              Dim SMKoc As Double
    Dim C(6, 6) As Double:          Dim Coc(6, 6) As Double
    Dim p As Double
    Dim q As Double
    Dim STRES(3, 3) As Double
    Dim Et As Double
    Dim Step As Integer
    Dim poc As Double
    Dim qoc As Double

Private Sub Form_Load()
    Dim i As Integer
    Dim DSTRAIN(3) As Double
    Dim I1 As Double
    Dim I0 As Double
    Dim DFI1 As Double:             Dim DFI1oc As Double
    Dim DFJ2 As Double:             Dim DFJ2oc As Double
    Dim M As Double
    Dim Phi As Double
    Dim DFSTRES(3, 3) As Double:    Dim DFSTRESoc(3, 3) As Double
    Dim HH As Double:               Dim HHoc As Double
    Dim RLAM(3) As Double:          Dim RLAMoc(3) As Double
    Dim DRLAM(3) As Double:         Dim DRLAMoc(3) As Double
    Dim RLAMDA As Double:           Dim RLAMDAoc As Double
    Dim DSTRAINP(3) As Double:      Dim DSTRAINPoc(3) As Double
    Dim DSTRAINE(3) As Double:      Dim DSTRAINEoc(3) As Double
    Dim DSTRES(3, 3) As Double:     Dim DSTRESoc(3, 3) As Double
    Dim DI1 As Double:              Dim DI1oc As Double
```

```
    Dim DRJ2 As Double:              Dim DRJ2oc As Double
    Dim DSTRAEP As Double:           Dim DSTRAEPoc As Double
    Dim DSTRAEE As Double:           Dim DSTRAEEoc As Double
    Dim STRAIN1 As Double
    Dim RJ2 As Double
    Dim DI0 As Double
    Dim CC As Double
    Dim STRESoc(3, 3) As Double
    Dim I1oc As Double
    Dim I0oc As Double:              Dim I0oci As Double
    Dim I0i As Double
    Dim RJ2oc As Double
    Dim m1 As Double
    Dim mo As Double
    Dim h As Double
    Dim Delta As Double
    Dim Ocr As Double

On Error Resume Next
     pr = 0.5
     DSTRAIN(1) = 0.00002          ' 0.0002
     DSTRAIN(2) = -pr * DSTRAIN(1)
     DSTRAIN(3) = -pr * DSTRAIN(1)
     STRES(1, 1) = 6#              ' reference
     STRES(2, 2) = 3.75
     STRES(3, 3) = 3.75
     STRESoc(1, 1) = 4.83    ' input
     STRESoc(2, 2) = 3
     STRESoc(3, 3) = 3
     Rann = 0.357                 ' (1.48 - 1.09) / Log(4)
     Kapp = 0.081                 ' (1.43 - 1.2) / Log(10)
     e0 = 2.28
     Phi = 0.401425728              ' 0.4383817749  = 25.12   Degree
                                    ' 0.427606      = 24.5    Degree
     CC = 0.73
```

```
    mo = 2.5
     h = 0.01
Debug.Print Rann, Kapp

    M = (6 * Sin(Phi)) * 1.6 / ((3 - Sin(Phi)))
    I1 = STRES(1, 1) + STRES(2, 2) + STRES(3, 3)
    I1oc = STRESoc(1, 1) + STRESoc(2, 2) + STRESoc(3, 3)
    I0 = I1
    I0i = I1
    I0oc = I1oc
    I0oci = I1oc
    Ocr = I0i / I0oci
    RJ2 = Sqr(((STRES(1, 1) - STRES(2, 2)) ^ 2 + (STRES(3, 3) - STRES(1, 1)) ^ 2) / 6)
    RJ2oc = Sqr(((STRESoc(1, 1) - STRESoc(2, 2)) ^ 2 + (STRESoc(3, 3) - STRESoc(1, 1)) ^ 2) / 6)
    STRAIN1 = 0
    Step = 0
    p = (STRES(1, 1) + 2 * STRES(3, 3)) / 3
    q = (STRES(1, 1) - STRES(3, 3))
    poc = (STRESoc(1, 1) + 2 * STRESoc(3, 3)) / 3
    qoc = (STRESoc(1, 1) - STRESoc(3, 3))
    Debug.Print Ocr

    Call Stiffness
    Open "D:\Bee\Fcap\zBounding-Cap.cal" For Output As #3

    GoTo 11

10   I1 = I1 + DI1
    I1oc = I1oc + DI1oc
    RJ2oc = RJ2oc + DRJ2oc
    RJ2 = RJ2 + DRJ2
    I0 = (-2 * CC * I1 + Sqr((2 * CC * I1) ^ 2 + 4 * (1 - 2 * CC) * (I1 ^ 2 + (9 * RJ2 ^ 2) / M ^ 2))) / (2 - 4 * CC)
    I0oc = (-2 * CC * I1oc + Sqr((2 * CC * I1oc) ^ 2 + 4 * (1 - 2 * CC) * (I1oc ^ 2 + (9 * RJ2oc ^ 2) / M ^ 2))) / (2 - 4 * CC)
```

```
    STRAIN1 = STRAIN1 + DSTRAIN(1)
    STRES(1, 1) = STRES(1, 1) + DSTRES(1, 1)
    STRES(2, 2) = STRES(2, 2) + DSTRES(2, 2)
    STRES(3, 3) = STRES(3, 3) + DSTRES(3, 3)
    STRESoc(1, 1) = STRESoc(1, 1) + DSTRESoc(1, 1)
    STRESoc(2, 2) = STRESoc(2, 2) + DSTRESoc(2, 2)
    STRESoc(3, 3) = STRESoc(3, 3) + DSTRESoc(3, 3)

    p = (STRES(1, 1) + 2 * STRES(3, 3)) / 3
    q = (STRES(1, 1) - STRES(3, 3))
    poc = (STRESoc(1, 1) + 2 * STRESoc(3, 3)) / 3
    qoc = (STRESoc(1, 1) - STRESoc(3, 3))

    Call Stiffness

11   Step = Step + 1

    RJ2 = Format(RJ2, "##,###0.0000")
    STRAIN1 = Format(STRAIN1, "##,###0.00000")
    p = Format(p, "##,###0.0000")
    q = Format(q, "##,###0.0000")
    poc = Format(poc, "##,###0.0000")
    qoc = Format(qoc, "##,###0.0000")
    DSTRAINP(1) = Format(DSTRAINP(1), "##,###0.0000000")
    DSTRAEE = Format(DSTRAEE, "##,###0.0000000")
    DSTRAINPoc(1) = Format(DSTRAINPoc(1), "##,###0.00000000")
    DSTRAEEoc = Format(DSTRAEEoc, "##,###0.00000000")

        Print #3, Step, poc, qoc, STRAIN1 * 100, p, q, DSTRAINP(1), DSTRAINPoc(1), DI1
        Debug.Print Step, poc, qoc, p, q, STRAIN1

    DFI1 = 2 * (I1 - CC * I0) / I0i ^ 2
    DFJ2 = 9 / (I0i * M) ^ 2
```

```
    DFI1oc = 2 * (I1oc - CC * I0oc) / I0oci ^ 2
    DFJ2oc = 9 / (I0oci * M) ^ 2
    DFSTRES(1, 1) = DFI1 + DFJ2 * (STRES(1, 1) - I1 / 3)
    DFSTRES(2, 2) = DFI1 + DFJ2 * (STRES(2, 2) - I1 / 3)
    DFSTRES(3, 3) = DFI1 + DFJ2 * (STRES(3, 3) - I1 / 3)
    DFSTRESoc(1, 1) = DFI1oc + DFJ2oc * (STRESoc(1, 1) - I1oc / 3)
    DFSTRESoc(2, 2) = DFI1oc + DFJ2oc * (STRESoc(2, 2) - I1oc / 3)
    DFSTRESoc(3, 3) = DFI1oc + DFJ2oc * (STRESoc(3, 3) - I1oc / 3)
    HH = -(12 * (1 + e0) * I0 * (I1 - CC * I0) * (I0 - 2 * CC * I0 + CC * I1)) / ((Rann - Kapp) * I0i ^ 4)
    m1 = RJ2 / I1

    If 0.98 * I0 <= I0oc Then
     Delta = 0
     Else
     Delta = Sqr((I1 - I1oc) ^ 2 + (RJ2 - RJ2oc) ^ 2)
    End If

    HHoc = -(12 * (1 + e0) * I0 * (I1 - CC * I0) * (I0 - 2 * CC * I0 + CC * I1)) / ((Rann - Kapp) * I0i ^ 4)
+ (1 + e0) * (1 + (M / m1) ^ mo) * h * Delta / ((I0 - Delta) * (Rann - Kapp))
      If RJ2oc = 0 Then
        HHoc = 0
      End If

    RLAM(1) = DFSTRES(1, 1) * (C(1, 1) * DSTRAIN(1) + C(1, 2) * DSTRAIN(2) + C(1, 3) *
DSTRAIN(3))
    RLAM(2) = DFSTRES(2, 2) * (C(2, 1) * DSTRAIN(1) + C(2, 2) * DSTRAIN(2) + C(2, 3) *
DSTRAIN(3))
    RLAM(3) = DFSTRES(3, 3) * (C(3, 1) * DSTRAIN(1) + C(3, 2) * DSTRAIN(2) + C(3, 3) *
DSTRAIN(3))
    RLAMoc(1) = DFSTRESoc(1, 1) * (Coc(1, 1) * DSTRAIN(1) + Coc(1, 2) * DSTRAIN(2) + Coc(1, 3)
* DSTRAIN(3))
    RLAMoc(2) = DFSTRESoc(2, 2) * (Coc(2, 1) * DSTRAIN(1) + Coc(2, 2) * DSTRAIN(2) + Coc(2, 3)
* DSTRAIN(3))
    RLAMoc(3) = DFSTRESoc(3, 3) * (Coc(3, 1) * DSTRAIN(1) + Coc(3, 2) * DSTRAIN(2) + Coc(3, 3)
* DSTRAIN(3))
```

```
    DRLAM(1) = DFSTRES(1, 1) * (C(1, 1) * DFSTRES(1, 1) + C(1, 2) * DFSTRES(2, 2) + C(1, 3) *
DFSTRES(3, 3))
    DRLAM(2) = DFSTRES(2, 2) * (C(2, 1) * DFSTRES(1, 1) + C(2, 2) * DFSTRES(2, 2) + C(2, 3) *
DFSTRES(3, 3))
    DRLAM(3) = DFSTRES(3, 3) * (C(3, 1) * DFSTRES(1, 1) + C(3, 2) * DFSTRES(2, 2) + C(3, 3) *
DFSTRES(3, 3))
    DRLAMoc(1) = DFSTRESoc(1, 1) * (Coc(1, 1) * DFSTRESoc(1, 1) + Coc(1, 2) * DFSTRESoc(2, 2)
+ Coc(1, 3) * DFSTRESoc(3, 3))
    DRLAMoc(2) = DFSTRESoc(2, 2) * (Coc(2, 1) * DFSTRESoc(1, 1) + Coc(2, 2) * DFSTRESoc(2, 2)
+ Coc(2, 3) * DFSTRESoc(3, 3))
    DRLAMoc(3) = DFSTRESoc(3, 3) * (Coc(3, 1) * DFSTRESoc(1, 1) + Coc(3, 2) * DFSTRESoc(2, 2)
+ Coc(3, 3) * DFSTRESoc(3, 3))

    RLAMDA = (RLAM(1) + RLAM(2) + RLAM(3)) / (HH + DRLAM(1) + DRLAM(2) + DRLAM(3))
    RLAMDAoc = (RLAMoc(1) + RLAMoc(2) + RLAMoc(3)) / (HHoc + DRLAMoc(1) + DRLAMoc(2) +
DRLAMoc(3))

    For i = 1 To 3
      DSTRAINP(i) = RLAMDA * DFSTRES(i, i)
      DSTRAINPoc(i) = RLAMDAoc * DFSTRESoc(i, i)
      DSTRAINE(i) = DSTRAIN(i) - DSTRAINP(i)
      DSTRAINEoc(i) = DSTRAIN(i) - DSTRAINPoc(i)
    Next i


    DSTRES(1, 1) = C(1, 1) * DSTRAINE(1) + C(1, 2) * DSTRAINE(2) + C(1, 3) * DSTRAINE(3)
    DSTRES(2, 2) = C(2, 1) * DSTRAINE(1) + C(2, 2) * DSTRAINE(2) + C(2, 3) * DSTRAINE(3)
    DSTRES(3, 3) = C(3, 1) * DSTRAINE(1) + C(3, 2) * DSTRAINE(2) + C(3, 3) * DSTRAINE(3)
    DSTRESoc(1, 1) = Coc(1, 1) * DSTRAINEoc(1) + Coc(1, 2) * DSTRAINEoc(2) + Coc(1, 3) *
DSTRAINEoc(3)
    DSTRESoc(2, 2) = Coc(2, 1) * DSTRAINEoc(1) + Coc(2, 2) * DSTRAINEoc(2) + Coc(2, 3) *
DSTRAINEoc(3)
    DSTRESoc(3, 3) = Coc(3, 1) * DSTRAINEoc(1) + Coc(3, 2) * DSTRAINEoc(2) + Coc(3, 3) *
DSTRAINEoc(3)
```

```
    DI1 = DSTRES(1, 1) + DSTRES(2, 2) + DSTRES(3, 3)
    DI1oc = DSTRESoc(1, 1) + DSTRESoc(2, 2) + DSTRESoc(3, 3)
    DRJ2 = Sqr(((DSTRES(1, 1) - DSTRES(2, 2)) ^ 2 + (DSTRES(3, 3) - DSTRES(1, 1)) ^ 2) / 6)
    DRJ2oc = Sqr(((DSTRESoc(1, 1) - DSTRESoc(2, 2)) ^ 2 + (DSTRESoc(3, 3) - DSTRESoc(1, 1)) ^
2) / 6)

    DSTRAEP = DSTRAINP(1) + DSTRAINP(2) + DSTRAINP(3)
    DSTRAEE = DSTRAINE(1) + DSTRAINE(2) + DSTRAINE(3)
    DSTRAEPoc = DSTRAINPoc(1) + DSTRAINPoc(2) + DSTRAINPoc(3)
    DSTRAEEoc = DSTRAINEoc(1) + DSTRAINEoc(2) + DSTRAINEoc(3)

    If Step = 2000 Then     'Or DSTRAINPoc(1) > DSTRAIN(1) Or DSTRAINP(1) > DSTRAIN(1)
        Close #3
        Stop
    Else: GoTo 10
    End If

End Sub

Private Sub Stiffness()
    pr = 0.49
    SMK = p * (1 + e0) / Kapp
    SMKoc = poc * (1 + e0) / Kapp
    SMG = 8000                    '  3000  lbs

    C(1, 1) = SMK + 4 * SMG / 3
    C(1, 2) = SMK - 2 * SMG / 3
    C(1, 3) = SMK - 2 * SMG / 3
    C(2, 1) = SMK - 2 * SMG / 3
    C(2, 2) = SMK + 4 * SMG / 3
    C(2, 3) = SMK - 2 * SMG / 3
    C(3, 1) = SMK - 2 * SMG / 3
    C(3, 2) = SMK - 2 * SMG / 3
    C(3, 3) = SMK + 4 * SMG / 3
    C(4, 4) = 2 * SMG
```

```
    C(5, 5) = 2 * SMG
    C(6, 6) = 2 * SMG

    Coc(1, 1) = SMK + 4 * SMG / 3
    Coc(1, 2) = SMK - 2 * SMG / 3
    Coc(1, 3) = SMK - 2 * SMG / 3
    Coc(2, 1) = SMK - 2 * SMG / 3
    Coc(2, 2) = SMK + 4 * SMG / 3
    Coc(2, 3) = SMK - 2 * SMG / 3
    Coc(3, 1) = SMK - 2 * SMG / 3
    Coc(3, 2) = SMK - 2 * SMG / 3
    Coc(3, 3) = SMK + 4 * SMG / 3
    Coc(4, 4) = 2 * SMG
    Coc(5, 5) = 2 * SMG
    Coc(6, 6) = 2 * SMG

End Sub
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายอภิชาติ อัศวเสนา เกิดเมื่อวันที่ 11 กุมภาพันธ์ 2519 สำเร็จการศึกษา ปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ในปีการศึกษา 2541 และเข้าศึกษาต่อในสาขาวิศวกรรมปฐพี ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2542 จบการศึกษาปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี 2545