

แบบจำลองทางเวลาที่แม่นยำของสายส่งที่มีความสูญเสีย



นาย เมธี หวังคุณธรรม

สถาบันวิทยบริการ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

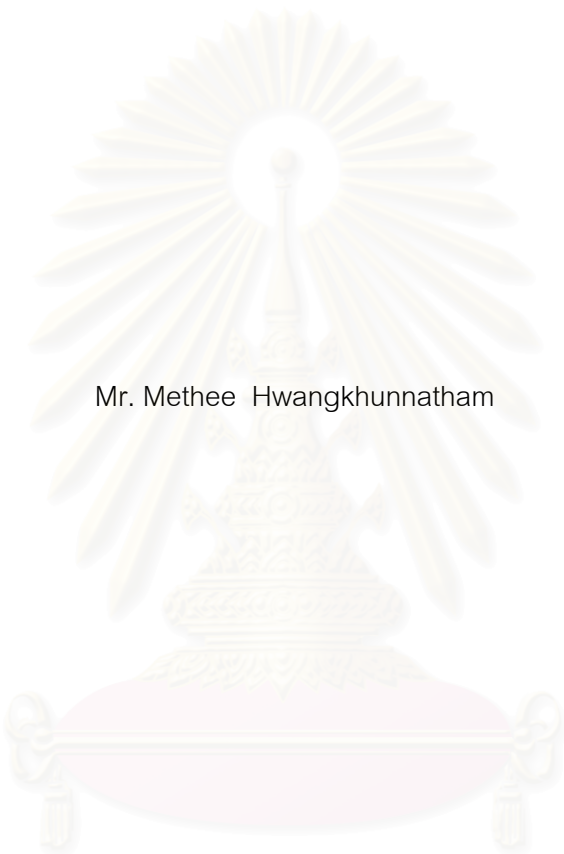
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-17-0104-7

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

AN ACCURATE TIME DOMAIN COMPANION MODEL OF A LOSSY TRANSMISSION LINE



Mr. Methee Hwangkhunnatham

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2001

ISBN 974-17-0104-7

หัวข้อวิทยานิพนธ์ แบบจำลองทางเวลาที่แม่นยำของสายส่งที่มีความสูญเสีย
โดย นาย เมธี หวังคุณธรรม
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.เอกชัย ลีลาวัศม์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์
ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาตรีบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.มงคล เดชนครินทร์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร.เอกชัย ลีลาวัศม์)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.คมสัน เพ็ชรรักษ์)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์)

เมธี หวังคุณธรรม : แบบจำลองทางเวลาที่แม่นยำของสายส่งที่มีความสูญเสีย. (AN ACCURATE TIME DOMAIN COMPANION MODEL OF A LOSSY TRANSMISSION LINE) อ. ที่ปรึกษา : รศ.ดร.เอกชัย ลีลาวัศม์, 88 หน้า. ISBN 974-17-0104-7.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอแบบจำลองทางเวลาของสายส่ง 2 แบบคือ แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น และแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา แบบจำลองแรกมีแนวคิดพื้นฐานมาจากการแทนสายส่งด้วยท่อนอุปกรณ์ R,L,G,C ที่นำมาต่อกัน N ท่อน แต่สามารถหลีกเลี่ยงการคำนวณที่มีตัวแปรวงจรมากๆ ในเวลาเดียวกันได้ โดยการคำนวณหาแบบจำลองสมมูลอย่างง่ายของสายส่งแต่ละเส้นที่ไม่มีปมภายในเพื่อใช้แทนสายส่งในวงจร และแยกการจำลองการทำงานออกเป็น 2 ชั้น ชั้นที่หนึ่งเป็นการจำลองการทำงานทางเวลาแบบปกติที่สายส่งจะถูกแทนด้วยแบบจำลองสมมูลอย่างง่าย ส่วนแบบจำลอง N ท่อนจะถูกนำมาวิเคราะห์ในชั้นที่สองเพื่อที่จะปรับค่าของแบบจำลองสมมูลอย่างง่ายที่จุดเวลาทุกๆ จุด การวิเคราะห์วิธีหลังนี้จะสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยใช้สูตรเวียนซ้ำที่มีความซับซ้อนของการคำนวณแปรผันโดยตรงกับจำนวนท่อน (N) แบบจำลองที่สองเป็นแบบจำลองใหม่ที่ได้จากการประมาณสมการ เทเลกราฟเฟอร์ โดยใช้สูตรอนุพันธ์เชิงตัวเลข เพื่อให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรเทียบกับระยะทางบนสาย ทำให้สามารถหาคำตอบในรูปเชิงวิเคราะห์ได้ และนำไปสู่แบบจำลองทางโดเมนเวลาที่แม่นยำที่มีตัวแปรสถานะคือการกระจายของแรงดันและกระแสบนสายส่ง นอกจากนี้ยังเสนอการประมาณเอกซ์โพเนนเชียลแบบท่อนมาลดทอนความซับซ้อนของการจัดเก็บและปรับทันกาลของตัวแปรสถานะการกระจายเหล่านี้ แบบจำลองนี้ยังสามารถควบคุมค่าผิดพลาดเพราะตัดปลายที่เกิดจากการจำลองการทำงานทางเวลาได้ โดยการเลือกใช้นาฬิกาและค่าความแม่นยำของการประมาณดังกล่าว

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา.....วิศวกรรมไฟฟ้า.....ลายมือชื่อนิสิต.....
สาขาวิชา.....วิศวกรรมไฟฟ้า.....ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ปีการศึกษา.....2544.....ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

4071806321 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: LOSSY TRANSMISSION LINE / VLSI INTERCONNECT SIMULATION / TIME DOMAIN COMPANION
MODEL / TELEGRAPHER EQUATION / MULTILEVEL SEGMENTED ALGORITHM

METHEE HWANGKHUNNATHAM : AN ACCURATE TIME DOMAIN COMPANION
MODEL OF A LOSSY TRANSMISSION LINE. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF.
EKACHAI LEELARASMEE, Ph.D., 88 pp. ISBN 974-17-0104-7.

This thesis presents two new transmission line models for time domain simulation of transmission line circuits, i.e. a two level transmission line model and a time domain companion model. The first model is based on lumped discretization in which the transmission line is replaced by an N segments of lumped R,L,G,C components. This model can avoid the simultaneous solution of a large number of variables by computing an equivalent macromodel of each transmission line that has no internal nodes and splitting the analysis into two levels. The first level deals with a normal circuit analysis in which each transmission line is replaced by its equivalent macromodel while the N -Segmented model of transmission line is analyzed at the second level to update the equivalent macromodel at each timepoint. This latter analysis can be done efficiently using a set of recursive formulae whose complexities depend linearly on N . The second model is a novel model obtained by applying the numerical differentiation formulae directly at the telegrapher equation to obtain a first order differential equation with respect to the distance parameter. This time discretized spatial differential equation can be solved analytically to give a true time domain companion model of the transmission line whose state variables are the spatial distribution of its voltages and currents. To cope with the computational complexity in storing and updating these distributions, a piecewise exponential approximation is used. With this model, the timestep selection and accuracy of approximation can be chosen to control the local truncation error of the time domain simulation.

Department.....Electrical Engineering..... Student's signature.....
Field of study.....Electrical Engineering..... Advisor's signature.....
Academic year...2001..... Co-advisor's signature.....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของรองศาสตราจารย์ ดร.เอกชัย ลีลาธรมี อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่าง ๆ ในการวิจัยมาด้วยดีตลอด และเนื่องจากทุนการวิจัยครั้งนี้ส่วนใหญ่ได้จากสำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ (สวทช) จึงขอขอบพระคุณมา ณ ที่นี้ด้วย

นอกจากนี้ยังขอขอบคุณน้องๆ ทุกคนในห้องปฏิบัติการวิจัยระบบเชิงเลข (DSRL) ที่คอยห่วงใยว่าทำไปได้ก็เปอร์เซ็นต์แล้ว และคอยช่วยเหลือให้คำแนะนำที่ดีต่าง ๆ มาโดยตลอด

ท้ายนี้ ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา ซึ่งสนับสนุนในด้านการเงินและให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ญ
สารบัญตาราง.....	ฎ

บทที่

1. บทนำ.....	1
1.1 แนวเหตุผลในการทำวิทยานิพนธ์.....	1
1.1.1 บทบาทและความสำคัญของการออกแบบแบบจำลองสายส่ง.....	1
1.1.2 งานวิจัยอื่นที่ทำมาแล้วในอดีต.....	1
1.1.3 งานวิจัยที่ต้องการนำเสนอ.....	2
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	3
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	3
1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากการทำวิจัย.....	4
1.5 วิธีดำเนินการวิจัย.....	4
2. ทฤษฎีพื้นฐาน.....	5
2.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า.....	5
2.1.1 ตัวแปรของวงจร.....	5
2.1.2 การสร้างสมการเมทริกซ์ของวงจรด้วยวิธีโมติฟายด์โนดัล.....	5
2.1.3 ตัวอย่างการสร้างสมการเมทริกซ์ของวงจรไฟฟ้า.....	6
2.2 ทฤษฎีเชิงตัวเลข.....	7
2.2.1 การประมาณเชิงอนุพันธ์.....	7
2.2.2 ค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (Truncation Error).....	8
2.2.3 การแปลงแบบคล้าย (Similarity Transformation).....	9
2.2.4 การแก้สมการเลียปูโนฟ.....	10
2.3 ทฤษฎีการจำลองการทำงานวงจรทางเวลา.....	10
2.4 ทฤษฎีสายส่ง และงานวิจัยอื่นที่ทำมาแล้วในอดีต.....	11
2.4.1 แบบจำลองแบบแบ่งส่วน (Segmentation Model).....	11
2.4.2 แบบจำลองแบบกระจาย (Distributed Model) [14].....	12
2.4.3 คอนโวลูชันแบบเวียนเกิด [14].....	14

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

3. แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น	15
3.1 แบบจำลอง N ท่อน (N-Segmented Model)	15
3.2 แบบจำลองสมมูล (Companion Equivalent Macromodel)	17
3.3 แผนภูมิสายงานการจำลองวงจรเวลาสำหรับแบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น	19
3.4 การนำแบบจำลองสายส่งแบบสองชั้นไปใช้จริง	20
3.5 การขยายผลไปสู่แบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้น	22
4. แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา	25
4.1 แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา	25
4.2 เทคนิคการลดรูปแบบจำลองสายส่ง	27
4.2.1 การแบ่งย่อยแบบจำลอง	28
4.2.2 การลดรูปแบบจำลองและค่าผิดพลาดที่เกิดจากการลดรูป	28
4.2.3 การเลือกค่าภาวะเริ่มต้นใหม่ที่เหมาะสมเพื่อลดค่าผิดพลาดในการลดรูป	30
4.2.4 การเลือกค่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ ที่เหมาะสมเพื่อลดค่าผิดพลาดในการลดรูป	30
4.2.5 การยุบรวมแบบจำลองและค่าผิดพลาดที่เกิดจากการยุบรวม	31
4.2.6 การคำนวณหาค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (LTE)	32
4.3 การปรับขนาดชั้นเวลาอัตโนมัติ	34
4.4 กรณีเฉพาะในการนำแบบจำลองสายส่งไปใช้จริง	34
4.5 การขยายผลไปสู่การประมาณแบบสี่เหลี่ยมคางหมู	37
5. ทดสอบและวิจารณ์ผล	39
5.1 เงื่อนไขในการทดสอบ	39
5.2 ชนิดของการทดสอบ	39
5.3 วงจรที่ใช้ในการทดสอบ	40
5.4 ผลการทดสอบ	42
5.4.1 การทดสอบความแม่นยำของแบบจำลอง (Test-A)	42
5.4.2 การทดสอบประสิทธิภาพของการแบ่งท่อนย่อย และยุบรวม (Test-B)	49
5.4.3 การทดสอบการควบคุมความแม่นยำในการลดอันดับ (Test-C)	50
5.5 วิจารณ์ผลการทดสอบ	53
5.5.1 การทดสอบความแม่นยำของแบบจำลอง (Test-A)	53
5.5.2 การทดสอบประสิทธิภาพของการแบ่งท่อนย่อย และยุบรวม (Test-B)	53
5.5.3 การทดสอบการควบคุมความแม่นยำในการลดอันดับ (Test-C)	54
5.6 สรุปผล	54
5.7 ข้อเสนอแนะ	55

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

รายการอ้างอิง 56

บทพิสูจน์ $\|\mathbf{w}(\cdot, t_n) - \tilde{\mathbf{w}}(\cdot, t_n)\|_\infty \leq \alpha h^2 \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{w}(\cdot, t_n) \right\|_\infty$ 58

บทความทางวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์ในระดับนานาชาติ 63

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 88



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

หน้า

รูปที่ 2.1 ตัวอย่างวงจรที่ไม่สามารถใช้วิธี Node Analysis สร้างสมการโดยตรงได้.....	6
รูปที่ 2.2 กราฟแสดงผลตอบสนองเชิงเวลาของตัวแปร x ที่จุดเวลาต่างๆ.....	8
รูปที่ 2.3 แผนภูมิสายงานขั้นตอนวิธีการจำลองทางเวลาแบบทั่วไป.....	11
รูปที่ 2.4 (ก) วงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยสายส่ง (ข) วงจรไฟฟ้าในรูป (ก) ที่แทนแบบจำลองสายส่งด้วยแบบจำลองส่วนย่อยจำนวน N ท่อนซึ่งเป็นที่ตั้งทั้งแบบพาย ทีหรือ แกมมา.....	12
รูปที่ 2.5 รูปแบบจำลองสายส่ง.....	12
รูปที่ 3.1 (ก) วงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยสายส่ง (ข) วงจรไฟฟ้าในรูป (ก) ที่แทนสายส่งด้วยแบบจำลองจำนวน N ท่อนซึ่งเป็นที่ตั้งทั้งแบบพาย ทีหรือ แกมมา.....	15
รูปที่ 3.2 วงจรสายส่งที่แทนสายส่งด้วยแบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อนที่เวลา t_k	16
รูปที่ 3.3 แบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อนที่เวลา t_k	16
รูปที่ 3.4 วงจรสายส่งที่แทนสายส่งด้วยแบบจำลองสมมูลที่เวลา t_k	17
รูปที่ 3.5 แบบจำลองสมมูลที่เวลา t_k	18
รูปที่ 3.6 แผนภูมิสายงานการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรสายส่งที่ใช้แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น.....	19
รูปที่ 3.7 แบบจำลองสายส่ง 2 ท่อนย่อยใดๆที่เวลา t_k	23
รูปที่ 3.8 ผลจากการยุบรวมแบบจำลองในรูปที่ 3.7 ที่เวลา t_k	23
รูปที่ 3.9 แสดงการคำนวณหาตัวแปรภายใน $v_1(t_k)$ ของท่อนย่อยใดๆที่เวลา t_k	24
รูปที่ 4.1 รูปแบบจำลองสายส่ง.....	25
รูปที่ 4.2 แบบจำลองสายส่งในกรณีที่ถูกแบ่งย่อยออกเป็น k ท่อน.....	28
รูปที่ 4.3 แสดงการยุบรวมแบบจำลองสายส่งท่อนที่ i^{th} ที่เวลา t_n	31
รูปที่ 4.4 แผนภูมิสายงานของการจำลองการทำงานวงจรทางเวลาสำหรับแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา.....	36
รูปที่ 5.1 วงจรที่ใช้ในการทดสอบแบบจำลองสายส่ง.....	40
รูปที่ 5.2 รูปสัญญาณขาเข้าขั้นบันได.....	41
รูปที่ 5.3 รูปสัญญาณขาเข้าไซน์ชอยด์.....	41
รูปที่ 5.4 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-01 ในตารางที่ 5.1.....	43
รูปที่ 5.5 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-02 ในตารางที่ 5.1.....	44
รูปที่ 5.6 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-03 ในตารางที่ 5.1.....	45
รูปที่ 5.7 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-04 ในตารางที่ 5.1.....	46
รูปที่ 5.8 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-05 ในตารางที่ 5.1.....	47
รูปที่ 5.9 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-06 ในตารางที่ 5.1.....	48
รูปที่ 5.10 แผนภาพแสดงการแบ่งท่อนย่อยของการจำลองการทำงานทางเวลาในช่วงจุดเวลาที่ 20-40 ของการทดสอบกรณี TB-01.....	49
รูปที่ 5.11 แผนภาพแสดงการแบ่งท่อนย่อยของการจำลองการทำงานทางเวลาในช่วงจุดเวลาที่ 1-20 ของการทดสอบกรณี TB-02.....	50
รูปที่ 5.12 แสดงการเปรียบเทียบผลการจำลองการทำงานทางเวลาของการทดสอบกรณี TC-01.....	51

สารบัญญภาพ (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 5.13 แสดงการเปรียบเทียบผลการกระจายของสัญญาณในสายก่อนการลดอันดับ ของการทดสอบกรณี TC-01 ที่จุดเวลาที่ 20	51
รูปที่ 5.14 แสดงการเปรียบเทียบผลการกระจายของสัญญาณในสายหลังการลดอันดับ ของการทดสอบกรณี TC-01 ที่จุดเวลาที่ 20	52
รูปที่ 15 วงจรที่ประกอบด้วยสายส่ง	59



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 2.1 ตารางเปรียบเทียบวิธีต่างๆ ในการสร้างสมการวงจร.....	6
ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงความซับซ้อนในการคำนวณของสูตรการหาแบบจำลองสายส่งอย่างง่าย และการ คำนวณหาตัวแปรภายในวงจรกรณีสายส่ง 2 เส้น.....	21
ตารางที่ 3.2 ตารางแสดงแบบจำลองที่ชั้นต่างๆ ของแบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้น	22
ตารางที่ 5.1 กรณีต่างๆ สำหรับการทดสอบแบบจำลองสายส่ง	42
ตารางที่ 5.2 ผลการแบ่งท่อนย่อยเมื่อกำหนดค่าผิดพลาดสูงสุดที่ยอมรับได้ต่างกัน	52



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 แนวเหตุผลในการทำวิทยานิพนธ์

1.1.1 บทบาทและความสำคัญของการออกแบบแบบจำลองสายส่ง

ปัจจุบันนี้โปรแกรมวิเคราะห์การทำงานของวงจรไฟฟ้า และอิเล็กทรอนิกส์กำลังมีบทบาทมากในวงการวิศวกรรมไฟฟ้า เนื่องจากใช้งานได้สะดวกและให้ผลลัพธ์ของการวิเคราะห์ที่แม่นยำ ทำให้มีผู้สนใจนำโปรแกรมวิเคราะห์เหล่านี้ไปใช้ออกแบบ วิเคราะห์หรือตรวจสอบการทำงานของวงจรไฟฟ้ากันอย่างแพร่หลาย ส่วนกลุ่มผู้พัฒนาโปรแกรมได้พยายามปรับปรุงโปรแกรมให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น

สายส่ง (Transmission Line) สำหรับการส่งพลังงานทางวิศวกรรมไฟฟ้ากำลัง หรือส่งผ่านสัญญาณทางวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสารนั้น เป็นตัวกลางที่นำสัญญาณจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่ง โดยมีค่าประวิงเวลา (Time Delay) เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญ ทำให้แบบจำลองของสายส่งนั้นมีลักษณะต่างจากอุปกรณ์อื่น

นอกจากนี้ ยังมีปรากฏการณ์อื่นของสายส่งอีกหลายอย่างที่ต้องนำมาพิจารณาสร้างแบบจำลองด้วย เช่นการสะท้อน (Reflection) ความเพี้ยน (Distortion) การกระจายความถี่ (Dispersion) การไขว้แทรก (Crosstalk) ผลกระทบทางผิว (Skin Effect) ปรากฏการณ์เหล่านี้ก็เกิดขึ้นกับเส้นเชื่อมต่อ (Interconnect line) ในวงจรรวมที่ความถี่สูงด้วยเช่นกัน

จากสมการ Telegrapher ที่ใช้ในการอธิบายคุณลักษณะของสายส่งซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา และระยะทางบนสาย ทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยวิธีทางเชิงตัวเลขทั่วไป มีงานวิจัยหลายชิ้นในอดีตที่พยายามเสนอวิธีประมาณในการลดรูปสมการให้อยู่ในรูปที่ง่ายก่อนที่จะนำไปใช้จริง [7, 8] ซึ่งในแต่ละวิธีที่นำเสนอต่างก็มีข้อดีและข้อเสียด้วยกันทุกฝ่าย ด้วยเหตุนี้เองทำให้งานวิจัยทางการออกแบบแบบจำลองสายส่งที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลา ยังคงเป็นเรื่องที่ทำหาย และเกิดความแข่งขันกันอย่างสูงในปัจจุบันนี้

1.1.2 งานวิจัยอื่นที่ทำมาแล้วในอดีต

แบบจำลองสายส่งที่มีผู้เสนอมานั้น แบ่งออกได้เป็นกลุ่มใหญ่ๆ 2 กลุ่ม ได้แก่

กลุ่มแรกซึ่งแทนสายส่งด้วยชุดของ RLCG ที่นำมาต่อกันแบบคาสเคด โดยที่ความแม่นยำของการคำนวณจะแปรผันตามจำนวนชุดย่อย (N) ของ RLCG ที่นำมาต่อคาสเคดกัน ข้อเสียของการสร้างแบบจำลองในกลุ่มนี้คือจำนวนตัวแปรของวงจรจะเพิ่มขึ้นสูงมากในกรณีที่ต้องการความแม่นยำในการคำนวณ อย่างไรก็ตาม

แบบจำลองแบบนี้นำไปใช้ได้ง่าย และสามารถใช้ได้กับโปรแกรมวิเคราะห์วงจรแบบทั่วไปทุกประเภท (General Purpose Circuit Simulator) โดยไม่ต้องดัดแปลงแก้ไขโปรแกรม ทำให้วิธีการสร้างแบบจำลองแบบนี้ยังคงได้รับความนิยมอยู่ [1, 2, 3, 4]

กลุ่มที่สองเป็นกลุ่มที่มีสมการในขั้นสุดท้ายติดในอยู่รูปคอนโวลูชัน (Convolution) เนื่องจากนักวิจัยในกลุ่มนี้พยายามที่จะแก้ปัญหาเริ่มต้นในโดเมนทางความถี่แล้วค่อยแปลงกลับมาในโดเมนทางเวลา กล่าวคือ สัญญาณด้านออกของสายส่งจะเกิดจากคอนโวลูชันระหว่างสัญญาณด้านเข้า กับผลตอบสนองต่ออิมพัลส์ (Impulse Response) ความยากของวิธีนี้จะอยู่ที่การหาผลตอบสนองต่ออิมพัลส์ของวงจรสายส่ง มีงานวิจัยหลายชิ้นที่ได้เสนอวิธีในการหาผลตอบสนองต่ออิมพัลส์เช่น เทคนิคการแปลงกลับฟูรีเยร์แบบเร็ว (Inverse fast Fourier transformation technique) [5] เทคนิคการแปลงกลับลาปลาซเชิงตัวเลข (Numerical inverse Laplace transformation technique) [6] หรือ วิธีในการลดรูปโมเมนต์ (Reduce Moment Method) [7, 8] อย่างไรก็ตามวิธีเหล่านี้ก็ต้องทำคอนโวลูชัน ซึ่งเป็นการคำนวณที่ต้องใช้ข้อมูลจุดเวลา (Timepoint) ที่ผ่านมาทุกจุด นั่นหมายถึงในการคำนวณที่จุดเวลามากขึ้น ก็ยังต้องใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น ต่อมาได้มีผู้เสนอวิธีคอนโวลูชันแบบเวียนเกิด (Recursive Convolution) เพื่อแก้ไขให้คอนโวลูชันสามารถทำได้เร็วขึ้น [7] นอกเหนือไปจากปัญหาดังกล่าวแล้ว วิธีในการลดรูปโมเมนต์นั้นอาจอาจทำให้เกิดโพลที่ไม่เสถียร (Unstable poles) ได้ จึงได้มีผู้เสนอวิธี Split congruence transformations ซึ่งเป็นการลดรูปโมเมนต์แบบใหม่ที่ไม่ก่อให้เกิดโพลที่ไม่เสถียร แต่วิธีการดังกล่าวจะต้องเพิ่มงานในการกระจายแยกเมทริกซ์ซึ่งเป็นส่วนที่ทำให้ความแม่นยำลดลง

1.1.3 งานวิจัยที่ต้องการนำเสนอ

เนื้อหาในงานวิจัยนี้ต้องการนำเสนอแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลาของสายส่ง 2 แบบจำลองด้วยกันคือ แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้นที่จัดอยู่ในกลุ่มที่หนึ่ง และแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลาซึ่งจัดอยู่ในกลุ่มที่สองของงานวิจัยอื่นๆ ดังกล่าวแล้ว

แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้นนั้นประกอบด้วยแบบจำลอง 2 แบบคือ แบบจำลอง N ท่อน (N-segmented Model) และ แบบจำลองสมมูล (Companion Equivalent Macromodel) โดยที่หลักการของเทคนิคนี้ จะมุ่งเน้นเพื่อเปลี่ยนแบบจำลองที่ยุ่งยากซับซ้อนหลายๆ ปมให้เป็นแบบจำลองใหม่ที่ง่ายและไม่ซับซ้อนก่อนที่จะนำไปแทนลงในวงจรหลัก กรรมวิธีในการเปลี่ยนนั้นจะแบ่งย่อยออกเป็น 2 ระดับ กล่าวคือ ที่จุดเวลาทุกๆจุด จะมีการคำนวณหาแบบจำลองสมมูลเก็บไว้เพื่อนำไปใช้ในการจำลองการทำงานวงจร แต่การคำนวณหาแบบจำลองสมมูลนั้นจะถูกแยกออกมาทำอีกชั้นหนึ่ง เนื่องจากแบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อนนั้นจะมีลักษณะพิเศษที่สามารถเร่งการคำนวณได้อย่างเต็มที่ ถ้าแยกการคำนวณออกมาจากอุปกรณ์ตัวอื่นในวงจร ทำให้การจำลองการทำงานวงจรมันทำได้เร็วขึ้น และงานวิจัยนี้ยังได้ขยายผลไปสู่แบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้น ซึ่งมีข้อดีที่ชั้นกว่าแบบจำลองแบบสองชั้น โดยสามารถยกเว้นการคำนวณบางส่วนออกไปได้ ในกรณีที่มีส่วนย่อยของแบบจำลองนั้นไม่มีการเปลี่ยนแปลง และสำหรับการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณในสายนั้น จะทำจากเวลาแฝง (latency) [9] ของสายส่ง

แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา จะเป็นแบบจำลองที่ลดรูปมาจากสมการ Telegrapher โดยเริ่มจากการประมาณฟังก์ชันอนุพันธ์ย่อยทางเวลาด้วยวิธีการเชิงตัวเลข ทำให้รูปแบบของสมการลดเหลือเพียงอนุพันธ์

เทียบกับระยะทางบนสาย ทำให้สามารถวิเคราะห์หาผลเฉลยของวงจรได้โดยตรง แต่ผลเฉลยที่ได้นั้น จะมีรูปแบบซับซ้อนมากขึ้นตามจำนวนจุดเวลาในการจำลอง งานวิจัยนี้จึงนำเสนอเทคนิคการลดรูปแบบจำลองสายส่งไว้ เพื่อใช้ลดความซับซ้อนของแบบจำลองลง และคำนวณได้เร็วขึ้น แต่ในการลดรูปแบบจำลองของสายส่งนั้น จะส่งผลให้มีค่าผิดพลาดเกิดขึ้นในการคำนวณครั้งถัดไป จึงต้องมีการควบคุมค่าผิดพลาดในการลดรูปไว้ด้วย เพื่อคงความแม่นยำของผลเฉลยไว้ นอกจากนี้งานวิจัยยังได้เสนอการนำค่าผิดพลาดเพราะตัดปลายเฉพาะที่ (Local Truncation Error) มาใช้ในการปรับขึ้นเวลาแบบอัตโนมัติ

ในการทดสอบแบบจำลองในตอนท้ายของงานวิจัย ผู้วิจัยจะทดสอบเปรียบเทียบแบบจำลองทั้งสองแบบ คือแบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น และแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา ทั้งกรณีที่มีการลดอันดับและไม่ลดอันดับลง โดยวงจรที่นำมาใช้ในการทดสอบนั้น ประกอบด้วยทั้งสายส่งที่มีความสูญเสีย และสายส่งที่ไม่มีความสูญเสีย ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความเที่ยงตรงของแบบจำลอง

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเสนอแบบจำลองของสายส่งที่มีความสูญเสีย (Lossy Transmission Line) สำหรับการวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลาที่สามารถควบคุมความแม่นยำได้
2. เพื่อเสนอเทคนิคขั้นตอนวิธีแบ่งย่อยหลายระดับ (Multilevel Segmented Algorithm) ที่สามารถประยุกต์ใช้กับแบบจำลองที่นำเสนอ เพื่อช่วยลดเวลาในการคำนวณ
3. เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้กับงานวิจัยอื่นที่ใกล้เคียง ในรูปของความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลา

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. แบบจำลองของสายส่ง (Transmission Line) ที่เสนอในงานวิจัยนี้เป็นได้ทั้งกรณีของสายส่งที่มีความสูญเสีย (Lossy Transmission Line) และสายส่งแบบที่มีการเชื่อมร่วม (Coupled Transmission Line) แต่จะจำกัดเฉพาะสายส่งที่สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ Telegrapher เท่านั้น
2. แบบจำลองของสายส่งที่เสนอในงานวิจัยนี้จะไม่รวมปรากฏการณ์ที่พารามิเตอร์ของสายส่งเปลี่ยนแปลงตามความถี่ เช่น ปรากฏการณ์ทางผิว (Skin Effect) หรือ ปรากฏการณ์การกระจายความถี่ของไดอิเล็กทริก (Dielectric Dispersion) เป็นต้น
3. แบบจำลองของสายส่งที่เสนอในงานวิจัยนี้เป็นแบบจำลองที่ใช้กับการวิเคราะห์เชิงเวลา ที่มีความแม่นยำในโดเมนของทางระยะทางตามสาย แต่ยอมให้มีค่าผิดพลาดที่เกิดจากการประมาณอนุพันธ์เชิงเวลาได้ โดยจะใช้วิธีการต่างๆ ดังนี้ วิธีผลบวกของคอนโวลูชัน (Convolution Summation) วิธีการอินทิเกรตพหุนาม (Polynomial Integration) และอื่นๆ
4. ในกรณีที่ยอมให้แบบจำลองโมเดลสายส่งมีค่าผิดพลาดได้ จะนำเอาเทคนิคขั้นตอนวิธีแบ่งย่อยหลายระดับมาใช้ร่วมกับแบบจำลองของสายส่งด้วย
5. การวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้จะใช้สายส่งแบบเส้นเดี่ยว และการประมาณแบบ Backward Euler เป็นหลัก แต่ต้องสามารถนำไปขยายผลเพิ่มเติมไปสู่สายส่งแบบมีการเชื่อมร่วม และการประมาณเชิงตัวเลขวิธีอื่นได้

6. ต้องทำโปรแกรมต้นแบบที่สามารถนำไปใช้จำลองแบบการทำงานของสายส่งเพื่อทดสอบแบบจำลองของสายส่งที่นำเสนอได้
7. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแบบจำลองในงานวิจัยนี้ทั้งทั้งด้านความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้นจะเปรียบเทียบกับโมเดลแบบแบ่งส่วนเป็นหลัก

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากการทำวิจัย

1. ได้ค้นพบวิธีใหม่เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองของสายส่งที่ใช้ในการวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลา
2. ได้แบบจำลองของสายส่งสำหรับใช้วิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลาที่ให้ผลการวิเคราะห์แม่นยำ
3. แบบจำลองของสายส่งที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับโปรแกรมวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าทั่วไปเช่น เล็ก, Pspice เป็นต้น

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษางานวิจัยอื่นที่ทำมาแล้วในอดีต
2. วิเคราะห์และออกแบบแบบจำลองสายส่งแบบ 2 ชั้น
3. เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแบบจำลองสายส่งแบบ 2 ชั้นกับงานวิจัยอื่นที่ใกล้เคียง
4. ปรับปรุงแก้ไขแบบจำลอง ในส่วนที่สามารถพัฒนาให้ดีขึ้นได้อีก
5. ขยายขอบเขตของงานจากแบบจำลองสายส่งแบบ 2 ชั้นออกไปเป็นแบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้น
6. วิเคราะห์และออกแบบแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา
7. หาจุดที่บกพร่อง และหาทางปรับปรุงแก้ไขให้ดีขึ้น
8. ศึกษาแนวทางที่จะนำเทคนิคที่ช่วยลดเวลาในการปรับทันกาลค่าของแหล่งกำเนิดกระแส โดยการใช่ว่าที่คำนวณไว้แล้วในอดีต แล้วหาทางลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงอีก ด้วยการประมาณ สมการที่ใช้ในการปรับทันกาลค่าของแหล่งกำเนิดกระแส
9. ศึกษาแนวทางที่จะนำเทคนิคขั้นตอนวิธีแบ่งย่อยหลายระดับ ไปประยุกต์ใช้กับแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา เพื่อช่วยลดเวลาในการคำนวณ
10. เปรียบเทียบประสิทธิภาพของแบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ กับแบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยอื่นที่ใกล้เคียง
11. ปรับปรุงแก้ไขแบบจำลอง ในส่วนที่สามารถพัฒนาให้ดีขึ้นได้อีก
12. เขียนวิทยานิพนธ์และรายงานสรุปผล

บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

สำหรับการจำลองการทำงานของวงจรไฟฟ้า และสายส่งนั้นมีทฤษฎีที่เกี่ยวข้องมากมาย ดังนั้นในบทนี้จะนำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในการทำวิทยานิพนธ์นี้อย่างพอสังเขป โดยจะแยกอธิบายเป็น 4 หัวข้อใหญ่ๆ คือ ทฤษฎีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า, ทฤษฎีเชิงตัวเลข, ทฤษฎีการจำลองการทำงานของวงจรทางเวลา และทฤษฎีสายส่ง โดยที่จะนำเสนอเนื้อหาตั้งแต่ การกำหนดตัวแปรของวงจร การสร้างสมการวงจร และการแก้ปัญหาทางจร การประมาณเชิงอนุพันธ์ การคำนวณหาค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (Truncation Error) การแปลงแบบคล้าย (Similarity Transformation) และการแก้สมการเลียปูนอฟ (Lyapunov Equation)

2.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า

2.1.1 ตัวแปรของวงจร

ค่าตัวแปรอิสระทุกตัวที่โปรแกรมจำลองการทำงานของวงจรอิเล็กทรอนิกส์ใช้ในการเฉลยเพื่อหาคำตอบของวงจร เรียกว่า ตัวแปรวงจร ซึ่งมีหลายประเภท ได้แก่

- แรงดันปม (Node voltage)
- แรงดันกิ่ง (Branch voltages)
- กระแสกิ่ง (Branch currents)
- กระแสวงรอบ (Loop currents) ฯลฯ

แต่ตัวแปรวงจรแบบที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ แรงดันปม โดยที่แรงดันปมคือ ค่าแรงดันระหว่างปมนั้นและปมดิน (Ground Node) เนื่องจากโดยทั่วไปแล้วแรงดันปมคือตัวแปรที่ผู้ใช้งานต้องการทราบค่า

2.1.2 การสร้างสมการเมทริกซ์ของวงจรด้วยวิธีโหนดไฟยต์โนดัล

ในทางทฤษฎีวงจร (Circuit theory) วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งอาจมีสมการวงจรได้หลายแบบขึ้นอยู่กับ การกำหนดตัวแปรของวงจร และกฎทางไฟฟ้าที่ใช้ในการสร้างสมการ วิธีสร้างสมการวงจรที่ใช้กันอยู่ทั่วไปมี 4 วิธี ตามตารางที่ 2.1

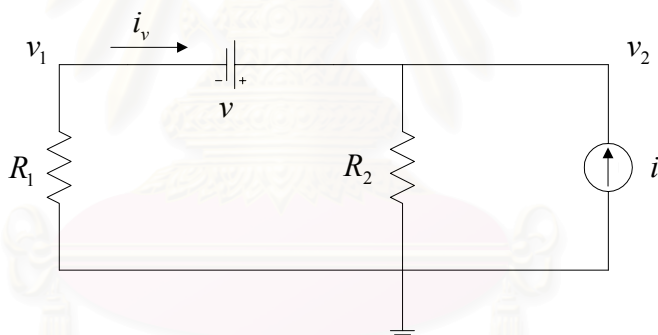
ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าวิธีวิเคราะห์ปม (Node Analysis) เป็นวิธีที่ใช้กันมากที่สุดแต่วิธีนี้มีจุดอ่อนตรงที่ไม่สามารถนำไปใช้โดยตรงกับวงจรบางชนิดได้ เช่นวงจรที่มีแหล่งกำเนิดแรงดันต่ออยู่ ดังที่แสดงตัวอย่างวงจรในรูปที่ 2.1 การสร้างสมการวงจรของวงจรในรูปที่ 2.1 ด้วยวิธีวิเคราะห์ปม นั้นจำเป็นต้องอาศัยการแปลงแหล่ง

กำเนิดแรงดันให้เป็นแหล่งกำเนิดกระแสก่อนจึงสามารถสร้างสมการได้ จากสาเหตุข้างต้นจึงได้มีผู้คิดค้นวิธีสร้างสมการแบบอื่น ๆ โดยอาศัยการดัดแปลงจากวิธีวิเคราะห์หีบม และให้ชื่อว่า วิธีโหนดไฟยัดโนดัล (Modified Nodal) วิธีนี้จะยอมให้กระแสของตัวเหนี่ยวนำ และกระแสของแหล่งกำเนิดแรงดันเป็นตัวแปรของวงจรได้โดยไม่ต้องมีการแปลงวงจรเดิมเสียก่อน ทำให้สะดวกต่อการนำไปเขียนโปรแกรม ดังแสดงไว้ในหัวข้อถัดไป

ตารางที่ 2.1 ตารางเปรียบเทียบวิธีต่างๆ ในการสร้างสมการวงจร

ชื่อวิธี	ตัวแปรของวงจร	กฎทางไฟฟ้า
Node Analysis	Node voltage	กฎกระแส (Kirchoff current Law)
Mesh Analysis	Mesh current	กฎแรงดัน (Kirchoff voltage Law)
Loop Analysis	Loop current	กฎแรงดัน
Cut-set Analysis	Tree branch voltage	กฎกระแส

2.1.3 ตัวอย่างการสร้างสมการเมทริกซ์ของวงจรไฟฟ้า



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างวงจรที่ไม่สามารถใช้วิธี Node Analysis สร้างสมการโดยตรงได้

จากวงจรในรูปที่ 2.1 ซึ่งเป็นวงจรขนาด 2 ปมที่ไม่สามารถใช้ได้โดยตรงกับวิธีวิเคราะห์หีบม ถ้าใช้วิธีโหนดไฟยัดโนดัล ในการสร้างสมการไฟฟ้าซึ่งเป็นวิธีที่ยอมให้ค่ากระแสผ่านแหล่งกำเนิดแรงดันเป็นตัวแปรของวงจรด้วยนั้น จะกำหนดให้มีตัวแปรวงจร 3 ตัว คือ ค่าแรงดันที่ปม 1 (v_1) ค่าแรงดันที่ปม 2 (v_2) และค่ากระแสที่ไหลผ่านแหล่งกำเนิดแรงดัน (i_v) และสมการวงจรที่สร้างโดยวิธีโหนดไฟยัดโนดัลนั้นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{v_1}{R_1} + i_v = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{v_2}{R_2} - i_v = i_1 \quad (2.2)$$

$$-v_1 + v_2 = 0 \quad (2.3)$$

จากตัวอย่างนี้จะพบว่าเราสามารถใช่วิธีโมดิไฟยดโนดัลในการสร้างสมการวงจรถัด และหลังจากที่สามารถสร้างสมการวงจรถัดได้แล้ว ต่อไปจะเป็นขั้นตอนในการแก้สมการ โดยที่เนื้อหาโดยรวมจะเป็นเนื้อหาเกี่ยวกับทฤษฎีทางด้านเชิงตัวเลข ซึ่งจะได้กล่าวไว้ในหัวข้อถัดไป

2.2 ทฤษฎีเชิงตัวเลข

สำหรับการแก้ปัญหาวงจรมานั้น เราจะสามารถเขียนสมการวงจรถัดให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ได้เสมอ โดยที่ \mathbf{x} เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรวงจรถัด ส่วนเมทริกซ์ \mathbf{A} และเวกเตอร์ \mathbf{b} นั้นเป็นค่าคงที่ เพื่อช่วยให้เข้าใจถึงการแปลงสมการวงจรถัดให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์มากยิ่งขึ้น จึงขอยกตัวอย่างสมการวงจรถัด (2.1)-(2.3) ของวงจรถัดในรูปที่ 2.1 ที่สร้างโดยวิธีโมดิไฟยดโนดัลตั้งที่ได้อธิบายมาแล้วนั้น นำมาเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของสมการเมทริกซ์ และผลลัพธ์ที่ได้นั้นได้แสดงไว้ในสมการที่ 2.4

$$\begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/R_2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_1 \\ -v \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

หลังจากที่สามารถจัดรูปของสมการวงจรถัดให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ได้แล้วนั้น ต่อไปจะเป็นขั้นตอนในการแก้สมการเมทริกซ์ ซึ่งมีมากมายหลายวิธี เช่น วิธีลดทอนแบบเกาส์ (Gaussian Elimination) [10] ซึ่งเป็นวิธีที่รู้จักกันแพร่หลายและเป็นที่ยอมรับกันทั่วไป แต่ในวิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนอวิธีการแก้สมการเมทริกซ์ด้วยวิธีการแยกตัวประกอบแอล-ยู (LU Decomposition) [10] แล้วจะได้ \mathbf{x} เป็นผลเฉลยของวงจรถัด

2.2.1 การประมาณเชิงอนุพันธ์

การแก้สมการอนุพันธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข เพื่อหาผลตอบสนองเชิงเวลาของวงจรถัดเล็กทรอนิกส์ตั้งแต่เวลา 0 ถึงเวลา T นั้น จะเริ่มต้นด้วยการกำหนดจุดเวลา (time point) ทั้งหมดจำนวน $N + 1$ จุด ได้แก่ $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N$ โดยที่ $t_0 = 0$ และ $t_N = T$ ในขั้นแรกนี้เราจะกำหนดให้จุดเวลาเหล่านี้อยู่ห่างเท่าๆ กันเท่ากับ h ซึ่งเรียกว่า ขั้นตอนเวลา (time step) กล่าวคือ

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_N - t_{N-1} = h = \frac{T}{N}$$

การหาผลตอบสนองเชิงเวลาก็หมายถึงการแก้สมการอนุพันธ์ของวงจรถัด เพื่อหาคำตอบที่จุดเวลาต่างๆ เหล่านี้ ดังแสดงในรูปที่ 2.2

วิธีที่เราใช้ในการแก้สมการอนุพันธ์ $\dot{x}(t) = f(x, t)$ ที่จุดเวลาต่างๆ นี้ จะใช้วิธีการประมาณอนุพันธ์ [11, 12] ซึ่งมีด้วยกันหลายวิธีเช่น

- สูตรรอยเลอร์แบบกลับหลัง (Backward Euler formula) ดังในสมการที่ (2.5)
- สูตรรอยเลอร์แบบไปหน้า (Forward Euler formula) ดังในสมการที่ (2.6)
- สูตรสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal formula) ดังในสมการที่ (2.7)

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{h}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.5)$$

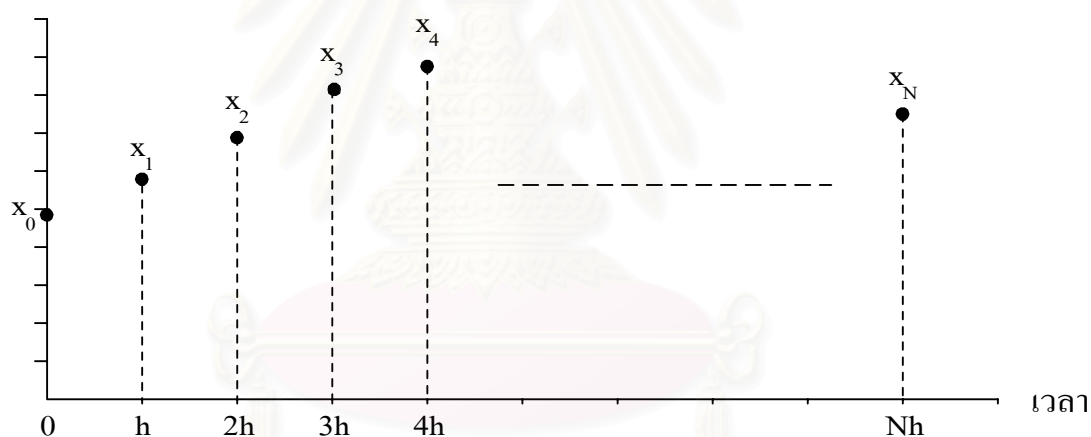
$$\dot{x}(t_{i-1}) \approx \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{h}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.6)$$

$$\dot{x}(t_i) \approx \frac{2}{h}(x(t_i) - x(t_{i-1})) - \dot{x}(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.7)$$

โดยการแทนอนุพันธ์ของตัวแปรทุกตัวในสมการวงจรถัดด้วยการประมาณแบบใดแบบหนึ่ง จะทำให้สมการอนุพันธ์ของวงจรถัดกลายเป็นสมการพีชคณิตล้วนๆ ตัวอย่างเช่น จากสมการที่ (2.8) ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ที่พบเห็นได้ทั่วไป หลังจากผ่านการประมาณอนุพันธ์ตามสูตรออยเลอร์แบบกลับหลังดังที่แสดงในสมการที่ (2.5) แล้ว จะกลายเป็นสมการพีชคณิตดังที่แสดงไว้ในสมการที่ (2.9)

$$C \frac{dV}{dt} = \frac{V}{R} \quad (2.8)$$

$$\frac{C}{h} [V(t_i) - V(t_{i-1})] = \frac{V}{R} \quad (2.9)$$



รูปที่ 2.2 กราฟแสดงผลตอบสนองเชิงเวลาของตัวแปร x ที่จุดเวลาต่างๆ

2.2.2 ค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (Truncation Error)

หลักการหนึ่งที่ใช้ในการปรับขนาดขั้นเวลาแบบอัตโนมัติ จะพิจารณาจากความชันและอนุพันธ์อันดับสูงของตัวแปรสถานะวงจรถัด ซึ่งมีชื่อเรียกว่าค่าผิดพลาดเพราะตัดปลายเฉพาะที่ (Local Truncation Error (LTE)) [10] โดยที่ LTE คือค่าความผิดพลาดที่เกิดจากการประมาณอนุพันธ์ให้เป็นเชิงเส้นในจุดเวลาแต่ละจุด

เนื่องจากไม่มีวิธีเชิงเลขวิธีใดที่สามารถหาค่า $x(t)$ ที่ถูกต้องจริงๆ จากสมการ $\dot{x}(t) = f(x, t)$ ออกมาได้ ถ้าสมมติให้ x'_{n+1} คือค่าคำตอบจริงของสมการ $\dot{x}(t) = f(x, t)$ ที่เวลา t_{n+1} และ x_{n+1} คือคำตอบของสมการอนุพันธ์ดังกล่าวที่ได้จากการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์โดยใช้วิธีเชิงตัวเลขประมาณค่าอนุพันธ์ เราจะได้อค่าความผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณ (\mathcal{E}_{n+1}) ดังสมการ (2.10)

$$\varepsilon_{n+1} = \|x'_{n+1} - x_{n+1}\| \quad (2.10)$$

โดยที่ค่า ε_{n+1} จะแทนความผิดพลาดทั้งหมดของการประมาณ (Total Error) ที่เวลา t_{n+1} ความผิดพลาดนี้จะประกอบด้วยส่วนต่างๆ 2 ส่วนคือ

1. **ค่าผิดพลาดจากการปัดเศษ (Round off error)** คือความผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณของคอมพิวเตอร์ที่ไม่สามารถเก็บรายละเอียดของตัวเลขไว้ได้ทั้งหมด
2. **ค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (Truncation error)** คือความผิดพลาดที่เกิดจากการใช้วิธีเชิงตัวเลขประมาณอนุพันธ์ให้เป็นสมการเชิงเส้น

เนื่องจากความผิดพลาดในส่วนที่เป็นค่าผิดพลาดจากการปัดเศษนั้นไม่สามารถทำให้ลดลงได้ ประกอบกับความผิดพลาดที่ค่าผิดพลาดจากการปัดเศษนั้นมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับความผิดพลาดที่เกิดจากค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย ทำให้ค่าความผิดพลาดจากการคำนวณ (ε_{n+1}) ส่วนใหญ่ในสมการ (2.10) นั้นเกิดจากค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย ดังนั้นเราจึงอาจประมาณค่าความผิดพลาด (ε_{n+1}) ได้ว่า $LTE_{n+1} \approx \varepsilon_{n+1}$ และเนื่องจากวิธีออยเลอร์แบบกลับหลัง เป็นวิธีประมาณอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first order approximation) จึงสามารถพิสูจน์ [10] ได้ว่า

$$LTE_{n+1} = x'_{n+1} - x_{n+1} \approx -\frac{1}{2}h^2\ddot{x}_{n+1} \quad (2.11)$$

นั่นคือในการจำลองการทำงาน เราจะต้องลดขนาด h ลงหากว่าค่าความผิดพลาด LTE มากเกินไป แต่ถ้าค่าความผิดพลาด LTE น้อยหรืออยู่ในเกณฑ์ที่เหมาะสม เราก็อาจจะเพิ่มขนาด h เพื่อเร่งความเร็วในการจำลองการทำงานขึ้นไปได้อีก

2.2.3 การแปลงแบบคล้าย (Similarity Transformation)

การแปลงแบบคล้าย (Similarity Transformation) เป็นการแปลงที่ทำแก่เมทริกซ์จัตุรัสตัวหนึ่งแล้ว จะให้ผลเป็นเมทริกซ์อีกตัวหนึ่งที่คล้าย (Similar) กับเมทริกซ์ตัวเดิม โดยเราจะเรียกว่า เมทริกซ์ **B** คล้ายกับเมทริกซ์ **A** เมื่อเราสามารถหาเมทริกซ์ **B** จากเมทริกซ์ **A** ได้ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้ [13] คือ

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \quad (2.12)$$

โดยที่ **P** เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular) ที่เหมาะสมคือ ประกอบขึ้นจากแถวสั้น (Column) ที่เป็นเวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvector) ที่เป็นอิสระต่อกันของ **A**

ตัวอย่าง การแปลงแบบคล้าย เช่น กำหนดให้ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีเวกเตอร์เฉพาะจะเป็น $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} -(1-\sqrt{2}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ และ } \begin{bmatrix} -(1+\sqrt{2}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{เมื่อใช้ } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -(1-\sqrt{2}) & -(1+\sqrt{2}) \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

2.2.4 การแก้สมการเลียปูนอฟ

การคำนวณหาค่าเมทริกซ์ \mathbf{P} ในรูปแบบสมการที่ (2.13) นั้นจะพบกันมากในงานทางวิศวกรรมควบคุม ในกรณีที่ \mathbf{A} เป็นเมทริกซ์ที่มีเสถียรภาพคือ ค่าเฉพาะจริง (Eigenvalue) ทุกตัวของมันมีค่าจริงเป็นค่าลบแล้ว เรามักจะเลี่ยงไปใช้สมการที่ (2.14) แทนที่เรียกว่า สมการเลียปูนอฟ [18] เพื่อคำนวณหาค่าเมทริกซ์ \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*t} dt \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^* + \mathbf{B} \mathbf{B}^* = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

แต่สำหรับในทางวิจัยนี้ รูปแบบของสมการอินทิกรัลจะแตกต่างจากในสมการ (2.14) คือช่วงลิมิต จะอยู่ระหว่าง $[0, l]$ เท่านั้นดังในสมการ (2.15)

$$\mathbf{P} = \int_0^l e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*t} dt \quad (2.15)$$

ซึ่งเราสามารถหาสมการเลียปูนอฟของมันได้ดังนี้ เริ่มจากการอินทิเกรตที่ละส่วนสมการที่ (2.15) จะให้

$$\mathbf{P} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*t} \mathbf{A}^{-1} \Big|_0^l - \int_0^l \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*t} dt \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{P} = \left(e^{\mathbf{A}l} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*l} - \mathbf{B} \mathbf{B}^* \right) \mathbf{A}^{-1} - \int_0^l \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*t} dt \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{P} \mathbf{A}^* = e^{\mathbf{A}l} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*l} - \mathbf{B} \mathbf{B}^* - \int_0^l \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*t} dt$$

แทนค่าพจน์อินทิกรัลด้วย \mathbf{P} จากสมการที่ (2.15) จะได้ว่าสมการ (2.16) ก็คือสมการ (2.15) นั่นเอง และเนื่องจากลิมิตของการอินทิเกรตอยู่ในช่วงจำกัด $[0, l]$ ดังนั้นถึงแม้เมทริกซ์ \mathbf{A} ไม่เป็นเมทริกซ์ที่มีเสถียรภาพก็ยังสามารถคำนวณหาค่าเมทริกซ์ \mathbf{P} ได้

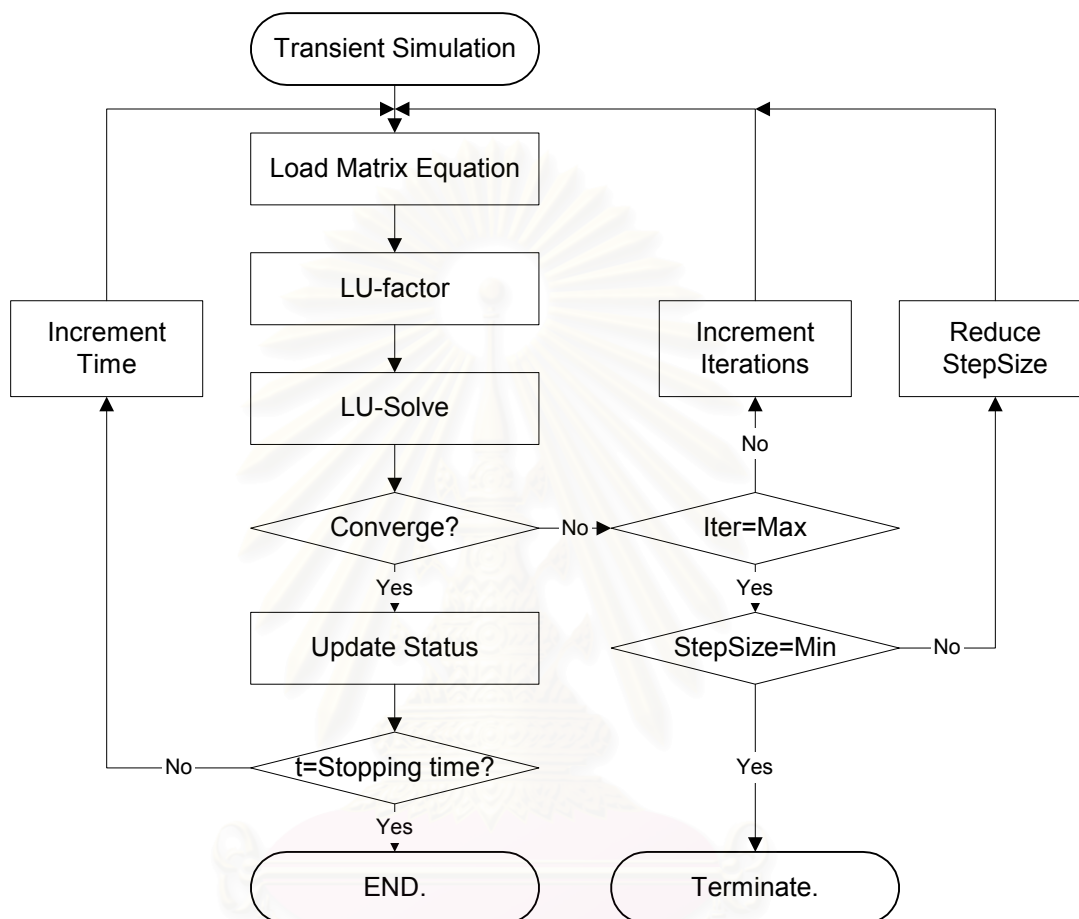
$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^* + \mathbf{B} \mathbf{B}^* - e^{\mathbf{A}l} \mathbf{B} \mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*l} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

2.3 ทฤษฎีการจำลองการทำงานวงจรทางเวลา

จากแผนภูมิสายงานของขั้นตอนวิธีในการจำลองการทำงานวงจรทางเวลาแบบทั่วไป ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.3 และการทำงานของขั้นตอนวิธีสามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

ณ.ที่จุดเวลาหนึ่งๆ ในการทำการจำลองทางเวลา จะเริ่มด้วยการสร้างสมการเมทริกซ์ของวงจร จากนั้นจะแก้สมการเมทริกซ์ด้วยวิธีการแยกตัวประกอบแอล-ยู แล้วจะตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบว่าลู่เข้าหรือไม่ ถ้าคำตอบที่ได้ลู่เข้า ก็จะไปปรับทันกาล (Update) ข้อมูลแล้วเลื่อนไปวิเคราะห์ที่จุดเวลาถัดไป ในทางตรงกันข้ามถ้า

คำตอบที่ได้ไม่ลู่อเข้า ก็จะทำจำนวนวนซ้ำ (Iteration) จนคำตอบที่ได้ลู่อเข้าแต่จะไม่คำนวณวนซ้ำเกินค่าที่ตั้งไว้ค่าหนึ่ง ถ้าจำนวนวนซ้ำจนครบแล้วคำตอบที่ได้ยังไม่ลู่อเข้า ก็จะลดขนาดขั้นเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงแล้วเริ่มคำนวณวนซ้ำใหม่อีกครั้งหนึ่ง แต่ถ้าการลดขนาดขั้นตอนเวลาลงจนถึงค่าต่ำสุดแล้วยังไม่ช่วยให้คำตอบลู่อเข้า ก็จะเลิกการคำนวณ



รูปที่ 2.3 แผนภูมิสายงานขั้นตอนวิธีการจำลองทางเวลาแบบทั่วไป

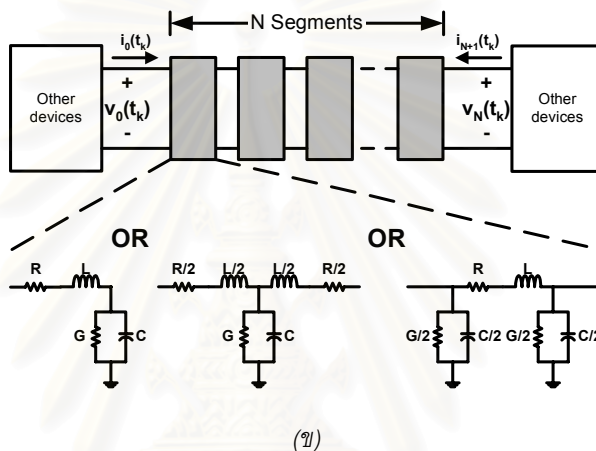
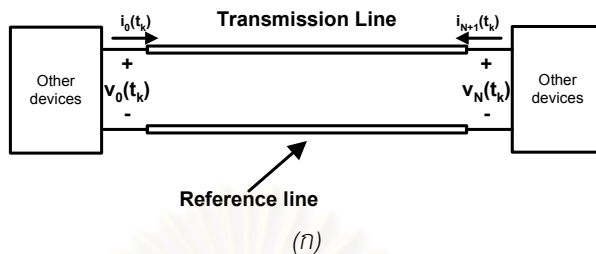
2.4 ทฤษฎีสายส่ง และงานวิจัยอื่นที่นำมาแล้วในอดีต

แบบจำลองสายส่งนั้นสามารถแบ่งออกเป็นกลุ่มใหญ่ได้ 2 กลุ่มด้วยกันคือ แบบจำลองแบบแบ่งส่วน (Segmentation Model) และ แบบจำลองแบบกระจาย (Distributed Model)

2.4.1 แบบจำลองแบบแบ่งส่วน (Segmentation Model)

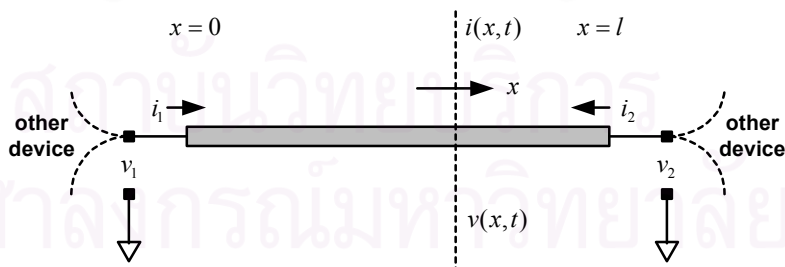
แบบจำลองสายส่งแบบแบ่งส่วน [1, 2, 3, 4] นั้น จะทำโดยการแทนสายส่งด้วยแบบจำลองส่วนย่อย RLGC ทั้งหมด N ท่อน ส่วนย่อย RLGC นั้นเป็นได้ทั้งแบบ พาย, ที, หรือ แกมมา ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.4 แบบจำลองแบบนี้มีข้อดีคือ นำไปใช้งานง่าย เนื่องจากเพียงแค่แทนสายส่งด้วยแบบจำลอง N ท่อนชุดใหม่ ก็สามารถทำการจำลองการทำงานได้ทันที และสามารถนำไปใช้ได้กับ โปรแกรมจำลองแบบการทำงานวงจรไฟฟ้าทั่วไปได้ทุกโปรแกรม แต่แบบจำลองแบบนี้ก็มีข้อเสียคือ ขนาดของวงจรจะใหญ่ขึ้นกว่าเดิมมาก ทำให้ต้องเสีย

เวลาในการคำนวณนานขึ้นหากต้องการผลลัพธ์ที่แม่นยำ เนื่องจากต้องแทนสายส่งด้วยแบบจำลองชุดใหม่ที่มีจำนวนปมเพิ่มขึ้นมาก และความแม่นยำในการคำนวณก็จะแปรผันตามจำนวนท่อนย่อย (N) ซึ่งในบางครั้งอาจต้องใช้จำนวนท่อนย่อยสูงถึง 100-200 ท่อน



รูปที่ 2.4 (ก) วงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยสายส่ง (ข) วงจรไฟฟ้าในรูป (ก) ที่แทนแบบจำลองสายส่งด้วยแบบจำลองส่วนย่อยจำนวน N ท่อนซึ่งเป็นที่ทั้งแบบพาย ทีหรือ แกมมา

2.4.2 แบบจำลองแบบกระจาย (Distributed Model) [14]



รูปที่ 2.5 รูปแบบจำลองสายส่ง

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = - \left[L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + Ri(x,t) \right] \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = - \left[C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Gv(x,t) \right] \tag{2.18}$$

สมการที่ (2.17) และ (2.18) เป็นสมการ Telegrapher ของสายส่ง RLCG และรูปที่ 2.5 เป็นรูปของสายส่งที่มีความยาว l ไปในแกน x ถ้ากำหนดให้ $v(x,t)$ เป็นค่าแรงดันในสายส่งที่ตำแหน่ง x ที่เวลา t และ $i(x,t)$ เป็นค่ากระแสในสายส่งที่ตำแหน่ง x และเวลา t จะได้เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ของสมการที่ (2.17) และ (2.18) คือ

$$v(0,t) = v_1(t), \quad v(l,t) = v_2(t) \quad (2.19)$$

$$i(0,t) = i_1(t), \quad i(l,t) = -i_2(t) \quad (2.20)$$

เมื่อดำเนินการแปลงลาปลาซสมการที่ (2.17) และ (2.18) เราจะได้รูปแบบใหม่ดังสมการที่ (2.21) และ (2.22)

$$\frac{\partial^2 V(x,s)}{\partial x^2} = (sL + R)(sC + G)V(x,s) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 I(x,s)}{\partial x^2} = (sL + R)(sC + G)I(x,s) \quad (2.22)$$

สมการที่ (2.21) และ (2.22) จะมีรูปแบบทั่วไปของผลเฉลยดังนี้

$$V(x,s) = K_1(s)e^{\lambda(s)x} + K_2(s)e^{-\lambda(s)x} \quad (2.23)$$

$$I(x,s) = K_3(s)e^{\lambda(s)x} + K_4(s)e^{-\lambda(s)x} \quad (2.24)$$

โดยที่ $\lambda(s) = \sqrt{(sL + R)(sC + G)}$ หลังจากนั้นแก้สมการหาค่า $K_1(s)$, $K_2(s)$, $K_3(s)$ และ $K_4(s)$ แทนกลับไปในสมการที่ (2.23) และ (2.24) แล้วเขียนสมการใหม่ให้อยู่ในรูปวงจรสองทางเข้าออก (Two-port) จะได้สมการที่ (2.25) คือ

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \frac{Y_0(s)}{e^{\lambda(s)l} - e^{-\lambda(s)l}} \begin{bmatrix} e^{\lambda(s)l} + e^{-\lambda(s)l} & -2 \\ -2 & e^{\lambda(s)l} + e^{-\lambda(s)l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

โดยที่

$$Y_0(s) = \sqrt{\frac{sC + G}{sL + R}} \quad (2.26)$$

จากนั้นนำสมการที่ (2.25) มาจัดรูปใหม่ จะได้ว่า

$$Y_0(s)V_1(s) - I_1(s) = e^{-\lambda(s)l}[Y_0(s)V_2(s) + I_2(s)] \quad (2.27)$$

$$Y_0(s)V_2(s) - I_2(s) = e^{-\lambda(s)l}[Y_0(s)V_1(s) + I_1(s)] \quad (2.28)$$

แล้วทำการแปลงกลับลาปลาซจะได้สมการของสายส่งในโดเมนทางเวลาดังนี้

$$v_1(t) * h_1(t) - i_1(t) = v_2(t) * h_3(t) + i_2(t) * h_2(t) \quad (2.29)$$

$$v_2(t) * h_1(t) - i_2(t) = v_1(t) * h_3(t) + i_1(t) * h_2(t) \quad (2.30)$$

โดยที่

$$h_1(t) = L^{-1}\{Y_0(s)\} \quad (2.31)$$

$$h_2(t) = L^{-1}\{e^{-\lambda(s)t}\} \quad (2.32)$$

$$h_3(t) = L^{-1}\{Y_0(s)e^{-\lambda(s)t}\} \quad (2.33)$$

สมการที่ (2.29) และ (2.30) หมายความว่า ที่จุดเวลาทุกๆ จุด จะต้องมีการทำคอนโวลูชันของผลเฉลยสมการสายส่งทุกๆ เส้นในวงจร โดยที่มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเพียง 4 ตัวคือ $v_1(t)$, $v_2(t)$, $i_1(t)$, และ $i_2(t)$ ดังนั้นเมื่อรวมสมการที่ (2.29), (2.30) กับสองสมการ KCL ที่ปมทั้งสอง จะทำให้ได้ครบสี่สมการเพื่อหาคำตอบที่จุดเวลาแต่ละจุด

2.4.3 คอนโวลูชันแบบเวียนเกิด [14]

จากสมการที่ (2.29) และ (2.30) นั้นพบว่าต้องมีการทำคอนโวลูชันทั้งหมด 6 พจน์ด้วยกัน ในการทำคอนโวลูชันนั้นสามารถทำได้ด้วยวิธีแบบเวียนเกิด ซึ่งจะขอยกตัวอย่างอธิบายไว้เพียงหนึ่งกรณีคือ กรณีของ $v_1(t) * h_1(t)$

ในกรณีที่ต้องการคำนวณหาค่า $v_1(t) * h_1(t)$ เราจะใช้การประมาณฟังก์ชัน $Y_0(s)$ ด้วยวิธีประมาณแบบ Pade' [15] เพื่อให้รูปแบบของ $Y_0(s)$ นั้นสามารถทำการแปลงกลับลาปลาซได้โดยจะอยู่ในรูปแบบเศษส่วนของพหุนาม หลังจากแปลงกลับลาปลาซแล้วจะได้ $h_1(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\delta(t) + \sum_{i=1}^n q_i e^{p_i t} \right]$ โดยที่ p_i และ q_i เป็นค่าคงที่ แล้วเริ่มทำคอนโวลูชันที่เวลา t_{n+1} ดังนี้

$$\begin{aligned} v_1(t) * h_1(t) \Big|_{t=t_{n+1}} &= \int_0^{t_{n+1}} v_1(\tau) h_1(t_{n+1} - \tau) d\tau \\ &= \sqrt{\frac{C}{L}} \int_0^{t_{n+1}} v_1(\tau) \left[\sum_{i=1}^n q_i e^{p_i (t_{n+1} - \tau)} + \delta(t_{n+1} - \tau) \right] d\tau \\ &= \sqrt{\frac{C}{L}} v_1(t_{n+1}) + \sqrt{\frac{C}{L}} \sum_{i=1}^n \int_0^{t_{n+1}} q_i v_1(\tau) e^{p_i (t_{n+1} - \tau)} d\tau \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } \int_0^{t_{n+1}} q_i v_1(\tau) e^{p_i (t_{n+1} - \tau)} d\tau &= \int_0^{t_n} q_i v_1(\tau) e^{p_i (t_{n+1} - \tau)} d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_i v_1(\tau) e^{p_i (t_{n+1} - \tau)} d\tau \\ &= e^{p_i (t_{n+1} - t_n)} \int_0^{t_n} q_i v_1(\tau) e^{p_i (t_n - \tau)} d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+1}} q_i v_1(\tau) e^{p_i (t_{n+1} - \tau)} d\tau \\ &= e^{p_i h_n} \int_0^{t_n} q_i v_1(\tau) e^{p_i (t_n - \tau)} d\tau + \frac{h_n}{2} q_i [v_1(t_n) e^{p_i h_n} + v_1(t_{n+1})] \end{aligned}$$

ดังนั้นในการคำนวณหาผลคอนโวลูชันของ $v_1(t) * h_1(t) \Big|_{t=t_{n+1}}$ ที่เวลา t_{n+1} นั้นสามารถทำได้โดยการใช้ผลของคอนโวลูชันที่จุดเวลาก่อนหน้า ซึ่งเป็นการเลี่ยงการคำนวณจากจุดเวลาเริ่มต้นใหม่ทุกครั้ง

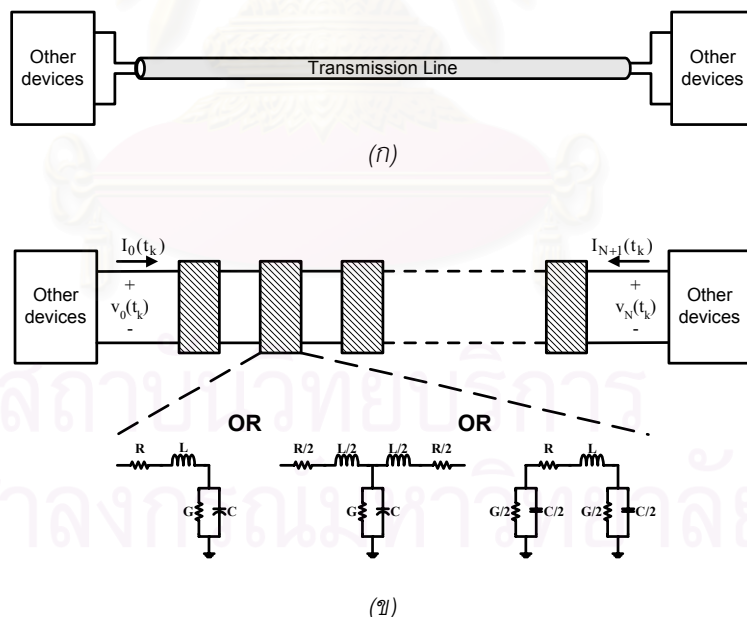
บทที่ 3

แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น

บทนี้จะนำเสนอแบบจำลองสายส่งที่ใช้หลักการแบ่งส่วน (Segmentation) พร้อมกับแนวความคิดใหม่ที่ทำให้แยกแบบจำลองนั้นออกมาคำนวณต่างหาก เพื่อจัดเตรียมแบบจำลองสมมูลที่จะนำไปใช้จริงในการจำลองการทำงานวงจรทางเวลา จึงเรียกว่าสายส่งนั้นมีแบบจำลองสองชั้น เนื้อหาในช่วงแรกของบทนี้จะนำเสนอวิธีคำนวณหาแบบจำลองสมมูล พร้อมทั้งวิธีนำแบบจำลองนี้ไปใช้งานจริง และท้ายบทจะเสนอแนวคิดในการขยายผลของแบบจำลองนี้ ไปเป็นแบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้น

3.1 แบบจำลอง N ท่อน (N-Segmented Model)

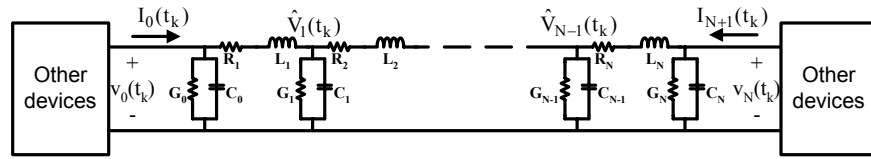
รูปที่ 3.1 แสดงแบบจำลองแบบแบ่งส่วนของสายส่งออกเป็น N ท่อน แต่ละท่อนนั้นอาจเป็นได้ทั้งชนิดพาย ที หรือแกมมา การใช้ทำโดยนำแบบจำลอง N ท่อนนี้ไปแทนที่สายส่งในวงจร แล้วจำลองตามปกติ แต่เนื่องจากจำนวนท่อนนั้นจะแปรผันตามความแม่นยำ กล่าวคือถ้าอยากได้ความแม่นยำสูง ก็ต้องใช้จำนวนท่อนมากขึ้น ทำให้การจำลองการทำงานเวลาของวงจรที่มีสายส่งแบบนี้ต้องใช้เวลามากตามไปด้วย



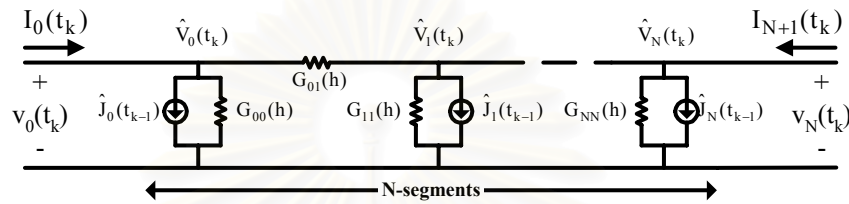
รูปที่ 3.1 (ก) วงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยสายส่ง (ข) วงจรไฟฟ้าในรูป (ก) ที่แทนสายส่งด้วยแบบจำลองจำนวน N ท่อนซึ่งเป็นได้ทั้งแบบพาย ทีหรือ แกมมา

งานวิจัยนี้จึงเสนอแนวความคิดให้แยกแบบจำลองแบบ N ท่อนออกมาคำนวณต่างหากเพื่อจัดเตรียมแบบจำลองสมมูล (Companion Equivalent Macromodel) ดังแสดงในรูปที่ 3.4 ซึ่งเป็นแบบจำลองที่มีเพียง

สองปม การคำนวณหาแบบจำลองสมมูลของสายส่งอย่างง่ายนี้ จะเริ่มจากการแทนสายส่งในวงจรด้วยแบบจำลอง N ท่อน แล้วได้ผลลัพธ์ของวงจรดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 วงจรสายส่งที่แทนสายส่งด้วยแบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อนที่เวลา t_k



รูปที่ 3.3 แบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อนที่เวลา t_k

หลังจากนั้น ใช้วิธีการประมาณเชิงอนุพันธ์เพื่อประมาณ R, L, G, C ในรูปที่ 3.2 ทำให้ได้รูปแบบใหม่ของแบบจำลองที่เวลา t_k เป็นดังรูปที่ 3.3 จะขอเรียกแบบจำลองที่ผ่านการประมาณเชิงอนุพันธ์แล้วนี้ว่า แบบจำลอง N ท่อนขั้นที่หนึ่ง โดยที่งานวิจัยนี้เลือกใช้การประมาณอนุพันธ์แบบออยเลอร์กลับหลัง ซึ่งทำให้ได้สูตรการคำนวณค่าต่างๆ ของแบบจำลอง N ท่อนที่เวลา t_k ไว้ดังนี้

$$G_{i,i+1}(h) = \left(R_{i+1} + \frac{L_{i+1}}{h} \right)^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

$$G_{i,i}(h) = G_i + \frac{C_i}{h}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

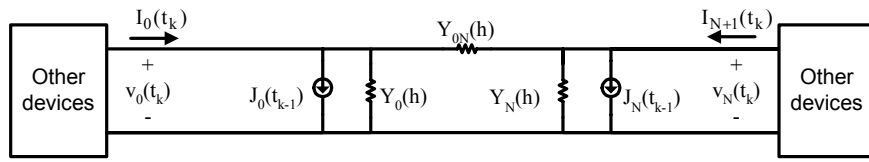
$$\hat{J}_i(t_{k-1}) = \frac{C_i}{h} V_i(t_{k-1}) + \frac{L_i}{h} i_{L_i}(t_{k-1}) - \frac{L_{i+1}}{h} i_{L_{i+1}}(t_{k-1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.3)$$

โดยที่ $L_0 = L_{N+1} = 0$, $R_0 = R_{N+1} = 0$ และ $h = t_k - t_{k-1}$

ถ้าเรานำแบบจำลองขั้นที่หนึ่งไปแทนสายส่งในวงจรตามปกติ สมการวงจรทั้งหมดจะอยู่ในรูปเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ ซึ่งต้องใช้เวลามากในการคำนวณ แม้ว่าจะนำเทคนิคเมทริกซ์เบาบางแบบทั่วไป (General Sparse Matrix) [16] มาใช้ก็ตาม

งานวิจัยนี้จึงเสนอแบบจำลองในขั้นที่สองที่เรียกว่า แบบจำลองสมมูล (Companion Equivalent Macromodel) ของสายส่งซึ่งเป็นแบบจำลองที่จะนำไปใช้ในการแก้สมการวงจรแทนแบบจำลองขั้นที่หนึ่ง โดยที่ให้ผลเฉลยวงจรเหมือนกัน และเพื่อให้เข้าใจวิธีในการหาแบบจำลองสมมูลนี้ จะขอเสนอแนวคิดในการคำนวณหาแบบจำลองสายส่งในขั้นที่สอง หรือแบบจำลองสมมูลไว้ในหัวข้อถัดไป

3.2 แบบจำลองสมมูล (Companion Equivalent Macromodel)



รูปที่ 3.4 วงจรสายส่งที่แทนสายส่งด้วยแบบจำลองสมมูลที่เวลา t_k

จะขอเริ่มจากการแบ่งตัวแปรวงจรของแบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อนอย่างง่ายออกเป็น 2 กลุ่มดังนี้

1. ตัวแปรวงจรภายใน ได้แก่ $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_{N-1}$
2. ตัวแปรวงจรภายนอก ได้แก่ v_0 และ v_N

จะทำให้สามารถเขียนสมการเชิงปม (Nodal Equation) ของแบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อนอย่างง่ายได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{y}_3^T \\ \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{J}} \\ \bar{\mathbf{J}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

โดยที่

$\hat{\mathbf{v}} = [\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{N-1}]^T$ เป็นเวกเตอร์ของค่าตัวแปรแรงดันภายใน

$\mathbf{v} = [v_0 \quad v_N]^T$ เป็นเวกเตอร์ของค่าตัวแปรแรงดันภายนอก

$\bar{\mathbf{I}} = [I_0 \quad I_{N+1}]^T$ เป็นเวกเตอร์ของค่าตัวแปรกระแสภายนอก

$\hat{\mathbf{J}} = [\hat{j}_1 \quad \dots \quad \hat{j}_{N-1}]^T$ เป็นเวกเตอร์ของค่ากระแสที่ไหลเข้าที่ปมภายใน

$\bar{\mathbf{J}} = [\hat{j}_0 \quad \hat{j}_N]^T$ เป็นเวกเตอร์ของค่ากระแสที่ไหลเข้าที่ปมภายนอก

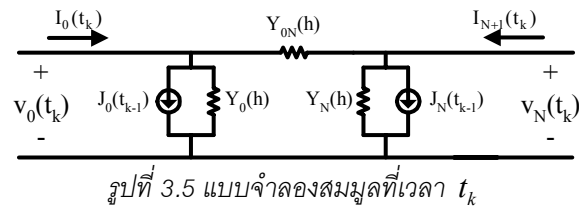
สมการที่ (3.4) สามารถนำมาจัดรูปสมการใหม่ ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของตัวแปรแรงดันภายนอก และตัวแปรกระแสภายนอก ของแบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อนอย่างง่ายได้ดังในสมการที่ (3.5ก) หรือ (3.5ข) ดังนี้

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}_M \mathbf{v} - \bar{\mathbf{J}}_M \quad (3.5ก)$$

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_{N+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_0 & Y_{0N} \\ Y_{0N} & Y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_M} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_N \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} J_0 \\ J_N \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{J}}_M} \quad (3.5ข)$$

โดยที่ $\mathbf{Y}_M = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3 \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{y}_3^T$, $\bar{\mathbf{J}}_M = \bar{\mathbf{J}} - \mathbf{y}_3 \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{J}}$

สมการที่ (3.5) เป็นการอธิบายถึงแบบจำลองสมมูลที่เวลา t_k ซึ่งไม่มีปมภายใน ดังที่แสดงในรูปที่ 3.5



ในตอนนี้จะพบว่า เราจะสามารถทำการจำลองการทำงานวงจรทางเวลาได้เร็วขึ้นหากใช้แบบจำลองสายส่งอย่างง่าย แทนแบบจำลองสายส่งแบบ N ท่อน อย่างไรก็ตามในการคำนวณหาค่า \mathbf{Y}_M และ \mathbf{J}_M นั้นจะต้องทำอย่างมีประสิทธิภาพ กล่าวคือต้องใช้คุณลักษณะพิเศษของสมการที่ (3.4) มาคำนวณให้กระชับที่สุด ซึ่งจะได้ผลดีว่าการเร่งความเร็วแบบทั่วไปที่แก้ทั้งวงจรพร้อมกัน [16] และจะได้อธิบายไว้ในหัวข้อถัดไป

และเนื่องจากว่าค่าของ เมทริกซ์ของแอดมิตแตนซ์ (\mathbf{Y}_M) เช่น \mathbf{Y} , \mathbf{y}_2 , \mathbf{y}_3 จะเป็นฟังก์ชันของค่าขนาดชั้นเวลา (h) ดังนั้นในกรณีที่ใช้ขนาดชั้นเวลาคงที่ตลอดการจำลองการทำงาน ค่าเมทริกซ์ของแอดมิตแตนซ์เหล่านี้ก็จะมีค่าคงที่ตลอดการจำลองการทำงานด้วย นั่นคือคำนวณเพียงครั้งเดียวแล้วสามารถนำไปใช้ได้ตลอดการจำลองการทำงาน และถึงแม้จะเป็นการจำลองการทำงานแบบที่มีการเปลี่ยนขนาดชั้นเวลา เราก็สามารถจำกัดรูปแบบที่เป็นไปได้ของขนาดชั้นเวลา ก็จะทำให้มีรูปแบบของเมทริกซ์ของแอดมิตแตนซ์อยู่จำกัด

สำหรับการคำนวณหาค่า \mathbf{J}_M นั้นจะต้องทำการคำนวณใหม่ที่จุดเวลาทุกๆ จุด เนื่องจากว่าการคำนวณหาค่า \mathbf{J}_M นั้นต้องใช้ค่าตัวแปรแรงดันและกระแสภายในในอดีต ซึ่งทำให้ค่าตัวแปรภายใน ($\hat{\mathbf{v}}$) ของสายส่งต้องถูกคำนวณหา หลังจากที่ได้แก้สมการวงจรได้ผลเฉลยเป็นตัวแปรภายนอก (\mathbf{v}) แล้ว สูตรในการคำนวณหาตัวแปรภายในของสายส่งนั้นก็ได้รับการจัดรูปใหม่ของสมการที่ (3.4) ได้ดังนี้

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Y}^{-1}(\hat{\mathbf{j}} - \mathbf{y}_3^T \mathbf{v}) \quad (3.6)$$

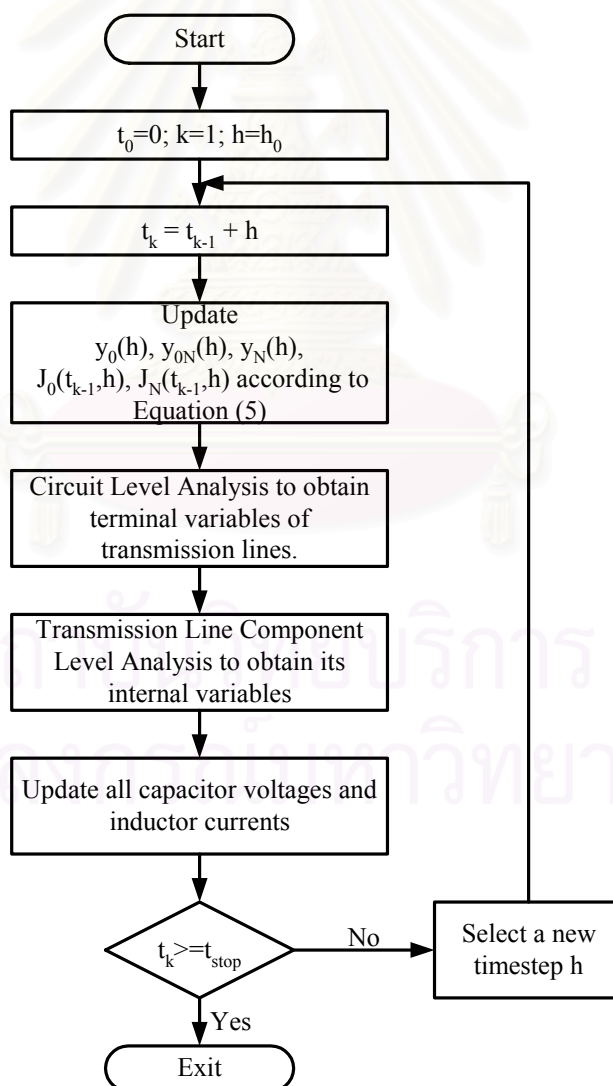
แล้วค่าตัวแปรกระแสภายในก็จะถูกคำนวณได้จากค่าตัวแปรแรงดันภายใน เช่น สำหรับการนี้ที่ใช้การประมาณเชิงอนุพันธ์แบบออยเลอร์กลับหลัง นั้นจะได้ว่า

$$i_{L_i}(t_k) = \frac{1}{R_i + \frac{L_i}{h}} \left[\hat{v}_{i-1}(t_k) - \hat{v}_i(t_k) + \frac{L_i}{h} i_{L_i}(t_{k-1}) \right] \quad (3.7)$$

3.3 แผนภูมิสายงานการจำลองวงจรทางเวลาสำหรับแบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น

วิธีในการนำแบบจำลองสายส่งแบบสองชั้นไปใช้นั้น ได้แสดงในแผนภูมิสายงานการจำลองทางเวลาในรูปที่ 3.6 โดยแบ่งการจำลองการทำงานออกเป็น 2 ชั้นดังนี้

1. การจำลองการทำงานชั้นวงจร (Circuit Level) การจำลองการทำงานในชั้นนี้เป็นการจำลองการทำงานวงจรไฟฟ้าทางเวลาที่แทนสายส่งด้วยแบบจำลองสมมูลตามรูปที่ 3.5 การจำลองการทำงานในชั้นนี้จะได้ผลเฉลยของสายส่งออกมาเป็นตัวแปรแรงดันภายนอก คือ $v_0(t_k)$ และ $v_N(t_k)$
2. การจำลองการทำงานชั้นสายส่ง (Transmission line component Level) การจำลองการทำงานในชั้นที่สองนี้เป็นการคำนวณแยกออกมาของแต่ละสายส่ง โดยจะใช้แบบจำลอง N ท่อนร่วมกับตัวแปรแรงดันภายนอกที่ได้จากการจำลองการทำงานในชั้นที่หนึ่ง เพื่อคำนวณหาตัวแปรวงจรภายใน



รูปที่ 3.6 แผนภูมิสายงานการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรสายส่งที่ใช้แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น

3.4 การนำแบบจำลองสายส่งแบบสองชั้นไปใช้จริง

ในหัวข้อนี้ จะเสนอวิธีเฉพาะที่เร็วในการคำนวณหาแบบจำลองสมมูล และตัวแปรภายในของสายส่ง โดยกำหนดให้

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1,N-1} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2,N-1} \end{bmatrix}^T \quad (3.8)$$

โดยที่ $\mathbf{Y}\mathbf{w} = \mathbf{y}_3^T$ ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการของ \mathbf{Y}_M และ \mathbf{J}_M จากสมการที่ (3.5) ใหม่ได้ดังนี้

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{y}_2 - \mathbf{w}^T \mathbf{y}_3^T \quad (3.9ก)$$

$$\mathbf{J}_M = \mathbf{J} - \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{J}} \quad (3.9ข)$$

สำหรับการคำนวณหาค่า \mathbf{w} ในสมการที่ (3.8) นั้นต้องใช้การแยกตัวประกอบแอล-ยู (LU factorization) [10] ซึ่งจะประกอบด้วยขั้นตอน 3 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{U} \text{ (factorization)} \quad (3.10ก)$$

$$\mathbf{L}\mathbf{a} = \mathbf{y}_3^T \text{ (forward elimination)} \quad (3.10ข)$$

$$\mathbf{U}\mathbf{w} = \mathbf{a} \text{ (backward substitution)} \quad (3.10ค)$$

เนื่องจากว่าเมทริกซ์ \mathbf{Y} ในสมการที่ (3.10ก) นั้นมีรูปแบบเป็นเมทริกซ์แถบสมมาตร (symmetric band matrix) ดังนี้

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X & X & 0 & \cdots & 0 \\ X & X & X & \ddots & \vdots \\ 0 & X & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & 0 & X & X \end{bmatrix}; \text{ โดยที่ } X \text{ เป็นค่าที่ไม่ใช่ศูนย์} \quad (3.11)$$

$$Y_{i,i} = G_{i-1,i} + G_{i,i} + G_{i,i+1}, \text{ และ } Y_{i,j} = Y_{j,i} = -G_{i,j} \text{ และ}$$

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} -G_{01} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -G_{N-1,N} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

ทำให้ทั้งเมทริกซ์ \mathbf{L} และ \mathbf{U} สามารถหาได้จากสูตรการคำนวณแบบวนซ้ำ (Recursive formula) ดังนี้

$$L_{j,j} = Y_{j,j} - \frac{Y_{j,j-1}^2}{L_{j-1,j-1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.13ก)$$

$$L_{j+1,j} = Y_{j,j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-2 \quad (3.13ข)$$

$$U_{j,j} = 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.13ค)$$

$$U_{j,j+1} = \frac{Y_{j,j+1}}{L_{j,j}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-2 \quad (3.13ง)$$

$$L_{j,k} = U_{k,j} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad k \neq j+1, \quad k \neq j \quad (3.13\text{จ})$$

สำหรับสูตรวนซ้ำในการหาค่าเมทริกซ์ \mathbf{a} และ \mathbf{w} ในสมการที่ (3.10ข) และ (3.10ค) นั้นเป็นดังนี้

$$a_{j,1} = -\frac{L_{j,j-1}a_{j-1,1}}{L_{j,j}} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.14\text{ก})$$

$$a_{j,2} = \begin{cases} 0 & j = 0, 1, 2, \dots, N-2 \\ -\frac{G_{N-1,N}}{L_{N-1,N-1}} & j = N-1 \end{cases} \quad (3.14\text{ข})$$

$$w_{j,2} = \begin{cases} a_{N-1,2} & j = N-1 \\ -U_{j,j+1}w_{j+1,2} & j = 0, 1, 2, \dots, N-2 \end{cases} \quad (3.14\text{ค})$$

$$w_{j,1} = \begin{cases} a_{N-1,1} & j = N-1 \\ a_{j,1} - U_{j,j+1}w_{j+1,2} & j = 0, 1, 2, \dots, N-2 \end{cases} \quad (3.14\text{ง})$$

ดังนั้น \mathbf{w} จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหา \mathbf{Y}_M และ \mathbf{J}_M ในสมการที่ (3.9) หลังจากนั้นก็จะไปคำนวณหาตัวแปรภายในของสายส่งตามสมการที่ (3.6) ซึ่งก็จะสามารถใช้ค่า \mathbf{L} และ \mathbf{U} ซึ่งเป็นแฟกเตอร์ของ \mathbf{Y} ที่คำนวณไว้แล้วมาใช้ได้อีก เมื่อได้ค่าตัวแปรภายในของสายส่งแล้วก็จะใช้สมการที่ (3.7) ในการคำนวณหาตัวแปรกระแสภายใน โดยที่ความซับซ้อนของการคำนวณ (Complexity) นั้นจะมีความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้นกับจำนวนท่อนย่อยของสายส่ง (N) ดังที่แสดงไว้ในตารางที่ 3.1 นอกจากนั้น หากการจำลองการทำงานใช้ขนาดขั้นเวลาคงที่ ขั้นตอนที่ 1 และ 2 ในการแยกตัวประกอบแอล-ยูของ \mathbf{Y} และการคำนวณหา \mathbf{w} นั้นจะทำเพียงครั้งเดียวตลอดการจำลองการทำงาน และถึงแม้จะเป็นการจำลองการทำงานที่มีการเปลี่ยนขนาดขั้นเวลา เราก็เสนอให้จำกัดรูปแบบที่เป็นไปได้ของขนาดขั้นเวลาเช่น $h = \frac{h_{MAX}}{2^M}$; $M = 0, 1, 2, \dots, 10$ ซึ่งจะทำให้จะมีค่าที่แตกต่างกันของ \mathbf{L} , \mathbf{U} , และ \mathbf{w} เพียง 11 รูปแบบเท่านั้น ดังนั้นค่าทั้ง 11 ค่าที่คำนวณไว้แล้วนั้นควรจะจัดเก็บไว้ในหน่วยความจำเพื่อนำกลับมาใช้ใหม่ จึงสรุปได้ว่าการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรสายส่งนั้น เราสามารถใช้จำนวนท่อนย่อย (N) ที่สูงๆ เพื่อให้ได้ผลเฉลยของวงจรที่แม่นยำ โดยที่เวลาที่ใช้ในการจำลองการทำงานจะมีความสัมพันธ์เป็นเชิงเส้นกับจำนวนท่อนย่อยของสายส่ง (N)

ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงความซับซ้อนในการคำนวณของสูตรการหาแบบจำลองสายส่งอย่างง่าย และการคำนวณหาตัวแปรภายในวงจรกรณีสายส่ง 2 เส้น

Computational Step	Number of operations		Equation
	+/-	x/÷	
1. การแยกตัวประกอบแอล-ยูของ \mathbf{Y}	3N-4	4N-5	(3.13)
2. การคำนวณหา \mathbf{w}	1	3N-2	(3.14)
3. คำนวณหาตัวแปรแรงดันภายใน	N^2-N	N^2-1	(3.6)
4. คำนวณหาตัวแปรกระแสภายใน	3N	5N	(3.7)

3.5 การขยายผลไปสู่แบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้น

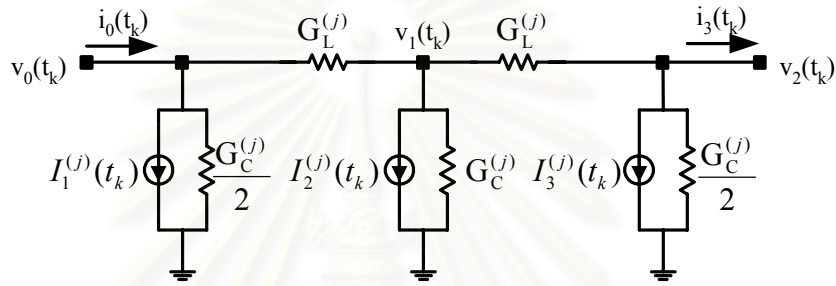
แบบจำลองสายส่งแบบ 2 ชั้นที่ได้นำเสนอไปแล้วนั้น เป็นแบบจำลองที่มีประสิทธิภาพในการเร่งความเร็วการวิเคราะห์ห้วงจรสูงกว่การแทนแบบจำลอง N ท่อนลงไปตรงๆในวงจร ซึ่งจะเห็นจากสูตรการคำนวณในขั้นสุดท้ายแล้วว่า เหลือเพียงสูตรที่เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นกับจำนวนท่อนย่อยของสายส่ง อย่างไรก็ตาม แบบจำลองดังกล่าวยังสามารถปรับปรุงให้สามารถเร่งความเร็วในการวิเคราะห์ขึ้นไปได้อีก โดยการยกเว้นการคำนวณในบางท่อนย่อยของสายส่ง ในกรณีที่สำคัญในท่อนย่อยนั้นมีค่าคงที่ ทำให้งานวิจัยนี้ได้เสนอแนวความคิดใหม่ในการปรับปรุงรูปแบบของแบบจำลอง ให้เป็นแบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้นดังที่แสดงไว้ในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 ตารางแสดงแบบจำลองที่ชั้นต่างๆ ของแบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้น

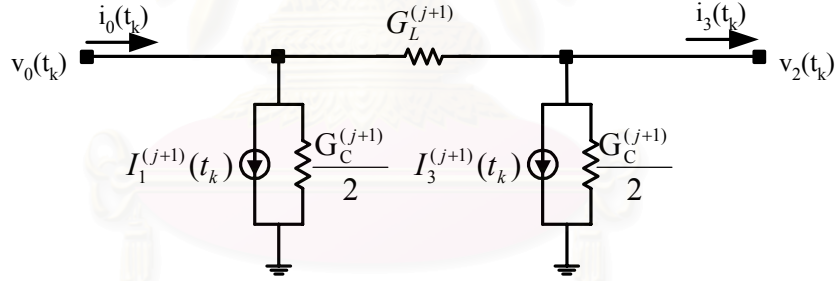
ชั้นที่	แบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้น	จำนวนท่อน
-		-
0		N
1		$\frac{N}{2}$
2		$\frac{N}{4}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\log_2 N$		1

แบบจำลองที่แบ่งออกเป็นทั้งหมด $\log_2 N + 1$ รูปแบบในตารางที่ 3.2 นั้นจะเป็นแบบจำลองที่สมมูลกันทั้งหมด ซึ่งจะมีสูตรในการเปลี่ยนแบบจำลอง จากชั้นหนึ่งไปสู่อีกชั้นหนึ่ง แสดงไว้ในสมการที่ (3.15) โดยที่กำหนดให้จำนวนชั้นของแบบจำลองแบ่งออกเป็น $\log_2 N + 1$ ชั้นดังนี้ $j = 0, 1, 2, \dots, \log_2 N$

ในการคำนวณหาแบบจำลองสมมูลของสายส่ง (แบบจำลองที่ชั้น $\log_2 N$) นั้นจะต้องคำนวณหาทีละชั้นของแบบจำลองตามลำดับ ตั้งแต่ชั้นที่ $0, 1, 2, \dots$ จนถึงชั้นที่ $\log_2 N$ จะขอยกตัวอย่างวงจรประกอบคำอธิบายดังในรูปที่ 3.7 ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ประกอบด้วยท่อนย่อยใดๆ 2 ท่อน การจะหาแบบจำลองในชั้นที่สูงขึ้นก็คือการยุบรวมแบบจำลอง 2 ท่อนย่อยนี้ให้เหลือ 1 ท่อนดังที่แสดงในรูปที่ 3.8 สูตรในการยุบรวมที่ชั้น j ใดๆ นั้นได้แสดงไว้ในสมการที่ (3.15)



รูปที่ 3.7 แบบจำลองสายส่ง 2 ท่อนย่อยใดๆที่เวลา t_k



รูปที่ 3.8 ผลจากการยุบรวมแบบจำลองในรูปที่ 3.7 ที่เวลา t_k

$$G_L^{(j+1)} = \frac{[G_L^{(j)}]^2}{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.15\text{ก})$$

$$\frac{G_C^{(j+1)}}{2} = \frac{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}}{2} - \frac{2[G_L^{(j)}]^2}{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.15\text{ข})$$

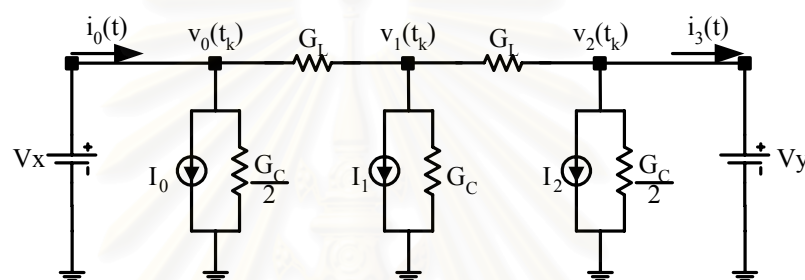
$$I_i^{(j+1)} = \frac{G_L^{(j)} I_{i+1}^{(j)}}{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}} + I_i^{(j)} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.15\text{ค})$$

$$I_{i+2}^{(j+1)} = \frac{G_L^{(j)} I_{i+1}^{(j)}}{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}} + I_{i+2}^{(j)} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.15\text{ง})$$

สำหรับค่าตัวแปรแรงดันภายในวงจร และตัวแปรกระแสภายในวงจร นั้นจะคำนวณหาได้จากสมการที่ (3.16) และ (3.17) ตามลำดับ โดยที่การคำนวณนั้นจะต้องทำย้อนกลับจากแบบจำลองในชั้นที่ $\log_2 N$, $\log_2 \frac{N}{2}$, $\log_2 \frac{N}{4}$, ..., 0 และใช้ค่าแรงดันที่ปลายทั้งสองข้างคือ $v_0(t_k)$ และ $v_2(t_k)$ เสมือนเป็นแหล่งกำเนิดแรงดันป้อนเข้าที่ปลายทั้งสองข้าง ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.9 ในการนำสูตรไปใช้จะกำหนดให้ $v_x = v_0(t_k)$ และ $v_z = v_2(t_k)$

$$v_1(t_k) = \frac{G_L(v_x + v_z) - I_1}{2G_L + G_C} \quad (3.16)$$

$$i_{Li} = \tilde{i}_{Li} + \frac{h}{L}(v_i - v_{i+1}) \quad i = 0,1 \quad (3.17)$$



รูปที่ 3.9 แสดงการคำนวณหาตัวแปรภายใน $v_1(t_k)$ ของท่อนย่อยใดๆที่เวลา t_k

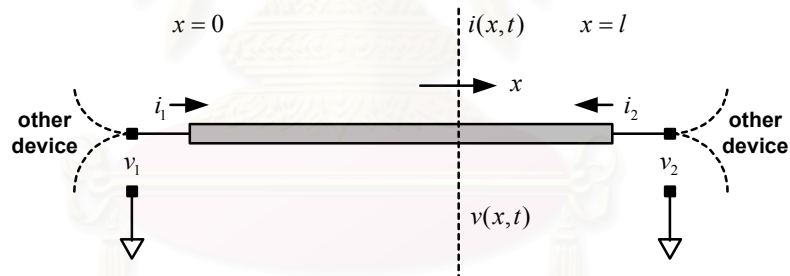
ข้อดีของแบบจำลองสายส่งแบบหลายชั้นก็คือว่า ในกรณีที่บางช่วงของสายส่งมีการกระจายของสัญญาณที่มีค่าคงที่ เราไม่จำเป็นต้องคำนวณในส่วนย่อยของแบบจำลองนั้น ทำให้สามารถลดเวลาในการคำนวณลงไปได้มาก เนื่องจากสามารถนำค่าที่คำนวณไว้แล้วในอดีตกลับมาใช้ได้เลย และการตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณในสายนั้นจะตรวจสอบจากเวลาแฝง (latency) [9] ของสายส่ง

บทที่ 4

แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา

บทนี้นำเสนอแบบจำลองของสายส่งทางโดเมนเวลา (Time Domain Companion Model) ที่ใช้วิธีออยเลอร์แบบกลับหลัง ประมาณสมการ Telegrapher กับอนุพันธ์ย่อยทางเวลา (t) ทำให้สมการลดรูปเหลือเป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับระยะทางบนสาย (x) จึงสามารถวิเคราะห์หาผลเฉลยของวงจรแบบทั่วไปได้ แต่ผลเฉลยที่ได้นั้นจะมีรูปแบบซับซ้อนมากขึ้นตามจำนวนจุดเวลาในการจำลองการทำงาน งานวิจัยนี้จึงนำเสนอเทคนิคการลดรูปแบบจำลองสายส่งไว้ เพื่อใช้ลดอันดับ (order) ความซับซ้อนของแบบจำลองลง อย่างไรก็ตาม ในการลดรูปแบบจำลองของสายส่งนั้น จะส่งผลให้มีค่าผิดพลาดเกิดขึ้นในการคำนวณครั้งถัดไป จึงได้เสนอวิธีการควบคุมค่าผิดพลาดในการลดรูปไว้ประกอบด้วย โดยค่าผิดพลาดจากการลดรูปที่ยอมรับได้นั้น จะเปรียบเทียบอ้างอิงจากค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (Local Truncation Error) ซึ่งเป็นค่าผิดพลาดที่ต้องเกิดขึ้นอยู่แล้วในการจำลองการทำงานเชิงตัวเลข และในช่วงท้ายเนื้อหาจะนำเสนอแนวความคิดในการขยายผลของแบบจำลองที่นำเสนอแล้วไปสู่การเปลี่ยนวิธีในการประมาณอนุพันธ์ย่อยทางเวลาไปเป็นแบบสี่เหลี่ยมคางหมู

4.1 แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา



รูปที่ 4.1 รูปแบบจำลองสายส่ง

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = - \left[\mathbf{L} \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + \mathbf{R} i(x,t) \right] \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = - \left[\mathbf{C} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \mathbf{G} v(x,t) \right] \quad (4.2)$$

สมการที่ (4.1) และ (4.2) เป็นสมการ Telegrapher ของสายส่ง RLCG และรูปที่ 4.1 เป็นรูปของสายส่งที่มีความยาว l ไปในแกน x ถ้ากำหนดให้ $v(x,t)$ เป็นค่าแรงดันในสายส่งที่ตำแหน่ง x ที่เวลา t และ $i(x,t)$ เป็นค่ากระแสในสายส่งที่ตำแหน่ง x และเวลา t จะได้เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ของสมการที่ (4.1) และ (4.2) คือ

$$v(0,t) = v_1(t), \quad v(l,t) = v_2(t) \quad (4.3)$$

$$i(0,t) = i_1(t), \quad i(l,t) = -i_2(t) \quad (4.4)$$

ถ้าจัดรูปสมการที่ (4.1) และ (4.2) ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของสมการเมทริกซ์ และกำหนดให้

$$\mathbf{w}(x,t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x,t) \\ \mathbf{i}(x,t) \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า}$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}(x,t)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{L} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{w}(x,t)}{\partial t} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{R} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}(x,t) \quad (4.5)$$

จากสมการ Telegrapher ในสมการที่ (4.5) นำพจน์ $\frac{\partial \mathbf{w}(x,t)}{\partial t}$ มาประมาณอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา ด้วยวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งในที่นี้จะเลือกใช้การประมาณแบบออยเลอร์แบบกลับหลัง [10] จะทำให้สมการที่ (4.5) ประมาณได้ดังนี้ที่เวลา t_n

$$\frac{\partial \mathbf{w}(x,t_n)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{L} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{w}(x,t_n) - \mathbf{w}(x,t_{n-1})}{h} \right) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{R} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}(x,t_n) \quad (4.6)$$

เพื่อความสะดวกต่อไปในการอ้างอิงจึงขอกำหนดตัวแปรขึ้นมาใหม่ดังในสมการที่ (4.7) และ (4.8) ซึ่งทำให้เขียนสมการที่ (4.6) ใหม่ได้ดังในสมการที่ (4.9)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{L}}{h}\right) \\ -\left(\mathbf{G} + \frac{\mathbf{C}}{h}\right) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{L}}{h} \\ \frac{\mathbf{C}}{h} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{w}_n(x) = \mathbf{w}(x,t_n) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}_n(x)}{\partial x} = \mathbf{A} \mathbf{w}_n(x) + \mathbf{B} \mathbf{w}_{n-1}(x) \quad (4.9)$$

ในการจำลองการทำงานวงจรทางเวลานั้น เมื่อเวลาผ่านไปถึงเวลา t_n สมการของแบบจำลองสายส่งที่ประมาณอนุพันธ์ย่อยทางเวลาแล้ว จะมีรูปแบบดังในสมการที่ (4.10)

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(x) \\ \mathbf{w}_2(x) \\ \mathbf{w}_3(x) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} & & & \\ & \mathbf{B} & \mathbf{A} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(x) \\ \mathbf{w}_2(x) \\ \mathbf{w}_3(x) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n(x) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

และถ้ากำหนดให้

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} & & & \\ & \mathbf{B} & \mathbf{A} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(x) \\ \mathbf{w}_2(x) \\ \mathbf{w}_3(x) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n(x) \end{bmatrix}$$

จะสามารถเขียนสมการที่ (4.10) ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx} \mathbf{w}(x) = \mathbf{M}\mathbf{w}(x) \quad (4.11)$$

ซึ่งมีผลเฉลยดังที่แสดงในสมการที่ (4.12) และสมการของแบบจำลองที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยวงจรถ่วงเวลา t_n ได้แสดงไว้ในสมการที่ (4.13) โดยที่ $\mathbf{C}_1 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{I}]$

$$\mathbf{w}(x) = e^{\mathbf{M}x} \mathbf{w}(0) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{w}_n(x) = \mathbf{C}_1 e^{\mathbf{M}x} \mathbf{w}(0)$$

$$\mathbf{w}_n(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) & \Psi_2(x) & \dots & \Psi_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(0) \\ \mathbf{w}_2(0) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_n(l) = \Psi_n(l) \mathbf{w}_n(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i(l) \mathbf{w}_i(0) \quad (4.13)$$

สมการแบบจำลองสายส่งที่เวลา t_n ที่แสดงไว้ในสมการที่ (4.13) นั้นเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองฝั่งของสายส่ง แต่จะพบว่าความซับซ้อนของการคำนวณจะเพิ่มขึ้นตามจำนวนจุด (n) ในการจำลองการทำงาน กล่าวคือเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยที่จุดเวลา t_n แต่ละจุด จะต้องใช้ค่าผลเฉลยวงจรถ่วงเวลาในอดีตตั้งแต่ t_0 ถึง t_{n-1} มาร่วมคำนวณด้วย จึงทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มมากขึ้นตามจำนวนจุดเวลาในการจำลองการทำงาน งานวิจัยจึงได้นำเสนอเทคนิคในการลดรูปแบบจำลองสายส่งโดยการประมาณสมการสายส่งใหม่ให้มีอันดับต่ำกว่าอันดับของสายส่งเดิมที่ไม่มีการลดรูป

4.2 เทคนิคการลดรูปแบบจำลองสายส่ง

การลดรูปแบบจำลองสายส่งคือ การประมาณพจน์ $\sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i(l) \mathbf{w}_i(0)$ ในสมการที่ (4.13) ใหม่จากอันดับ n ให้เหลืออันดับ \tilde{n} โดยที่อาจต้องมีการนำเทคนิคการแบ่งย่อยแบบจำลองมาร่วมด้วย ซึ่งจะทำให้การลดรูปแบบจำลองได้ผลดียิ่งขึ้น โดยเฉพาะในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงสัญญาณภายในสายส่งที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ซึ่งต้องใช้การประมาณอันดับสูงเพื่อให้มีค่าผิดพลาดน้อยในกรณีที่ลดรูปโดยไม่แบ่งย่อย งานวิจัยนี้ยังได้นำเสนอวิธีในการยุบรวมแบบจำลองกลับเมื่อสัญญาณภายในสายส่งมีการเปลี่ยนแปลงน้อย โดยที่การจะแบ่งย่อยหรือยุบรวมนั้นจะพิจารณาจากขนาดของค่าผิดพลาดในการลดรูป ซึ่งเป็นค่าที่เปรียบเทียบกับอ้างอิงจากค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (Local Truncation Error)

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(i)}(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}^{(i)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(i)}(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}^{(i)}(x) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

เมื่อกำหนดตัวแปรใหม่คือ $\hat{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(i)}(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}^{(i)}(x) \end{bmatrix}$ และ $\hat{\mathbf{M}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}^{(i)} \end{bmatrix}$ จะเขียนสมการ

(4.18) ใหม่ได้ดังในสมการที่ (4.19) ที่มีค่าผิดพลาดในการลดรูป ($error_{RDE}^{(i)}$) กำหนดดังในสมการที่ (4.20)

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x) = \hat{\mathbf{M}}^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x) \quad (4.19)$$

$$error_{RDE}^{(i)} = \int_0^{l^{(i)}} \mathbf{e}^{(i)T}(x) \mathbf{e}^{(i)}(x) dx \quad (4.20)$$

โดยที่ $\mathbf{e}^{(i)}(x) = \hat{\mathbf{c}}^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x)$

$$\hat{\mathbf{c}}^{(i)} = [\mathbf{c}^{(i)} \quad -\tilde{\mathbf{c}}^{(i)}]$$

$$\mathbf{c}^{(i)} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{T}^{(i-1)}], \text{ มี } \mathbf{0} \text{ อยู่ } n^{(i)} - 1 \text{ เทอม}$$

$$\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{T}^{(i-1)}], \text{ มี } \mathbf{0} \text{ อยู่ } \tilde{n}^{(i)} - 1 \text{ เทอม}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

จากนั้นแทนค่าจากสมการที่ (4.12) กลับเข้าไปในสมการที่ (4.20) จะได้ผลดังสมการที่ (4.21) และ (4.22)

$$error_{RDE}^{(i)} = \hat{\mathbf{w}}_n^{(i)T}(0) \mathbf{Q}^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \int_0^{l^{(i)}} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(i)T} x} \hat{\mathbf{c}}^{(i)T} \hat{\mathbf{c}}^{(i)} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(i)} x} dx \quad (4.22)$$

ดังนั้นจะได้ $\mathbf{Q}^{(i)} = \mathbf{Q}^{(i)T}$ สำหรับการแก้สมการอินทิกรัลในสมการที่ (4.22) นั้นให้เปลี่ยนไปใช้สมการเลียบรูปที่ (4.23) แทน ซึ่งจะทำให้คำนวณได้เร็วกว่า บทพิสูจน์ในส่วนนี้ได้แสดงไว้แล้วในบทที่ 2

$$\hat{\mathbf{M}}^{(i)T} \mathbf{Q}^{(i)} + \mathbf{Q}^{(i)} \hat{\mathbf{M}}^{(i)} + \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{c}} - e^{\hat{\mathbf{M}}^{(i)T} l} \hat{\mathbf{c}}^T \hat{\mathbf{c}} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(i)} l} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

ดังนั้นในการลดรูปแบบจำลองแต่ละครั้งต้องคำนวณหาพารามิเตอร์ใหม่ 3 ตัว คือ $\tilde{n}^{(i)}$, $\tilde{\mathbf{w}}^{(i)}(0)$, และ $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ โดยที่ $\tilde{n}^{(i)}$ เป็นอันดับที่ลดรูปแล้วของสายส่ง $\tilde{\mathbf{w}}^{(i)}(0)$ เป็นค่าภาวะเริ่มต้นใหม่และ $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของแบบจำลองที่ลดรูปแล้ว ในการเลือกค่า $\tilde{\mathbf{w}}^{(i)}(0)$ และ $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ ที่ทำให้เกิดค่าผิดพลาดที่เหมาะสมนั้นจะนำเสนอต่อไปในหัวข้อที่ 4.2.3 และ 4.2.4 ตามลำดับ

4.2.3 การเลือกค่าภาวะเริ่มต้นใหม่ที่เหมาะสมเพื่อลดค่าผิดพลาดในการลดรูป

ในการหาค่าภาวะเริ่มต้น $\tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)$ ใหม่ที่ทำให้ค่าผิดพลาดในการลดรูปมีค่าน้อยที่สุดนั้นจะทำโดยการกำหนดอนุพันธ์ของค่าผิดพลาดในการลดรูปจากสมการที่ (4.21) เทียบกับค่าภาวะเริ่มต้นใหม่ $\tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)$ ให้เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} error_{RDE}^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(i)T}(0) \mathbf{Q}^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(i)}(0) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{(i)} & \mathbf{Q}_{12}^{(i)} \\ \mathbf{Q}_{21}^{(i)} & \mathbf{Q}_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(i)}(0) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}_{21}^{(i)} \mathbf{w}_n^{(i)}(0) + \mathbf{Q}_{12}^{(i)T} \mathbf{w}_n^{(i)}(0) + 2\mathbf{Q}_{22}^{(i)} \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{aligned} \quad (4.24)$$

จากสมการที่ (4.24) เนื่องจาก $\mathbf{Q}_{12}^{(i)T} = \mathbf{Q}_{21}^{(i)}$ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} error_{RDE}^{(i)} = 0$ จะได้ค่าภาวะเริ่มต้นใหม่ที่ทำให้ค่าผิดพลาดในการลดรูปน้อยที่สุดคือ

$$\tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) = -\mathbf{Q}_{22}^{(i)-1} \mathbf{Q}_{21}^{(i)} \mathbf{w}_n^{(i)}(0) \quad (4.25)$$

โดยที่ $\mathbf{Q}_{21}^{(i)}$ และ $\mathbf{Q}_{22}^{(i)}$ มีขนาดเป็น $\tilde{n}^{(i)} \times n^{(i)}$ และ $\tilde{n}^{(i)} \times \tilde{n}^{(i)}$ ตามลำดับ

4.2.4 การเลือกค่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ ที่เหมาะสมเพื่อลดค่าผิดพลาดในการลดรูป

เนื้อหาทางวิจัยในส่วนนี้เป็นส่วนที่ยาก เนื่องจากว่า $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $\tilde{n}^{(i)} \times \tilde{n}^{(i)}$ ซึ่งมีรูปแบบที่เป็นไปได้มากมาย ดังนั้นการเลือกค่า $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ ที่ทำให้เกิดค่าผิดพลาดในการลดรูปน้อยที่สุดนั้น จะทำได้ยากมาก และเนื่องจากเราต้องการที่จะให้การคำนวณสามารถนำค่าเก่าๆ ในอดีตกลับมาใช้ใหม่ได้ งานวิจัยชิ้นนี้จึงจะเสนอให้ค่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ ตัวใหม่นั้นให้มีรูปแบบที่เป็นไปได้จำกัด ดังนี้

กำหนดให้ $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ เป็นฟังก์ชันของขนาดขั้นเวลา (\tilde{h}) โดยที่ $\tilde{h} = \pm 2^j h_{MAX}, j=0, 1, 2, \dots, 8, \infty$ ดังนี้

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(h_1) & & & & & & & & & & & \\ \tilde{\mathbf{B}}(h_2) & \tilde{\mathbf{A}}(h_2) & & & & & & & & & & \\ & \tilde{\mathbf{B}}(h_3) & \tilde{\mathbf{A}}(h_3) & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & & & \tilde{\mathbf{B}}(h_N) & \tilde{\mathbf{A}}(h_N) & & & & \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\text{โดยที่ } \tilde{\mathbf{A}}(h_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{L}}{h_k}\right) \\ -\left(\mathbf{G} + \frac{\mathbf{C}}{h_k}\right) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{1}{h_k}$$

แล้วสำหรับการหาค่า $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ ที่เหมาะสมที่จุดเวลาแต่ละจุดนั้นจะใช้วิธีลองแทนค่ากลับเข้าไปในสมการ (4.21) ทั้ง 20 รูปแบบแล้วเลือกค่าที่ทำให้เกิดค่าผิดพลาดน้อยที่สุดไปใช้ในการลดอันดับ

4.2.5 การยุบรวมแบบจำลองและค่าผิดพลาดที่เกิดจากการยุบรวม

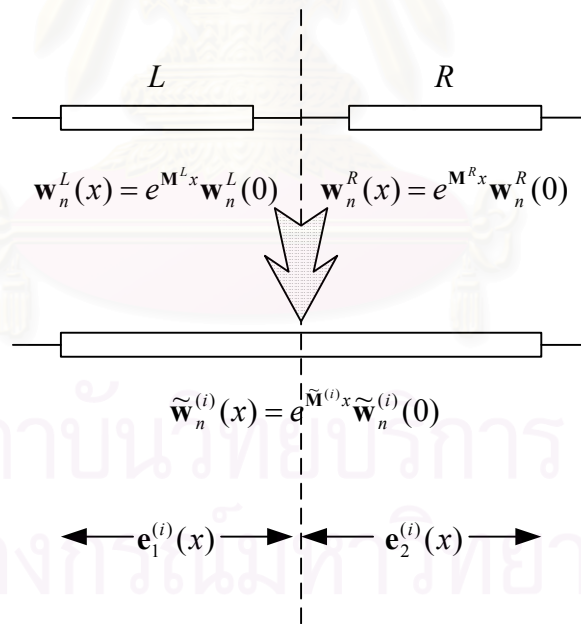
ในหัวข้อนี้เราจะอธิบายถึงวิธีในการยุบรวมแบบจำลองสายส่งท่อนย่อย 2 ท่อนคือ L และ R ให้เป็นหนึ่งท่อนที่ i^{th} ดังในรูปที่ 4.3 และค่าผิดพลาดที่เกิดจากการยุบรวมจะเป็นผลรวมของ $\mathbf{e}_1^{(i)}(x)$ และ $\mathbf{e}_2^{(i)}(x)$ ซึ่งคำนวณหาได้จากสมการที่ (4.27) และ (4.28)

$$\mathbf{e}_1^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_L^{(i)} & -\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(L)}(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x) \end{bmatrix}, \quad x = [0, l^{(L)}] \quad (4.27)$$

$$\mathbf{e}_2^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_R^{(i)} & -\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(R)}(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x) \end{bmatrix}, \quad x = [0, l^{(R)}] \quad (4.28)$$

กำหนดให้ $\hat{\mathbf{c}}_L^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_L^{(i)} & -\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{c}}_R^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_R^{(i)} & -\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{w}}_n^{(L)}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(L)}(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x) \end{bmatrix}$,

$\hat{\mathbf{w}}_n^{(R)}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(R)}(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x) \end{bmatrix}$ และค่าผิดพลาดจากการยุบรวม ($error_{CBE}^{(i)}$) ดังนี้



รูปที่ 4.3 แสดงการยุบรวมแบบจำลองสายส่งท่อนที่ i^{th} ที่เวลา t_n

$$error_{CBE}^{(i)} = \int_0^{l^{(L)}} \mathbf{e}_1^{(i)T}(x) \mathbf{e}_1^{(i)}(x) dx + \int_0^{l^{(R)}} \mathbf{e}_2^{(i)T}(x) \mathbf{e}_2^{(i)}(x) dx \quad (4.29)$$

แทนค่าสมการที่ (4.27), (4.28), (4.12) ลงไปในสมการที่ (4.29)

$$error_{CBE}^{(i)} = \hat{\mathbf{w}}_n^{(L)T}(0) \mathbf{Q}_L^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(L)}(0) + \hat{\mathbf{w}}_n^{(R)T}(0) \mathbf{Q}_R^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(R)}(0) \quad (4.30)$$

โดยที่ $\mathbf{Q}_L^{(i)} = \int_0^{l^{(L)}} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(L)T} x} \hat{\mathbf{c}}_L^{(i)T} \hat{\mathbf{c}}_L^{(i)} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(L)} x} dx$, และ $\mathbf{Q}_R^{(i)} = \int_0^{l^{(R)}} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(R)T} x} \hat{\mathbf{c}}_R^{(i)T} \hat{\mathbf{c}}_R^{(i)} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(R)} x} dx$ และสำหรับการคำนวณสมการอินทิกรัลทั้งสองสมการนี้จะเปลี่ยนไปใช้สมการที่ (4.31) และ (4.32) แทน

$$\hat{\mathbf{M}}^{(L)T} \mathbf{Q}_L^{(i)} + \mathbf{Q}_L^{(i)} \hat{\mathbf{M}}^{(L)} + \hat{\mathbf{c}}_L^{(i)T} \hat{\mathbf{c}}_L^{(i)} - e^{\hat{\mathbf{M}}^{(L)T} l^{(L)}} \hat{\mathbf{c}}_L^{(i)T} \hat{\mathbf{c}}_L^{(i)} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(L)} l^{(L)}} = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

$$\hat{\mathbf{M}}^{(R)T} \mathbf{Q}_R^{(i)} + \mathbf{Q}_R^{(i)} \hat{\mathbf{M}}^{(R)} + \hat{\mathbf{c}}_R^{(i)T} \hat{\mathbf{c}}_R^{(i)} - e^{\hat{\mathbf{M}}^{(R)T} l^{(R)}} \hat{\mathbf{c}}_R^{(i)T} \hat{\mathbf{c}}_R^{(i)} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(R)} l^{(R)}} = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

ในการหาค่าภาวะเริ่มต้น $\tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)$ ใหม่ที่ทำให้ค่าผิดพลาดในการยุบรวมมีค่าน้อยที่สุดนั้นจะทำโดยการกำหนดอนุพันธ์ของค่าผิดพลาดในการยุบรวมจากสมการที่ (4.30) เทียบกับค่าภาวะเริ่มต้นตัวใหม่ $\tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)$ ให้เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \frac{\partial error_{CBE}^{(i)}}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(L)T}(0) \mathbf{Q}_L^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(L)}(0) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(R)T}(0) \mathbf{Q}_R^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_n^{(R)}(0) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(L)}(0) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{L11}^{(i)} & \mathbf{Q}_{L12}^{(i)} \\ \mathbf{Q}_{L21}^{(i)} & \mathbf{Q}_{L22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(L)}(0) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(R)}(0) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{R11}^{(i)} & \mathbf{Q}_{R12}^{(i)} \\ \mathbf{Q}_{R21}^{(i)} & \mathbf{Q}_{R22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^{(R)}(0) \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{bmatrix} \\ &= 2\mathbf{Q}_{L12}^{(i)} \mathbf{w}_n^{(L)}(0) + 2\mathbf{Q}_{L22}^{(i)} \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \\ &\quad + 2e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)T} l^{(L)}} \mathbf{Q}_{R12}^{(i)} \mathbf{w}_n^{(R)}(0) + 2e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)T} l^{(L)}} \mathbf{Q}_{R22}^{(i)} e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)} l^{(L)}} \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{aligned} \quad (4.34)$$

จากสมการที่ (4.34) ถ้ากำหนดให้ $\frac{\partial error_{CBE}^{(i)}}{\partial \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)} = 0$ จะได้ค่าภาวะเริ่มต้นใหม่ที่ทำให้ค่าผิดพลาดในการยุบรวมน้อยที่สุดคือ

$$\tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) = -\left(\mathbf{Q}_{L22}^{(i)} + e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)T} l^{(L)}} \mathbf{Q}_{R22}^{(i)} e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)} l^{(L)}} \right)^{-1} \left(\mathbf{Q}_{L12}^{(i)T} \mathbf{w}_n^{(L)}(0) + e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)T} l^{(L)}} \mathbf{Q}_{R12}^{(i)T} \mathbf{w}_n^{(R)}(0) \right) \quad (4.35)$$

4.2.6 การคำนวณหาค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (LTE)

ค่าผิดพลาดเพราะตัดปลายที่เวลา t_{n+1} นั้นสามารถหาได้โดยการประมาณจากผลต่างของผลเฉลยที่ได้จากการประมาณอนุพันธ์ย่อยทางเวลาด้วยวิธีออยเลอร์แบบกลับหลัง $\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{BE}$ และวิธีออยเลอร์แบบไปหน้า $\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{FE}$ ดังนี้

สมการที่ (4.36) เป็นรูปแบบทั่วไปของการประมาณเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีออยเลอร์แบบไปหน้า

$$\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{FE} = \mathbf{w}_n^{(i)}(x) + h_{n+1} \frac{\partial \mathbf{w}_n^{(i)}(x)}{\partial t} \quad (4.36)$$

และเนื่องจาก $\left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{h_n} + \tilde{\mathbf{B}} \right) \mathbf{w}_n^{(i)}(x) = \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{w}_n^{(i)}(x)}{\partial t} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{w}_n^{(i)}(x)$ จะได้ว่า

$$\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{FE} = \mathbf{w}_n^{(i)}(x) + \frac{h_{n+1}}{h_h} \mathbf{w}_n^{(i)}(x)$$

ที่เวลา t_n นั้น $\mathbf{w}_n^{(i)}(x)_{FE} = \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(x)_{BE} = e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}x} \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)$

$$\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{FE} = \left(1 + \frac{h_{n+1}}{h_h}\right) e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}x} \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \quad (4.37)$$

สมการที่ (4.38) นั้นเป็นค่าผลเฉลยวงจรถีเวลา t_{n+1} ซึ่งได้จากการแก้สมการวงจรถีประมาณอนุพันธ์ย่อยทางเวลาของแบบจำลองสายส่งด้วยวิธีออยเลอร์แบบกลับหลัง

$$\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{BE} = e^{\mathbf{M}^{(i)}x} \mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(0) \quad (4.38)$$

กำหนดให้ $\mathbf{e}^{(i)}(x) = \frac{\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{BE} - \mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{FE}}{2}$ แล้วแทนค่า $\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{FE}$ และ $\mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(x)_{BE}$ จากสมการที่ (4.37) และ (4.38) และจัดรูปใหม่จะได้ผลดังในสมการที่ (4.39)

$$\mathbf{e}^{(i)}(x) = \frac{\mathbf{c}^{(i)} e^{\mathbf{M}^{(i)}x} \mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(0) - \tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \left(1 + \frac{h_{n+1}}{h_h}\right) e^{\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}x} \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0)}{2}$$

$$\mathbf{e}^{(i)}(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{(i)} & -\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}^{(i)} \end{bmatrix} x} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(0) \\ \left(1 + \frac{h_{n+1}}{h_h}\right) \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

ถ้ากำหนดให้ค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย $error_{LTE}^{(i)} = \sqrt{\int_0^{l^{(i)}} \mathbf{e}^{(i)T}(x) \mathbf{e}^{(i)}(x) dx}$ จะได้

$$error_{LTE}^{(i)} = \sqrt{\hat{\mathbf{w}}_{n+1}^{(i)T}(0) \mathbf{Q}^{(i)} \hat{\mathbf{w}}_{n+1}^{(i)}(0)} \quad (4.40)$$

โดยที่ $\mathbf{Q}^{(i)} = \int_0^{l^{(i)}} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(i)T}x} \hat{\mathbf{c}}^{(i)T} \hat{\mathbf{c}}^{(i)} e^{\hat{\mathbf{M}}^{(i)}x} dx$ เราจะได้

$$\hat{\mathbf{w}}_{n+1}^{(i)}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{n+1}^{(i)}(0) \\ \left(1 + \frac{h_{n+1}}{h_h}\right) \tilde{\mathbf{w}}_n^{(i)}(0) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{(i)} & -\tilde{\mathbf{c}}^{(i)} \end{bmatrix}$$

4.3 การปรับขนาดขั้นเวลาอัตโนมัติ

กรณีเฉพาะสำหรับการปรับขั้นเวลาอัตโนมัติที่จะนำเสนอในงานวิจัยนี้ จะกำหนดรูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของขนาดขั้นเวลาให้เป็น 11 รูปแบบด้วยกันคือ

$$h = \frac{h_{\text{MAX}}}{2^j}, j = 0, 1, 2, \dots, 10$$

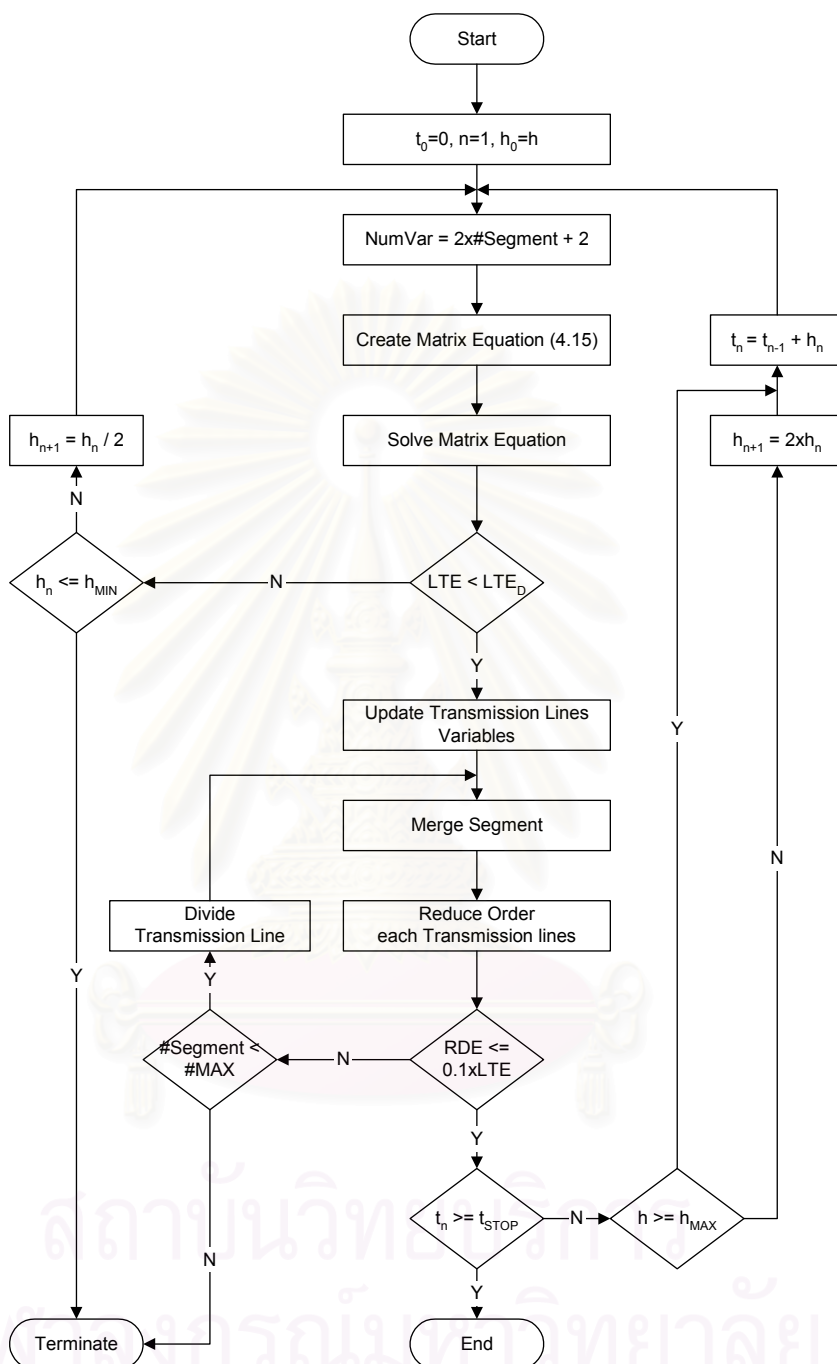
ในการจำลองการทำงานนั้นเราจะเริ่มใช้ขนาดขั้นเวลาที่ผู้ใช้กำหนดมาให้เป็นค่าแรก และจะเป็นค่าขนาดขั้นเวลาที่ใหญ่ที่สุดที่ยอมรับได้ (h_{MAX}) ด้วย ขนาดขั้นเวลาจะเปลี่ยนไปเรื่อยๆ ที่จุดเวลาทุกๆ จุดของการจำลองการทำงานเพื่อควบคุมไม่ให้ค่าผิดพลาดของผลเฉลยมีค่ามากเกินไป โดยการควบคุมนี้จะทำการตรวจสอบจากค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย (Local Truncation Error) ในสมการที่ (4.40) ถ้าค่าผิดพลาดเพราะตัดปลายที่คำนวณได้ที่จุดเวลาแต่ละจุดนั้นมีค่ามาก จะหมายความว่าขนาดขั้นเวลาที่ใช้ในการประมาณเชิงอนุพันธ์ที่จุดเวลานั้นมีค่ามากเกินไป เราจึงควรที่จะลดขนาดขั้นเวลาให้เล็กลง งานวิจัยนี้เสนอว่าการลดลงหรือเพิ่มขึ้นของขนาดขั้นเวลานั้นให้เปลี่ยนแปลงในรูป 2 เท่า เพื่อให้รูปแบบของขนาดขั้นเวลามีอยู่จำกัด แล้วผลการคำนวณบางค่าจะสามารถนำกลับมาใช้ใหม่ได้ ถึงแม้ว่าค่าขนาดขั้นเวลาที่เลือกนั้นอาจจะไม่ใช่ค่าที่ดีที่สุดก็ตาม การปรับขนาดขั้นเวลาแบบอัตโนมัตินี้จะให้ผลดีกว่าการใช้ขนาดขั้นเวลาเดียวตลอดการจำลองการทำงาน กล่าวคือจะเลือกใช้ขั้นเวลาที่มีขนาดเล็กๆ เพื่อให้ได้ผลที่แม่นยำในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณ และควรจะใช้ขั้นเวลาที่มีขนาดใหญ่ในกรณีที่สัญญาณมีการเปลี่ยนแปลงน้อย เพื่อให้การจำลองการทำงานนั้นผ่านไปได้อย่างเร็ว [17]

4.4 กรณีเฉพาะในการนำแบบจำลองสายส่งไปใช้จริง

เพื่อแสดงให้เห็นถึงการนำเทคนิคที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ไปใช้จริงในการทำการจำลองการทำงานทางเวลา จึงได้กำหนดรูปแบบเฉพาะในการนำแบบจำลองไปใช้ และจะเป็นข้อกำหนดเดียวกับการนำแบบจำลองทางโดเมนเวลานี้ไปทดสอบผลในบทที่ 5 ซึ่งมีรายละเอียดของข้อกำหนดดังต่อไปนี้

- กำหนดให้สายส่งเป็นแบบท่อนเดียว
- กำหนดให้จำนวนท่อน (k) ในการแบ่งย่อยแบบจำลองต้องอยู่ในรูป $2^j, j = 0, 1, 2, \dots, \log_2 k$
- รูปแบบที่เป็นไปได้ของขนาดขั้นเวลาคือ $2^j, j = 0, 1, 2, \dots, \log_2 k$
- กำหนดให้ความยาวสายของสายส่งมีขนาดเท่ากับ 1
- ท่อนย่อยแต่ละท่อนของแบบจำลองสายส่งมีอันดับได้สูงสุดเพียงอันดับ 2
- กำหนดให้ ตัวแปรวงจรของสายส่งท่อนที่ i^{th} คือ $\mathbf{w}_n^{(i)}(0), \mathbf{w}_n^{(i+1)}(0)$
- การเลือก $\tilde{\mathbf{M}}^{(i)}$ ตัวใหม่นั้นจะทำตามวิธีที่เสนอไว้ในสมการที่ (4.26) ซึ่งเป็นไปได้ทั้งหมด 20 รูปแบบ

คงน้อยกว่าค่า 10 เปอร์เซ็นต์ของ LTE การคำนวณหาค่าผิดพลาดจากการลดอันดับและยุบรวมนั้นจะใช้สมการที่ (4.21) และ (4.30) ตามลำดับ



รูปที่ 4.4 แผนภูมิสายงานของการจำลองการทำงานวงจรทางเวลาสำหรับแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา

ก่อนที่การจำลองการทำงานจะก้าวไปสู่การจำลองการทำงานที่จุดเวลาถัดไปนั้น จะมีการเพิ่มขนาดขั้นเวลาขึ้นเป็นสองเท่า เพื่อให้การจำลองการทำงานสามารถทำได้เร็วขึ้นในกรณีที่สัญญาณภายในวงจรมีการเปลี่ยนแปลงน้อยๆ และการเพิ่มขนาดขั้นเวลานี้จะทำได้เรื่อยๆ แต่จะไม่ให้เกินค่าที่ตั้งไว้ (h_{MAX}) ตราบเท่าที่ค่าผิดพลาดเพราะตัดปลายมีค่าไม่เกิน LTE_D

4.5 การขยายผลไปสู่การประมาณแบบสี่เหลี่ยมคางหมู

เราจะนำสมการ Telegrapher ในสมการที่ (4.5) นั้นมาประมาณอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลาด้วยวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งในที่นี้จะเลือกใช้การประมาณแบบสี่เหลี่ยมคางหมู [10] ทำให้สมการที่ (4.5) กลายเป็น

$$\frac{\partial \mathbf{w}(x, t_n)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{L} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\frac{2}{h} (\mathbf{w}(x, t_n) - \mathbf{w}(x, t_{n-1})) - \frac{\partial \mathbf{w}(x, t_{n-1})}{\partial x} \right) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{R} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}(x, t_n) \quad (4.43)$$

เพื่อความสะดวกต่อไปในการอ้างอิงจึงขอกำหนดตัวแปรขึ้นมาใหม่ดังในสมการที่ (4.44) และ (4.45) ทำให้เขียนสมการที่ (4.43) ใหม่ได้ดังในสมการที่ (4.46)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\left(\mathbf{R} + \frac{2\mathbf{L}}{h}\right) \\ -\left(\mathbf{G} + \frac{2\mathbf{C}}{h}\right) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{2\mathbf{L}}{h} \\ \frac{2\mathbf{C}}{h} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{w}_n(x) = \mathbf{w}(x, t_n) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}_n(x)}{\partial x} = \mathbf{A}\mathbf{w}_n(x) + \mathbf{B}\mathbf{w}_{n-1}(x) + \mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{w}_{n-1}(x)}{\partial x} \quad (4.46)$$

ในการจำลองการทำงานวงจรทางเวลานั้น เมื่อเวลาผ่านไปถึงเวลา t_n สมการของแบบจำลองสายส่งที่ประมาณอนุพันธ์ย่อยทางเวลาแล้ว จะมีรูปแบบดังในสมการที่ (4.47)

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(x) \\ \mathbf{w}_2(x) \\ \mathbf{w}_3(x) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{A} & \mathbf{A} & & & \\ \mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{D}^2\mathbf{A} & \mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{A} & \mathbf{A} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{D}^{n-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}^n\mathbf{A} & \mathbf{D}^{n-2}\mathbf{B} + \mathbf{D}^{n-1}\mathbf{A} & \cdots & \mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(x) \\ \mathbf{w}_2(x) \\ \mathbf{w}_3(x) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n(x) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

และถ้ากำหนดให้

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{A} & \mathbf{A} & & & \\ \mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{D}^2\mathbf{A} & \mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{A} & \mathbf{A} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{D}^{n-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}^n\mathbf{A} & \mathbf{D}^{n-2}\mathbf{B} + \mathbf{D}^{n-1}\mathbf{A} & \cdots & \mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{A} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(x) \\ \mathbf{w}_2(x) \\ \mathbf{w}_3(x) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n(x) \end{bmatrix}$$

จะสามารถเขียนสมการที่ (4.37) ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}(x) = \mathbf{M}\mathbf{w}(x) \quad (4.48)$$

ซึ่งมีผลเฉลยดังที่แสดงในสมการที่ (4.49) และสมการของแบบจำลองที่จะนำไปใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยวงจรถีเวลา t_n ได้แสดงไว้ในสมการที่ (4.50) โดยที่ $\mathbf{C}_1 = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{I}]$

$$\mathbf{w}(x) = e^{\mathbf{M}x} \mathbf{w}(0) \quad (4.49)$$

$$\mathbf{w}_n(x) = \mathbf{C}_1 e^{\mathbf{M}x} \mathbf{w}(0)$$

$$\mathbf{w}_n(x) = [\Psi_1(x) \ \Psi_2(x) \ \dots \ \Psi_n(x)] \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(0) \\ \mathbf{w}_2(0) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_n(l) = \Psi_n(l) \mathbf{w}_n(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \Psi_i(l) \mathbf{w}_i(0) \quad (4.50)$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

ทดสอบและวิจารณ์ผล

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงการทดสอบและวิจารณ์ผลในการนำแบบจำลองที่เสนอในงานวิจัยนี้ ไปทดลองใช้งานจริง โดยที่โปรแกรมที่ใช้ในการทดสอบนั้นจะพัฒนาด้วย Matlab รุ่นที่ 6.0 แบบจำลองที่จะนำมาทดสอบนั้นมีทั้งหมด 3 แบบด้วยกันคือ แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา และแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลาแบบมีการลดอันดับ การเปรียบเทียบผลที่ได้ของแบบจำลองแต่ละแบบนี้จะใช้แบบจำลองแบบแบ่งส่วนเป็นตัวอ้างอิงหลัก

5.1 เงื่อนไขในการทดสอบ

เงื่อนไขในการทดสอบผลนั้น จะแบ่งออกได้เป็น 4 เงื่อนไขด้วยกันดังนี้คือ

1. **ประเภทของแบบจำลอง** แบบจำลองที่นำมาใช้ในการทดสอบนั้น ประกอบด้วยแบบจำลอง 3 แบบ คือ
 - แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น (A)
 - แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลาแบบไม่มีการลดอันดับ (B)
 - แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลาแบบที่มีการลดอันดับ (C)
2. **ชนิดของสายส่ง** ต้องประกอบด้วยทั้งสายส่งที่มีความสูญเสีย (Lossy) และสายส่งที่ไม่มีคามสูญเสีย (Lossless)
3. **การเข้าคู่กันของอิมพีแดนซ์** วงจรที่นำมาใช้ในการทดสอบต้องมีทั้งกรณีที่มีอิมพีแดนซ์เข้าคู่กัน และกรณีที่มีอิมพีแดนซ์ไม่เข้าคู่กัน เพื่อให้เห็นถึงผลของการสะท้อนของสัญญาณในสาย
4. **ประสิทธิภาพในการลดอันดับ** เงื่อนไขที่จะใช้ทดสอบประสิทธิภาพในการลดอันดับนั้นต้องมีทั้งกรณีที่การกระจายของสัญญาณในสายมีการเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา และไม่มีการเปลี่ยนแปลง เพื่อดูผลของการลดอันดับ การยุบรวมและแบ่งท่อนก่อนย่อว่ามีประสิทธิภาพมากน้อยเพียงใด

5.2 ชนิดของการทดสอบ

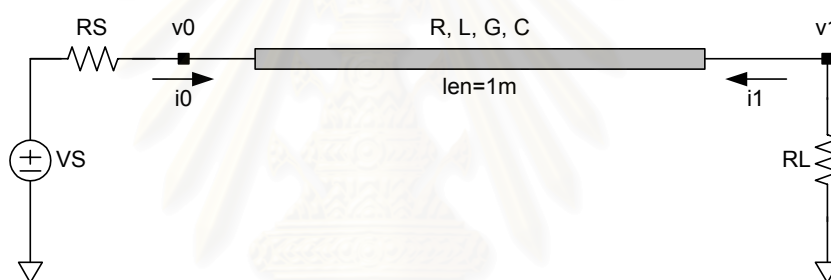
ส่วนผลของการทดสอบที่ต้องนำมาใช้ในการพิจารณานั้น จะแบ่งเป็นหัวข้อดังต่อไปนี้

1. **การทดสอบความแม่นยำของแบบจำลอง (Test-A)** จะทดสอบโดยเปรียบเทียบผลการจำลองการทำงานทางเวลาของแบบจำลองทางโดเมนเวลาทั้งแบบมีการลดอันดับ และไม่ลดอันดับ เปรียบเทียบกับแบบจำลองแบบแบ่งส่วน (ใช้การแบ่งส่วนเป็นรูปแบบพาย 128 ท่อนย่อย พัฒนาขึ้นในโปรแกรม “เล็ก-6.2” [19]) ผลที่ได้จะแสดงในรูปกราฟทางโดเมนเวลา

2. การทดสอบประสิทธิภาพของการแบ่งท่อนย่อย และยุบรวม (Test-B) จะทดสอบประสิทธิภาพของการลดอันดับแบบจำลองสายส่ง ซึ่งจะพิจารณาจากการแบ่งท่อนย่อยและยุบรวมกลับที่มีการควบคุมค่าผิดพลาดรวม ทั้งในกรณีที่การกระจายของสัญญาณในสายมีค่าคงที่ และมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา โดยจะป้อนค่าสัญญาณขาเข้าเป็นสัญญาณขั้นบันได (Step input) และสัญญาณไซน์ซออยด์ (Sinusoidal input)
3. การทดสอบการควบคุมความแม่นยำในการลดอันดับ (Test-C) จะทดสอบเปรียบเทียบการกระจายของสัญญาณในสายส่งในกรณีที่ตั้งค่าสูงสุดของค่าผิดพลาดในการลดอันดับไว้ต่างกัน 3 ค่า เพื่อดูผลที่ได้จากการลดอันดับว่า ค่าที่ตั้งไว้ควบคุมนั้นมีผลต่อการกระจายของสัญญาณที่ลดอันดับแล้วอย่างไร

โดยสรุปแล้ว เราจะใช้วงจรในรูปที่ 5.1 เป็นวงจรในการทดสอบ โดยจะมีรายละเอียดของพารามิเตอร์แต่ละอย่าง แตกต่างกันไป ซึ่งจะแสดงไว้ในหัวข้อที่ 5.3

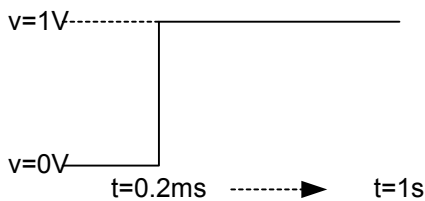
5.3 วงจรที่ใช้ในการทดสอบ



รูปที่ 5.1 วงจรที่ใช้ในการทดสอบแบบจำลองสายส่ง

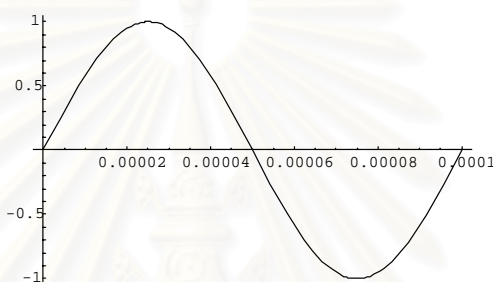
วงจรในรูปที่ 5.1 เป็นวงจรที่จะใช้ในการทดสอบผลการทำงานของแบบจำลองที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ ซึ่งจะจำลองโดยใช้ขนาดชั้นเวลา (h) เป็น 10 ns จะแบ่งรายละเอียดออกเป็น 3 ส่วนด้วยกันดังนี้คือ

1. สายส่ง จะทดสอบ 2 แบบด้วยกันคือ
 - สายส่งแบบไม่มีความสูญเสีย ($R=0 \text{ W/m}$, $G=0 \text{ mho/m}$, $L=1 \text{ mH/m}$, $C=10 \text{ nF/m}$, $len=1 \text{ m}$) ซึ่งจะมีค่าอิมพีแดนซ์เป็น 10 W และค่าประวิงเวลาเป็น 100 ns
 - สายส่งแบบมีความสูญเสีย ($R=10 \text{ W/m}$, $G=0.1 \text{ mho/m}$, $L=1 \text{ mH/m}$, $C=10 \text{ nF/m}$, $len=1 \text{ m}$) ซึ่งจะมีค่าอิมพีแดนซ์เป็น 10 W และค่าประวิงเวลาเป็น 100 ns
2. แหล่งกำเนิดแรงดันขาเข้า จะทดสอบใน 2 แบบด้วยกันคือ
 - สัญญาณขั้นบันได เป็นสัญญาณขั้นบันไดที่มีการเปลี่ยนของสัญญาณจาก 0 V เป็น 2 V ที่เวลา 0.2 ms ดังในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 รูปสัญญาณขาเข้าขั้นบันได

- **สัญญาณไซน์ชอยด์** ใช้สัญญาณไซน์ชอยด์ที่มีขนาดผลต่างของค่ายอดเป็น 2 V และมีความถี่เป็น 10 kHz ดังในรูปที่ 5.3 สัญญาณไซน์ชอยด์ที่มีความถี่ดังกล่าวถูกออกแบบให้มีความเท่ากับขนาดค่าประวิงเวลา (Time delay) ของสายส่ง อย่างน้อยเพื่อให้มีการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณครบทั้งคาบตลอดความยาวของสายส่ง



รูปที่ 5.3 รูปสัญญาณขาเข้าไซน์ชอยด์

3. ตัวต้านทานโหลด (RL) และ ตัวต้านทานขาเข้า (RS) จะเลือกใช้ 2 ค่าด้วยกันคือ
 - **กรณีอิมพีแดนซ์เข้าคู่กัน** โดยจะเลือกใช้ RL และ RS มีค่าเป็น 10 W เพื่อให้ไม่เกิดปรากฏการณ์สะท้อนที่ปลายทั้งสองข้างของสายส่ง
 - **กรณีอิมพีแดนซ์ไม่เข้าคู่กัน** โดยจะเลือกใช้ RL และ RS มีค่าเป็น 5 W เพื่อให้เกิดปรากฏการณ์สะท้อนที่ปลายทั้งสองข้างของสายส่ง โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ของการสะท้อนทางด้าน

โหลด $(\Gamma_L = \frac{z_L - z_0}{z_L + z_0})$ เป็น $-\frac{1}{3}$ และสัมประสิทธิ์ของการสะท้อนทางด้านขาเข้า

$$(\Gamma_S = \frac{z_S - z_0}{z_S + z_0}) \text{ เป็น } -\frac{1}{3}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

5.4 ผลการทดสอบ

5.4.1 การทดสอบความแม่นยำของแบบจำลอง (Test-A)

รายละเอียดของแต่ละกรณีที่ใช้ในการทดสอบนั้นได้แสดงไว้ในตารางที่ 5.1 โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของอุปกรณ์ที่แจ้งไว้ในหัวข้อที่ 5.3 ผลที่ได้จากการจำลองการทำงานวงจรที่ใช้แบบจำลองทั้งสามแบบ ได้แสดงเปรียบเทียบในรูปกราฟทางเวลา นอกจากนี้ ยังได้เลือกแสดงตัวอย่างข้อมูลที่จุดเวลา 20 จุดของแบบจำลอง สายส่งทางโดเมนเวลา ให้เห็นถึงจำนวนท่อน้อยย่ที่ทำการแบ่งที่จุดเวลาแต่ละจุด เพื่อควบคุมให้ค่าผิดพลาดจากการลดอันดับไม่สูงเกินค่าที่ตั้งไว้ และยังได้แสดงค่าผิดพลาดในการลดอันดับ ($error_{RDE}$) และค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย ($error_{LTE}$) ของที่จุดเวลาแต่ละจุดไว้ด้วย

ตารางที่ 5.1 กรณีต่างๆ สำหรับการทดสอบแบบจำลองสายส่ง

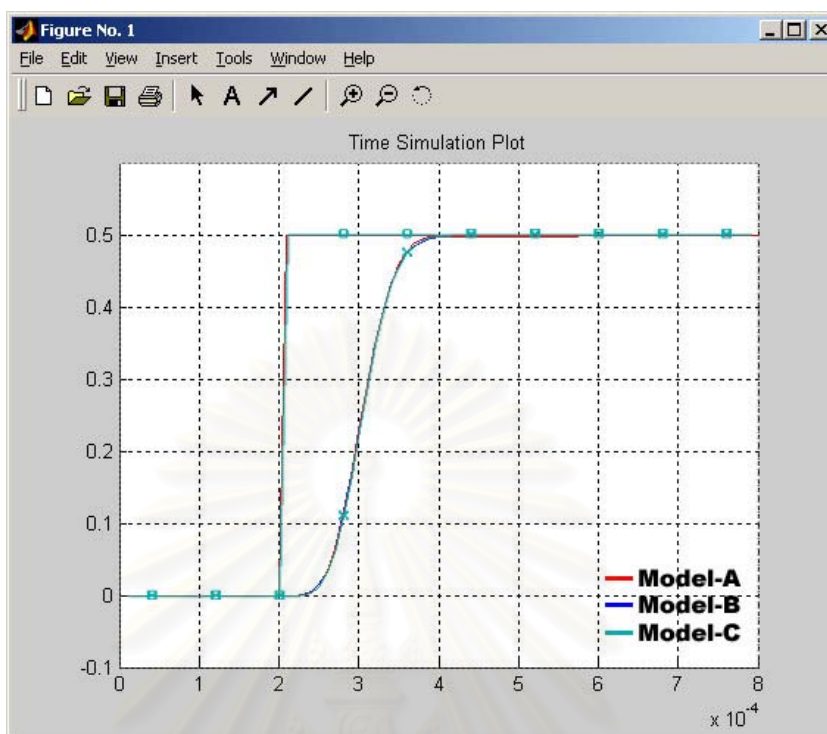
	Input	Z0	R, L, G, C	RS,RL	Ztype	Plot Variables
TA-01	Step	10	$0, 10^{-3}, 0, 10^{-5}$	10	Lossless	v_1, v_2
TA-02	Step	10	$0, 10^{-3}, 0, 10^{-5}$	5	Lossless	v_1, v_2
TA-03	Sine($2\pi \cdot 10^4 t$)	10	$0, 10^{-3}, 0, 10^{-5}$	10	Lossless	v_1, v_2
TA-04	Sine($2\pi \cdot 10^4 t$)	10	$0, 10^{-3}, 0, 10^{-5}$	5	Lossless	v_1, v_2
TA-05	Sine($2\pi \cdot 10^4 t$)	10	$10, 10^{-3}, 0.1, 10^{-5}$	10	Lossy	v_2
TA-06	Sine($2\pi \cdot 10^4 t$)	10	$10, 10^{-3}, 0.1, 10^{-5}$	5	Lossy	v_2

ในการทดสอบ TA-01 ถึง TA-04 นั้นจะแสดงผลค่าแรงดันที่ปม 1 (v_1) และแรงดันที่ปม 2 (v_2) เปรียบเทียบกันทั้งสามแบบจำลอง (A, B, C) สำหรับการทดสอบ TA-05 และ TA-06 นั้นจะแสดงผลเฉพาะค่าแรงดันที่ปม 2 (v_2) เปรียบเทียบกรณีที่สายส่งแบบมีความสูญเสีย กับสายส่งแบบที่ไม่มีความสูญเสีย

และสำหรับสีที่ใช้ในการแสดงผลนั้นเป็นดังนี้

- สีแดง คือผลการจำลองการทำงานโดยใช้แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้น
- สีน้ำเงิน คือผลการจำลองการทำงานโดยใช้แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลาแบบไม่มีการลดอันดับ
- สีเขียว คือผลการจำลองการทำงานโดยใช้แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลาแบบมีการลดอันดับ

ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TA-01



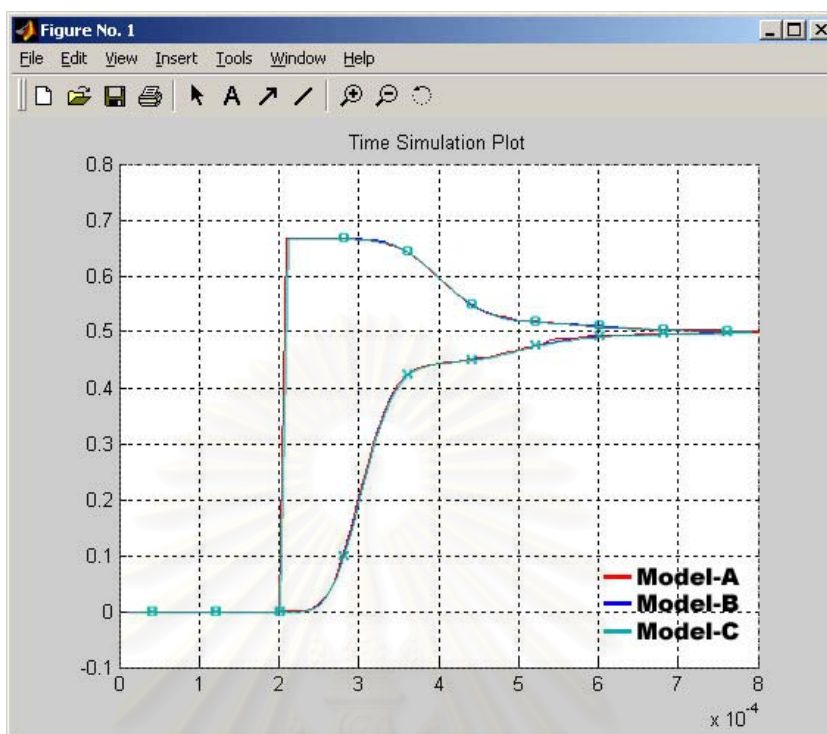
รูปที่ 5.4 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-01 ในตารางที่ 5.1

รายละเอียดข้อมูลผลที่ได้จากการจำลองการทำงาน มีดังนี้

- ขนาดขั้นเวลาที่ใช้ = 10 นาโนวินาที
- จำนวนจุดเวลา = 80
- เวลาที่ให้หยุดจำลอง = 800 นาโนวินาที
- ค่าผิดพลาดในการลดอันดับสูงสุดที่ยอมรับได้ = 10^{-4}

NumPts	#NumSeg	$error_{RDE}$	$error_{LTE}$
(20),	#segment= 1,	RDE=3.029859e-009,	LTE=2.236068e-001
(21),	#segment= 7,	RDE=5.530971e-005,	LTE=2.569812e-001
(22),	#segment= 7,	RDE=6.331006e-005,	LTE=1.791535e-001
(23),	#segment= 8,	RDE=7.620233e-005,	LTE=2.284125e-001
(24),	#segment= 8,	RDE=8.619582e-005,	LTE=1.393355e-001
(25),	#segment= 9,	RDE=5.325894e-005,	LTE=1.250792e-001
(26),	#segment= 8,	RDE=8.426822e-005,	LTE=2.042732e-001
(27),	#segment= 8,	RDE=5.320582e-005,	LTE=3.562986e-001
(28),	#segment= 7,	RDE=5.942984e-005,	LTE=1.905705e-001
(29),	#segment= 6,	RDE=5.264979e-005,	LTE=3.463075e-001
(30),	#segment= 5,	RDE=3.808070e-005,	LTE=5.955165e-001
(31),	#segment= 5,	RDE=1.748792e-005,	LTE=5.526039e-002
(32),	#segment= 4,	RDE=4.489677e-005,	LTE=3.382994e-001
(33),	#segment= 4,	RDE=2.938256e-006,	LTE=3.152031e-002
(34),	#segment= 4,	RDE=2.057496e-006,	LTE=1.642150e-002
(35),	#segment= 3,	RDE=3.222398e-005,	LTE=3.335469e-001
(36),	#segment= 2,	RDE=2.574697e-005,	LTE=5.875437e-001
(37),	#segment= 1,	RDE=1.240039e-005,	LTE=9.183043e-001
(38),	#segment= 1,	RDE=6.325654e-007,	LTE=7.953398e-004
(39),	#segment= 1,	RDE=5.113803e-007,	LTE=7.151086e-004
(40),	#segment= 1,	RDE=4.164203e-007,	LTE=6.453064e-004

ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TA-02



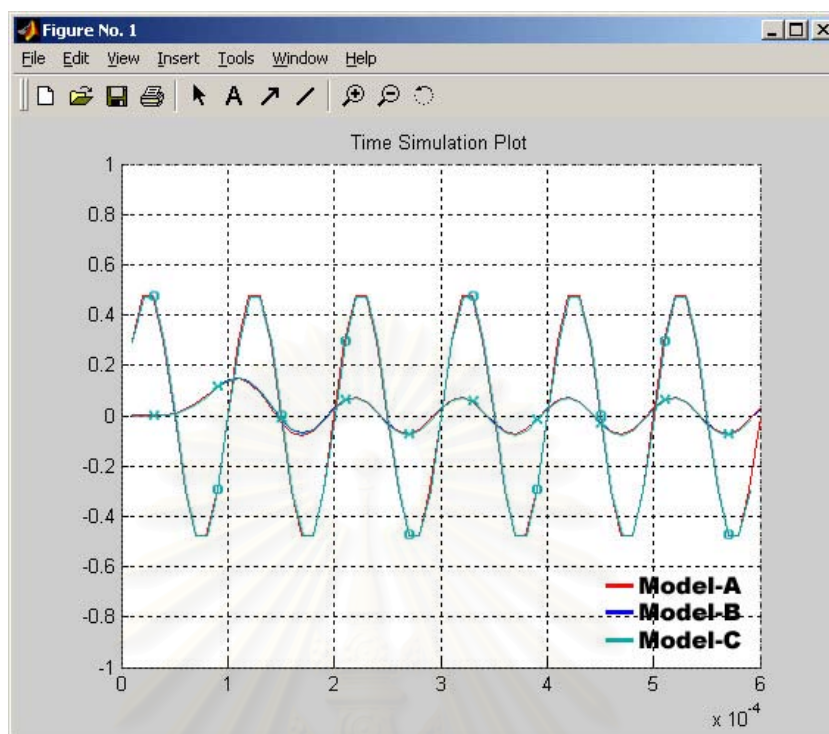
รูปที่ 5.5 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-02 ในตารางที่ 5.1

รายละเอียดข้อมูลผลที่ได้จากการจำลองการทำงาน มีดังนี้

- ขนาดขั้นเวลาที่ใช้ = 10 นส
- จำนวนจุดเวลา = 80
- เวลาที่ให้หยุดจำลอง = 800 นส
- ค่าผิดพลาดในการลดอันดับสูงสุดที่ยอมรับได้ = 10^{-4}

NumPts	#NumSeg	$error_{RDE}$	$error_{LTE}$
(20),	#segment= 1,	RDE=5.386416e-009,	LTE=2.981424e-001
(21),	#segment= 7,	RDE=9.832821e-005,	LTE=3.426416e-001
(22),	#segment= 9,	RDE=7.868818e-005,	LTE=2.368187e-001
(23),	#segment= 9,	RDE=7.337848e-005,	LTE=3.043550e-001
(24),	#segment=10,	RDE=5.073170e-005,	LTE=2.025470e-001
(25),	#segment=10,	RDE=7.620867e-005,	LTE=2.882716e-001
(26),	#segment=10,	RDE=9.272792e-005,	LTE=4.812532e-001
(27),	#segment=10,	RDE=8.540483e-005,	LTE=1.526562e-001
(28),	#segment= 9,	RDE=8.804457e-005,	LTE=2.574360e-001
(29),	#segment= 9,	RDE=7.867907e-005,	LTE=1.083483e-001
(30),	#segment= 8,	RDE=9.393963e-005,	LTE=2.462290e-001
(31),	#segment= 9,	RDE=7.240722e-005,	LTE=9.133480e-002
(32),	#segment= 9,	RDE=9.849992e-005,	LTE=1.538153e-001
(33),	#segment=11,	RDE=7.900346e-005,	LTE=5.226028e-002
(34),	#segment=11,	RDE=9.230807e-005,	LTE=3.017103e-002
(35),	#segment=11,	RDE=9.865812e-005,	LTE=2.265195e-002
(36),	#segment=12,	RDE=8.191816e-005,	LTE=1.878260e-002
(37),	#segment=11,	RDE=9.384171e-005,	LTE=2.721968e-001
(38),	#segment=10,	RDE=8.587894e-005,	LTE=2.864540e-001
(39),	#segment= 9,	RDE=8.128387e-005,	LTE=2.789770e-001
(40),	#segment= 8,	RDE=7.990507e-005,	LTE=1.083767e+000

ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TA-03



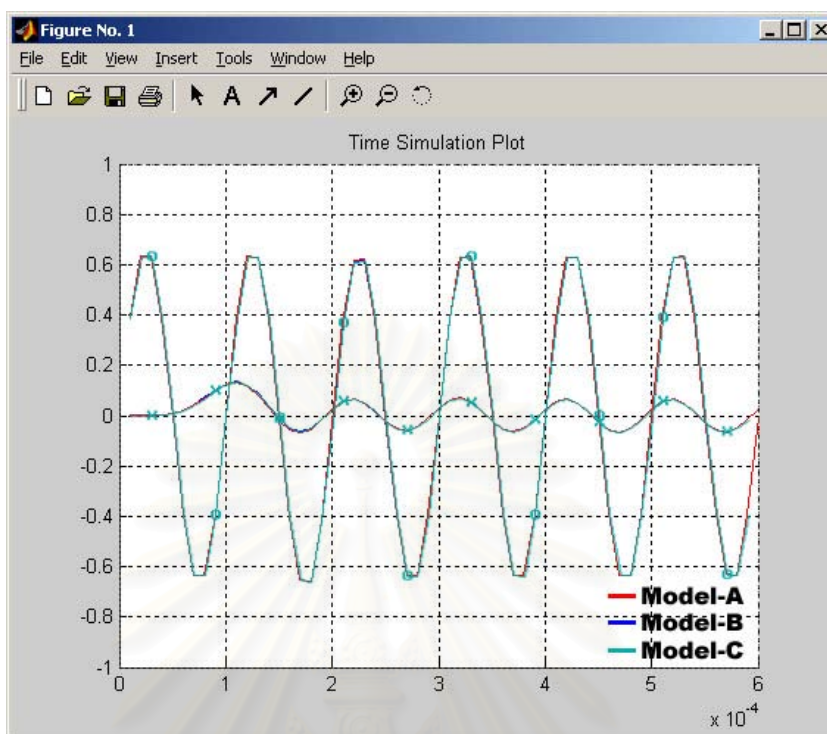
รูปที่ 5.6 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-03 ในตารางที่ 5.1

รายละเอียดข้อมูลผลที่ได้จากการจำลองการทำงาน มีดังนี้

- ขนาดขั้นเวลาที่ใช้ = 10 นาโนวินาที
- จำนวนจุดเวลา = 60
- เวลาที่ให้หยุดจำลอง = 600 นาโนวินาที
- ค่าผิดพลาดในการลดอันดับสูงสุดที่ยอมรับได้ = 10^{-4}

NumPts	#NumSeg	$error_{RDE}$	$error_{LTE}$
(1),	#segment= 1,	RDE=0.000000e+000,	LTE=1.727458e-002
(2),	#segment= 5,	RDE=6.095720e-005,	LTE=1.917724e-001
(3),	#segment= 7,	RDE=4.861360e-005,	LTE=1.744905e-001
(4),	#segment= 9,	RDE=5.989354e-005,	LTE=1.391387e-001
(5),	#segment=12,	RDE=8.057707e-005,	LTE=1.152692e-001
(6),	#segment=17,	RDE=8.608522e-005,	LTE=9.762849e-002
(7),	#segment=20,	RDE=9.457317e-005,	LTE=2.433044e-001
(8),	#segment=21,	RDE=8.456039e-005,	LTE=2.214046e-001
(9),	#segment=21,	RDE=9.198694e-005,	LTE=2.012878e-001
(10),	#segment=24,	RDE=9.041717e-005,	LTE=1.740103e-001
(11),	#segment=28,	RDE=9.764195e-005,	LTE=1.341581e-001
(12),	#segment=31,	RDE=9.405421e-005,	LTE=2.525581e-001
(13),	#segment=32,	RDE=8.663729e-005,	LTE=2.543934e-001
(14),	#segment=33,	RDE=7.701837e-005,	LTE=2.155044e-001
(15),	#segment=33,	RDE=7.208130e-005,	LTE=1.858180e-001
(16),	#segment=34,	RDE=7.811238e-005,	LTE=1.441956e-001
(17),	#segment=33,	RDE=9.638254e-005,	LTE=2.498040e-001
(18),	#segment=32,	RDE=7.309465e-005,	LTE=2.544692e-001
(19),	#segment=32,	RDE=6.354551e-005,	LTE=2.094667e-001
(20),	#segment=32,	RDE=7.069988e-005,	LTE=1.866527e-001

ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TA-04



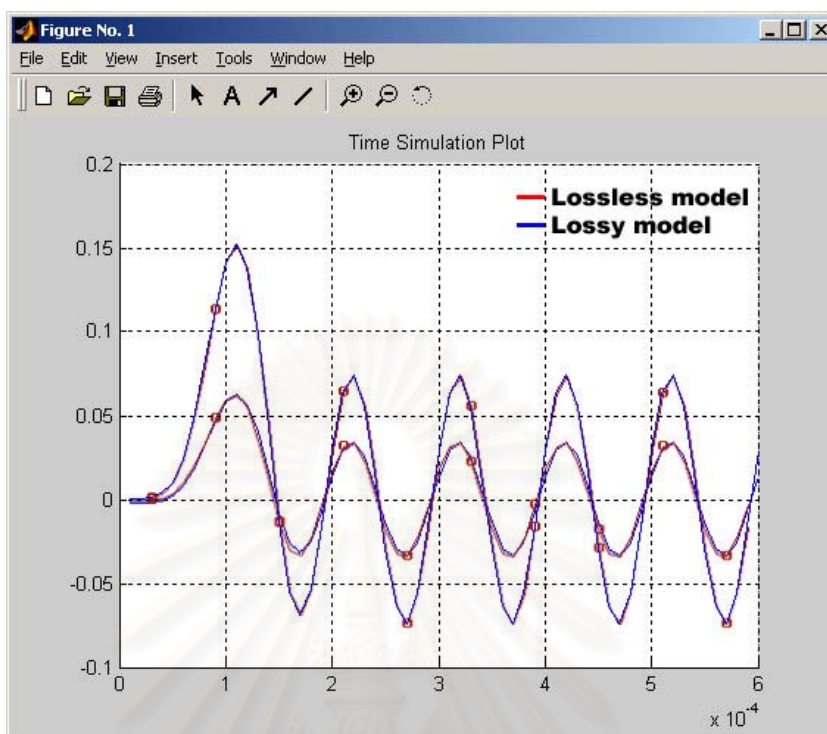
รูปที่ 5.7 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-04 ในตารางที่ 5.1

รายละเอียดข้อมูลผลที่ได้จากการจำลองการทำงาน มีดังนี้

- ขนาดขั้นเวลาที่ใช้ = 10 นาโนวินาที
- จำนวนจุดเวลา = 60
- เวลาที่ให้หยุดจำลอง = 600 นาโนวินาที
- ค่าผิดพลาดในการลดอันดับสูงสุดที่ยอมรับได้ = 10^{-4}

NumPts	#NumSeg	$error_{RDE}$	$error_{LTE}$
(1),	#segment= 1,	RDE=0.000000e+000,	LTE=3.071036e-002
(2),	#segment= 6,	RDE=8.585516e-005,	LTE=2.556966e-001
(3),	#segment= 7,	RDE=7.886229e-005,	LTE=2.328911e-001
(4),	#segment=10,	RDE=6.252960e-005,	LTE=1.876590e-001
(5),	#segment=14,	RDE=9.920439e-005,	LTE=1.500459e-001
(6),	#segment=20,	RDE=9.488793e-005,	LTE=1.325924e-001
(7),	#segment=25,	RDE=9.897595e-005,	LTE=3.217170e-001
(8),	#segment=29,	RDE=8.836312e-005,	LTE=3.469380e-001
(9),	#segment=31,	RDE=8.685024e-005,	LTE=2.791713e-001
(10),	#segment=35,	RDE=9.309507e-005,	LTE=2.198062e-001
(11),	#segment=42,	RDE=9.466860e-005,	LTE=1.835105e-001
(12),	#segment=45,	RDE=9.983519e-005,	LTE=3.387877e-001
(13),	#segment=46,	RDE=9.249810e-005,	LTE=3.631504e-001
(14),	#segment=47,	RDE=8.753063e-005,	LTE=2.949934e-001
(15),	#segment=46,	RDE=8.713389e-005,	LTE=2.391860e-001
(16),	#segment=46,	RDE=9.276969e-005,	LTE=2.083724e-001
(17),	#segment=46,	RDE=7.652338e-005,	LTE=3.323931e-001
(18),	#segment=45,	RDE=7.359517e-005,	LTE=3.390436e-001
(19),	#segment=45,	RDE=7.905064e-005,	LTE=2.917103e-001
(20),	#segment=46,	RDE=8.881113e-005,	LTE=2.300604e-001

ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TA-05



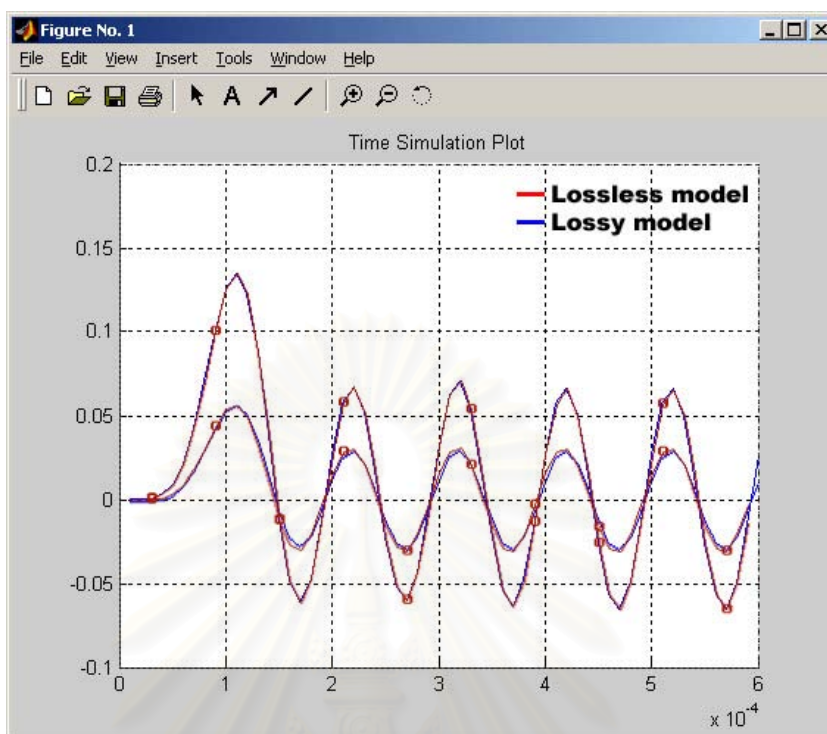
รูปที่ 5.8 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-05 ในตารางที่ 5.1

รายละเอียดข้อมูลผลที่ได้จากการจำลองการทำงาน มีดังนี้

- ขนาดขั้นเวลาที่ใช้ = 10 นาโนวินาที
- จำนวนจุดเวลา = 60
- เวลาที่ให้หยุดจำลอง = 600 นาโนวินาที
- ค่าผิดพลาดในการลดอันดับสูงสุดที่ยอมรับได้ = 10^{-3}

NumPts	#NumSeg	$error_{RDE}$	$error_{LTE}$
(1),	#segment= 1,	RDE=0.000000e+000,	LTE=1.727458e-002
(2),	#segment= 3,	RDE=3.963522e-004,	LTE=1.585416e-001
(3),	#segment= 3,	RDE=4.149420e-004,	LTE=1.175834e-001
(4),	#segment= 3,	RDE=6.714235e-004,	LTE=1.298394e-001
(5),	#segment= 4,	RDE=4.939477e-004,	LTE=1.221615e-001
(6),	#segment= 5,	RDE=9.996303e-004,	LTE=1.540710e-001
(7),	#segment= 7,	RDE=9.998764e-004,	LTE=2.414455e-001
(8),	#segment= 9,	RDE=6.334234e-004,	LTE=2.261241e-001
(9),	#segment= 9,	RDE=7.495758e-004,	LTE=2.952057e-001
(10),	#segment=10,	RDE=7.977313e-004,	LTE=1.848615e-001
(11),	#segment=11,	RDE=8.579812e-004,	LTE=2.009372e-001
(12),	#segment=11,	RDE=8.523339e-004,	LTE=2.540468e-001
(13),	#segment=12,	RDE=3.761976e-004,	LTE=2.576946e-001
(14),	#segment=12,	RDE=5.531123e-004,	LTE=2.973294e-001
(15),	#segment=11,	RDE=7.697998e-004,	LTE=2.005081e-001
(16),	#segment=11,	RDE=7.595547e-004,	LTE=2.422437e-001
(17),	#segment=11,	RDE=5.376698e-004,	LTE=2.448967e-001
(18),	#segment=11,	RDE=6.562178e-004,	LTE=2.363034e-001
(19),	#segment=11,	RDE=5.971712e-004,	LTE=2.891211e-001
(20),	#segment=10,	RDE=7.530442e-004,	LTE=2.000188e-001

ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TA-06



รูปที่ 5.9 รูปผลลัพธ์ของการจำลองการทำงานทางเวลาของวงจรในรูปที่ 5.1 ตามกรณี TA-06 ในตารางที่ 5.1

รายละเอียดข้อมูลผลที่ได้จากการจำลองการทำงาน มีดังนี้

- ขนาดขั้นเวลาที่ใช้ = 10 นาโนวินาที
- จำนวนจุดเวลา = 60
- เวลาที่ให้หยุดจำลอง = 600 นาโนวินาที
- ค่าผิดพลาดในการลดอันดับสูงสุดที่ยอมรับได้ = 10^{-3}

NumPts	#NumSeg	$error_{RDE}$	$error_{LTE}$
(1),	#segment= 1,	RDE=0.000000e+000,	LTE=1.727458e-002
(2),	#segment= 3,	RDE=3.963522e-004,	LTE=1.585416e-001
(3),	#segment= 3,	RDE=4.149420e-004,	LTE=1.175834e-001
(4),	#segment= 3,	RDE=6.714235e-004,	LTE=1.298394e-001
(5),	#segment= 4,	RDE=4.939477e-004,	LTE=1.221615e-001
(6),	#segment= 5,	RDE=9.996303e-004,	LTE=1.540710e-001
(7),	#segment= 7,	RDE=9.998764e-004,	LTE=2.414455e-001
(8),	#segment= 9,	RDE=6.334234e-004,	LTE=2.261241e-001
(9),	#segment= 9,	RDE=7.495758e-004,	LTE=2.952057e-001
(10),	#segment=10,	RDE=7.977313e-004,	LTE=1.848615e-001
(11),	#segment=11,	RDE=8.579812e-004,	LTE=2.009372e-001
(12),	#segment=11,	RDE=8.523339e-004,	LTE=2.540468e-001
(13),	#segment=12,	RDE=3.761976e-004,	LTE=2.576946e-001
(14),	#segment=12,	RDE=5.531123e-004,	LTE=2.973294e-001
(15),	#segment=11,	RDE=7.697998e-004,	LTE=2.005081e-001
(16),	#segment=11,	RDE=7.595547e-004,	LTE=2.422437e-001
(17),	#segment=11,	RDE=5.376698e-004,	LTE=2.448967e-001
(18),	#segment=11,	RDE=6.562178e-004,	LTE=2.363034e-001
(19),	#segment=11,	RDE=5.971712e-004,	LTE=2.891211e-001
(20),	#segment=10,	RDE=7.530442e-004,	LTE=2.000188e-001

5.4.2 การทดสอบประสิทธิภาพของการแบ่งท่อนย่อย และยุบรวม (Test-B)

การทดสอบในหัวข้อนี้ มุ่งที่จะหาประสิทธิภาพในการแบ่งท่อนย่อยและยุบรวมของแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา โดยได้ทดสอบใน 2 กรณี คือ

1. TB-01 เป็นกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดในสัญญาณขาเข้า แล้วดูการแบ่งจำนวนท่อนย่อยโดยควบคุมไม่ให้ค่าผิดพลาดในการลดอันดับสูงเกินกว่าค่าที่ตั้งไว้ และหลังจากนั้นจะปล่อยให้การกระจายของสัญญาณในสายคงที่ โดยที่ขั้นตอนวิธีจะต้องยุบจำนวนท่อนย่อยกลับมาเหลือเพียงท่อนเดียว และใช้พารามิเตอร์ในการทดสอบเป็นแบบเดียวกับการทดสอบ TA-01
2. TB-02 เป็นกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณในสายอยู่ตลอดเวลา ซึ่งจะเป็นกรณีที่การยุบท่อนของแบบจำลองทางโดเมนเวลาจะใช้ไม่ได้ผลดี โดยจะใช้พารามิเตอร์ในการทดสอบเป็นแบบเดียวกับการทดสอบ TA-03 ซึ่งจะมีการกระจายของสัญญาณในสายอยู่ต่อเนื่องและมีเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TB-01

NumPts		#NumSeg
20	<input type="text"/>	1
21	<input type="text"/>	7
22	<input type="text"/>	7
23	<input type="text"/>	8
24	<input type="text"/>	8
25	<input type="text"/>	9
26	<input type="text"/>	8
27	<input type="text"/>	8
28	<input type="text"/>	7
29	<input type="text"/>	6
30	<input type="text"/>	5
31	<input type="text"/>	5
32	<input type="text"/>	4
33	<input type="text"/>	4
34	<input type="text"/>	4
35	<input type="text"/>	3
36	<input type="text"/>	2
37	<input type="text"/>	1
38	<input type="text"/>	1
39	<input type="text"/>	1
40	<input type="text"/>	1

รูปที่ 5.10 แผนภาพแสดงการแบ่งท่อนย่อยของการจำลองการทำงานทางเวลาในช่วงจุดเวลาที่ 20-40 ของการทดสอบกรณี TB-01

ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TB-02

NumPts		#NumSeg
1		1
2		5
3		7
4		9
5		12
6		17
7		20
8		21
9		21
10		24
11		28
12		31
13		32
14		33
15		33
16		34
17		33
18		32
19		32
20		32

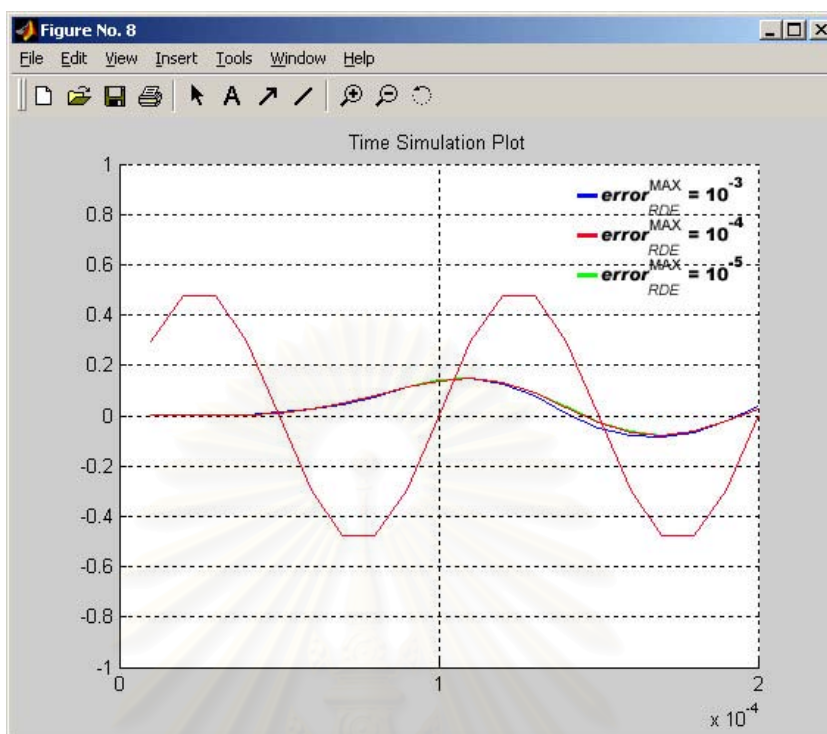
รูปที่ 5.11 แผนภาพแสดงการแบ่งท่อนย่อยของการจำลองการทำงานทางเวลาในช่วงจุดเวลาที่ 1-20 ของการทดสอบกรณี TB-02

5.4.3 การทดสอบการควบคุมความแม่นยำในการลดอันดับ (Test-C)

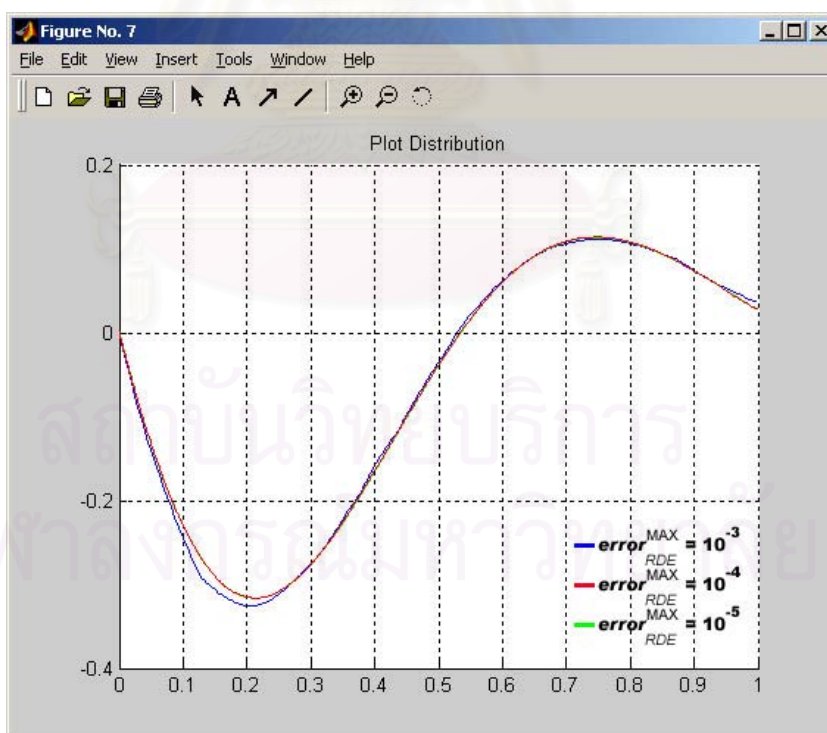
การทดสอบในหัวข้อนี้ มุ่งที่จะตรวจดูการควบคุมความแม่นยำของการลดอันดับแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา โดยจะทดสอบโดยปรับค่าผิดพลาดสูงสุดที่ยอมรับได้ ($error_{RDE}^{MAX}$) ในการลดอันดับที่แตกต่างกัน 3 ค่า แล้วดูผลเปรียบเทียบ ทั้งผลการจำลองการทำงานทางเวลา และการกระจายของสัญญาณในสาย (โดยจะพิจารณาที่จุดเวลาสุดท้ายเท่านั้น) ทั้ง 3 กรณี สำหรับการกระจายของสัญญาณในสายนั้น จะเปรียบเทียบแสดงผลทั้งก่อนลดอันดับ และหลังการลดอันดับแล้ว

1. TC-01 จะทดสอบโดยใช้วงจรของการทดสอบกรณี TA-03 ซึ่งจะจำลองทางเวลาไป 20 จุดเวลา จะทำให้การกระจายของสัญญาณในสายมีการเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงระยะทางของสายส่ง และในการจำลองการทำงานจะตั้งค่าผิดพลาดสูงสุดที่ยอมรับได้ในการลดอันดับไว้ 3 ค่าคือ 10^{-3} , 10^{-4} และ 10^{-5} แล้วพิจารณาเปรียบเทียบผลโดยให้กราฟเป็นสีน้ำเงิน แดง และเขียว ตามลำดับ

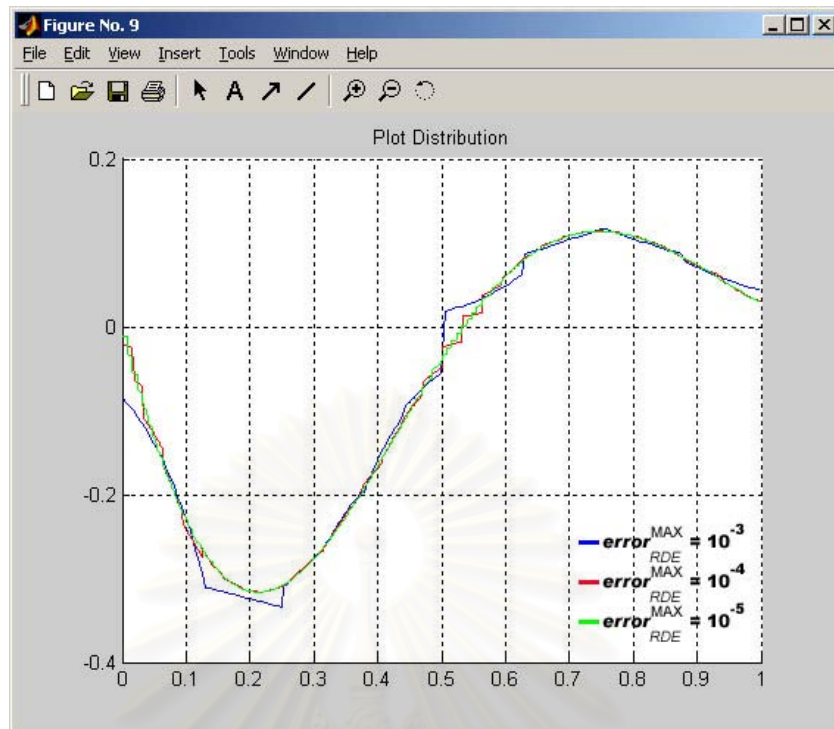
ผลการจำลองการทำงานในรูปที่ 5.1 กรณี TC-01



รูปที่ 5.12 แสดงการเปรียบเทียบผลการจำลองการทำงานทางเวลาของการทดสอบกรณี TC-01



รูปที่ 5.13 แสดงการเปรียบเทียบผลการกระจายของสัญญาณในสายก่อนการลดอันดับ ของการทดสอบกรณี TC-01 ที่จุดเวลาที่ 20



รูปที่ 5.14 แสดงการเปรียบเทียบผลการกระจายของสัญญาณในสายหลังการลดอันดับ ของการทดสอบกรณี TC-01 ที่จุดเวลาที่ 20

ตารางที่ 5.2 ผลการแบ่งท่อนย่อยเมื่อกำหนดค่าผิดพลาดสูงสุดที่ยอมรับได้ต่างกัน

NumPts	#NumSeg		
	$error_{RDE}^{MAX} = 10^{-3}$	$error_{RDE}^{MAX} = 10^{-4}$	$error_{RDE}^{MAX} = 10^{-5}$
1	1	1	1
2	3	5	13
3	3	7	17
4	3	9	17
5	4	12	29
6	5	17	46
7	7	20	56
8	9	21	68
9	9	21	74
10	10	24	81
11	11	28	90
12	11	31	97
13	12	32	98
14	12	33	102
15	11	33	101
16	11	34	101
17	11	33	100
18	11	32	99
19	11	32	98
20	10	32	99

5.5 วิจัยณ์ผลการทดสอบ

5.5.1 การทดสอบความแม่นยำของแบบจำลอง (Test-A)

จากผลการทดสอบความแม่นยำของแบบจำลอง (Test-A) พบว่าแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลาให้ผลใกล้เคียงมากกับผลที่ได้จากแบบจำลองสายส่งแบบ 2 ชั้นที่ใช้ท่อนย่อย 128 ท่อน ผลที่ได้นั้นเป็นสิ่งที่ยืนยันได้ว่าแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลาที่มีความแม่นยำเทียบเท่ากับแบบจำลองสายส่งแบบ 2 ชั้น แต่ใช้จำนวนท่อนย่อยน้อยกว่า อีกทั้งยังไม่มีปัญหาการออสซิลเลต เมื่อมีการเปลี่ยนค่าสัญญาณขาเข้าแบบทันทีทันใดซึ่งเป็นข้อดีของแบบจำลองแบบแบ่งส่วน ดังที่แสดงในผลการจำลองการทำงานรูปที่ 5.4 และรูปที่ 5.5

แบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลานั้นสามารถให้คำตอบผลเฉลยวงจรได้อย่างแม่นยำ แต่จะมีพจน์การคำนวณซับซ้อนขึ้นเรื่อยๆ ตามจุดเวลา การที่ได้นำเทคนิคการลดอันดับของสายส่งใช้ จะทำให้ความซับซ้อนของการคำนวณนั้นไม่เพิ่มตามจุดเวลาในการจำลองการทำงาน ถึงแม้จะมีค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการลดอันดับ แต่ผลจากการทดสอบ TA-01 ถึง TA-06 ได้แสดงให้เห็นว่าค่าผิดพลาดจากการลดอันดับ ($error_{RDE}$) มีขนาดต่ำมากเมื่อเทียบกับค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย ($error_{LTE}$) ทำให้ผลเฉลยวงจรมีความแม่นยำถึงแม้ได้ประยุกต์ใช้เทคนิคการลดอันดับเข้าไปด้วยแล้ว

การที่แบบจำลองทั้งสองแบบมีค่าผลเฉลยวงจรแตกต่างไปจากค่าคำตอบจริงอยู่บ้างนั้น เป็นผลเนื่องมาจากการประมาณอนุพันธ์ย่อยทางเวลาด้วยวิธีออยเลอร์แบบกลับหลัง ซึ่งสามารถปรับให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำสูงขึ้นโดยการลดค่าขั้นเวลา (h) ที่ใช้ลง

5.5.2 การทดสอบประสิทธิภาพของการแบ่งท่อนย่อย และยุบรวม (Test-B)

การทดสอบ TB-01 และ TB-02 ได้แสดงถึงการนำเทคนิคการแบ่งย่อยและยุบรวม มาใช้ร่วมกับการลดอันดับของแบบจำลองสายส่ง เพื่อให้สามารถลดอันดับที่ใช้ลงได้มากกว่าการลดอันดับโดยไม่มีการแบ่งท่อนย่อย ผลที่ได้นั้นเป็นที่น่าพอใจในระดับหนึ่ง กล่าวคือสามารถแบ่งย่อยร่วมกับการลดอันดับโดยสามารถควบคุมความแม่นยำได้ และยังสามารถยุบรวมกลับได้หากสัญญาณในสายมีการเปลี่ยนแปลงน้อยดังผลในการทดสอบ TA-01 และ TA-02 และผลของการยุบรวมก็ยิ่งดีกว่าเทคนิคการแบ่งย่อยหลายระดับ ซึ่งสัญญาณในท่อนย่อยนั้นต้องมีค่าคงที่ จึงจะสามารถยกเว้นการคำนวณในส่วนนั้นได้ ต่างกับการลดอันดับในแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา ที่ถึงแม้สัญญาณในสายจะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ก็ยังสามารถลดการคำนวณในท่อนย่อยบางท่อนได้ ดังผลการทดสอบ TA-03 และ TA-04

แต่ขั้นตอนวิธีที่สร้างขึ้นเพื่อทดสอบแนวความคิดในงานวิจัยนี้ยังไม่ดีที่สุด กล่าวคือยังสามารถปรับปรุงให้ได้ผลดีขึ้นได้อีก ดังจะแสดงให้เห็นได้จากผลการทดสอบ TB-02 ที่การควบคุมความแม่นยำจะพยายามยุบรวมท่อนย่อยจากทางซ้ายมือก่อนเป็นหลัก ซึ่งในบางกรณีแล้ว สัญญาณในสายอาจมีการเปลี่ยนแปลงมากในด้านซ้าย และมีการเปลี่ยนแปลงน้อยในด้านขวา ทำให้ในกรณีอย่างนี้ ยังสามารถปรับปรุงผลให้ดีขึ้นได้อีก หากมีการปรับเทคนิคที่ใช้ในการเลือกท่อนย่อยที่จะยุบรวมใหม่

5.5.3 การทดสอบการควบคุมความแม่นยำในการลดอันดับ (Test-C)

สำหรับผลการทดสอบของ TC-01 นั้นได้แสดงให้เห็นว่าเราสามารถควบคุมความแม่นยำในการลดอันดับได้ แต่เวลาที่ใช้ในการจำลองการทำงานก็จะเพิ่มขึ้นตามความแม่นยำที่ได้ เนื่องจากการที่จะทำได้ความแม่นยำสูงในการลดอันดับนั้น ต้องแลกมาด้วยการแบ่งท่อนย่อยที่ละเอียดขึ้น

จากข้อมูลในตารางที่ 5.2 และรูปที่ 5.12 จะพบว่าถึงแม้ค่าผิดพลาดสูงสุดที่ยอมรับได้ ($error_{RDE}^{MAX}$) ลดลงไปเหลือเพียง 10^{-3} ผลที่ได้ของการจำลองการทำงานทางเวลานั้นก็ยังได้ผลใกล้เคียงกับกรณีอีกสองกรณีที่เหลือ คือใช้ $error_{RDE}^{MAX}$ เป็น 10^{-4} และ 10^{-5} และจำนวนท่อนที่ใช้ก็ลดลงไปเหลือเพียงประมาณ 10 ท่อน แต่หากพิจารณาจากการกระจายของสัญญาณในสายก็จะเห็นค่าผิดพลาดของการลดอันดับน้อยลง หากลดค่า $error_{RDE}^{MAX}$ ให้น้อยลง ซึ่งอาจสรุปได้ว่าเทคนิคการลดอันดับที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถควบคุมความแม่นยำได้

5.6 สรุปผล

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอแนวคิดใหม่ สำหรับแบบจำลองสายส่งที่ใช้ในการจำลองการทำงานทางเวลา 2 แบบจำลองด้วยกัน ได้แก่

แบบจำลองที่หนึ่งคือ แบบจำลองสายส่งแบบ 2 ชั้น โดยอาศัยแนวความคิดที่จะแยกสายส่งซึ่งแทนด้วยแบบจำลองแบบแบ่งส่วน N ท่อนออกมาคำนวณต่างหาก เพื่อจัดเตรียมแบบจำลองสมมูล ที่จะนำไปใช้จริงในการจำลองการทำงานจริงทางเวลา แนวความคิดนี้เป็นการประมาณสายส่งด้วยแบบจำลอง N ท่อนที่จะมีความแม่นยำแปรผันตามจำนวนท่อนย่อย ดังนั้นในการจำลองการทำงานจริงสายส่งจึงปรากฏบ่อยครั้งที่ต้องใช้จำนวนท่อนย่อยสูงถึง 100-200 ท่อนย่อย ทำให้การจำลองการทำงานจริงที่ไม่แยกการคำนวณเป็น 2 ชั้นนั้น ต้องแก้สมการที่มีจำนวนตัวแปรวง-จรเป็นจำนวนมหาศาล การแยกแบบจำลองสายส่งออกมามีคำนวณต่างหากนั้น จะได้แบบจำลองสมมูลที่ประกอบด้วย 2 ปมเท่านั้น จากผลการทดสอบได้แสดงให้เห็นว่า แบบจำลองสายส่งแบบสองชั้นที่ใช้ท่อนย่อย 128 ท่อนมีความแม่นยำใกล้เคียงกับค่าคำตอบจริง งานวิจัยนี้ยังได้เสนอแนวความคิดในการขยายผลของแบบจำลองสายส่งสองชั้น ไปสู่แบบจำลองสายส่งหลายชั้น ที่นำแนวความคิดเรื่องภาวะแฝง (Latency) มาประยุกต์รวมด้วยเพื่อยกเว้นการคำนวณในท่อนย่อยบางท่อนที่ไม่มีเปลี่ยนแปลงของสัญญาณ

แบบจำลองที่สอง คือแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา เป็นแบบจำลองที่ลดรูปมาจากสมการ Telegrapher โดยเริ่มจากการประมาณฟังก์ชันอนุพันธ์ย่อยทางเวลาด้วยวิธีการเชิงตัวเลข ทำให้รูปแบบของการลดเหลือเพียงอนุพันธ์เทียบกับระยะทางบนสาย ทำให้สามารถแก้ปัญหาหาค่าผลเฉลยของวงจรได้ด้วยวิธีแบบทั่วไป แบบจำลองแบบนี้เป็นแนวความคิดใหม่ที่สามารถหาแบบจำลองที่แม่นยำของสายส่งได้ แต่ถ้าจำลองไปเป็นเวลานานๆ จะทำให้จำนวนพจน์ของแบบจำลองซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งต้องเสียเวลาในการคำนวณมากขึ้นเรื่อยๆ งานวิจัยนี้จึงได้เสนอแนวความคิดในการลดอันดับที่สามารถควบคุมความแม่นยำได้มาใช้ร่วม เพื่อให้แบบจำลองที่นำเสนอเหมาะแก่การนำไปใช้งานจริง และจากผลการทดสอบพบว่าผลเฉลยของวงจรในการนำแบบ

จำลองสายส่งทางโดเมนเวลาไปใช้นั้น มีค่าใกล้เคียงกับค่าคำตอบจริง เหมาะแก่การนำไปใช้งานที่ต้องการความแม่นยำสูงๆ

5.7 ข้อเสนอแนะ

หลังจากที่นำแนวความคิดของแบบจำลองสายส่งทั้งสองไปทดสอบทำให้เป็นจริงแล้ว พบว่าแบบจำลองทั้งสองให้ผลที่มีความแม่นยำใกล้เคียงกับค่าคำตอบจริง ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากในงานวิศวกรรมไฟฟ้าอย่างไรก็ดี เนื่องด้วยข้อจำกัดทางด้านเวลาที่ใช้ในการทำงานวิจัย งานวิจัยเรื่องนี้ยังสามารถพัฒนาได้อีกหลายส่วนเพื่อให้ประสิทธิภาพสูงขึ้นได้อีก ดังต่อไปนี้

1. เปลี่ยนการประมาณเชิงอนุพันธ์ไปใช้สูตรสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งจะให้ผลที่แม่นยำขึ้น ในขณะที่ใช้ชั้นเวลาในการจำลองการทำงานที่เท่ากัน
2. ทดสอบการเปลี่ยนให้ท่อนย่อยหนึ่งท่อนของแบบจำลองสายส่งทางโดเมนเวลา มีอันดับที่สูงขึ้นเพื่อที่จะลดจำนวนท่อนย่อยที่ต้องแบ่ง
3. หาวิธีในการเลือก \tilde{M} ใหม่ที่ทำให้การลดอันดับมีค่าผิดพลาดน้อยลง
4. เสนอแนวความคิดในการเลือกท่อนที่จะแบ่งย่อยหรือยุบรวมใหม่ หากสามารถลดจำนวนท่อนย่อยที่ต้องแบ่งลงได้ ก็จะเป็นการช่วยลดเวลาในการจำลองการทำงานลงได้อีก
5. ปรับปรุงขั้นตอนวิธีให้สามารถเลือกขนาดชั้นเวลาใหม่แบบอัตโนมัติ จากค่าผิดพลาดเพราะตัดปลายสูงสุดที่ยอมรับได้ ($error_{LTE}^{MAX}$)

รายการอ้างอิง

1. Hikaru Mizutani and Mamoru Tanaka, "Equivalent Analysis of Large Transistor Networks with Distributed Interconnection Circuits," in Proc. ISCAS-90, pp.523-526.
2. Tom Dhaene and Daniël De Zutter "Selection of Lumped Element Models for Coupled Lossy Transmission Lines," IEEE Trans. on Computer-Aided Design, Vol.11 No.7, pp.805-815, July 1992.
3. H.W. Dommel. "Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks," IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol.PAS-88, pp.388, April 1969.
4. Methee Hwangkhunnatham and Ekachai Leelarasmee "A Two Level Transient Analysis of a Circuit Containing Transmission Lines Modeled by Segments of Lumped Elements," in Proc. APCCAS-98, pp.347-350, Nov 1998.
5. A.R. Djordjević, T.K. Sarkar, and R.F. Harrington, "Analysis of Lossy Transmission Lines with Arbitrary Nonlinear Terminal Networks," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, pp.660-666, June 1986.
6. J.R.Griffith and M.S. Nakhla, "Time-domain Analysis of Lossy Coupled Transmission Lines," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol.38, pp.1480-1487, Oct 1990.
7. Shen Lin and Ernest S. Kuh "Transient Simulation of Lossy Interconnects Based on the Recursive Convolution Formulation," IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol.39, No.11, pp.879-892, Nov 1992.
8. Qingjian Yu, Janet Meiling L. Wang, and Ernest S. Kuh, "Passive Multipoint Moment Matching Model Order Reduction Algorithm on Multiport Distributed Interconnect Networks," IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.46, No.1, pp.140-160, Jan 1999.
9. Methee Hwangkhunnatham and Ekachai Leelarasmee "Multilevel Transmission Line Macromodelling and Latency for the Time domain Simulation," International Symposium on Microelectronics and Assembly (ISMA2000), Nov 27 – Dec 1, 2000, Singapore.
10. L.O. Chua and P.M Lin, "Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques", Prentice Hall, USA, 1975
11. Robert W. Hornbeck, "Numerical Methods," Quantum Publishers, Inc. 1975.
12. Jiri Vlach and Kishore Singhal, "Computer Methods for Circuit Analysis and Design," Van Nostrand Reinhold Company, USA, 1983.

13. มงคล เดชนครินทร์ “คณิตศาสตร์ วิศวกรรมไฟฟ้า” สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, 2536
14. Shen Lin, “Circuit Simulation for VLSI and Electronic Packaging design,” Memorandum No. UCB/ERL M95/80, U.C. Berkeley 13 October 1995.
15. Chung-Kuan Cheng, John Lillis, Shen Lin, and Norman Chang “Interconnect Analysis and Synthesis,” John Wiley & Sons, Inc. 2000.
16. R.D. Berry, “An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution,” IEEE Trans. on Circuit Theory, pp.40-50, January 1971.
17. Ekachai Leelarasmee, “STDB Designated RD&E Project Final Report”, July 1991
18. K. Glover, “All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds” Int. J. Control, Vol.39, No.6, pp.1115-1193, 1984.
19. “<http://www.digital.ee.eng.chula.ac.th/lek>”



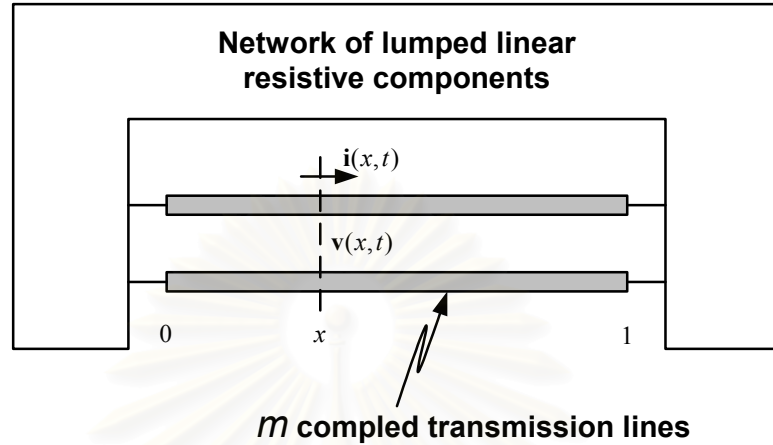
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

บทพิสูจน์ $\|\mathbf{w}(\cdot, t_n) - \tilde{\mathbf{w}}(\cdot, t_n)\|_\infty \leq ah^2 \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{w}(\cdot, t_n) \right\|_\infty$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สำหรับการพิจารณาปัญหาในการผลเฉลยวงจรทางเวลา โดยที่วงจรมันประกอบด้วยสายส่งแบบเชื่อมรวม m ท่อนต่ออยู่กับอุปกรณ์อื่นๆ ดังที่แสดงในรูปที่ 15 เพื่อความง่ายในการนำเสนอจึงขอกำหนดให้อุปกรณ์อื่นๆ ที่ต่ออยู่กับสายส่งนั้นเป็นเชิงเส้นและไม่มีตัวเก็บประจุ หรือตัวเหนี่ยวนำ



รูปที่ 15 วงจรที่ประกอบด้วยสายส่ง

กำหนดให้ $\mathbf{w}(x,t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x,t) \\ \mathbf{i}(x,t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m}$ โดยที่ $\mathbf{v}(x,t), \mathbf{i}(x,t) \in \mathbb{R}^m$ เป็นแรงดันแบบกระจาย

(Voltage distribution) และกระแสแบบกระจาย (Current distribution) ของสายส่ง ดังนั้นสามารถเขียนสมการของวงจรที่เวลา t_n โดยใช้สมการเทเลกราฟ (Telegrapher Equation) แทนคุณสมบัติของสายส่ง ซึ่งผลที่ได้จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) ที่มีขนาด $2m$ และสมการของอุปกรณ์ที่ต่ออยู่กับสายส่งดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{w}(x,t_n) = -\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}(x,t_n) - \mathbf{B} \mathbf{w}(x,t_n) \quad (1ก)$$

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{w}(0,t_n) + \mathbf{K}_1 \mathbf{w}(1,t_n) = \mathbf{J} \quad (1ข)$$

โดยที่ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ เป็นเมทริกซ์ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุต่อความยาวสาย

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ เป็นเมทริกซ์ของตัวต้านทานและตัวนำต่อความยาวสาย $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$

และ $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2m}$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ และเวกเตอร์ของอุปกรณ์ที่ต่ออยู่กับสายส่งตามลำดับ

ใช้การประมาณแบบ Backward Euler ประมาณเทอมอนุพันธ์ย่อยทางเวลาของสมการที่ (1) ได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathbf{w}}(x,t_n) = -\frac{\mathbf{A}}{h} [\tilde{\mathbf{w}}(x,t_n) - \tilde{\mathbf{w}}(x,t_{n-1})] - \mathbf{B} \tilde{\mathbf{w}}(x,t_n) \quad (1ก)$$

$$\mathbf{K}_0 \tilde{\mathbf{w}}(0,t_n) + \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{w}}(1,t_n) = \mathbf{J} \quad (1ข)$$

โดยที่ $h = t_n - t_{n-1}$ และ $\tilde{\mathbf{w}}(x,0) = \mathbf{w}(x,0)$ นั่นคือสมการที่ (1) และ (2) นั้นมีค่าเริ่มต้นของการกระจายสัญญาณในสายเท่ากัน

เพื่อแสดงว่า $\tilde{\mathbf{w}}(x, t_n) \rightarrow \mathbf{w}(x, t_n)$ เมื่อ $h \rightarrow 0$ นั้นเราจะต้องพิสูจน์ว่าค่าผิดพลาดเพราะตัดปลาย

(Local Truncation Error) $\|\mathbf{w}(\cdot, t_n) - \tilde{\mathbf{w}}(\cdot, t_n)\|_\infty \leq \alpha h^2 \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{w}(\cdot, t_n) \right\|_\infty$ โดยที่ α เป็นค่าคงที่บวกและ

$$\tilde{\mathbf{w}}(x, t_{n-1}) = \mathbf{w}(x, t_{n-1}) \quad (3)$$

ลบสมการที่ (1) ด้วยสมการที่ (2) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}(x) = -\left(\frac{\mathbf{A}}{h} + \mathbf{B}\right) \mathbf{e}(x) - \frac{\mathbf{A}}{h} \mathbf{g}(x) \quad (4ก)$$

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{e}(0) + \mathbf{K}_1 \mathbf{e}(1) = 0 \quad (4ข)$$

โดยที่

$$\mathbf{e}(x) = \mathbf{w}(x, t_n) - \tilde{\mathbf{w}}(x, t_n) \quad (4ค)$$

$$\mathbf{g}(x) = \mathbf{w}(x, t_{n-1}) - \mathbf{w}(x, t_n) + h \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{w}(x, t_n) \quad (4ง)$$

ถ้า $\mathbf{w}(x, t_n)$ เป็นอนุพันธ์ย่อยทางเวลาที่ต่อเนื่องแล้ว $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{g}(x)\|_\infty = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{w}(x, t_n) \right\|_\infty = 0$

และเนื่องจาก \mathbf{L} และ \mathbf{C} เป็น Positive Definite ดังนั้นจะมีเมทริกซ์การแปลง (Transformation Matrix) $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{2m \times 2m}$ โดยที่ $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m, -\lambda_1, \dots, -\lambda_m]$ และ $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$ จากนั้นสามารถแปลงสมการที่ (4) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathbf{e}}(x) = -\left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{h} + \tilde{\mathbf{B}}\right) \tilde{\mathbf{e}}(x) - \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{h} \tilde{\mathbf{g}}(x) \quad (5ก)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_0 \tilde{\mathbf{e}}(0) + \tilde{\mathbf{K}}_1 \tilde{\mathbf{e}}(1) = 0 \quad (5ข)$$

โดยที่

$$\tilde{\mathbf{e}}(x) = \mathbf{T}\mathbf{e}(x), \quad \tilde{\mathbf{g}}(x) = \mathbf{T}\mathbf{g}(x), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{TBT}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_0 = \mathbf{TK}_0\mathbf{T}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{TK}_1\mathbf{T}^{-1} \quad (5ค)$$

ขอกำหนดตัวแปรใหม่ดังนี้

$$\hat{\mathbf{e}}(x) = [\tilde{\mathbf{e}}_1(x), \dots, \tilde{\mathbf{e}}_m(x), \tilde{\mathbf{e}}_{m+1}(1-x), \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{2m}(1-x)] \quad (6ก)$$

$$\hat{\mathbf{g}}(x) = [\tilde{\mathbf{g}}_1(x), \dots, \tilde{\mathbf{g}}_m(x), \tilde{\mathbf{g}}_{m+1}(1-x), \dots, \tilde{\mathbf{g}}_{2m}(1-x)] \quad (6ข)$$

และถ้า $\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2m}$ และ $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2m \times 2m}$ จะได้ว่า

$$\hat{\mathbf{e}}(x) = \mathbf{E}_1 \tilde{\mathbf{e}}(x) + \mathbf{E}_2 \tilde{\mathbf{e}}(1-x) \quad (6ค)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}(x) = \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{e}}(x) + \mathbf{E}_2 \hat{\mathbf{e}}(1-x) \quad (6ก)$$

เนื่องจากว่า $\|\hat{\mathbf{e}}(\cdot)\|_\infty = \|\tilde{\mathbf{e}}(\cdot)\|_\infty$ และ $\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mathbf{e}}(1-x) = \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{h} + \tilde{\mathbf{B}} \right) \tilde{\mathbf{e}}(1-x) + \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{h} \tilde{\mathbf{g}}(1-x)$ ดังนั้นสม

การที่ (5) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}(x) = -\frac{\hat{\mathbf{A}}}{h} \hat{\mathbf{e}}(x) - \hat{\mathbf{r}}(x) \quad (7ก)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_0 \hat{\mathbf{e}}(0) + \hat{\mathbf{K}}_1 \hat{\mathbf{e}}(1) = 0 \quad (7ข)$$

โดยที่

$$\hat{\mathbf{A}} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m] \quad (7ค)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(x) = \mathbf{E}_1 \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{e}}(x) - \mathbf{E}_2 \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{e}}(1-x) + \frac{\hat{\mathbf{A}}}{h} \hat{\mathbf{g}}(x) \quad (7ง)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_0 = \tilde{\mathbf{K}}_0 \mathbf{E}_1 + \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{E}_0 \quad (7จ)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \tilde{\mathbf{K}}_0 \mathbf{E}_2 + \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{E}_1 \quad (7ฉ)$$

เนื่องจาก $\hat{\mathbf{A}}$ เป็นเมทริกซ์แนวทแยงที่ค่าในแนวทแยงทุกค่าเป็นค่าเจาะจงที่เป็นบวก ดังนั้นผลเฉลยของสมการที่ (7) คือ

$$\hat{\mathbf{e}}(x) = e^{-\hat{\mathbf{A}}x/h} \hat{\mathbf{e}}(0) - \int_0^x e^{-\hat{\mathbf{A}}\tau/h} \hat{\mathbf{r}}(x-\tau) d\tau \quad (8ก)$$

$$\hat{\mathbf{e}}(0) = -(\hat{\mathbf{K}}_0^{-1} \hat{\mathbf{K}}_1) \hat{\mathbf{e}}(1) \quad (8ข)$$

คำนวณหา Norm ของสมการที่ (8ก) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{e}}(1)\|_\infty &\leq e^{-\lambda_1/h} \|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_\infty + \int_0^1 e^{-\lambda_1\tau/h} d\tau \|\hat{\mathbf{r}}(\cdot)\|_\infty \\ &\leq e^{-\lambda_1/h} \|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_\infty + \frac{h}{\lambda_1} \|\hat{\mathbf{r}}(\cdot)\|_\infty \end{aligned} \quad (9ก)$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \|\hat{\mathbf{e}}(\cdot)\|_\infty &\leq \|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_\infty + \int_0^1 e^{-\lambda_1\tau/h} d\tau \|\hat{\mathbf{r}}(\cdot)\|_\infty \\ &\leq \|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_\infty + \frac{h}{\lambda_1} \|\hat{\mathbf{r}}(\cdot)\|_\infty \end{aligned} \quad (9ข)$$

และจากสมการ (8ข)

$$\|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_\infty \leq \mu \|\hat{\mathbf{e}}(1)\|_\infty \quad (9ค)$$

โดยที่ $\mu = \|\hat{\mathbf{K}}_0^{-1} \hat{\mathbf{K}}_1\|_\infty$

สมการที่ (9) นั้นสามารถหาคำตอบเพื่อแสดงได้ว่า

$$\|\hat{\mathbf{e}}(1)\|_\infty \leq \frac{h/\lambda_1}{1 - \mu e^{-\lambda_1/h}} \|\hat{\mathbf{r}}(\cdot)\|_\infty \quad (10ก)$$

$$\|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_\infty \leq \mu \frac{h/\lambda_1}{1 - \mu e^{-\lambda_1/h}} \|\hat{\mathbf{r}}(\cdot)\|_\infty \quad (10ข)$$

$$\|\hat{\mathbf{e}}(\cdot)\|_\infty \leq \frac{h}{\lambda_1} \left[\frac{\mu}{1 - \mu e^{-\lambda_1/h}} + 1 \right] \|\hat{\mathbf{r}}(\cdot)\|_\infty \quad (10ค)$$

จากสมการ (7ง) นั้น ใช้หลักความจริงที่ว่า $\max_{x \in [0,1]} \|\tilde{\mathbf{e}}(x)\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \|\tilde{\mathbf{e}}(1-x)\|_\infty = \|\tilde{\mathbf{e}}(\cdot)\|_\infty$ เราจะได้

$$\|\hat{\mathbf{r}}(\cdot)\|_\infty \leq \beta \|\tilde{\mathbf{e}}(\cdot)\|_\infty + \frac{\lambda_m}{h} \|\hat{\mathbf{g}}(\cdot)\|_\infty \quad (11)$$

นำไปแทนลงในสมการที่ (10) จะได้

$$\|\hat{\mathbf{e}}(\cdot)\|_\infty \leq \alpha_1 \|\hat{\mathbf{g}}(\cdot)\|_\infty \quad (12ก)$$

$$\|\hat{\mathbf{e}}(1)\|_\infty \leq \alpha_2 \|\hat{\mathbf{g}}(\cdot)\|_\infty \quad (12ข)$$

$$\|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_\infty \leq \alpha_3 \|\hat{\mathbf{g}}(\cdot)\|_\infty \quad (12ค)$$

โดยที่
$$\alpha_1 = \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \left[\frac{\mu}{1 - \mu e^{-\lambda_1/h}} + 1 \right] \left/ \left[1 - \frac{\beta h}{\lambda_1} \left(\frac{\mu}{1 - \mu e^{-\lambda_1/h}} + 1 \right) \right] \right.$$

$$\alpha_2 = \frac{h/\lambda_1}{1 - \mu e^{-\lambda_1/h}} \left[\beta \alpha_1 + \frac{\lambda_m}{h} \right]$$

$$\alpha_3 = \mu \alpha_2$$

ดังนั้น
$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_1 = \frac{\lambda_m}{\lambda_1} (\mu + 1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_2 = \frac{\lambda_m}{\lambda_1}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_3 = \mu \frac{\lambda_m}{\lambda_1}$$

กระจายแบบเทเลอร์สมการ (4ง) จะได้
$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\hat{\mathbf{g}}(\cdot)\|_\infty = \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{\mathbf{g}}(\cdot)\|_\infty \leq \|\mathbf{T}\|_\infty \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{w}(\cdot, t_n) \right\|_\infty$$

เป็นการจบบทพิสูจน์

ภาคผนวก ข
บทความทางวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์ในระดับนานาชาติ

1. บทความที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการในระดับนานาชาติ *Methee Hwangkhunnatham and Ekachai Leelarasmee "A Two Level Transmission Line Models for Transient Analysis", Journal of Circuits, Systems, and Computers, Vol. 9, No. 1 & 2, pp. 113-124, 1999.*
2. บทความที่ถูกรับเสนอในการประชุมในระดับนานาชาติ *Methee Hwangkhunnatham and Ekachai Leelarasmee "A Two Level Transient Analysis of a Circuit Containing Transmission Lines Modeled by Segments of Lumped Elements", IEEE Asia-Pacific Conference on Circuits and Systems (APCCAS-98), pp. 347-350, November 24-27, 1998.*
3. บทความที่ถูกรับเสนอในการประชุมในระดับนานาชาติ *Methee Hwangkhunnatham and Ekachai Leelarasmee "Multilevel Transmission Line Macromodeling and Latency for the Time Domain Simulation", Proceedings of SPIE, Vol.4228, pp.374-381, Nov 27 – Dec 1, 2000.*

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A TWO LEVEL TRANSMISSION LINE MODEL FOR TRANSIENT ANALYSIS*

METHEE HWANGKHUNNATHAM and EKACHAI LEELARASMEE

*Electrical Engineering Department, Chulalongkorn University
Phya-thai Road, Patumwan, Bangkok 10330, Thailand*

Received 18 December 1998

Accepted 15 April 1999

An efficient approach based on conventional techniques for transient analysis of transmission line circuit initially modelled as large number (N) of segments of lumped components is presented. This technique avoids the simultaneous solution of a large number of variables by computing an equivalent macromodel of each transmission line and splitting the analysis into two levels. The first level deals with a normal circuit analysis in which each transmission line is replaced by a simple lumped equivalent two port companion macromodel having only three resistors and two current sources. However, the initial N -segmented model of transmission line must be separately analyzed at the second level in order to update the transmission line companion macromodel at each timepoint. This latter analysis of the transmission line can be done efficiently using a set of recursive formulae whose complexities depend linearly on N . A simulation result of this technique is presented and compared with SPICE program.

1. Introduction

Model of interconnects in the form of transmission lines have become significant in design and simulation nowadays. There are two basic ways to handle transmission lines in transient simulation, by convolving with their impulse response^{1,2} or replacing them with segments of lumped components^{3,4} as shown in Fig. 1. Our approach is based on the second method and relies on conventional techniques. Unfortunately, the number of segments must be very large, e.g. 100, in order to model the transmission line with sufficiently good accuracy. If this approach is implemented by treating each component in the segmented model as an individual component in the circuit and formulating the circuit equation accordingly, the associated matrix and variables can be quite large and cannot be efficiently handled by normal sparse matrix techniques.⁵

This article introduces a practical technique to speed up the transient analysis of a transmission line circuit. Each transmission line is treated as a circuit component with two level of models, i.e. the N -segmented model shown in Fig. 2(a) and the

*This paper was recommended by Nobuo Fujii, Guest Editor.

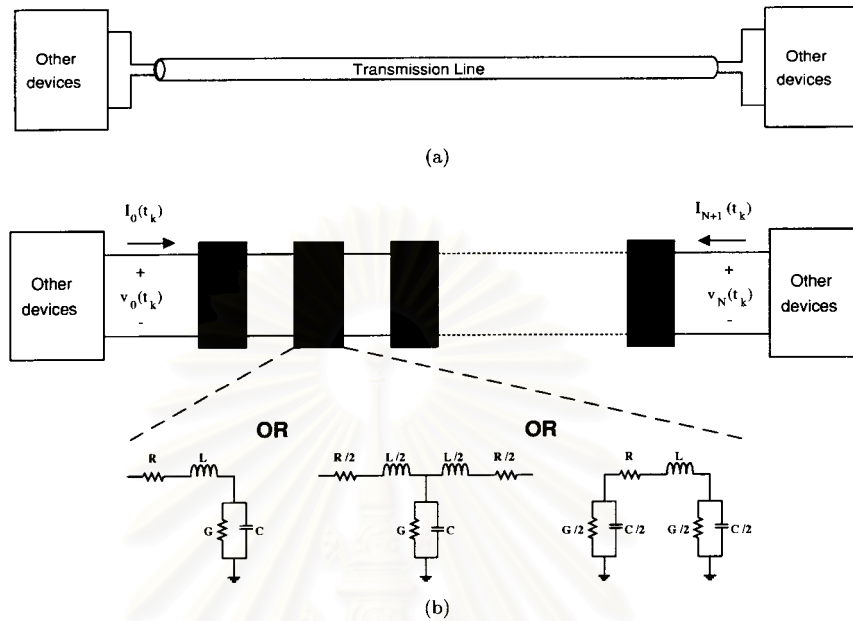


Fig. 1. (a) Transmission line circuit. (b) A model of transmission line using segments of either Γ , T, or Π model.

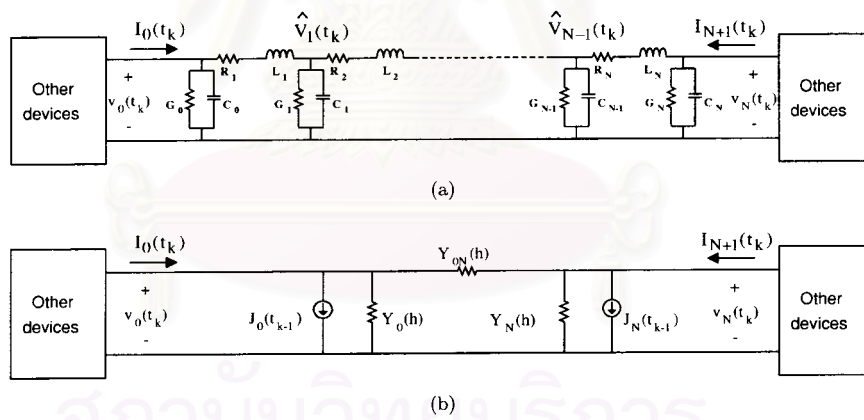


Fig. 2. (a) The N-segmented model of the transmission line at timepoint t_k . (b) The companion macromodel of the transmission line at timepoint t_k .

companion macromodel at each timepoint as shown in Fig. 2(b). The companion macromodel will be internally computed so that it is timepointly equivalent to the N-segmented model when the dynamics of each inductor and capacitor are time discretized by a standard implicit integration method such as Backward Euler or Trapezoidal rule.⁶ Since the companion macromodel has no internal node, all internal capacitor voltages and inductor currents in the N-segmented model are called internal variables of the transmission line.

The presented implementation will compute the transient values of these internal values as well as other variables in the circuit at each timepoint by dividing the analysis into two levels, i.e. the analysis at the circuit level and at the transmission line component level. At the circuit level, the transient analysis at each timepoint is carried out by using traditional numerical methods, i.e. implicit integration formula, NR iteration and LU factorization. However, only the companion macromodel of the transmission line is used at this level of analysis to obtain all the circuit variables except for the internal variables of the transmission line. Hence, this analysis yields the terminal voltages $v_0(t_k)$ and $v_N(t_k)$ of the transmission line that are used as input voltage sources for another level of analysis that involves only the transmission line. In this second analysis, the N-segmented model is used where each inductor and capacitor are replaced by its companion model associated with the numerical integration method. This analysis gives the values of the internal variables of the transmission line and updates the values of its companion macromodel parameters to be used at the next timepoint. Note that the values of each R , L , G , and C components in the N-segmented model can be different from one segment to the others.

2. A Two Level Transmission Line Models

In this section, we shall show that such an equivalent macromodel exists by deriving its determining matrix formulae. Applying conventional implicit numerical integration formula to each R , L , G , C component in Fig. 2(a), the companion model of the transmission line at timepoint t_k can be generally represented as shown in Fig. 3. As an example, if Backward Euler integration formula is used, then it can be shown that

$$G_{i,i+1}(h) = \left(R_{i+1} + \frac{L_{i+1}}{h} \right)^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

$$G_{i,i}(h) = G_i + \frac{C_i}{h}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$$\hat{J}_i(t_{k-1}) = \frac{C_i}{h} V_i(t_{k-1}) + \frac{\frac{L_i}{h} i_{L_i}(t_{k-1})}{R_i + \frac{L_i}{h}} - \frac{\frac{L_{i+1}}{h} i_{L_{i+1}}(t_{k-1})}{R_{i+1} + \frac{L_{i+1}}{h}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

where $L_0 = L_{N+1} = 0$, $R_0 = R_{N+1} = 0$ and $h = t_k - t_{k-1}$.

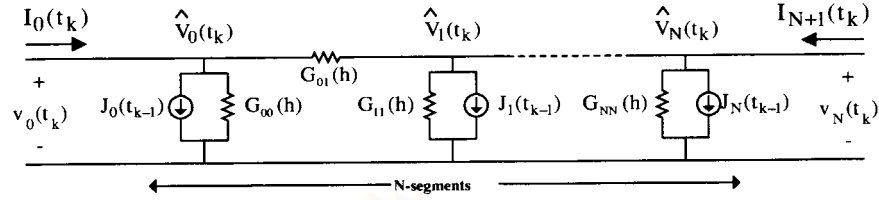


Fig. 3. The N-segmented companion model of the transmission line at timepoint t_k .

This is the first level of companion model of the transmission line, called N-segmented companion model, at timepoint t_k . If this model is used to directly represent the transmission line for transient analysis of the circuit at t_k , a large sparse matrix equation must be solved which can lead to an excessive use of computational time. Therefore, a second level of model, called companion macromodel, is proposed to simplify the circuit analysis without losing the accuracy. It is based on the concept of exact macromodeling⁷ in which a companion macromodel of the transmission line is computed and used instead of the N-segmented companion model. To elaborate this concept, the voltage variables of the N-segmented model are partitioned into two groups, i.e. (i) $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_{N-1}$ called the internal voltage variables, and (ii) v_0 and v_N called the terminal voltage variables. Hence the Nodal equations describing the N-segmented companion model, starting at internal nodes and followed by terminal nodes, can be written as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{y}_3^T \\ \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{J}} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= [\hat{v}_1 \ \dots \ \hat{v}_{N-1}]^T && \text{is the vector of internal voltage variables,} \\ \mathbf{v} &= [v_0 \ v_N]^T && \text{is the vector of terminal voltage variables,} \\ \mathbf{I} &= [I_0 \ I_{N+1}]^T && \text{is the vector of terminal currents,} \\ \hat{\mathbf{J}} &= [\hat{J}_1 \ \dots \ \hat{J}_{N-1}]^T && \text{is the vector of constant currents injected into} \\ &&& \text{the internal nodes,} \\ \mathbf{J} &= [\hat{J}_0 \ \hat{J}_N]^T && \text{is the vector of constant currents injected into the} \\ &&& \text{terminal nodes.} \end{aligned}$$

This equation can be reduced by performing elementary matrix operations to obtain an equation describing the relationships between terminal voltages and currents of the N-segmented companion model as follows

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_M \mathbf{v} - \mathbf{J}_M \quad (5a)$$

where

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3 \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{y}_3^T; \quad \mathbf{J}_M = \mathbf{J} - \mathbf{y}_3 \mathbf{Y}^{-1} \hat{\mathbf{J}}$$

or equivalently

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_{N+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_0 & Y_{0N} \\ Y_{0N} & Y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_M} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_N \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} J_0 \\ J_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_M}. \quad (5b)$$

Equation (5) describes the companion macromodel of the transmission line since it contains no internal variables. Its circuit representation is shown in Fig. 4.

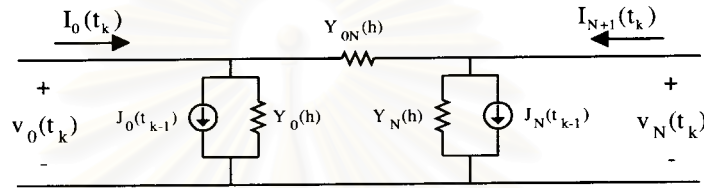


Fig. 4. The companion macromodel of the transmission line at timepoint t_k .

Clearly, the transient circuit analysis can be performed much faster when the companion macromodel is used instead of the N -segmented model. However, both \mathbf{Y}_M and \mathbf{J}_M must be computed in an efficient way as will be discussed in the next section. We first note that the value of all admittance matrices, i.e. \mathbf{Y} , \mathbf{y}_2 , \mathbf{y}_3 , depend on h not t_k . Hence if fixed timestep is used, \mathbf{Y}_M is constant and needs to be computed only once throughout the transient simulation. On the other hand, \mathbf{J}_M has to be updated at every timepoint since it depends on the previous values of internal voltages and currents in the transmission line. Therefore, the terminal voltages (\mathbf{v}) of the transmission line obtained through the transient analysis using the macromodel must be used to compute and update the internal voltages and currents. Using Eq. (4) the internal voltages can be obtained from

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Y}^{-1} (\hat{\mathbf{J}} - \mathbf{y}_3^T \mathbf{v}). \quad (6)$$

Then each internal currents can be easily computed by using the values of internal voltages. For example, in the case of Backward Euler, we obtain

$$i_{L_i}(t_k) = \frac{1}{R_i + \frac{L_i}{h}} \left[\hat{v}_{i-1}(t_k) - \hat{v}_i(t_k) + \frac{L_i}{h} i_{L_i}(t_{k-1}) \right]; \quad \text{where } i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Using these two level of models, the flowchart for transient analysis of any transmission line circuit can be shown in Fig. 5 from which the analysis is splitted into the following two levels.

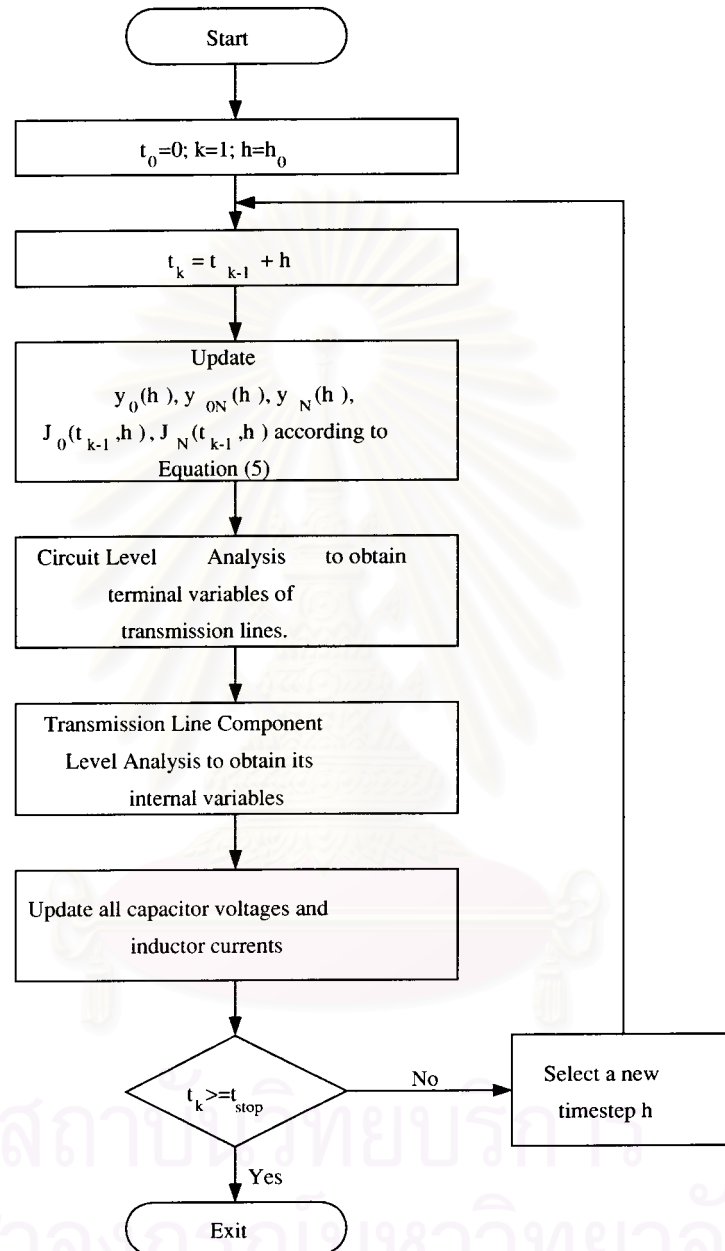


Fig. 5. A transient simulation algorithm using the two level transmission line models.

- (i) Circuit level. This first level is performed on the circuit by replacing each transmission line with its companion macromodel as shown in Fig. 2(a). This analysis yields the circuit variables including the terminal voltage $v_0(t_k)$ and $v_N(t_k)$ of the transmission line.
- (ii) Transmission line component level. This second level of analysis is performed on each individual transmission line by using its N-segmented model for computing and updating the internal variables.

3. Actual Implementation and Computational Complexity

In this section, specific details about how to efficiently compute and update the companion macromodel of the transmission line are given. Let

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1,N-1} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2,N-1} \end{bmatrix}^T \text{ satisfy } \mathbf{Y}\mathbf{w} = \mathbf{y}_3^T. \quad (8)$$

Then \mathbf{Y}_M and \mathbf{J}_M as given in Eq. (5) can be rewritten as

$$\mathbf{Y}_M = \mathbf{y}_2 - \mathbf{w}^T \mathbf{y}_3^T \quad (9a)$$

$$\mathbf{J}_M = \mathbf{J} - \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{J}}. \quad (9b)$$

To compute \mathbf{w} from Eq. (8), the LU factorization is used and consists of the following 3 computational steps.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (\text{factorization}) \quad (10a)$$

$$\mathbf{L}\mathbf{a} = \mathbf{y}_3^T \quad (\text{forward elimination}) \quad (10b)$$

$$\mathbf{U}\mathbf{w} = \mathbf{a} \quad (\text{backward substitution}). \quad (10c)$$

We now exploit the sparsity and regularity of \mathbf{Y} by observing that it is a symmetric band matrix as follows

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X & X & 0 & \dots & 0 \\ X & X & X & \ddots & \vdots \\ 0 & X & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & X \\ 0 & \dots & 0 & X & X \end{bmatrix}; X = \text{nonzero terms} \quad (11)$$

where

$$Y_{i,i} = G_{i-1,i} + G_{i,i} + G_{i,i+1}, \quad Y_{i,j} = Y_{j,i} = -G_{i,j}$$

and

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} -G_{01} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -G_{N-1,N} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Hence, both \mathbf{L} and \mathbf{U} will have the same sparsity structure as \mathbf{Y} and can be computed with the following recursive formulae.

$$L_{j,j} = Y_{j,j} - \frac{Y_{j,j-1}^2}{L_{j-1,j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (13a)$$

$$L_{j+1,j} = Y_{j,j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N-2 \quad (13b)$$

$$U_{j,j} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (13c)$$

$$U_{j,j+1} = \frac{Y_{j,j+1}}{L_{j,j}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-2 \quad (13d)$$

$$L_{j,k} = U_{k,j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad k \neq j+1 \quad \text{and} \quad k \neq j. \quad (13e)$$

Similarly, recursive formula for computing \mathbf{a} and \mathbf{w} in Eqs. (10b) and (10c) can be derived and given as follows

$$a_{j,1} = -\frac{L_{j,j-1}a_{j-1,1}}{L_{j,j}} \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (14a)$$

$$a_{j,2} = \begin{cases} 0 & j = 1, 2, \dots, N-2 \\ -\frac{G_{N-1,N}}{L_{N-1,N-1}} & j = N-1 \end{cases} \quad (14b)$$

$$w_{j,2} = \begin{cases} a_{N-1,2} & j = N-1 \\ -U_{j,j+1}w_{j+1,2} & j = 1, 2, \dots, N-2 \end{cases} \quad (14c)$$

$$w_{j,1} = \begin{cases} a_{N-1,1} & j = N-1 \\ a_{j,1} - U_{j,j+1}w_{j+1,2} & j = 1, 2, \dots, N-2. \end{cases} \quad (14d)$$

Then \mathbf{w} is used to compute \mathbf{Y}_M and \mathbf{J}_M from Eq. (9). The remaining task is to update the internal voltages according to Eq. (6). This can also be done efficiently by using the previously computed values of \mathbf{L} and \mathbf{U} factors of \mathbf{Y} . Once the internal voltages are computed, the internal inductor currents can be directly updated using the formulae that are similar to Eq. (7). Table 1 summarizes the computational complexity of all steps associated with a transmission line and shows that they all depend linearly on the number of segments (N). Note that the computational complexity of the transient simulation at the circuit level is now independent of N . Furthermore, if fixed timestep is used then the first two computational steps need to be carried out only once since they are always the same throughout the simulation time interval. However, to facilitate timestep control mechanism in which the stepsize can be adjusted according to accuracy requirement, only a small finite set of timestep values should be used, e.g. $h = h_{\max}/2^M$; $M = 0, \dots, 10$. With these

Table 1. Number of operations for computing and updating the transmission line macro model.

Computational step	Number of operations		
	+/-	x/÷	Equation
1. Factorization of \mathbf{Y}	$N - 2$	$3N - 6$	(13)
2. Determination of \mathbf{w}	$N - 2$	$4N - 5$	(14)
3. Update companion macromodel (capacitor voltages)	$4N - 6$	$6N - 9$	(6)
4. Update companion macromodel (inductor currents)	$2N$	$3N$	(7)

choices, there can be only 11 different values of \mathbf{L} , \mathbf{U} and \mathbf{w} . Hence these values should be stored in the internal memory and retrieved back for later uses. Therefore a large value of N can be used to achieve high simulation accuracy without severely effect the overall execution time.

4. Simulation Results and Conclusion

The proposed two level transmission line models are implemented in a proprietary general purpose circuit simulator LEK.⁸ The circuit in Fig. 6 is used to test for the program efficiency and accuracy. This circuit utilizes a lossy transmission line as a $0.5 \mu\text{S}$ delay element in a positive feedback loop to generate a 2 MHz oscillating waveform whose amplitude is limited to approximately ± 0.8 volt by two nonlinear diodes. The transient simulated waveforms were shown in two cases. The first case, shown in Fig. 7(a), demonstrates the accuracy and consistency of our technique as timestep h is decreased. The second case, shown in Fig. 7(b), gives a comparison between the simulated waveforms obtained by using 3 techniques, i.e. our proposed 2 level technique, conventional one level technique and the state-based technique² that is implemented in SPICE3f.5. The conventional one level technique was carried out by directly replacing the transmission line as RLGC lumped segments and using SPICE3f.5 to perform the transient simulation. The total CPU time of a Pentium based microcomputer for a complete transient simulation excluding the input/output processes and another simulation information were shown in Table 2.

We conclude that the two level transmission line models presented in this paper is highly efficient as far as lumped segments approximation of transmission line is used. This technique can be extended to couple transmission lines and even support non-uniform segment approximation. Furthermore, the detailed waveforms of the internal nodes and currents within the transmission line are obtained at no additional cost. It should be pointed out that this two level approach is introduced to speed up the execution time without degrading the accuracy. However, waveform accuracy can always be improved by increasing the number of segments (N) and/or decreasing the stepsize (h). The advantage of the two level approach is that large value of N and/or small value of h can be easily accommodated without significantly

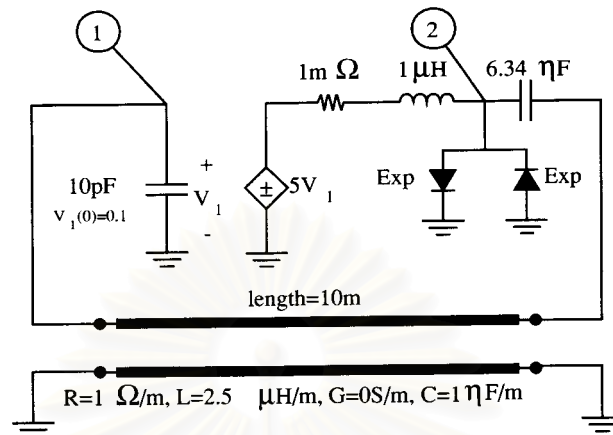


Fig. 6. A lossy transmission line circuit for testing.

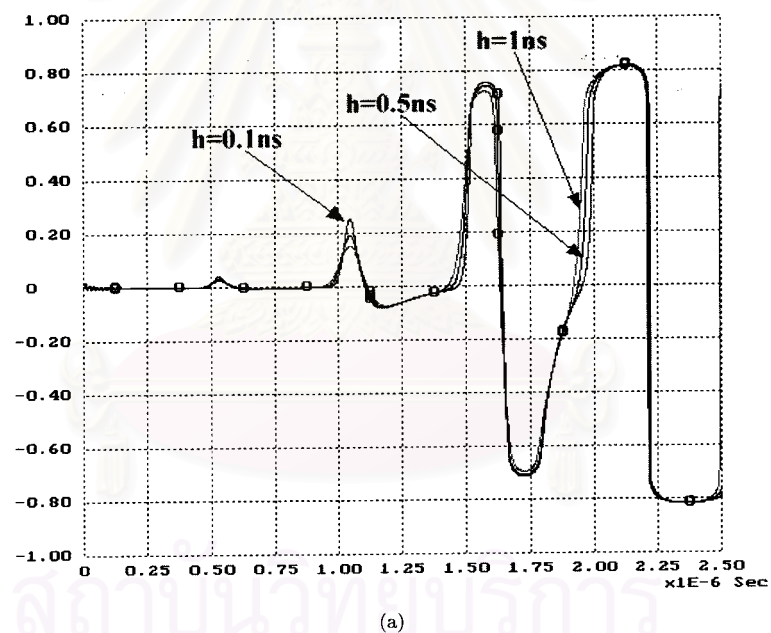
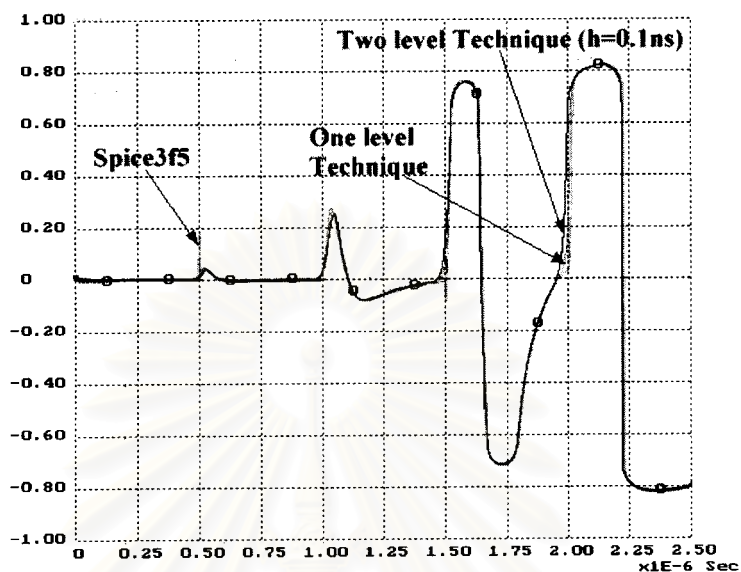


Fig. 7. The simulation result of voltage at node 2 of the circuit in Fig. 6. (a) The simulation results of the two level technique with selecting different stepsizes. (b) The comparison between the two level technique, the one level technique and the state-based technique.



(b)

Fig 7. (Continued)

Table 2. Comparison the efficiency of transient simulation between State-based technique, one level technique and the two level transmission line models technique.

	State-based	One level	Two level technique (100 segments)		
	technique ($h = 1$ ns)	technique ($h = 1$ ns)	($h = 1$ ns)	($h = 0.5$ ns)	($h = 0.1$ ns)
1. Operating system	LINUX	LINUX	MSDOS	MSDOS	MSDOS
2. Circuit equations	10	607	7	7	7
3. Transient timepoints	2,590	3,636	2,517	5,017	25,016
4. Total CPU time (seconds)	38.86	308.38	15.27	28.94	124.84

effect the computational speed. The 11 choices of timestep, i.e. $h = h_{\max}$, $h_{\max}/2$, $h_{\max}/2^2, \dots, h_{\max}/2^{10}$, mentioned in this paper is a good suggestion since the ratio of the largest to smallest timestep will be $2^{10} = 1,024$. Other choices of timestep can be selected but the total number of choices should not be large in order to allow the efficient use of memory in storing different values of \mathbf{L} , \mathbf{U} and \mathbf{w} . To compare this two level approach with the method described in Ref. 4, we would like to point out that there is some similarity in the sense that lumped models are used and companion macromodels are derived. However, the transmission line macromodel

given in Ref. 4 is always non-symmetrical, i.e. $Y_0(h)$ and $Y_N(h)$ are always different, while our proposed macromodel can be symmetrical when Υ or Π lump models are used. We believe that our two level approach should lead to a more efficient implementation. Finally, the proposed two level approach is not an iterative or relaxation method. Therefore, there is no convergence problem.

Acknowledgements

This work was supported by the National Science and Technology Development Agency (NSTDA). The authors also deeply appreciated valuable comments from the reviewers that led to this revised version.

References

1. S. Lin and E. S. Kuh, "Transient simulation of lossy interconnects based on the recursive convolution formulation", *IEEE Trans. Circuits Syst.* **39** (1992) 879–892.
2. J. S. Roychowdhury, A. R. Newton, and D. O. Pederson, "Algorithms for the transient simulation of lossy interconnect", *IEEE Trans. Computer-Aided Design* **13** (1994) 96–104.
3. T. Dhaene and D. De Zutter, "Selection of lumped element models for coupled lossy transmission lines", *IEEE Trans. Computer-Aided Design* **11** (1992) 805–815.
4. H. Mizutani and M. Tanaka, "Equivalent analysis of large transistor networks with distributed interconnection circuits", *IEEE ISCAS'90*, 1990, pp. 523–526.
5. R. D. Berry, "An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution", *IEEE Trans. Circuit Theory*, 1971 pp. 40–50.
6. L. O. Chua and P. M. Lin, *Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques*, Prentice Hall, 1975.
7. N. B. Guy Rabbat, A. L. Sangiovanni-Vincentelli, and H. Y. Hsieh, "A multilevel Newton algorithm with macromodeling and latency for the analysis of large-scale nonlinear circuits in the time domain", *IEEE Trans. Circuit Syst.* **CAS-26** (1979) 733–741.
8. "<http://www.ee.eng.chula.ac.th/lek>"

A Two Level Transient Analysis of a Circuit Containing Transmission Lines Modeled by Segments of Lumped Elements

Methee Hwangkhunnatham and Ekachai Leelarasmee
Chulalongkorn University, Electrical Engineering Department
Phya-Thai Road, Patumwan, Bangkok 10330 Thailand.

Phone: (662) 218-6488, Fax: (662) 251-8991, Email address: a1806321@student.chula.ac.th

Abstract

This paper presents a practical implementation of traditional numerical methods for computing the transient response of any arbitrary electronic circuit with particular emphasis on handling transmission lines, each of which is modeled as RLGC segments. This technique subdivided the transient analysis into 2 levels. The first level deals with a normal circuit analysis in which each transmission line is replaced by a simple lumped 2 port companion model having only 3 resistors and 2 current sources. However, the N-Segmented model of transmission line must be separately analysed for preparing and updating the transmission line lumped companion model. The analysis at this second level can be made computationally efficient by bypassing repeated matrix calculation. A simulation result of this technique is presented and compared with results obtained by using the number of lumped approximation are 25 and 100 segments.

1. Introduction

Model of interconnects in the form of transmission lines have become significant in design and simulation nowadays. There are 2 basic ways to handle transmission lines in transient simulation, by convolving with their impulse response [1], [2] or replacing them with lumped element equivalent models [3], [4]. Our approach is based on the second method, because it relies on conventional techniques. Unfortunately, the number of segments can be very large, e.g. 100, in order to give good accuracy. If this approach is implemented by treating each component in the segmented model as a component in the circuit and formulating the circuit equation accordingly, the associated matrix can be quite large and cannot be efficiently handled by normal sparse matrix techniques [5].

This article introduces a practical technique to speed up the transient analysis of transmission line circuit. Each transmission line is treated as a circuit component with two levels of models, i.e. the N-Segmented model and the lumped companion model at each timepoint as shown in Figure 1. Each segment of N-segmented model consists of R, L, G, and C

components connected in either Γ , T, or Π configuration as shown in Figure 1(b). The lumped companion model is internally computed so that it is timepointly equivalent to the N-segmented model when the dynamics of each inductor and capacitor are time discretized by a standard implicit integration method such as Backward Euler or Trapezoidal rule [6]. Since the lumped companion model has no internal node, all internal capacitor voltages and inductor currents are called internal variables of the transmission line.

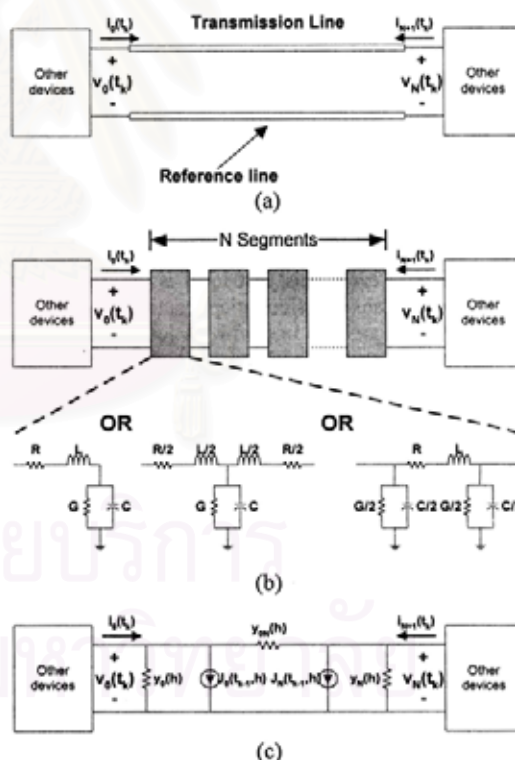


Figure 1. (a) Transmission Line circuit. (b) N-segmented model of transmission line with either Γ , T, or Π model. (c) Lumped companion model of the transmission line at timepoint t_k where $h = t_k - t_{k-1}$.

The presented implementation will compute the transient values of these internal values as well as other variables in the circuit at each timepoint by dividing the analysis into two levels, i.e. the analysis at the circuit level and at the transmission line component level. At the circuit level, the transient analysis at each timepoint is carried out by using traditional numerical methods, i.e. implicit integration formula, NR iteration and LU factorization. However, only the companion model of the transmission line is used at this level of analysis to obtain all the circuit variables except for the internal variables of the transmission line. Hence, this analysis yields the terminal voltages $v_0(t_k)$ and $v_N(t_k)$ of the transmission line that are used as input voltage sources for another level of analysis that involves only the transmission line. In this second analysis, the N-Segmented model is used where each inductor and capacitor are replaced by its companion model associated with the numerical integration method. This analysis gives the values of the internal variables of the transmission line and updates the values of its lumped companion model parameters to be used at the next timepoint.

2. Two Level Transient Analysis Algorithm

This two level Transient Analysis algorithm is divided to 2 levels as shown in Figure 2. The detail of this algorithm is described below.

- (i) **Circuit Level:** This first level is performed using normal transient simulation routine by replacing each transmission line with its lumped companion model as shown in Figure 1(c). Therefore, at this level, the transmission line will have a stamp as shown in Figure 3. It is clear that the LHS (Left hand side) of the matrix stamp has to be updated only when the value of the time step changes, so only its RHS (Right hand side) vector has to be updated every time iteration. We will introduce the formula for finding lumped companion model parameter in the next section.
- (ii) **Transmission line component level:** At this second level of analysis, the lumped companion model is replaced by its N-segmented model associated with the numerical integration method for computing and updating the internal variables. This second level analysis can be made computationally efficient by exploiting the linear, regular and sparse properties of the N-segmented model as well as judiciously selecting the timestep control scheme to bypass repeated matrix calculation.

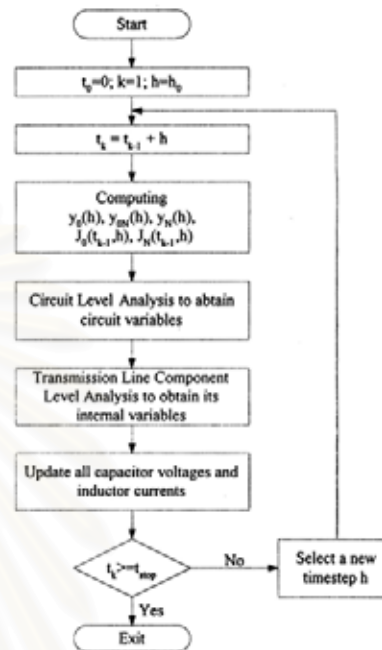


Figure 2. A Two level Transient Analysis Algorithm.

$$\text{KCL} \begin{matrix} v_0 : \\ v_N : \end{matrix} \begin{bmatrix} y_0(h) + y_{0N}(h) & -y_{0N}(h) \\ -y_{0N}(h) & y_{0N}(h) + y_N(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0(t_k) \\ v_N(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0(t_k, h) \\ J_N(t_k, h) \end{bmatrix}$$

Figure 3. The transient analysis stamp of a lumped companion model in Figure 1(c).

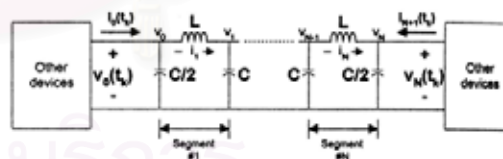


Figure 4. An N-segmented model of a lossless transmission line using II models.

3. Computing and Updating the Lumped Companion Model (A Case of Lossless Π Model)

For simplicity, we further discuss the above ideas by assuming the case of a lossless transmission line with the selection of Π model. So, the transmission line circuit from Figure 1(b) can be represented by the circuit in Figure 4.

From the previous section, it is clear that there are three main functions involve with the analysis in the transmission line component level: (i) computing the parameters $y_0(h)$, $y_{0N}(h)$, $y_N(h)$ of lumped companion model (ii) computing the parameters $J_0(t_{k-1}, h)$, $J_N(t_{k-1}, h)$ of lumped companion model at each time iteration (iii) updating the internal parameters of its N-segmented model. We assume that Backward Euler integration formula [6] is used to approximate the time derivative of each inductor current and capacitor voltage. Hence, the nodal equations [6] of the analysis of the N-segmented model at timepoint t_k can be written as follows.

$$\begin{bmatrix} x & x & & 0 \\ x & x & x & \\ & x & \ddots & x \\ & & x & x & x \\ 0 & & & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t_k) \\ v_2(t_k) \\ \vdots \\ v_{N-1}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{j}_1(t_{k-1}, h) \\ \tilde{j}_2(t_{k-1}, h) \\ \vdots \\ \tilde{j}_{N-1}(t_{k-1}, h) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$Y(h) \quad V(t_k) \quad \tilde{J}(t_{k-1}, h)$

where $y_{ii} = \frac{C}{h} + \frac{2h}{L}$, $y_{i,i+1} = y_{i+1,i} = -\frac{h}{L}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, and $h = t_k - t_{k-1}$.

Let $w = [w_1, w_2, \dots, w_{N-1}]^T$ satisfy $Yw = e_1$ where e_1 is a unit vector. Then, the parameters $y_0(h)$, $y_N(h)$ and $y_{0N}(h)$ of the lumped companion model at timepoint t_k can now be computed from the following formula.

$$y_0(h) = y_N(h) = \frac{C}{2h} + \frac{h}{L} \left[1 - \frac{h}{L} (w_1 + w_{N-1}) \right] \quad (2)$$

$$y_{0N}(h) = \frac{h^2}{L^2} w_{N-1} \quad (3)$$

The equivalent current source $J_0(t_{k-1}, h)$ and $J_N(t_{k-1}, h)$ can also be computed from the following formula.

$$J_0(t_{k-1}, h) = -\frac{C}{2h} v_0(t_{k-1}) + i_1(t_{k-1}) + \sum_{i=1}^{N-1} w_i \tilde{j}_i(t_{k-1}, h) \quad (4)$$

$$J_N(t_{k-1}, h) = -\frac{C}{2h} v_N(t_{k-1}) + i_N(t_{k-1}) + \sum_{i=1}^{N-1} w_{N-i} \tilde{j}_i(t_{k-1}, h) \quad (5)$$

where $\tilde{j}_i(t_{k-1}, h) = \frac{C}{h} v_i(t_{k-1}) + i_{i-1}(t_{k-1}) - i_i(t_{k-1})$ and $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Finally, the internal variables of N-segmented model at each timepoint can be updated by solving (1) in which is $\tilde{j}_1(t_{k-1}, h)$ and $\tilde{j}_{N-1}(t_{k-1}, h)$ substituted by the following formula

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1(t_{k-1}, h) &= J_0(t_{k-1}, h) + y_0(h) * v_0(t_{k-1}) + \\ & y_{0N}(h) * [v_0(t_{k-1}) - v_N(t_{k-1})] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{j}_{N-1}(t_{k-1}, h) &= J_N(t_{k-1}, h) + y_0(h) * v_N(t_{k-1}) + \\ & y_{0N}(h) * [v_N(t_{k-1}) - v_0(t_{k-1})] \end{aligned} \quad (7)$$

After solving the equation (1) for all $v_i(t_k)$ which are the internal voltage variables, then use these voltages to compute the internal inductor currents $i_i(t_k)$ by using the formula on the equation (8).

$$i_i(t_k) = i_i(t_{k-1}) + \frac{h}{L} [v_{i-1}(t_k) - v_i(t_k)]; \quad i=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

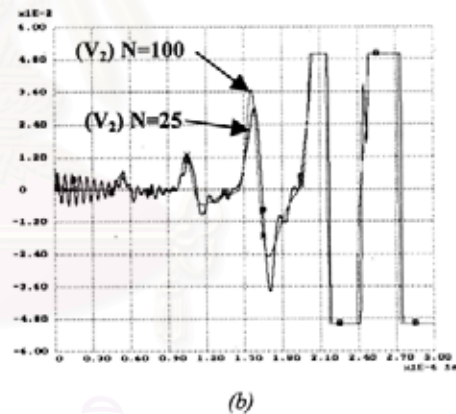
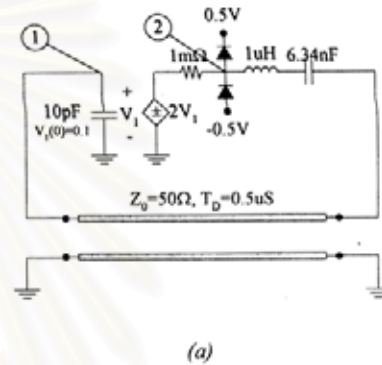


Figure 5 (a) Benchmark Circuit. (b) Simulation result of voltage at node 2.

4. Experimental result

To verify the efficiency of this 2 level transient analysis technique. A benchmark circuit in Figure 5(a) was simulated with the simulator that operates under MS-DOS operating system, Pentium-166 MHz and 32 Mbytes of RAM. The voltage on node 2 was plotted by transient simulation with $T_{stop} = 3 \cdot 10^{-4}$ s, $T_{step} = 0.3 \cdot 10^{-9}$ s, and 10,016 timepoints. Simulation results of voltage at node 2 were plotted in Figure 5(b) for the

cases in which the transmission line is divided to 25 and 100 segments, respectively.

List of desired parameters	Number of segments		
	25	100	N
Memory Usage to store (bytes)			
– LU factor of Y	1,650	6,600	$11*6N$
– Y_0 (Y_N), Y_{0N}	132	132	$11*2*6$
– J_0 , J_N	12	12	$2*6$
– w	1,584	6,534	$11*(6N-6)$
– Internal variables at t_{k-1}	294	1,194	$12N-6$
Number of Multiplications and divisions for computing			
– LU factor of Y	51	201	$2N+1$
– Y_0 (Y_N), Y_{0N}	75	300	$3N$
– J_0 , J_N	146	596	$6N-4$
– w	72	297	$3N-3$
– Internal variables at t_{k-1}	123	498	$5N-2$
Number of selected timestep values	11		

Table 1 Transient simulation result of the benchmark circuit in the Figure 5(a)

Table 1 presents lists of desired parameters to measure the efficiency of this technique, which is divided to 2 main groups: (i) the amount of memory usage and (ii) the speed of this technique in terms of the number of multiplications and divisions.

Detailed sets of memory usage[⊗] are described in 5 categories: 1. The portion to store the LU factor of matrix Y for using in the circuit level calculation step. These memory amounts will relate with the number of selected timestep values, which is 11 in this case. 2. The portion to store the parameters $y_0(h)$, $y_N(h)$, $y_{0N}(h)$ of the lumped companion model for using in the transmission line component level calculation step. These memory amount also depends on the number of selected timestep values. 3. The portion to store the parameter $J_0(t_{k-1}, h)$, $J_N(t_{k-1}, h)$ of the lumped companion model, which changes on every timepoint. So, we reserve only 2 variables to

[⊗] 1 single precision = 6 bytes

store their values. 4. The portion to store the vector w of dimension $N-1$ which has to be recomputed when the value of timestep changes. 5. The portion to store internal variables at timepoint t_{k-1} , i.e. $N-1$ capacitor voltages and N inductor currents, respectively.

The second group presents the number of multiplications and divisions in computing algorithms. Addition and Subtraction can be neglected, because their execution time is very small compared with the total computation time.

5. Conclusion

An efficient approach based on conventional techniques for transient analysis of transmission line circuit with large number of segments of lumped models is presented. To avoid the simultaneous solution of a large number of variables, the analysis is splitted into two levels, i.e. the circuit level and the transmission line component level, each of which deals only with its own variables. Therefore, the overall computation time can be reduced. Furthermore, a customized algorithm for handling the transmission line analysis has been devised to significantly speed up its execution time.

6. Acknowledgement

This work was partially supported by the National Science and Technology Development Agency (NSTDA).

References

- [1] Shen Lin and Ernest S. Kuh "Transient Simulation of Lossy Interconnect" 29th ACM/IEEE Design Automation Conference, pp.81-86 1992.
- [2] Jaijeet S. Roychowdhury and Donald O. Pederson. "Efficient Transient Simulation of Lossy Interconnect," 28th ACM/IEEE Design Automation Conference, pp.740-745 1991.
- [3] Tom Dhaene and Daniël De Zutter "Selection of Lumped Element Models for Coupled Lossy Transmission Lines," IEEE Trans. on Computer-Aided Design, Vol.11 No.7 July 1992.
- [4] Hikaru Mizutani, Mamoru Tanaka, "Equivalent Analysis of Large Transistor Networks with Distributed Interconnection Circuits," IEEE ISCAS'90, pp.523-526.
- [5] R.D. Berry "An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution" IEEE Trans. On Circuit Theory, pp.40-50, January 1971.
- [6] L.O. Chua and P.M Lin, "Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques", Prentice Hall, 1975.

Multilevel Transmission Line Macromodeling and Latency for the Time Domain Simulation

Methee Hwangkhunnatham and Ekachai Leelarasmee

*Electrical Engineering Department, Chulalongkorn University
Phya-thai Road, Patumwan, Bangkok 10330, Thailand.
Email address: methee@engineer.com*

ABSTRACT

This paper presents a multilevel transmission line companion macromodel based on the segmentation modeling for the time domain simulation. The techniques described in this work exploits the characteristic properties of the segmented transmission line model for a more efficient analysis. At each timepoint, multilevel transmission line macromodels will be internally computed and only its simplest macromodel will replace the transmission line in the network for performing the time domain analysis. This analysis yields the terminal voltages of the transmission line that are used as input voltage sources for another analysis that involves only the transmission line. This second analysis gives the values of the internal variables of the transmission line and updates the values of its internal variables to be used at the next timepoint. Both of these analysis can be done efficiently by exploiting the identical properties of each subsegment of the transmission line model. Furthermore, if at any time t_k the value of the input variables of a subsegment do not change its value from its previous timepoint, then its value at all the subsequent time steps will remain the same until a change in the input variables of the subsegment occurs. The latent subsegment variables can thus be used in the upper level without recomputation. Test results show that this multilevel macromodeling can speed up the computation about 10 times compared with direct calculation without macromodeling. After the latency technique is applied, a 50% speed improvement can be further achieved while yielding almost identical numerical results.

Keywords: Multilevel Transmission line Macromodeling, Time domain Simulation, Latency.

1. INTRODUCTION

Time domain analysis of the transmission line circuit is very important for the study and design of high-speed electronic circuits nowadays. There are two basic ways to handle transmission lines in the time domain simulation: by convolving with their impulse responses or using lumped element equivalent circuits.

The first approach is based on the Green function. First, the dispersive transmission line structures are evaluated in the frequency domain. The frequency domain data are then transformed into the time-domain impulse responses. For each integration, the outputs of the linear lossy multiconductor lines are the convolutions of the inputs with their impulse responses. The difficulty of this approach lies in the determination of the impulse responses of an arbitrary multiconductor line system. The inverse fast Fourier transformation technique [1], the numerical inverse Laplace transformation technique [2], and even the explicit analytical approach [3] have been used to determine these impulse responses. These convolution simulations also suffer from a common drawback: the convolution operation needs to extend over the entire past history. Therefore, the convolutions at large timepoints will be very time-consuming, i.e. "Quadratic complexity". Schutt-Aine et al [4, 5] reformulated the convolution equations using a scattering parameter approach that led to "well-behaved" impulse responses. Even though these responses decreased monotonically, their effective duration could be greater than the total simulation time, depending on the values of R, L, G, and C of the line. Therefore the quadratic complexity of impulse response based method still remains. To avoid the time-consuming convolution integrations, the state-based approach [6] has been proposed. This approach utilizes information about the internal states of a transmission line at a given time to solve for the states at the next time point. The voltage and the current at the sample points are kept as the states of the line. The voltages and the currents are assumed to be piecewise linear between adjacent sample points. Based on this assumption, the state variables can be determined by using integrations on space, hence avoiding convolutions. However, the efficiency of the approach will degrade for the simulation with many sharp edges in the line's waveforms since the samples must be chosen densely in the regions where waveforms are fast varying. A recursive convolution method has been developed [7] in order to overcome the computational complexity. The major problem in recursive convolution is that the rational approximation based on the moment matching model of transmission lines cannot guarantee stability of the reduced model of the transmission line.

The second approach, called "Segmentation Technique", is implemented by modelling lossy and lossless transmission lines as segments connected in series with each segment consisting of lumped R, L, C and G elements. Each segment can be modeled in either Γ , T, or Π model as shown in the figure 1. Its simplicity with the convenience of being able to use existing simulators without modification have made this technique popular in the past. Unfortunately in many cases the number of segments must be large (e.g. 100) for accuracy reasons, which lead to large computation times.

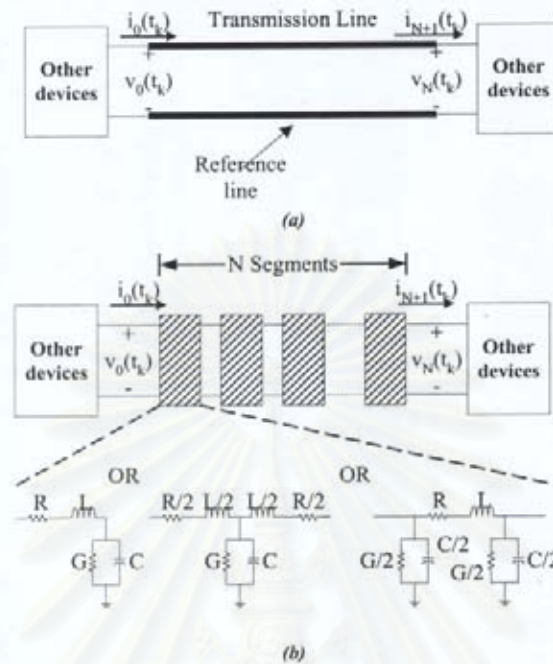


Figure 1. (a) Transmission line circuit. (b) N -segmented model of transmission line with either Γ , T, or Π model

The approach presented in this paper is based on the second method and relies on conventional techniques. It introduces a practical technique to speed up the transient analysis of a transmission line circuit. The transmission line is treated as a lumped circuit component with $\log_2 N$ level of companion macromodels as shown in Table 1. These $\log_2 N$ level companion macromodels will be internally computed so that they are timepointly equivalent to the N -segmented model, shown in the figure 1(b) when the dynamics of each inductor and capacitor are time discretized by a standard implicit integration method such as Backward Euler or Trapezoidal rule [9]. Note that the simplest companion macromodel at $\log_2 N$ -level has no internal node. Therefore all internal capacitor voltages and inductor currents in other level models are called internal variables of the transmission line.

The presented implementation will compute the transient values of these internal values as well as other variables in the circuit at each timepoint by dividing the analysis into two levels, i.e. the analysis at the circuit level and at the transmission line component level. At the circuit level, the transient analysis at each timepoint is carried out by using traditional numerical methods, i.e. implicit integration formula, Newton Raphson iteration and LU factorization [9]. Only the level- $\log_2 N$ companion macromodel of the transmission line is used at this analysis level to obtain all the circuit variables except for the internal variables of the transmission line. Hence, this analysis yields the terminal voltages $v_0(t_k)$ and $v_N(t_k)$ of the transmission line that are used as input voltage sources for another analysis level that involves only the transmission line. In this second analysis level, all levels of companion model are used. This analysis gives the values of the internal variables of $\log_2 N$ companion models and updates the values of their companion model parameters to be used at the next timepoint. To overcome the repeated computation, the latency technique will be used in case of the variables of a subnetwork are found to be constant. Thus, the same subnetwork variables can be reused in the upper level without recomputation.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Level	Multilevel Transmission Line Companion Model	#Segment
0		N
1		N/2
2		N/4
⋮	⋮	⋮
$\log_2 N$		1

Table 1. N-level Transmission line companion model and their parameter.

2. TRANSMISSION LINE MACROMODEL

In this section, we shall demonstrate the concept of building $\log_2 N$ level companion macromodels by using an example in which the transmission line is modelled as two Π segments as shown in the figure 2. Applying the conventional implicit numerical integration formula to each L, C component in these two segments, its companion model at timepoint t_k can be generally represented as shown in figure 3. As an example, if Backward Euler integration formula is used, then it can be shown that

$$G_{L1} = \frac{1}{R + \frac{L}{h}}, G_C = G + \frac{C}{h}, I_1 = \frac{I_{C1}}{2} + I_{L1}, I_2 = I_{C2} - I_{L1} + I_{L2}, I_3 = \frac{I_{C3}}{2} + I_{L2}, I_{L1} = \frac{\frac{L}{h} \dot{i}_{Li}}{R + \frac{L}{h}}, I_{C1} = -\frac{C}{h} \dot{v}_{Ci} \quad (1)$$

where \dot{i}_{Li} and \dot{v}_{Ci} are previous values of current and voltage at t_{k-1} . This 2 segments companion model has only two levels of macromodel i.e. level-0 as shown in figure 3 and level-1 as shown in figure 4.

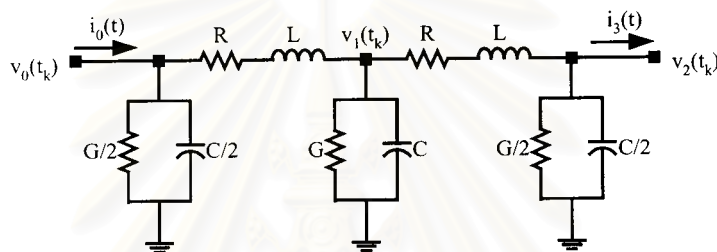


figure 2. The two segments of Π model at timepoint t_k .

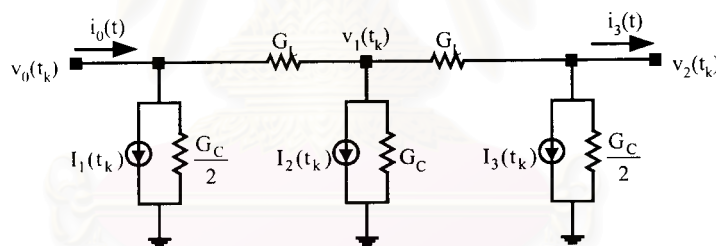


figure 3. The level-0 companion model of figure 2 at the timepoint t_k .

From the companion model (level-0) in the figure 3, the middle node $v_1(t_k)$, can be eliminated to form an upper level (level-1) macromodel as shown in the figure 4. Hence these two consecutive level of macromodels are timepointly equivalent with respect to their common terminal nodes. The parameters of the upper level macromodel are shown in the equation (2a)-(2d). Applying this concept to the N-segmented Transmission line model, it's easy to defining another $\log_2 N$ level companion model parameters as follows. First, the N-segmented companion model on the level-0 of Table 1 are grouped into $N/2$ segments, which a submodel contains 2 cascaded Π segments as shown in the figure 3. This give the level-1 companion model which can be computed by eliminating all middle node of $N/2$ subsegments in the level-0. Clearly the number of node voltages in the level-1 macromodel will reduce to only $N/2$ nodes. Next, the level-1 companion model are further grouped into $N/4$ segments again and all of the middle nodes are eliminated to obtain a level-2 companion model. This process will be repeated to level 3, 4, ... until $\log_2 N$ respectively. The result on the level- $\log_2 N$ is the transmission line companion macromodel, containing only two nodes, which will be used in the analysis of circuit level.

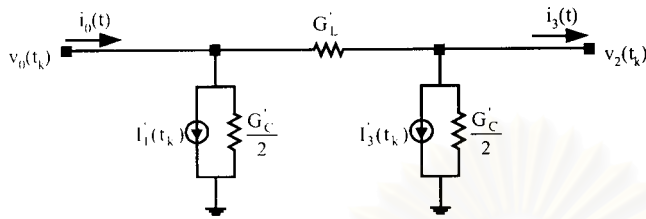


figure 4. The level-1 companion macromodel of the figure 3 at the timepoint t_k .

$$G'_L = \frac{G_L^2}{2G_L + G_C} \quad (2a)$$

$$\frac{G'_C}{2} = \frac{2G_L + G_C}{2} - \frac{2G_L^2}{2G_L + G_C} \quad (2b)$$

$$I'_1(t_k) = \frac{G_L I_2(t_k)}{2G_L + G_C} + I_1(t_k) \quad (2c)$$

$$I'_3(t_k) = \frac{G_L I_2(t_k)}{2G_L + G_C} + I_3(t_k) \quad (2d)$$

2.1 Compute the transmission line companion macromodel

We can summarize the formula for computing the companion model on the level j ; $j=0, 1, 2, \dots, \log_2 N$ as shown in the equation (3a)-(3d).

$$G_L^{(j+1)} = \frac{[G_L^{(j)}]^2}{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}} \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (3a)$$

$$\frac{G_C^{(j+1)}}{2} = \frac{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}}{2} - \frac{2[G_L^{(j)}]^2}{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}} \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (3b)$$

$$I_1^{(j+1)} = \frac{G_L^{(j)} I_{i+1}^{(j)}}{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}} + I_1^{(j)} \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1; \quad i=1, \dots, N-1 \quad (3c)$$

$$I_{i+2}^{(j+1)} = \frac{G_L^{(j)} I_{i+1}^{(j)}}{2G_L^{(j)} + G_C^{(j)}} + I_{i+2}^{(j)} \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1; \quad i=1, \dots, N-1 \quad (3d)$$

2.2 Update Internal variables of the transmission line

The transmission line internal variables will be computed and updated backward from level $\log_2 N$ to $\log_2 \frac{N}{2}$, $\log_2 \frac{N}{4}$, ..., 0. This computation yields the terminal voltages $v_0(t_k)$ and $v_2(t_k)$ of each subsegment of the transmission line that are used as input voltage sources for computing its internal node $v_1(t_k)$ as shown in the figure 5. The formulae is describes in the equation (4). Finally, we will compute and update the inductor current only in the level-0 by using the equation (5).

$$v_1(t_k) = \frac{G_L (v_x + v_z) - I_1}{2G_L + G_C} \quad (4)$$

$$i_{L,i} = \tilde{i}_{L,i} + \frac{h}{L} (v_i - v_{i+1}) \quad i=0,1; \quad (5)$$

where v_i and v_{i+1} are the terminal voltage of the inductors in N -segmented transmission line model.

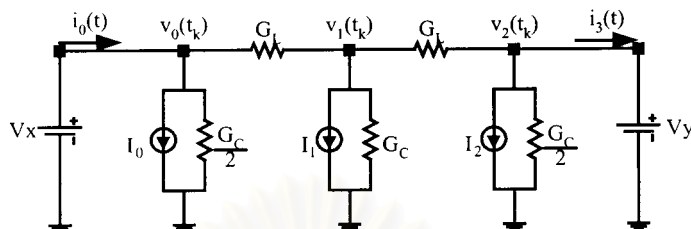


figure 5. Update the internal variables $v_y(t_k)$ of a subsegment of the transmission line.

3. MULTILEVEL TRANSMISSION LINE MODEL WITH TIME DOMAIN SIMULATION

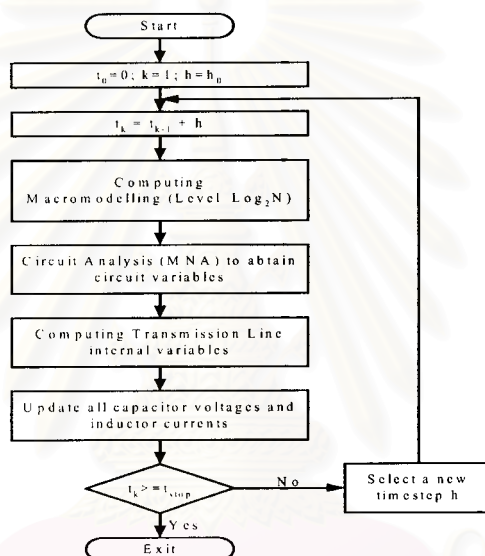


figure 6. Time domain simulation of the transmission line circuit.

Using these multilevel of macromodels, the flowchart for transient analysis of any transmission line circuit can be shown in figure 6, from which there are two processes dealing with the multilevel macromodels. Firstly, the companion macromodel is computed by dividing into $\log_2 N$ levels using the equation (3a)-(3d). Then, only the companion macromodel on the level- $\log_2 N$ as shown in the Table 1 will replace each transmission line in the circuit for performing the MNA circuit analysis. This circuit analysis yields the circuit variables including the terminal voltage $v_0(t_k)$ and $v_N(t_k)$ of the transmission line. The next process is performed on each individual transmission line by using its N -segmented model for computing and updating the internal variables. This process is also divided into $\log_2 N$ levels by using the equation (4)-(5). The result of this second analysis process will be used to compute the new companion model in the next timestep.

4. LATENCY

The segmentation model of transmission line consists of many repetitive subnetworks such as 128 segments. In such case, we can bypass some of the calculation in case most of the subnetworks are inactive or latent, i.e., the value of their electrical variables does not change from the previous timepoint. This usually happens when the transmission line is driven by a step input. These considerations have led to the development of latency technique to combine with the macromodeling concept. If at any time t_k the value of the variables of a subnetwork is found to be constant, then there is no need to find the value of the subnetwork variables at all the subsequent time steps until a change in the input variables of the subnetwork occurs. Thus, the same subnetwork variables can be reused in the upper level without recomputation.

5. EXPERIMENTAL RESULT

The proposed multilevel transmission line macromodels are implemented in a proprietary general purpose circuit simulator LEK [10]. The circuit in figure 7(a) and figure 7(b) are used to test for the program efficiency and accuracy. The first circuit consists of a single transmission line with parameters $R=0.01\Omega/cm$, $L=2.5nH/cm$, $C=1pF/cm$, $l=1cm$, a load resistor and a source resistor of $50\ \Omega$, which matches the characteristic impedance of the line. The voltage source is a pulse. The result of voltage at node 2 were shown on the figure 7(c). The second circuit utilizes a lossy transmission line as a $0.5\ \mu s$ delay element in a positive feedback loop to generate a 2 MHz oscillating waveform whose amplitude is limited to approximately ± 0.8 volt by two nonlinear diodes. The results were shown a comparison between the simulated waveforms obtained by using 3 techniques, i.e. our proposed multilevel macromodeling technique, conventional one level technique and the result from spice3f5. The conventional one level technique was carried out by directly replacing the transmission line as RLCG lumped segments and using spice3f5 to perform the transient simulation. The total CPU time of a Pentium-II based microcomputer for a complete transient simulation excluding the input/output processes and another simulation information were shown in Table 2 and Table 3.

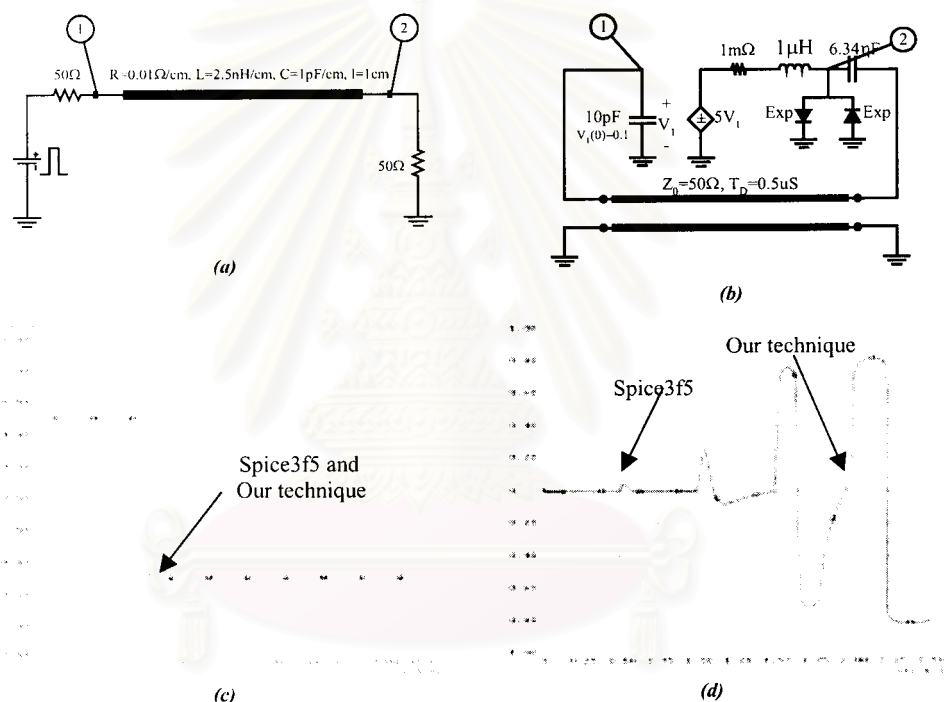


figure 7.(a)The first benchmark circuit, (b) The second benchmark circuit. (c) The simulation result of voltage at node 2 of the figure 7(a). (d) The simulation result of voltage at node 2 of the figure 7(b).

	Spice3f5 (h=10ps)	One level Technique (h=10ps)	Multilevel technique (128 Segments)	
			No Latency	With Latency
1. Operating System	LINUX	LINUX	DOS	DOS
2. Circuit Equations	7	387	3	3
3. Transient Timepoints	1,011	1,185	1,047	1,047
4. Total CPU time (seconds)	2.09	18.21	1.48	1.15

Table 2. Comparison the efficiency of transient simulation between spice3f5, one level technique and the multilevel transmission line macromodeling technique of the circuit in the figure 7(a).

	Spice3f5 (h=1ns)	One level Technique (h=1ns)	Multilevel technique (128 Segments)	
			No Latency	With Latency
1. Operating System	LINUX	LINUX	DOS	DOS
2. Circuit Equations	10	391	6	6
3. Transient Timepoints	2,587	3,636	2,517	2,517
4. Total CPU time (seconds)	10.56	73.2	6.59	5.99

Table 3. Comparison the efficiency of transient simulation between spice3f5, one level technique and the multilevel transmission line macromodeling technique of the circuit in the figure 7(b).

6. CONCLUSION

We conclude that the multilevel transmission line macromodels presented in this paper is highly efficient as far as lumped segments approximation of transmission line is used. To avoid the simultaneous solution of a large number of circuit variables, the transmission line macromodel will be internally computed and substitute the transmission line component in the circuit. Therefore, the overall computation time can be reduced. The latency technique which is used in the paper will be degraded for the simulation with voltage distribution of the transmission line are varying with time as shown in the figure 7(b) circuit.

This technique can be extended to couple transmission lines and even support non-uniform segment approximation. Furthermore, the detailed waveforms of the internal nodes and currents within the transmission line are obtained at no additional cost.

7. ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by the National Science and Technology Development Agency (NSTDA).

8. REFERENCES

1. A.R. Djordjević, T.K. Sarkar, and R.F. Harrington, "Analysis of lossy transmission lines with arbitrary nonlinear terminal networks," IEEE Trans. On Microwave Theory and Techniques, vol.MTT-34, pp.660-666, June 1986.
2. J.R. Griffith and M.S. Nakhla, "Time-domain analysis of lossy coupled transmission lines," IEEE Trans. On Microwave Theory and Techniques, vol.38, pp.1480-1487, Oct 1990.
3. J.S. Roychowdhury and D.O. Pederson, "Efficient transient simulation of lossy interconnect," proc. 28th Design Automation Conference, pp.740-745, June 1991.
4. J.E. Schutt-Aine and R.Mittra, "Scattering Parameter Transient Analysis of Transmission Lines loaded with Nonlinear Terminations," IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol.MTT-36 No.3, pp.529-536, March 1988.
5. J.E. Schutt-Aine and R.Mittra, "Nonlinear Transient Analysis of Coupled Transmission Lines," IEEE Trans. On Circuits and Systems, vol.36(7), July 1989.
6. J.S. Roychowdhury, A.R. Newton, and D.O. Pederson, "Algorithms for the Transient Simulation of Lossy Interconnect," IEEE Trans. On Computer-Aided Design of Integrated circuits and systems, vol.13, no.1, pp.96-104, January 1994.
7. Shen Lin and E.S. Kuh, "Transient Simulation of lossy interconnects based on the recursive convolution formulation," IEEE Trans. on Circuits and Systems I, vol.39, pp.879-892, Nov 1992.
8. R.D. Berry, "An optimal ordering of electronic circuit equations for a sparse matrix solution," IEEE Trans. on Circuit Theory, pp.40-50, January 1971.
9. L.O. Chua and P.M Lin, "Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques," Prentice Hall, 1975.
10. <http://www.ee.eng.chula.ac.th/lek>

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายเมธี หวังคุณธรรม เกิดวันที่ 13 มิถุนายน พ.ศ. 2516 ที่จังหวัดอุบลราชธานี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปีการศึกษา 2536 และระดับปริญญาโท วิศวกรรมศาสตร มหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า แขนงวิชาการระบบเชิงเลข จากคณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปีการศึกษา 2538 จากนั้นได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิตสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า แขนงวิชาการระบบเชิงเลข ที่คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปี 2540



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย