บทที่3

ทฤษฎีการควบคุม

3.1 บทนำ

การควบคุมสมัยใหม่ (modern control) เริ่มต้นในประเทศรัสเซีย และได้รับการพัฒนาตลอดเรื่อยมา สามารถใช้ได้กับระบบที่เป็นเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้นก็ได้และตัวแปรอาจมีค่าเปลี่ยนตามเวลาหรือไม่เปลี่ยนก็ได้ การวิเคราะห์การทำงานของระบบ โดยทั่ว ๆ ไปจะวิเคราะห์ในโดเมนของเวลา (time domain) โดยเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล (differential) แล้วจัดอยู่ในรูปแมทริกซ์ (matrix) หรือที่เรียกว่าสมการสเตตสเปซ (state-space equations) ซึ่งจะสะดวกต่อการนำเทคโนโลยีทางด้านคอมพิวเตอร์ มาช่วยคำนวณเป็นอย่างมาก

ในปัจจุบันระบบต่าง ๆ ในโรงงานได้รับการพัฒนามากขึ้น รวมทั้งมีความยุ่งยากซับซ้อนเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ ระบบดังกล่าวส่วนใหญ่จะมีลักษณะเป็นระบบที่มีตัวแปรเข้าและตัวแปรออกหลายตัว ด้วยเหตุนี้จึงมีการนำเอาทฤษฎีการควบคุมสมัยใหม่ มาใช้ร่วมกับเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยให้การวิเคราะห์และออกแบบระบบการทำงานที่ยุ่งยากและซับซ้อนดังกล่าวทำได้ง่ายขึ้น

บทนี้จึงกล่าวถึงทฤษฎีการควบคุมที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ซึ่งมี 2 ส่วน คือ การควบคุมแบบป้อนกลับสเตต และการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์

3.2 การควบคุมแบบป้อนกลับสเตต

การควบคุมแบบป้อนกลับสเตต (State feedback control) เป็นการควบคุมที่ใช้เทคนิคสเตตสเปซอย่างหนึ่ง โดยอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบที่มีลักษณะเป็นเชิงเส้น ซึ่งรูปแบบของค่าการตอบสนองที่ต้องการต่อระบบ สามารถทำได้โดยเลือกค่าโพลลูพปิด (closed-loop pole) ให้เป็นไปตามที่ต้องการหรือที่เรียกว่าอาศัยหลักการของการวางตำแหน่งโพล (pole placement method) นั่นเอง คือต้องการเปลี่ยนตำแหน่งของโพล ให้อยู่ด้านซ้ายของระนาบเชิงซ้อน เพื่อส่งผลให้ระบบมีเสถียรภาพ สามารถควบคุมได้ดียิ่งขึ้น

3.2.1 อัลกอริธึมของการควบคุมแบบป้อนกลับ

สำหรับแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ไม่เชิงเส้นโดยทั่ว ๆ ไป สามารถทำให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้ โดยอาศัยเทคนิคการทำให้เป็นเชิงเส้น (linearization techniques) ซึ่งมีความสำคัญมาก สำหรับการประยุกต์ใช้การควบคุมแบบเชิงเส้นในกระบวนการไม่เชิงเส้น เทคนิคที่เสนอในครั้งนี้เป็นการประมาณค่าเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้น รอบ ๆ จุดปฏิบัติการ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor 's series)

พิจารณาสมการสเตต สำหรับระบบต่อเนื่องไม่เปลี่ยนตามเวลา สามารถทำให้อยู่ในรูปเชิงเส้น รอบ ๆ จุดใดจุดหนึ่ง ในที่นี้ใช้จุดที่สภาวะคงที่ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \approx f(x_s,u_s) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_s,u_s}(x - x_s) + \left.\frac{df}{du}\right|_{x_s,u_s}(u - u_s) \qquad (3.1)$$

กำหนดให้ $\delta x = x - x_s$ และ $\delta u = u - u_s$ เมื่อ u_s, x_s เป็นตัวแปรปรับและตัวแปรสเตตที่สภาวะคงที่ ซึ่งจะได้ $\delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_s$ ดังนั้นในสมการ (3.1) เขียนได้เป็น

$$\delta\dot{x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_s,u_s}\delta x + \left.\frac{df}{du}\right|_{x_s,u_s}\delta u \qquad (3.2)$$

หรือ

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \qquad (3.3)$$

เมื่อ

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{X_s,U_s} \qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{X_s,U_s}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับสมการขาออก ในระบบต่อเนื่องไม่เปลี่ยนตามเวลา สามารถทำให้อยู่ในรูปเชิงเส้น รอบ ๆ จุดสภาวะคงที่ ได้ดังนี้

$$\delta y = C\delta x + D\delta u \qquad (3.4)$$

เมื่อ

$$C = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{X_s, U_s} \qquad\qquad D = \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{X_s, U_s}$$

เขียนสมการ (3.3) และสมการ (3.4) ในรูปทั่ว ๆ ไปได้เป็น

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.5}$$

$$y = Cx + Du \tag{3.6}$$

เรียกสมการ (3.5) และสมการ (3.6) ว่า "สมการสเตต สเปซ"

เมื่อ x เป็นเวกเตอร์ตัวแปรสเตต มีขนาด n x 1

u เป็นเวกเตอร์ตัวแปรปรับ มีขนาด r x 1

y เป็นเวกเตอร์ตัวแปรเอาท์พุท มีขนาด p x 1

และ แมทริกซ์ A เป็นแมทริกซ์ จาโคเบียน มีขนาด n x n

B เป็นแมทริกซ์ จาโคเบียน มีขนาด n x r

C เป็นแมทริกซ์ จาโคเบียน มีขนาด p x n

D เป็นแมทริกซ์ จาโคเบียน มีขนาด p x r

เมื่อให้สมการตัวแปรปรับอยู่ในรูปผลต่าง

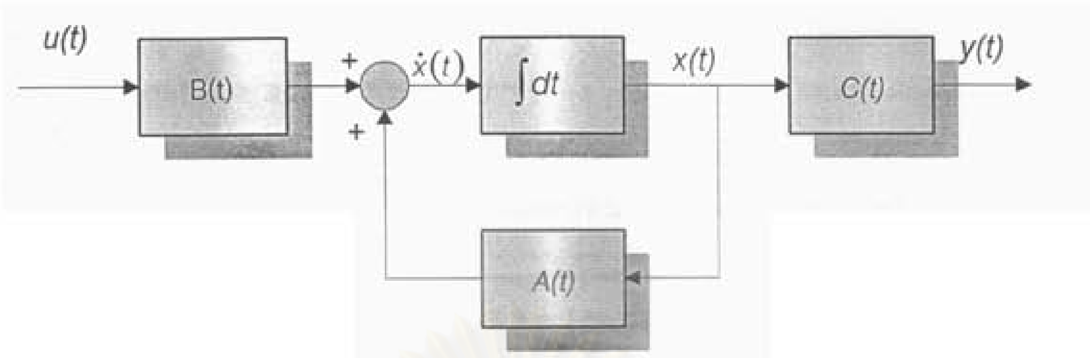
$$\delta u(t) = -K_P \delta x(t) \tag{3.7}$$

แทนสมการ (3.7) ลงในสมการ (3.3) จะได้สมการ การควบคุมลูพปิด ดังนี้คือ

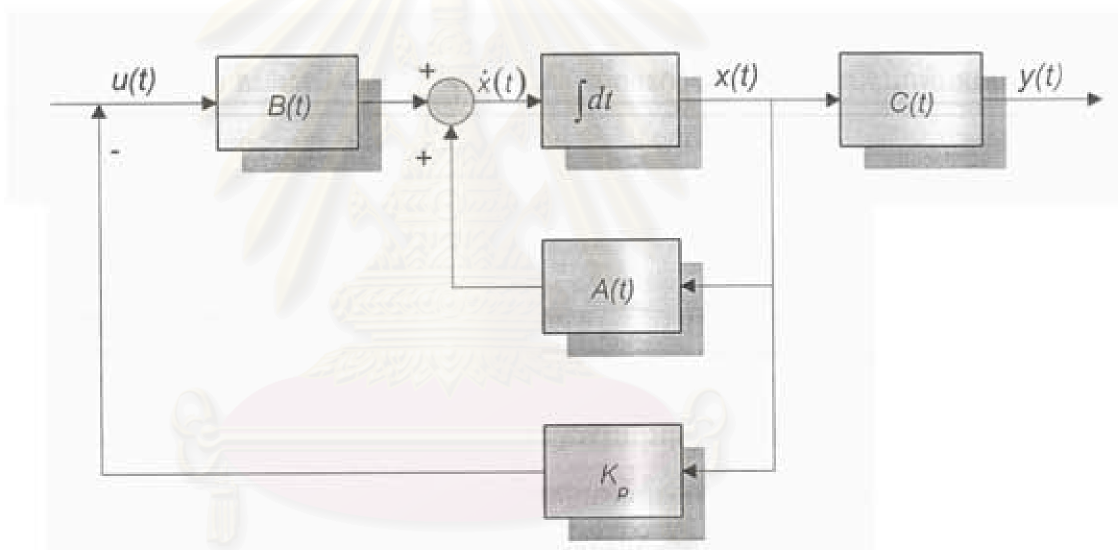
$$\delta \dot{x}(t) = [A - BK_p] \delta x(t) \tag{3.8}$$

เมื่อ K_P เป็นแมทริกซ์คงที่ เรียกว่า อัตราขยายของการป้อนกลับสเตต (State feedback gain) มีขนาด r x n

แผนภาพของกระบวนการเมื่อไม่มีการควบคุมและเมื่อมีการควบคุมแบบป้อนกลับสเตต แสดงดังรูปที่ 3.1 และ 3.2 ตามลำดับ



รูปที่ 3.1 แสดงแผนภาพของกระบวนการเมื่อไม่มีการควบคุม



รูปที่ 3.2 แสดงแผนภาพของกระบวนการเมื่อมีการควบคุมแบบป้อนกลับสเตต $u(t) = -k_p x(t)$

อาจเขียนสมการตัวแปรปรับในรูปดิสครีตได้ดังนี้

$$u(k) - u_s = -K_P [\, x(k) - x_s \,] \tag{3.9}$$

แต่อัลกอริธึมของการควบคุมแบบป้อนกลับสเตตที่มีรูปแบบตามข้างต้นนี้ ไม่สามารถที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้ในกระบวนการที่ไม่ทราบค่าที่สภาวะคงตัว หรือไม่ทราบค่าของกระบวนการที่สภาวะ

คงตัวที่ถูกต้อง ดังนั้นเพื่อที่จะนำแก้ไขปัญหาส่วนนี้ จึงจัดรูปแบบใหม่ให้อยู่ในรูปของเวโลซิตี้ (velocity form) ดังต่อไปนี้

3.2.2 อัลกอริธึมของการควบคุมแบบป้อนกลับสเตต ในรูปเวโลซิตี้

◆ การควบคุมแบบป้อนกลับสเตตร่วมกับพี-คอนโทรล

(State feedback control with proportional control)

พิจารณา ค่าการควบคุมของขั้นตอนที่ k^{th} และ $(k+1)^{th}$ ดังนี้

$$u(k)-u_s=-K_P[x(k)-x_s] \tag{3.10}$$

$$u(k-1)-u_s=-K_P[x(k-1)-x_s] \tag{3.11}$$

สมการที่ (3.10) ลบด้วย สมการที่ (3.11) ดังนั้นจะได้ สมการการควบคุมแบบป้อนกลับสเตตร่วมกับพี-คอนโทรล (State feedback control with proportional control) ดังนี้

$$u(k)=u(k-1)-K_p[x(k)-x(k-1)] \tag{3.12}$$

◆ การควบคุมแบบป้อนกลับสเตตร่วมกับพีไอ-คอนโทรล

(State Feedback Control with Proportional Integral control)

อย่างไรก็ตาม เป็นที่ทราบกันดีว่าในการประยุกต์ใช้การควบคุมแบบพี-คอนโทรลโดยส่วนใหญ่ จะไม่สามารถควบคุมกระบวนการที่สนใจให้อยู่ที่ค่าเซ็ทพอยท์ที่ต้องการโดยไม่มีออฟเซ็ท ดังนั้นจึงมีความต้องการที่จะรวมเทอมอินทีกรัลเข้าไปด้วยเพื่อลดออฟเซ็ทให้น้อยลง หรือทำให้ไม่มีออฟเซ็ทเลย

จากระบบเชิงเส้น แสดงอยู่ในรูปสมการสเตตสเปซ

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{3.13}$$

ให้ $D=0$;

$$y(t)=Cx(t) \tag{3.14}$$

นำเอาเทอมอินทีกรัลมาใช้ร่วมกับการควบคุมแบบป้อนกลับสเตต

จะได้

$$u(t) = -K_P\, x(t) - K_i \int_0^{\infty} x(t)dt \tag{3.15}$$

เมื่อแปลงสมการ (3.15) อยู่ในรูปดิสครีต ได้ดังนี้

$$u(k) - u_S = -K_P[x(k) - x_S] - K_i \sum_{k=0}^{k}[x(k) - x_s]\Delta t \tag{3.16}$$

ทำนองเดียวกัน ค่าการควบคุมของขั้นตอนที่ k^{th} และ $(k+1)^{th}$ ดังนี้

$$u(k) - u_s = -K_P[\,x(k) - x_s\,] - K_i \sum_{k=0}^{k}[\,x(k) - x_s\,]\Delta t \tag{3.17}$$

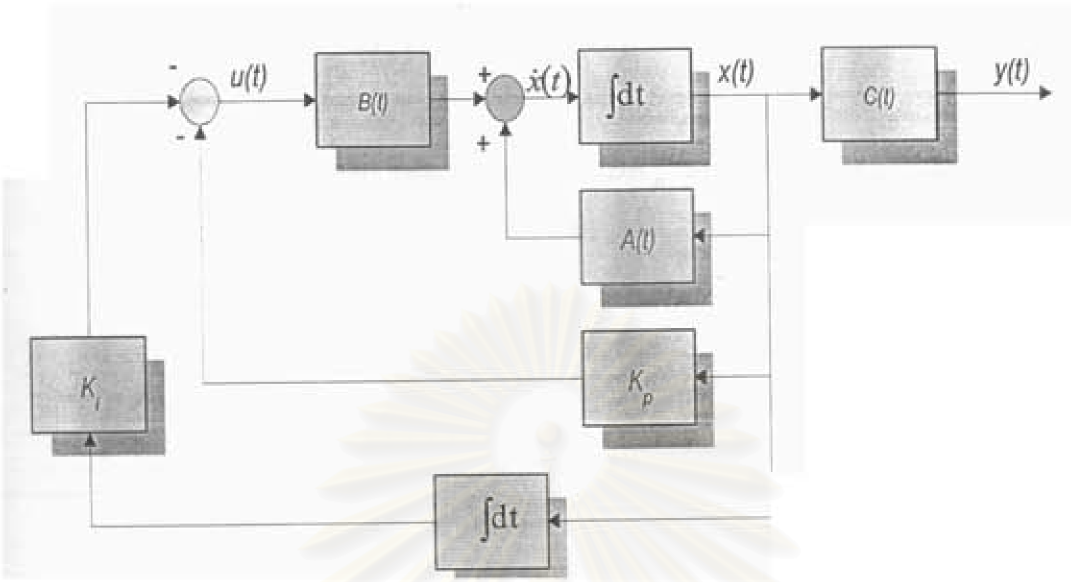
$$u(k-1) - u_s = -K_P[\,x(k-1) - x_s\,] - K_i \sum_{k=0}^{k-1}[\,x(k-1) - x_s\,]\Delta t \tag{3.18}$$

ดังนั้นสมการ (3.17) ลบด้วยสมการ (3.18) จะได้ สมการการควบคุมแบบป้อนกลับสเตตร่วมกับพีไอ-คอนโทรล (State feedback control with proportional integral control) ดังนี้

$$u(k) = u(k-1) - K_p[x(k) - x(k-1)] - K_i \Delta t[\,x(k) - x_s\,] \tag{3.19}$$

เมื่อ K_i เป็นค่าอัตราขยายของการควบคุมอินทิกรัลในการควบคุมแบบป้อนกลับสเตต

แผนภาพแสดงกระบวนการควบคุมแบบป้อนกลับสเตตร่วมกับพีไอ-คอนโทรล สำหรับระบบต่อเนื่องแสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงแผนภาพของกระบวนการควบคุมแบบป้อนกลับสเตตร่วมกับ พีไอ-คอนโทรล

หมายเหตุ โดยปกติการประยุกต์ใช้งานของเทคนิคการควบคุมแบบป้อนกลับสเตตจะสามารถใช้งานได้ในช่วงแคบ ๆ รอบจุดสภาวะคงตัว (จุดที่ทำการประมาณระบบไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นระบบเชิงเส้น) ดังนั้นเพื่อให้เทคนิคการควบคุมแบบนี้สามารถประยุกต์ใช้ในช่วงที่กว้างขึ้น การทำการประมาณระบบไม่เชิงเส้นให้เป็นระบบเชิงเส้นจึงมีการปรับปรุงโดยเปลี่ยนจากการประมาณรอบจุดสภาวะคงตัวให้เป็นการประมาณรอบจุดใด ๆ ณ เวลานั้น ซึ่งการทำการประมาณอย่างนี้ส่งผลให้แมทริกซ์ A และ B ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่เวลานั้น เปลี่ยนแปลงค่าไปเมื่อได้รับข้อมูลใหม่ และจุดทำการประมาณค่าก็เปลี่ยนไปด้วย (ต่างไปจากการประมาณค่าแบบเดิมที่แมทริกซ์ A และ B เป็นค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา) ซึ่งส่งผลให้ค่า K_p ของการควบคุมแบบป้อนกลับเปลี่ยนแปลงตามเวลาด้วย ทำให้การควบคุมแบบป้อนกลับสเตตแบบนี้สามารถทำการควบคุมระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ดีกว่าการควบคุมแบบป้อนกลับแบบดั้งเดิม

3.2.3 เงื่อนไขที่จำเป็นในการออกแบบการวางตำแหน่งขั้ว
(Necessary condition for pole - placement design)

เงื่อนไขที่สำคัญที่สุดคือระบบ ต้องสามารถควบคุมได้ (controllable system)
จากสมการ (3.8) คำตอบของสมการคือ

$$x(t) = e^{(A-BK_p)t}x(0) \tag{3.20}$$

เมื่อค่าเจาะจง (eigen value) ของแมทริกซ์ $A - BK_p$ ซึ่งได้แก่ $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ จะสามารถทำให้ระบบมีคุณลักษณ์ (characteristic) ตามต้องการ

พิสูจน์ ถ้าระบบไม่สามารถควบคุมได้ (uncontrollable system) แล้วค่าเจาะจงของแมทริกซ์ $A - BK_p$ ไม่สามารถควบคุมระบบได้ โดยการนำสเตตไปป้อนกลับ

สมมติ ให้ระบบที่พิจารณาเป็นระบบที่ไม่มีความควบคุมได้ ดังนั้นค่าแรงค์ ของ controllability matrix จะมีค่าน้อยกว่า n หรือเขียนได้ว่า

$$rank \quad [B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B] \quad = q < n \tag{3.21}$$

แสดงว่ามีจำนวนเวกเตอร์คอลัมน์อิสระ จำนวน q คอลัมน์ใน controllability matrix กำหนดให้ $f_1, f_2, \ldots, f_q$ เป็นเวกเตอร์คอลัมน์ที่เป็นอิสระ นำมาเข้ารวมเข้ากับเวกเตอร์ $\nu_{q+1}, \nu_{q+2}, \ldots, \nu_n$ ดังนั้น

$$P = [f_1 \vdots f_2 \vdots \ldots \vdots f_q \vdots \nu_{q+1} \vdots \nu_{q+2} \vdots \ldots \vdots \nu_n] \tag{3.22}$$

จะได้ว่าแมทริกซ์ P มีจำนวนแรงค์ เท่ากับ n ซึ่งมีการพิสูจน์ (Ogata, K.,1997) แล้วว่า

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

เมื่อ แมทริกซ์ A_{11} มีขนาด q x q, A_{12} มีขนาด q x (n-q), A_{22} มีขนาด (n-q) x (n-q), แมทริกซ์ศูนย์มีขนาด (n-q) x q

$$\hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ แมทริกซ์ B_{11} มีขนาด q x 1, แมทริกซ์ศูนย์มีขนาด (n-q) x 1

กำหนดให้ $\hat{K} = K_pP = \begin{bmatrix} K_{p1} & K_{p2} \end{bmatrix}$

$$\left| sI - A + BK_p \right| = \left| P^{-1}(sI - A + BK_p)P \right|$$

$$= \left| sI - P^{-1}AP + P^{-1}BK_pP \right|$$

$$= \left| sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}_p \right|$$

$$= \left| sI - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{p1} & K_{p2} \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} sI_q - A_{11} + B_{11}K_{p1} & -A_{12} + B_{11}K_{p2} \\ 0 & sI_{n-q} - A_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \left| sI_q - A_{11} + B_{11}K_{p1} \right| \left| sI_{n-q} - A_{22} \right| = 0 \tag{3.23}$$

จะได้ว่า I_q เป็นแมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด q และ I_{n-q} เป็นแมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n-q$ สังเกตุได้ว่าจากสมการ (3.23) ค่าเจาะจงของ A_{22} ไม่ขึ้นกับค่า K_p ดังนั้นระบบนี้จึงไม่สามารถควบคุมได้ (uncontrollable system) ซึ่งหมายความว่า ค่าเจาะจงของแมทริกซ์ A ไม่สามารถอยู่ในตำแหน่งที่ต้องการได้

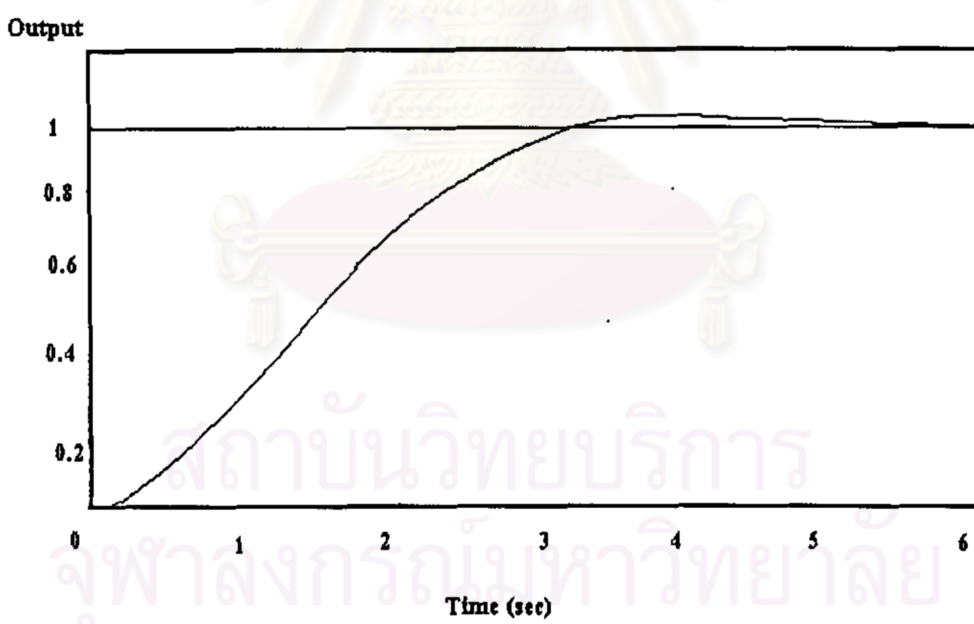
3.2.4 การเลือกตำแหน่งของโพล (Choosing pole location)

ส่วนใหญ่การเลือกโพลจะใช้วิธีลองถูกลองผิด เพื่อให้ผลการตอบสนองของกระบวนการเป็นไปตามต้องการ แต่จะมีแนวทางในการเลือกโพลดังนี้

- สมมติว่าระบบเป็นอันดับหนึ่งที่มีโพลเท่ากับ -1 ถ้าเปลี่ยนโพลนี้เท่ากับ -10 จะส่งผลให้ค่าคงที่เวลา (time constant) ลดลง ระบบจะมีการตอบสนองอย่างรวดเร็ว ซึ่งถ้าเอาท์พุท เป็นความต่างศักย์, ความดัน, ระยะทาง, ความเร็ว และ อุณหภูมิ ฯลฯ ตัววัดและแอกทูเอเตอร์ (actuator) ที่นำมาใช้ในงานในระบบที่รวดเร็วนี้ ต้องเป็นตัววัดที่มีความแม่นยำสูงและใช้แอกทูเอเตอร์ ที่มีขนาดใหญ่และแข็งแรง อย่างเช่น มอเตอร์ ทำให้ต้นทุนเพิ่มสูงขึ้น
- ถ้าโพลตัวใดตัวหนึ่งอยู่ฝั่ง LHP ไม่จำเป็นต้องเปลี่ยนตำแหน่งใหม่
- ถ้าโพลอยู่ฝั่ง RHP หรืออยู่ใกล้กับแกนจินตภาพ ควรจะเปลี่ยนหรือย้ายตำแหน่งใหม่และย้ายข้ามแกนจินตภาพมายังฝั่ง LHP และเปลี่ยนเครื่องหมายเป็นลบเสีย เช่น โพลเดิมมีค่าเท่ากับ 2 ควรเปลี่ยนเป็น -2

- ถ้าโพลเป็นจำนวนเชิงซ้อน สามารถย้ายตำแหน่งให้ได้ transient response ตามต้องการ และจะมีคอนจูเกต เป็นโพลโดยอัตโนมัติ
- ไม่ควรเลือกโพลที่มีค่าติดลบหรืออยู่ฝั่ง LHP มากเกินไป ทำให้ระบบมี bandwidth เพิ่มขึ้น และระบบจะมีความไวต่อสัญญาณรบกวนมากขึ้น

ตัวอย่าง ระบบหนึ่งมีโพลเท่ากับ [2, -10, -0.1-j10, -0.1+j10] เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเซ็ทพอยท์เพิ่มขึ้นหนึ่งเท่าตัว ต้องการให้ระบบมีการตอบสนองดังนี้คือ มีโอเวอร์ชูทน้อยกว่า 10% และมีเวลาสมดุลน้อยกว่า 5 วินาที ดังนั้นค่าโพลที่ควรเปลี่ยนคือ 2 ควรเปลี่ยนเป็น -2, ค่าโพล -10 ควรคงเดิมไว้, ค่าโพลเชิงซ้อนเดิมนั้นมี damping ratio น้อยเกินไป ควรถูกเปลี่ยนเป็น -1-j และ -1+j เพื่อให้ได้การตอบสนองตามต้องการ ดังนั้นค่าโพลใหม่จึงมีค่าดังนี้ [-2, -10,-1-j,-1+j] ซึ่งรูปที่ 3.4 จะแสดงตัวอย่างการตอบสนองของกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงเซ็ทพอยท์เพิ่มขึ้นจากเดิมหนึ่งเท่าตัวสำหรับระบบที่มีอันดับเท่ากับ 4



รูปที่ 3.4 กราฟการตอบสนองของกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงเซ็ทพอยท์เพิ่มขึ้นจากเดิมหนึ่งเท่าตัวสำหรับระบบที่มีอันดับเท่ากับ 4 โดยมีค่าโพลเท่ากับ [-2, -10,-1-j,-1+j]

3.2.5 การหาค่าอัตราขยายของการป้อนกลับสเตต

การหาค่า Kp ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของโพลวงปิด ดังนั้นการเลือกโพลวงปิด หรือสมการคุณลักษณะ (characteristic equation) ที่ต้องการนั้น ต้องตัดสินใจเลือกให้มีความเหมาะสมต่อระบบนั้นมากที่สุด เพราะตำแหน่งของโพลวงปิดเปลี่ยนไป ค่าอัตราขยายของการป้อนกลับสเตตก็จะเปลี่ยนไปด้วย และความเร็วของการตอบสนองต่อเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อน, ความไวต่อสิ่งรบกวน และสัญญาณรบกวนต่อตัวแปรวัด ก็แตกต่างไปด้วย นั่นคือถ้าเพิ่มความเร็วต่อการตอบสนองของเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนมากขึ้น หรือมีความไวสัญญาณรบกวนต่อตัวแปรวัด (measurement noise) เพิ่มขึ้น ผลการควบคุมของระบบที่ได้ก็จะมีการตอบสนองเร็วขึ้นซึ่งผลที่ได้จะตรงกันข้ามกันกับเมื่อระบบมีสิ่งรบกวน (disturbance) การตอบสนองของกระบวนการจะช้าลง

ค่าอัตราขยายการป้อนกลับสเตต จึงมีได้หลายค่า รวมถึงการมีสมการคุณลักษณะได้หลายสมการ ซึ่งเราต้องเลือกค่า K_p เพียงหนึ่งค่าเท่านั้น ที่จะทำให้ระบบมีสมรรถนะดีที่สุด

วิธีการที่ใช้ในการหาค่าอัตราขยายของการป้อนกลับสเตต มีหลายวิธีแต่วิธีที่นิยมใช้ทั่วไปสำหรับระบบ SISO คือวิธีของเอคเคอร์มันน์ (Ackermann's formula)

☆ วิธีของเอคเคอร์มันน์

จากสมการของระบบการควบคุมวงปิดที่อยู่ในรูป

$$\dot{x} = (A - BK_p)x \qquad (3.24)$$

กำหนดให้ ระบบนี้มีความควบคุมได้ และให้ค่าโพลวงปิด มีค่าดังนี้

$s = \mu_1, s = \mu_2, \ldots, s = \mu_n$ ให้

$$\widetilde{A} = A - BK_p \qquad (3.25)$$

จะได้สมการคุณลักษณะที่ต้องการเป็นดังนี้

$$\left| sI - A + BK_p \right| = \left| sI - \widetilde{A} \right| = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n)$$
$$= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

จากทฤษฎีของ Cayley-Hamilton

$$\Phi(\tilde{A}) = \tilde{A}^n + \alpha_1\tilde{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\tilde{A} + \alpha_n = 0 \tag{3.26}$$

พิจารณา คุณสมบัติเหล่านี้คือ

$$\begin{aligned} I &= I \\ \tilde{A} &= A - BK_p \\ \tilde{A}^2 &= (A - BK_p)^2 = A^2 - ABK_p - BK_p\tilde{A} \\ \tilde{A}^3 &= (A - BK_p)^3 = A^3 - A^2BK_p - ABK\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \end{aligned}$$

คูณสมการต่าง ๆ เหล่านี้ ด้วย $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0 (\alpha_0 = 1)$ ตามลำดับ และรวมเทอมเข้าด้วยกัน จะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha_3 I + \alpha_2\tilde{A} + \alpha_3\tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 &= \alpha_3 I + \alpha_2(A - BK_p) + \alpha_3(A^2 - ABK_p - BK_p\tilde{A}) + \\ &\quad A^3 - A^2BK_p - ABK_p\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\alpha_3 + \alpha_2 A + \alpha_1 A^2 + A^3) - \alpha_2 BK_p - \alpha_1 ABK_p - \alpha_1 BK_p\tilde{A} \\ &\quad - A^2BK_p - ABK_p\tilde{A} - BK\tilde{A}^2 \end{aligned} \tag{3.27}$$

จากสมการที่ (3.26)

$$\alpha_3 I + \alpha_2\tilde{A} + \alpha_3\tilde{A}^2 + \tilde{A}^3 = \Phi(\tilde{A}) = 0 \tag{3.28}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\alpha_3 I + \alpha_2 A + \alpha_3 A^2 + A^3 = \Phi(A) \neq 0 \tag{3.29}$$

แทนสมการ (3.28) และ (3.29) ลงในสมการ (3.27) จะได้

$$\Phi(\tilde{A}) = \Phi(A) - \alpha_2 BK_p - \alpha_1 BK\tilde{A} - BK_p\tilde{A} - A^2BK_p$$

เมื่อ $\Phi(\tilde{A}) = 0$, ดังนั้น

$$\Phi(A) = B(\alpha_2 K_p + \alpha_1 K\tilde{A} + B\tilde{A}^2) + AB(\alpha_1 K_p + K_p\tilde{A}) + A^2BK_p$$

$$=\begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \vdots A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_2K_p+\alpha_1K_p\widetilde{A}+K\widetilde{A}^2 \\ \alpha_1K_p+K_p\widetilde{A} \\ K_p \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

ถ้าระบบมีความควบคุมได้ อินเวอร์สของ controllability matrix $\begin{bmatrix} B \vdots AB \vdots A^2B \end{bmatrix}$ จะมีค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการ (3.30) ด้วย อินเวอร์สของ controllability matrix

$$\begin{bmatrix} B \vdots AB \vdots A^2B \end{bmatrix}^{-1}\Phi(A)=\begin{bmatrix} \alpha_2K_p+\alpha_1K_p\widetilde{A}+K_p\widetilde{A}^2 \\ \alpha_1K_p+K_p\widetilde{A} \\ K_p \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

และคูณทั้งสองข้างของสมการ (3.31) ด้วย แมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \vdots AB \vdots A^2B \end{bmatrix}^{-1}\Phi(A)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_2K_p+\alpha_1K_p\widetilde{A}+K_p\widetilde{A}^2 \\ \alpha_1K_p+K_p\widetilde{A} \\ K_p \end{bmatrix}=K_p$$

เขียนใหม่เป็น

$$K_p=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \vdots AB \vdots A^2B \end{bmatrix}^{-1}\Phi(A) \tag{3.32}$$

สมการ (3.32) เป็นสมการการหาค่าอัตราขยายของการป้อนกลับสเตต โดยวิธีแอคเคอร์มันน์ และสามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปของระบบที่มี สเตต n ตัว ได้ดังนี้

$$K_p=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1}\Phi(A) \tag{3.33}$$

นอกจากวิธีของแอคคอร์มันน์ แล้ว ยังมีวิธีการหาค่าอัตราการขยายป้อนกลับสเตตอีก 2 วิธีคือ

* **เปลี่ยนรูปของสมการสเตตเป็นรูป คาโนนิเคิล** (Canonical form)

หาค่าทรานสเฟอร์มชัน แมทริกซ์ (Transformation matrix) : T เพื่อที่จะเปลี่ยนสมการสเตตให้อยู่ในรูป คาโนนิเคิล ซึ่งเป็นรูปแบบที่ง่าย และมีคุณสมบัติเกี่ยวกับ ความควบคุมได้และความสังเกตุได้เหมือนเดิม

นิยามของทรานสเฟอร์เมชัน แมทริกซ์ :

$$T = MW \tag{3.34}$$

เมื่อ $M = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อเลือกสมการคุณลักษณะที่ต้องการไว้แล้วหนึ่งสมการ

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0 \tag{3.35}$$

ทราบค่า $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของสมการคุณลักษณะของระบบยังไม่มีการควบคุม

และเมื่อมีการควบคุมแบบป้อนกลับสเตต สมการคุณลักษณะของระบบเปลี่ยนไปดังนี้

$$|sI - A + BK_p| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \tag{3.36}$$

โดยที่ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ เป็น ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการคุณลักษณะของระบบเมื่อมีการควบคุมและมีโพลวงปิดตามที่ต้องการ

ค่า K_P หาได้จาก

$$K_p = [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_1 - a_1]T^{-1} \tag{3.37}$$

$$= [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_1 - a_1](MW)^{-1} \tag{3.38}$$

ซึ่งถ้า สมการสเตตอยู่ในรูป คาโนนิเคิล แล้วระบบสามารถควบคุมได้ แมทริกซ์ T จะเท่ากับแมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identical matrix)

ดังนั้น

$$K_p = [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_1 - a_1] \tag{3.39}$$

❖ ใช้การแทนค่าโดยตรง

ถ้าระบบมีอันดับต่ำ ๆ สามารถแทนค่า $K_p = [K_{p1} \vdots K_{p2} \vdots \cdots \vdots K_{pn}]$ ลงในสมการคุณลักษณะโดยตรงได้เลย

$$\left|sI - A + BK_p\right| = (s-\mu_1)(s-\mu_2)\ldots(s-\mu_n) \tag{3.40}$$

ซึ่งทั้งสองข้างของสมการจะอยู่ในรูปโพลิโนเมียลของ s ใช้การเทียบค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสองข้าง จะสามารถหาค่า $K_{p1}, K_{p2}, \ldots, K_{pn}$ ได้

วิธีนี้เหมาะสำหรับ อันดับของสมการ $n \leq 3$ เท่านั้น

ข้อสังเกตุ ปัญหาของการควบคุมโดยวางตำแหน่งโพล สามารถใช้ โปรแกรม Matlab แก้สมการได้ โดยใช้ทูลบ๊อกซ์ Control System Toolbox ที่มีฟังก์ชัน Acker และ Place ในการหาค่าอัตราขยายป้อนกลับ (K_p) แต่ฟังก์ชัน "Acker" ใช้ได้เฉพาะ ระบบที่เป็น SISO เท่านั้น แต่ "Place "ใช้ได้ทั้ง SISO และ MIMO

3.3 การประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์

เนื่องจากข้อจำกัดของการประยุกต์ใช้ตัวควบคุมแบบป้อนกลับสเตต คือสเตตทุกตัวที่ป้อนกลับ จะต้องทราบค่า แต่ในกระบวนการจริงนั้นสเตตทุกตัวไม่สามารถวัด หรือทราบค่าที่แน่นอนได้ อาจเนื่องมาจาก ขีดจำกัดทางอุปกรณ์การวัด, การมีจำนวนตัวแปรสเตตที่มากเกิน, ปัญหาด้านเศรษฐศาสตร์ และค่าที่ได้จากการวัดมีสัญญาณรบกวน ฯลฯ ดังนั้นจึงมีการนำเอาการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ มาแก้ปัญหาดังกล่าวข้างต้น ในที่นี้จะเลือกใช้ คาลมานฟิลเตอร์

3.3.1 **คาลมานฟิลเตอร์** (Kalman Filter)

คาลมานฟิลเตอร์ เป็นเทคนิคการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์อย่างหนึ่ง ที่ให้ผลการคำนวณอย่างมีประสิทธิภาพ แต่ข้อแม้การใช้คาลมาน คือ ระบบต้องสังเกตุได้ (observability) จึงสามารถประมาณค่าสเตต ได้จากสมการการวัด

จากสมการ (3.41) และ สมการ (3.42)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{3.41}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.42}$$

แปลงให้อยู่ในรูปดิสครีต (สมมติให้ค่า D เป็นศูนย์ เพื่อให้ง่ายขึ้น) และถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบสุ่ม ξ และ η จะได้สมการ (3.43) และ สมการ (3.44)ตามลำดับ

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) + \xi(k) \tag{3.43}$$

$$y(k+1) = Cx(k) + \eta(k) \tag{3.44}$$

เมื่อ

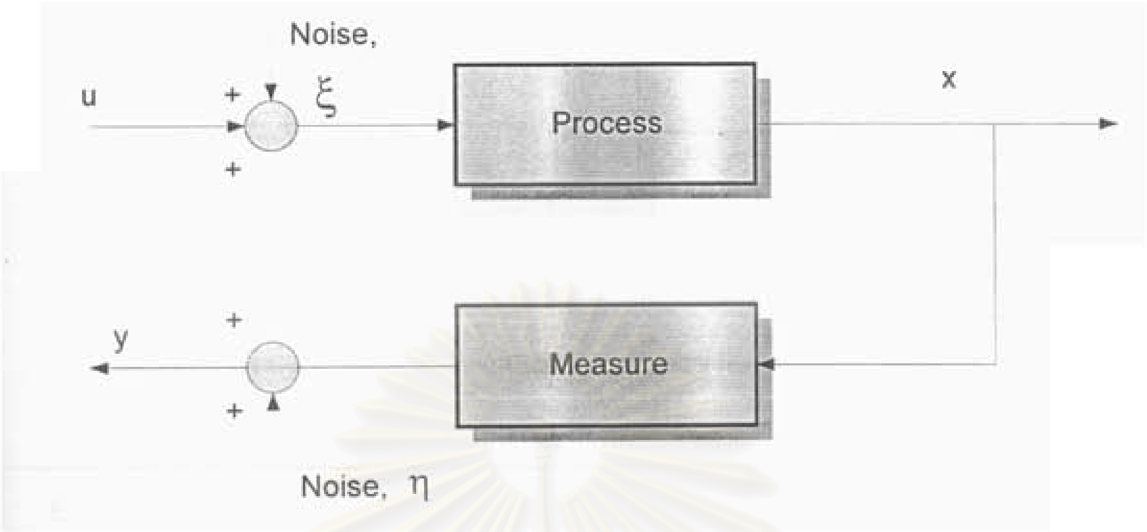
$$\tilde{A} = I + A\Delta t$$

$$\tilde{B} = B\Delta t$$

$\xi(k)$ = สัญญาณรบกวนแบบสุ่มจาก การรบกวนของระบบทั้งหมด, ความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองของระบบ เป็นต้น

$\eta(k)$ = สัญญาณรบกวนแบบสุ่มจาก การวัด ด้านขาออก

แผนภาพแสดงโมเดลของระบบตามสมการ (3.43) และ (3.44) ได้ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 แสดงโมเดลของระบบที่มีสัญญาณรบกวนแบบสุ่ม

จากโครงสร้างข้างต้น อัลกอริทึมของคาลมาน ฟิลเตอร์ จึงประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

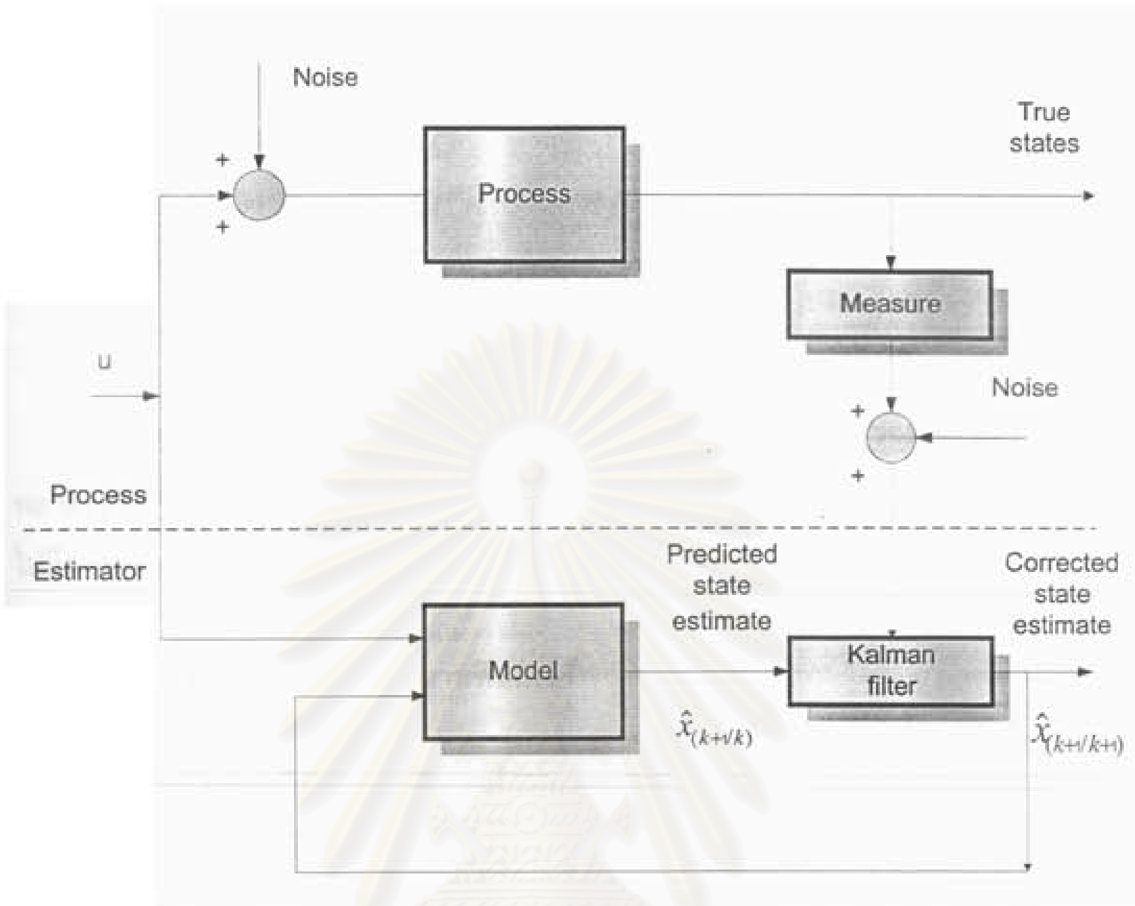
1. ทำนาย (Prediction)

$$\hat{x}_{(k+1/k)} = \tilde{A}\hat{x}_{(k/k)} + \tilde{B}u_{(k/k)} \qquad (3.45)$$

2. ตรวจสอบ (Correction)

$$\hat{x}_{(k+1/k+1)} = \hat{x}_{(k+1/k)} + K_{(k+1)}[y_{(k+1)} - C\hat{x}_{(k+1/k)}] \qquad (3.46)$$

จะเห็นได้ว่าต้องทราบค่าด้านขาเข้าคาลมาน คือ $u_{(k/k)}$ และ $y_{(k+1)}$ เพื่อที่จะต้องการคำนวณหาค่าประมาณของ $x_{(k+1/k+1)}$ ซึ่งโครงสร้างของคาลมานฟิลเตอร์ จะมีลักษณะดังนี้คือ



รูปที่ 3.6 โครงสร้างของคาลมานฟิลเตอร์

นิยาม แมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมเนื่องจากความผิดพลาดในการประมาณดังนี้

$$P(k) = \varepsilon\ [\tilde{x}(k)\,\tilde{x}^T(k)] \qquad (3.47)$$

เมื่อ $\tilde{x}(k)$ คือ ค่าความผิดพลาดจากการประมาณ $= (x(k) - \hat{x}(k))$

$\hat{x}(k)$ คือ ค่าประมาณของ x ที่ เวลา k

$P(k) = cov(\tilde{x}(k))$ จะถูกทำให้ลดลงจนน้อยที่สุด

$Q = cov(\xi)$

$R = cov(\eta)$

เมื่อ cov = ความแปรปรวนร่วม (Covariance)

คาลมานฟิลเตอร์ สำหรับค่าประมาณที่มีความแปรปรวนน้อยที่สุด ณ เวลาถัดไป $k+1$ จะอยู่ในรูปแบบเรียกตัวเองซ้ำ (Recursive form) ดังนี้

$$P^{*}_{(k)} = \widetilde{A}P_{(k)}\widetilde{A}^{T} + Q \tag{3.48}$$

$$K_{(k+1)} = P^{*}_{(k)}C^{T}[CP^{*}_{(k)}C^{T} + R]^{-1} \tag{3.49}$$

$$\hat{x}_{(k+1/k+1)} = \hat{x}_{(k+1/k)} + K_{(k+1)}[y_{(k+1)} - C\hat{x}_{(k+1/k)}] \tag{3.50}$$

$$P_{(k+1)} = [I - K_{(k+1)}C]P^{*}_{(k)}[I - K_{(k+1)}C]^{T} + K_{(k+1)}RK_{(k+1)}^{T} \tag{3.51}$$

โดยที่ แมทริกซ์คาลมานเกน (K) สามารถคำนวณได้จากค่าความแปรปรวนของความผิดพลาดของครั้งก่อน และค่าสัญญาณรบกวน เพื่อทำให้ความแปรปรวนของค่าประมาณในครั้งถัดไปมีค่าลดลง

3.3.2 อัลกอริธึมของคาลมานฟิลเตอร์

ในการประยุกต์ใช้คาลมานฟิลเตอร์ มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่า $\hat{x}_o$, P_o , Q และ R ที่เวลา t_o

2. คำนวณค่าประมาณของสเตตและแมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก (weighting matrix) ที่เวลา $(k+1)$ จากสมการ (3.45) และ (3.49)

$$\hat{x}(k+1/k) = \widetilde{A}\hat{x}(k/k) + \widetilde{B}u(k)$$

$$P^{*}_{(k)} = \widetilde{A}P_{(k)}\widetilde{A}^{T} + Q$$

3. คำนวณหาแมทริกซ์เกนคาลมาน ที่เวลา $(k+1)$ จากสมการ (3.50)

$$K_{(k+1)} = P^{*}_{(k)}C^{T}[CP^{*}_{(k)}C^{T} + R]^{-1}$$

4. จากสมการการวัด จะทราบค่า y ที่ เวลา $k+1$ สามารถคำนวณหาค่าประมาณค่าที่เวลา $(k+1)$ จากสมการ (3.50)

$$\hat{x}_{(k+1/k+1)} = \hat{x}_{(k+1/k)} + K_{(k+1)}[y_{(k+1)} - C\hat{x}_{(k+1/k)}]$$

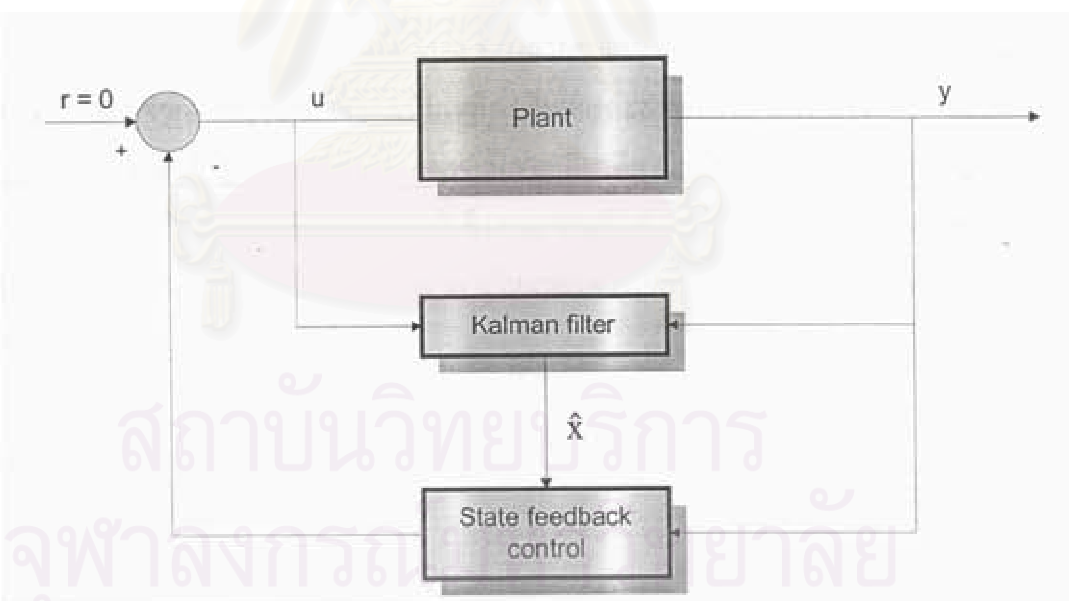
5. คำนวณหาแมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักค่าใหม่ จากสมการ (3.51)

$$P_{(k+1)} = [I - K_{(k+1)}C]P^{*}_{(k)}[I - K_{(k+1)}C]^{T} + K_{(k+1)}RK_{(k+1)}^{T}$$

6. ทำการบวกหนึ่งกับค่า k แล้วกลับไปทำขั้นตอนที่ 2. ใหม่อีกครั้ง

3.3.3 การควบคุมแบบป้อนกลับสเตตร่วมกับคาลมาน ฟิลเตอร์ (State feedback control with Kalman filter)

การนำการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์ มาประยุกต์ใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า หรือที่ไม่แน่นอน จะทำให้การควบคุมแบบป้อนกลับสเตตมีประสิทธิภาพ และความทนทานต่อความไม่แน่นอนของค่าต่าง ๆ มากขึ้น ค่าสเตตเอาท์พุทของกระบวนการที่วัดค่าได้และตัวแปรปรับ ณ เวลาก่อน จะถูกนำมาใช้ในการประมาณค่าสเตตหรือค่าพารามิเตอร์โดยใช้ตัวประมาณค่า เช่น คาลมานฟิลเตอร์ (Kalman Filter) ซึ่งค่าสเตตและพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่า จะมีบทบาทอย่างมากต่อประสิทธิภาพของตัวควบคุมแบบป้อนกลับสเตต ถ้าตัวประมาณค่าให้ผลการประมาณค่าที่ดีแม่นยำใกล้เคียงกับของจริง ตัวควบคุมแบบป้อนกลับสเตต ก็จะสามารถคำนวณค่าตัวแปรปรับได้อย่างถูกต้อง ทำให้สามารถควบคุมให้ตัวแปรควบคุมอยู่ที่ค่าที่ต้องการได้ ส่งผลตัวควบคุมแบบป้อนกลับสเตตทำงานมีประสิทธิภาพมากขึ้นกว่าเดิม
แผนผังการประยุกต์ใช้ตัวประมาณค่าร่วมกับการควบคุมแบบป้อนกลับสเตตสามารถเขียนได้ดังนี้



รูปที่ 3.7 แสดงแผนภาพของกระบวนการควบคุมแบบป้อนกลับสเตตร่วมกับการประมาณค่าสเตตและพารามิเตอร์