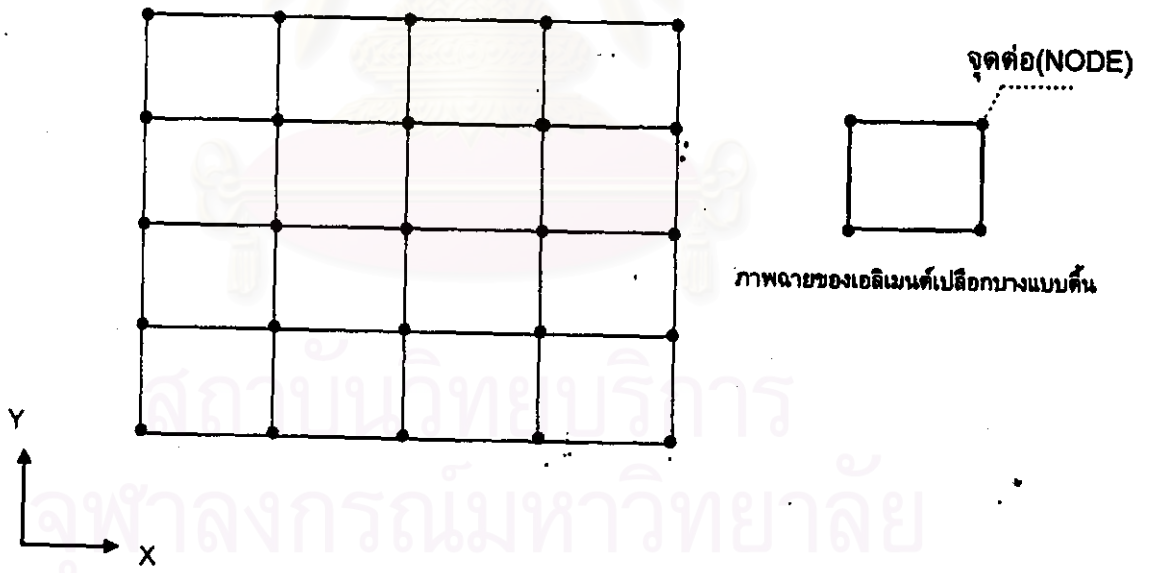
# บทที่ 3

## ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ปราโมทย์ [1] ได้กำหนดลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาโดยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งอยู่บนรากฐานของวิธีการแปรผัน ประกอบด้วยขั้นตอน 6 ขั้นตอน มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

**ขั้นตอนที่ 1**

ทำการแบ่งขอบเขตเนื้อที่ของเปลือกบางที่กำหนดให้ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ในที่นี้จะใช้เอลิเมนต์เป็นรูปเปลือกบางแบบตื้นที่มีภาพฉายบนระนาบ XY เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูปที่ 6

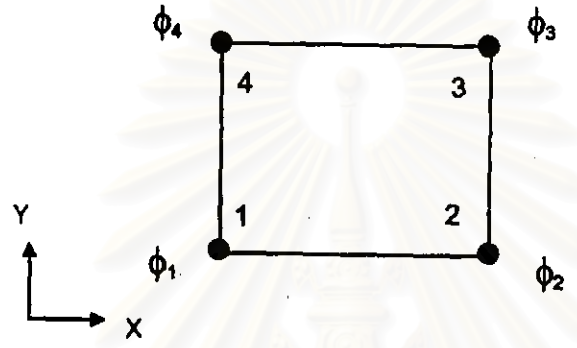



รูปที่ 6 การแบ่งรูปร่างลักษณะของเปลือกบางออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

**ขั้นตอนที่ 2**

เลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Functions) เช่น เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังแสดงในรูปที่ 7 เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบด้วย 4 จุดต่อที่มีหมายเลข 1 2 3 และ 4 โดยที่จุดต่อนั้นเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (Nodal Unknowns) ซึ่งคือ $\phi_1$ $\phi_2$ $\phi_3$ และ $\phi_4$




รูปที่ 7 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบอย่างประกอบด้วยสี่จุดต่อ โดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ

ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านี้เป็นค่าการเคลื่อนตัว (Displacements) ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\,\phi_1 + N_2(x,y)\,\phi_2 + N_3(x,y)\,\phi_3 + N_4(x,y)\,\phi_4 \qquad (3.1)$$

$N_i(x,y)$ , $i = 1, 2, 3, 4$ คือฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์

สมการ (3.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\phi(x,y) = \lfloor N_1 \; N_2 \; N_3 \; N_4 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \lfloor N \rfloor \{\phi\} \qquad (3.2)$$

โดย $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์

**ขั้นตอนที่ 3**

สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้วิธีการแปรผัน เช่น สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของตัวอย่างในรูปที่ 4 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}_e \qquad (3.3)$$

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \qquad (3.4)$$

**ขั้นตอนที่ 4**

นำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเข้าเป็นระบบสมการ (System of Simultaneous Equations) ในรูปแบบ ดังนี้

$$[K]_{sys} \{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \qquad (3.5)$$

**ขั้นตอนที่ 5**

แทนเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ลงในระบบสมการ เพื่อหาค่าของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ซึ่งเป็นค่าของการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่างๆของโครงสร้าง

**ขั้นตอนที่ 6**

นำค่าของการเคลื่อนตัวที่ได้ไปคำนวณเพื่อหาค่าอื่นๆ ที่ต้องการ เช่น ค่าโมเมนต์ ค่าความเค้น และความเครียด

จากการพิจารณาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ข้างต้นพบว่า ขั้นตอนที่ 3 เป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุด ดังนั้นในบทถัดไปจะพิจารณาการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาโครงสร้างเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ รับแรงกระจายสม่ำเสมอในแนวดิ่งโดยเฉพาะ