# บทที่ 1

# บทนำ

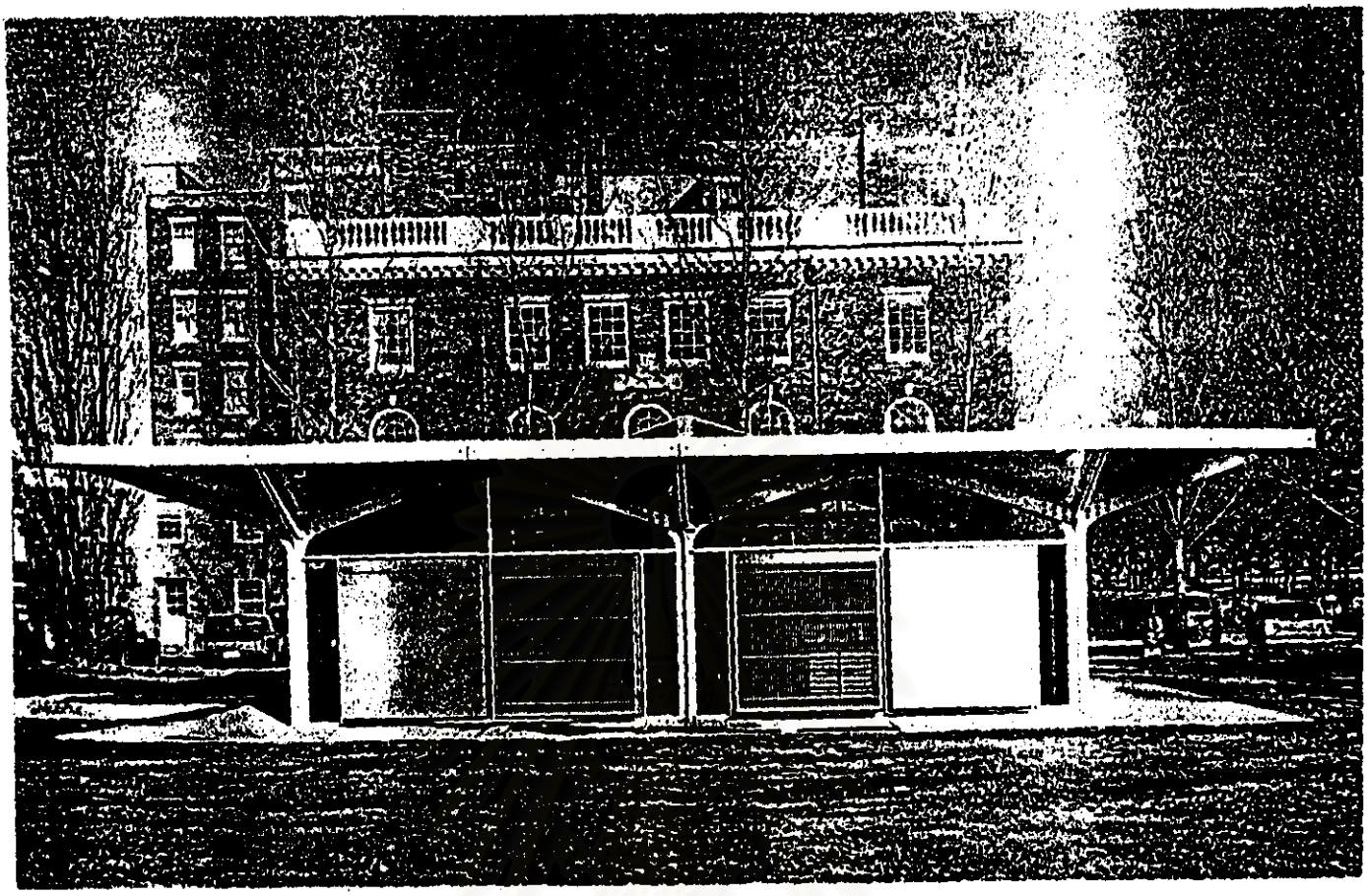
## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

จากอดีตจนถึงปัจจุบัน โครงสร้างเปลือกบางถูกนำมาใช้ในงานสถาปัตยกรรมอย่างแพร่หลาย เช่น สถาปัตยกรรมทางด้านหลังคา โครงสร้างที่ใช้เก็บเมล็ดพืช ปล่องไฟ ถังเก็บน้ำ หอทำความเย็น (Cooling Tower) จากความก้าวหน้าทางด้านการก่อสร้างด้านคอนกรีต ทำให้สามารถสร้างโครงสร้างเปลือกบางได้หลายรูปแบบ ไฮเปอร์โบลิค พาราโบลอยด์ หรือที่เรียกสั้นๆ ว่า รูปไฮปาร์ (Hypar) มีข้อได้เปรียบมากกว่ารูปแบบอื่น เนื่องจากผิวโค้งสามารถสร้างได้จากเส้นตรง ดังนั้นจึงทำให้รูปแบบไฮปาร์ เป็นที่ได้รับความนิยมในการออกแบบและสร้างอาคาร ดังรูปที่ 1-3 แต่เนื่องจากเป็นโครงสร้างที่มีรูปร่างเป็นเปลือก จึงทำให้ยากในการวิเคราะห์หาค่าความเค้นและความเครียดเมื่อรับแรงโดยมีสภาพขอบแบบต่างๆ ซึ่งค่าเหล่านี้จำเป็นอย่างยิ่งในการออกแบบ

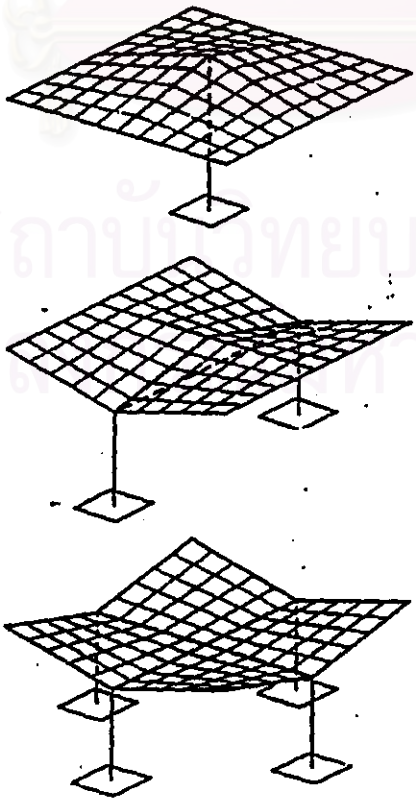
ในอดีตการออกแบบเปลือกบางรูปไฮปาร์จะใช้ทฤษฎีแผ่นเมมเบรน (Membrane Theory) ซึ่งไม่คิดความเค้นดัด (Bending Stress) ในเนื้อวัสดุ แต่ผลที่ได้เป็นเพียงแค่ค่าประมาณอย่างคร่าวๆ จึงจำเป็นต้องมีค่าความปลอดภัย (Safety Factor) ที่สูงมากเพื่อใช้ในการสร้าง และจำเป็นต้องอาศัยประสบการณ์ของวิศวกรออกแบบสูง ดังนั้นขนาดของเปลือกจริงที่สร้างจะมีความหนามากกว่าขนาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีที่แม่นยำกว่ามาก ซึ่งจะส่งผลให้สิ้นเปลืองวัสดุ แรงงาน และค่าใช้จ่าย ด้วยเหตุนี้เองจึงทำให้เกิดงานวิจัยเรื่องนี้อย่างแพร่หลาย

เบลซ์ ซอร์ (Beles and Soares) [3] และ เคราส์ (Kraus) [4] ได้เขียนสมการของเปลือกบางขึ้น ซึ่งเป็นสมการสำหรับเปลือกบางทั่วไป ฟลุกกี้ (Flugge) [5] ได้เขียนสมการของเปลือกบางแบบดื้นทั่วไปโดย ที่ผิวกลาง (Middle Surface) ถูกกำหนดโดยพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinates) (X,Y,Z) ในการหาคำตอบที่แน่นอนของสมการนี้ ทำเกิดงานวิจัยหลายงานซึ่งใช้วิธีการที่ต่างกันออกไป เริ่มตั้งแต่การใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ เช่น การใช้อนุกรมฟูเรีย (Fourier Series) กับทฤษฎีเมมเบรนในงานวิจัยของ ราโอ (Rao) [6] แต่ใช้เวลาในการคำนวณสูง ต่อมามีการใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงเลข (Numerical Analysis) โดยวิธี

รูปที่ 1 Internation Center ,Broadmoor Hotel, Colorado Springs, Colorado



รูปที่ 2 Demountable school research structure at MIT campus, Cambridge, Massachusetts



รูปที่ 3 ตัวอย่างเปลือกหลังคา ที่สร้างจากเปลือกรูปไฮปาร์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรน (Finite Difference) ในงานของแคนดีลา (Candela) [7] และ โรเทิร์ท (Rothert) [8] แต่ยังตั้งอยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีเมมเบรนเช่นกัน และยังมีงานวิจัยอีกมากที่ใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอร์เรนในการหาคำตอบ ซึ่งผลที่ได้สามารถยอมรับได้ในระดับหนึ่ง แต่เมื่อมีการพัฒนาทางคอมพิวเตอร์ให้มีความเร็วสูงมากขึ้น ทำให้เกิดวิธีใหม่ขึ้นมาคือ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ซึ่งทำให้เกิดผลงานวิจัยตามมาอย่างต่อเนื่อง เริ่มต้นโดย บอกเนอร์ (Bogner) [9] ได้ใช้เอลิเมนต์แบบเปลือกรูปทรงกระบอก ที่มีภาพฉายบนพื้นระนาบเป็นรูปสี่เหลี่ยม (Rectangular, Cylindrical Shell Element) ที่มี 12 ระดับขั้นความเสรี (12 degrees of freedom) ที่แต่ละจุดต่อ (Node) โดยอยู่บนทฤษฎีพื้นฐานคือ ทฤษฎีเปลือกเชิงเส้น (Linear Shell Theory) และสมมติฐานของเปลือกบาง ใช้วิธีการหาค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม (Minimum Total Potential Energy) ซึ่งก็คือ วิธีการแปรผัน (Variational Approach) เพื่อที่จะได้เมตริกซ์ของความแข็งเกร็ง (Stiffness Matrix) ต่อมา คอนเนอร์และ เบรบเบีย (Conner and Brebbia) [10] ได้เสนอเอลิเมนต์แบบเปลือกที่มีรัศมีความโค้ง 3 ค่า มีภาพฉายเป็นรูปสี่เหลี่ยมบนพื้นระนาบ และมี 4 จุดต่อ 5 ระดับขั้นความเสรีที่แต่ละจุดต่อ ค่าเคลื่อนตัวของจุดต่อ u และ v เป็นโพลีโนเมียล (Polynomials) 4 เทอม และค่าเคลื่อนตัวของจุดต่อ w เป็นโพลีโนเมียล 12 เทอม เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งเกร็งหาจากหลักการของการเคลื่อนตัวเสมือน (The Principal of Virtual Displacement) และได้นำไปแก้ปัญหาเปลือกบางรูปไฮปาร์ ที่สภาพขอบเป็นแบบยึดแน่น (Clamped) ที่มีภาพฉายเป็นรูปสี่เหลี่ยมบนพื้นระนาบ ภายใต้แรงสม่ำเสมอที่ตั้งฉากกับเปลือก แต่จะพบว่าจำนวนเทอมของโพลีโนเมียลของค่าเคลื่อนตัว u และ v มีจำนวนไม่เพียงพอ สภาวะการเข้ากันได้ (Compatibility) ทั่วๆไปมีในเอลิเมนต์แบบนี้ แต่ค่าความชันที่ตั้งฉากกับขอบเอลิเมนต์นั้นไม่เป็นไปตามสภาวะการเข้ากันได้ ซึ่งเรียกเอลิเมนต์แบบนี้ว่า เอลิเมนต์แบบไม่สอดคล้อง (Non - conforming) และความเกี่ยวเนื่องของสมการที่เกิดจากเทอมของรัศมีความโค้ง (Curvature) นั้นไม่มีผล แต่สตริกลิน (Stricklin) [11] ได้แสดงให้เห็นว่า การทำให้เทอมของ u v และ w อยู่ในรูปที่ง่ายในกรณีนี้สามารถยอมรับได้ และมีการลู่ (Convergence) เข้าสู่ผลลัพธ์เพียงค่าเดียว ภายหลังยังได้มีการพิสูจน์โดยโจนส์และ สโตรม (Jones and Strome) [12] และได้มีการเพิ่มจำนวนเทอมในโพลีโนเมียลของ u และ v เพื่อเพิ่มอัตราในการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหา ต่อมา หยาง (Yang) [13] ได้พัฒนาเอลิเมนต์แบบเปลือกที่มีภาพฉายเป็นรูปสี่เหลี่ยมบนพื้นระนาบ ที่มีรัศมีความโค้งเป็นค่าคงที่ 3 ค่า ซึ่งเป็นเอลิเมนต์แบบสอดคล้อง (Conforming) คือ มีสภาวะการเข้ากันได้ในทุกกรณี แทนค่าเคลื่อนตัว u v และ w ด้วยฟังก์ชั่นการประมาณภายในหนึ่งมิติระดับหนึ่งของเฮอร์มิท (One dimension, first - order, Hermite interpolation formulae) เอลิเมนต์เมตริกของความแข็งเกร็ง หามาจากทฤษฎีการหาค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวมซึ่งต่อมา บันโยพายา (Banyopadhya) [14] ได้ใช้รูปแบบของเอลิเมนต์เหมือนกับของหยาง แต่ได้ใช้เทอมโพลิโนเมียล 16 เทอม แทนค่าเคลื่อน

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ตัวของ u v และ w เพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นให้กับ เมตริกซ์ของความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ และนำไปศึกษาในรายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับ อิทธิพลของค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง ที่มีต่อความเค้นและความเครียดในเปลือกบาง แต่เนื่องจากเอลิเมนต์ชนิดนี้ใช้โพลิโนเมียลถึง 16 เทอม ทำให้เพิ่มความซับซ้อนของสมการที่จะนำมาใช้ในการหาเมตริกซ์ของความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ และเพิ่มจำนวนสมการโดยรวมของระบบ จึงจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์ที่มีความจำและประสิทธิภาพสูงมาก และยังใช้เวลาในการคำนวณสูงขึ้นด้วย ซึ่งไม่สะดวกในทางปฏิบัติในการฯวยในงานออกแบบจริง

วิธีการผสม (Mixed Method) เป็นอีกวิธีที่ใช้ในการวิจัยในเรื่องนี้ ผลงานวิจัยที่ใช้วิธีนี้มีอยู่พอสมควร เช่น เฮลิงเกอร์ (Hellinger) [15] และ ไรซ์เนอร์ (Reissner) [16] ซึ่งเป็นพื้นฐานของงานวิจัยถัดมาที่ใช้วิธีผสมในการคำนวณ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเปลือกบางรูปไฮปาร์ที่สำคัญเป็นของ โอเมอตัก (Omurtag) [17] แต่การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่ายและใช้กันมากในการประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไปจะเป็นการใช้วิธีใช้การเคลื่อนตัว (Displacement Method) มากกว่าวิธีการผสม

ถ้าเราคำนึงถึงจุดมุ่งหมายเพื่อเป็นประโยชน์ในการออกแบบเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์นี้ ที่สภาพขอบแบบต่างๆ ในทางปฏิบัติ จำเป็นจะต้องมีข้อมูลของผลลัพธ์ที่สามารถเข้าใจได้ง่าย สำหรับนักออกแบบ เช่น ตาราง หรือ กราฟ ซึ่งผลที่ได้ควรมีความถูกต้องในระดับที่น่าเชื่อถือได้ ง่ายในการนำไปใช้งาน และไม่จำเป็นต้องใช้อุปกรณ์ทางคอมพิวเตอร์ที่มีราคาสูงมาก ติดต่อและเชื่อมโยงกับผู้ใช้ได้ง่าย ใช้เวลาในการคำนวณไม่มาก สามารถสร้างเป็นโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อเป็นประโยชน์กับผู้ออกแบบมากที่สุด ดังนั้นเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในการนำไปใช้ในการวิเคราะห์คือ เอลิเมนต์แบบไม่สอดคล้องดังเหตุผลที่ได้กล่าวไปข้างต้นแล้ว

ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงใช้ เอลิเมนต์แบบไม่สอดคล้องซึ่งมี 5 ระดับขั้นความเสรีที่แต่ละจุดต่อ สำหรับค่าเคลื่อนตัว w มีจำนวนเทอมโพลิโนเมียล 12 เทอม u และ v มีจำนวนเทอมโพลิโนเมียล 4 เทอม โดยอยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีเปลือกบางเชิงเส้นและใช้สมมติฐานของเปลือกบางแบบตื้น เอลิเมนต์ที่ใช้มีรูปแบบเป็นเปลือกแบบตื้นรูปไฮปาร์ที่มีภายฉายเป็นรูปสี่เหลี่ยม และใช้วิธีทฤษฎีการหาค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม เพื่อหาเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ โดยพิจารณาสภาพขอบแบบ 3 แบบ คือ แบบธรรมดา (Simply Support) แบบยึดแน่น (Clamped) และ แบบอิสระ (Free edged) ผลที่ได้จากการคำนวณจะอยู่ในเทอมไร้มิติ แล้วนำไปเขียนกราฟ ซึ่งทำให้ง่ายต่อการนำไปใช้งาน ทั้งนี้เพื่อให้ความสะดวกกับผู้ออกแบบมากที่สุด

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

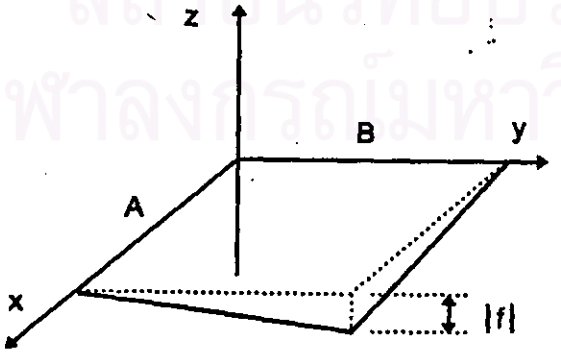
1.เพื่อนำวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้แก้ปัญหาโครงสร้างเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ที่สภาพขอบแบบต่างๆ

2.เพื่อประดิษฐ์โปรแกรมสำเร็จรูปที่ช่วยในการคำนวณออกแบบโครงสร้างเปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ที่สภาพขอบแบบต่างๆ

## 1.3 ขอบเขตและวิธีดำเนินงานวิจัย

ศึกษาทฤษฎีของเปลือกบางและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้มีการวิจัยในอดีต จากนั้นจึงสร้างโปรแกรมภาษาฟอร์แทรนเพื่อใช้ในการวิเคราะห์เปลือกบางแบบตื้นรูปไฮปาร์ที่มีสภาพขอบแบบต่างๆ และรับแรงกระทำสม่ำเสมอ (Uniform Load) ในแนวดิ่งที่ตั้งฉากกับผิวเปลือก ระเบียบวิธีที่ใช้ในโปรแกรมนี้อยู่บนพื้นฐานของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยใช้เอลิเมนต์เปลือกแบบตื้นรูปไฮปาร์ที่มี 5 ระดับขั้นความเสรีที่แต่ละจุดต่อ สำหรับค่าเคลื่อนตัว w มีจำนวนเทอมโพลิโนเมียล 12 เทอม u และ v มีจำนวนเทอมโพลิโนเมียล 4 เทอม และใช้วิธีทฤษฎีค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม เพื่อที่จะได้เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์เปลือกบางรูปไฮปาร์ที่พิจารณา คือ ไฮเปอร์โบลิค พาราโบลอยด์ ที่มีขอบขนานกับเจเนอร์เรเตอร์ (Hyperbolic Paraboloid, Edges Parallel to Generators) ดังรูปที่ 4 และมีสมการเขียนอยู่ในรูปของสมการที่ 1.1

$$z = \frac{fxy}{AB} \qquad (1.1)$$




รูปที่ 4 รูปร่างเปลือกบางไฮปาร์ที่มีขอบขนานกับเจเนอเรเตอร์

กำหนดให้วัสดุของเปลือกเป็นวัสดุเนื้อเดียว (Homogeneous) ที่มีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง (Isotropic) สภาพขอบที่พิจารณามีทั้งหมด 3 แบบ คือ แบบธรรมดา (Simply Support) แบบยึดแน่น (Clamped) และ แบบอิสระ (Free edged) ซึ่งขอบทั้ง 3 แบบนี้จะประกอบกันเป็นขอบทั้ง 4 ด้านของตัวเปลือกที่พิจารณา ตัวแปร (Parameter) ที่กำหนดลักษณะของเปลือกบางไฮปาร์และ ขนาดของแรงที่กระทำ ในเทอมไร้มิติ คือ

1.อัตราส่วนระหว่างค่าความยาวต่อความกว้าง A และ B
2.อัตราส่วนระหว่างค่าความโก่งของเปลือกและความหนาของเปลือก (f) / (h)
3.ค่า PAB/Eh2 โดย P คือ แรงสม่ำเสมอในแนวดิ่งต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่
E คือ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (Young's Modulus)
4.ค่าโมดูลัสของการเฉือน (Shear Modulus)
5.อัตราส่วนของปัวส์ซอง (Poisson' ratio)

ผลลัพธ์ของโปรแกรมนี้จะเป็นแฟ้มข้อมูล (Text Files) ซึ่งสามารถนำไปเป็นข้อมูลป้อนเข้าของโปรแกรมที่ใช้ในการวาดกราฟต่อไป กราฟที่แสดงออกมาค่าทุกค่าจะอยู่ในรูปไร้มิติ (Dimensionless) โดยค่าที่จะทำให้อยู่ในรูปไร้มิติและนำเสนอในกราฟ คือ

1.ค่าเคลื่อนตัวในแนวแกน x (u)
2.ค่าเคลื่อนตัวในแนวแกน y (v)
3.ค่าเคลื่อนตัวในแนวแกน z (w)
4.แรงต่อหน่วยความยาวในแนวแกน x ($N_{xx}$)
5.แรงต่อหน่วยความยาวในแนวแกน y ($N_{yy}$)
6.แรงบิดต่อหน่วยความยาว ($N_{xy}$)
7.โมเมนต์ดัดต่อหน่วยความยาวในทิศทาง x ($M_{xx}$)
8.โมเมนต์ดัดต่อหน่วยความยาวในทิศทาง y ($M_{yy}$)
9.โมเมนต์บิดต่อหน่วยความยาว ($M_{xy}$)

การวิจัยเริ่มต้นด้วยการศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างแบบเปลือกบาง สำรวจและศึกษาผลงานที่เกี่ยวข้องในอดีตจนถึงปัจจุบันที่เกี่ยวข้องกับ เปลือกบางรูปไฮเปอร์โบลิดพาราโบลอยด์ จากนั้นจึงทำการศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหา และศึกษาวิธีการเขียนโปรแกรมที่ใช้คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ต่อจากนั้นจึงทำการหาเมตริกซ์ของความแข็งเกร็งของปัญหาโดยทฤษฎีการหาค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม (Minimum Total Potential Energy) แล้วนำผลที่ได้ไปสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้

คำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แล้วนำมาทดสอบและแก้ไขข้อบกพร่องของโปรแกรม จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ที่ได้ไปแสดงในรูปแบบของกราฟตัวแปรไร้มิติต่อไป

## 1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ จะให้ความถูกต้องได้มากกว่าวิธีการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนซึ่งเป็นวิธีที่ผู้ออกแบบสมัยก่อนนิยมใช้เป็นเกณฑ์ในการออกแบบโครงสร้างเปลือกบางรูปไฮปาร์ ทำให้สามารถประหยัดค่าใช้จ่าย วัสดุ แรงงาน และเวลาที่ใช้ในการสร้างและออกแบบเปลือกชนิดนี้ และผลลัพธ์ที่แสดงนั้นได้จัดให้อยู่ในรูปแบบของกราฟไร้มิติ เพื่อความสะดวกให้กับผู้ออกแบบได้ใช้เป็นข้อมูลในการออกแบบโครงสร้างเปลือกบางรูปไฮปาร์ที่มีขนาด รูปร่าง สภาพขอบ และแรงกระทำที่แตกต่างกันออกไปได้เป็นอย่างดี

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย