การวิเคราะห์และสังเคราะห์คงทนของระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน
โดยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์

นายฐาปนา นามประดิษฐ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-2826-3

ROBUST ANALYSIS AND SYNTHESIS OF LUR'E SYSTEMS

WITH SLOPE RESTRICTIONS USING CONVEX OPTIMIZATION

Mr. Thapana Nampradit

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2002

ISBN 974-17-2826-3

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์และสังเคราะห์คงทนของระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน โดยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์
โดย	นายฐาปนา นามประดิษฐ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วราภรณ์ เชาว์วิศิษฐ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ)

ฐาปนา นามประดิษฐ์: การวิเคราะห์และสังเคราะห์คงทนของระบบลูเรที่มีการจำกัดความชันโดยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ (ROBUST ANALYSIS AND SYNTHESIS OF LUR'E SYSTEMS WITH SLOPE RESTRICTIONS USING CONVEX OPTIMIZATION) อาจารย์ที่ปรึกษา: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย, 62 หน้า, ISBN 974-17-2826-3

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการวิเคราะห์และการสังเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริงแบบไม่เชิงเส้น ไม่มีความจำ ไม่แปรผันตามเวลา อยู่ในขอบเขตของเซกเตอร์ที่กำหนด และมีการจำกัดความชัน โดยการใช้ฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟ รวมกับคุณสมบัติของขอบเขตเซกเตอร์และความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ในการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน เงื่อนไขเพียงพอสำหรับการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดอยู่ในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ อย่างไรก็ตามเงื่อนไขในขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน อยู่ในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ การหาคำตอบวงกว้างของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่เป็นปัญหาที่ยาก ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้การกำจัดตัวแปรพลวัตของตัวควบคุมและการวนซ้ำระหว่างปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในการหาคำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้จะเป็นผลเฉลยเฉพาะที่

ตัวอย่างการคำนวณและการออกแบบสำหรับระบบเชิงเลขหลายระบบ แสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่นำเสนอมีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ นอกจากนั้นตัวควบคุมคงทนที่ออกแบบสามารถรักษาเสถียรภาพและปรับปรุงสมรรถนะของระบบวงปิดภายใต้ความไม่แน่นอนให้ดีขึ้น ดังนั้นวิธีแก้ปัญหาแบบเอกภาพที่นำเสนอจึงเป็นเครื่องมือออกแบบที่มีประสิทธิผลในการประกันเสถียรภาพ และสมรรถนะของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ภายใต้ความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง

ภาควิชา .... **ลายมือชื่อนิสิต** ....
สาขาวิชา .... **ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา** ....
ปีการศึกษา ....

##4370280221: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING
KEY WORD: LUR'E SYSTEM / SLOPE RESTRICTION / ROBUST PERFORMANCE ANALYSIS ROBUST CONTROLLER SYNTHESIS / LINEAR MATRIX INEQUALITIES / HOMOTOPY METHOD

THAPANA NAMPRADIT: ROBUST ANALYSIS AND SYNTHESIS OF LUR'E SYSTEMS WITH SLOPE RESTRICTIONS USING CONVEX OPTIMIZATION. THESIS ADVISOR: DAVID BANJERDPONGCHAI, Ph.D. 62 pp., ISBN 974-17-2826-3

This thesis presents new robust $\mathcal{H}_2$ analysis and synthesis for the linear time-invariant systems subject to nonlinear real parametric uncertainty. The uncertainty set is described by memoryless, time-invariant, sector bounded, and slope-restricted nonlinearities. Our analysis and synthesis are based on a Lur'e-Postnikov-type Lyapunov function with inherent properties of sector and slope restrictions. The sufficient conditions for computing the overbound of the worst case $\mathcal{H}_2$ performance are obtained in terms of convex optimization over linear matrix inequalities. However, the controller synthesis is formulated as nonlinear optimization over bilinear matrix inequalities. These bilinear matrix inequality problems are currently difficult to solve for globally optimal solutions. Nevertheless, by eliminating some of design variables and alternating between three different linear matrix inequality problems, locally optimal solutions can be obtained.

The numerical results of several examples confirm that new sufficient conditions for computing the overbound of the worst case $\mathcal{H}_2$ performance are less conservative than the sufficient conditions using Popov criterion. In addition, we show that our designed robust controllers can retain stability and improve performance of the closed-loop uncertain systems. Therefore, the unified approach leads to an effective design tool which guarantees both stability and performance of linear time-invariant systems under real parametric uncertainty.

Department .... **Student's signature** ....
Field of study .... **Advisor's signature** ....
Academic year ....

กิตติกรรมประกาศ

การที่วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ท่านได้ให้คำปรึกษาและข้อคิดเห็นต่างๆ ทั้งในด้านการเรียน และการใช้ชีวิต นอกจากนี้ท่านยังให้โอกาส ให้อภัย และให้กำลังใจในการทำงานอยู่เสมอ รวมทั้งสนับสนุน ข้าพเจ้าในด้านที่เหมาะสมและเป็นแบบอย่างที่ดีสำหรับข้าพเจ้าด้วย

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. วราภรณ์ เชาว์วิศิษฐ ประธานกรรมการสอบวิทยา-นิพนธ์ ที่ท่านได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ท่านได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. สุวลัย ประดิษฐานนท์ ที่ท่านได้ให้คำแนะนำและประสบการณ์อันมีค่า และโอกาสในการเข้าศึกษาต่อระดับปริญญาโทของข้าพเจ้า

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร. สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือข้าพเจ้าเสมอมาทั้งในด้านการเรียน การใช้ชีวิต และโอกาสในการรับทุนผู้ช่วยสอน

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือข้าพเจ้าเสมอมา ท่านได้ให้แนวความคิดใหม่ๆ และทำให้ข้าพเจ้าเกิดความสนุกสนานในการเรียน

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านในสาขาระบบควบคุมที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้ให้แก่ข้าพเจ้า ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการทำวิทยานิพนธ์นี้

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา สำหรับโอกาสในการศึกษาต่อระดับปริญญาโทของข้าพเจ้า และคอยห่วงใยให้กำลังใจแก่ข้าพเจ้าเสมอมา

ขอกราบขอบพระคุณญาติผู้ใหญ่ของข้าพเจ้า สำหรับการสนับสนุนทางด้านการเงินและคอยห่วงใยให้กำลังใจแก่ข้าพเจ้าเสมอมา

ขอขอบคุณเพื่อนๆ ที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจ รับฟังข้าพเจ้าเสมอมา ขอบคุณพี่ๆ และน้องๆ ที่คอยให้ความช่วยเหลือในทุกๆ ด้าน

ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬา-ลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับทรัพยากรและสิ่งอำนวยความสะดวกในการศึกษาและค้นคว้าวิจัย

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

คำอธิบายสัญลักษณ์

$\mathbf{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\mathbf{R}^m$	เซตของเวกเตอร์ค่าจริงมิติ m
$\mathbf{R}^{m\times n}$	เซตของปริภูมิเวกเตอร์ค่าจริงมิติ $m \times n$
I_m	เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $m \times m$ ซึ่งจะละสัญลักษณ์ m ไว้ ในกรณีดังกล่าว สามารถทราบมิติของเมทริกซ์เอกลักษณ์ได้จากเมทริกซ์ที่มีขนาดสัมพันธ์กัน
X^T	เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ $X \in \mathbf{R}^{m\times n}$
X^{-1}	ตัวผกผันของ $X \in \mathbf{R}^{m\times n}$ นั่นคือ $XX^{-1} = I$
$\mathbf{diag}(X_1,\ldots,X_N)$	เมทริกซ์ทแยงมุมแบบบล็อกที่มีเมทริกซ์ในแนวทแยงเป็น $X_1,\ldots,X_N$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_N \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Tr}X$	รอยเมทริกซ์ (ผลรวมในแนวทแยงมุม) ของเมทริกซ์ $X \in \mathbf{R}^{m\times n}$
$X_\perp$	ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากของ X นั่นคือ $X^T X_\perp = 0$ และ $[X \ \ X_\perp]$ มีค่าลำดับชั้นเต็ม
$X > 0$ $(X \geq 0)$	เมทริกซ์สมมาตร X เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (กึ่งบวกแน่นอน) นั่นคือ $X = X^T$ และ $z^T X z > 0$ $(z^T X z \geq 0)$ สำหรับทุกค่า $z \in \mathbf{R}^n$ ที่ไม่เท่ากับศูนย์
$X > Y$ $(X \geq Y)$	เมทริกซ์สมมาตร X และ Y ที่สอดคล้องกับ $X - Y > 0$ $(X - Y \geq 0)$
$\mathbf{E}\,x$	ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม x
$\|\cdot\|_2$	นอร์ม $\mathcal{L}_2$ ของสัญญาณ

คำอธิบายคำย่อ

LMI	Linear Matrix Inequality
BMI	Bilinear Matrix Inequality
LTI	Linear Time Invariant
NP	Nondeterministic Polynomial time
SDP	Semidefinite Programming
LQG	Linear Quadratic Gaussian
PCS	Popov Controller Synthesis
GPCS	Generalized Popov Controller Synthesis

บทที่ 1

บทนำ

1.1 กล่าวนำปัญหา

การออกแบบระบบควบคุมจำเป็นต้องมีแบบจำลองของระบบ ซึ่งแบบจำลองดังกล่าวอาจจะมีความไม่แน่นอนที่อาจเกิดจากการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์ ซึ่งเป็นผลจากความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบ ความไม่แน่นอนดังกล่าวอาจทำให้สมรรถนะของระบบลดลง และอาจทำให้ระบบขาดเสถียรภาพได้ การออกแบบตัวควบคุมโดยคำนึงถึงความไม่แน่นอนนี้เป็นสิ่งจำเป็น เพื่อประกันเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบให้ได้ตามต้องการของผู้ออกแบบ

ในวิทยานิพนธ์นี้พิจารณาความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง (real parametric uncertainty) สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาในรูปของสมการสถานะที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริงอาจเขียนแทนได้ด้วยระบบสมการ

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= (A_p + \Delta A_p)x_p + (B_w + \Delta B_w)w \\ z &= (C_z + \Delta C_z)x_p \end{aligned} \tag{1.1}$$

จาก [1] เมทริกซ์แทนความไม่แน่นอน $\Delta A_p,\ \Delta B_w$ และ ΔC_z สามารถประมาณให้เป็นความไม่แน่นอนของเมทริกซ์พลวัตเท่านั้น ดังสมการ

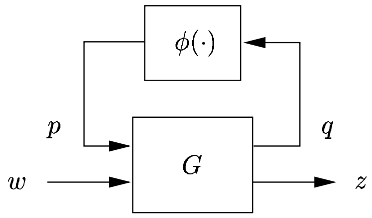
$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + B_w w \\ z &= C_z x \end{aligned} \tag{1.2}$$

โดยที่ $\Delta A \in \mathcal{U}$ เมื่อ

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{array}{l} \Delta A \in \mathbf{R}^{n\times n} \ : \ \Delta A = B_p D C_q, \\ D = \mathbf{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_{n_p}),\ \delta_i \in [0,1]\,,\ \forall i = 1, \ldots, n_p \end{array} \right\}$$

ระบบ (1.2) เป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาในรูปของสมการสถานะที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง ในบางกรณีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริงในระบบอาจไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear) ดังนั้นเราจะพิจารณาระบบที่ครอบคลุมกว่าคือระบบลูเร ซึ่งเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีการป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ไม่แปรผันตามเวลาและไม่มีความจำ (memoryless) ดังสมการ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w \\ q &= C_q x + D_{qp} p + D_{qw} w \\ z &= C_z x + D_{zp} p + D_{zw} w \\ p &= \phi(q) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1(q_1) \\ \vdots \\ \phi_{n_p}(q_{n_p}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.3}$$

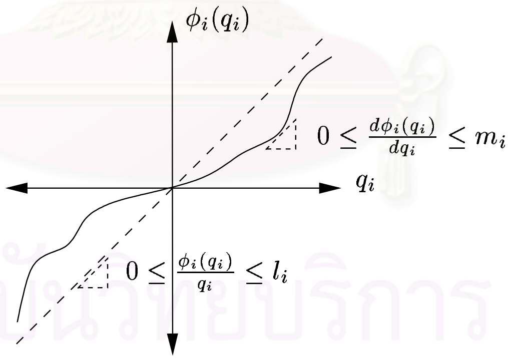


รูปที่ 1.1: ระบบลูเร

เมื่อ $x : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ คือตัวแปรสถานะ, $w : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{n_w}$ คือสัญญาณรบกวนขาเข้า, $z : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{n_z}$ คือสัญญาณสมรรถนะขาออก, $q : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{n_p}$ และ $p : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{n_p}$ คือสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ϕ_i กำหนดให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเซกเตอร์ $[0, l_i]$ และเงื่อนไขความชัน $(0, m_i)$ นั่นคือ $\phi \in \Phi(l, m)$ โดยที่

$$\Phi(l,m) := \left\{ \begin{array}{l} \phi : \mathbf{R}^{n_p} \rightarrow \mathbf{R}^{n_p},\ \phi(q) = \left[\phi_1(q_1), \ldots, \phi_{n_p}(q_{n_p})\right]^T, \\ 0 \leq \phi_i(q_i)/q_i \leq l_i,\ \phi_i(0) = 0, \\ 0 \leq d\phi_i(q_i)/dq_i \leq m_i,\ \forall i = 1, \ldots, n_p \end{array} \right\}$$

เมื่อ $l = (l_1, \ldots, l_{n_p})$ เป็นเวกเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นขอบเขตเซกเตอร์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และ $m = (m_1, \ldots, m_{n_p})$ เป็นเวกเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นขอบเขตความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ค่าของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นถูกจำกัดให้อยู่ในจตุภาค (quadrant) ที่หนึ่งและจตุภาคที่สาม ความชันของฟังก์ชันถูกจำกัดด้วยค่าคงที่ แสดงดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2: ฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

ในวิทยานิพนธ์นี้จะพิจารณาสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบลูเร โดยพิจารณาปัญหาการวิเคราะห์และสังเคราะห์คงทน ปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเรคือหาเงื่อนไขในการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุด (worst-case $\mathcal{H}_2$ performance) เมื่อความไม่แน่นอนอยู่ภายในขอบเขตเซกเตอร์และความชันที่กำหนด และสำหรับปัญหาการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนคือหาตัวควบคุมที่ทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดมีค่าต่ำที่สุด เมื่อความไม่แน่นอนอยู่ภายในขอบเขตเซกเตอร์และความชันที่กำหนด นั่นคือเป็นการประกันระดับของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่แน่นอนของระบบวงปิดในภายใต้ความไม่แน่นอนแบบไม่เชิงเส้น

1.2 ความเป็นมาของปัญหา

ปัญหาลูเรมีลำดับการวิจัยอย่างคร่าวๆ ดังนี้

- ปี ค.ศ. 1944 Lur'e และ Postnikov [2] ได้เสนอปัญหาเสถียรภาพสัมบูรณ์ของระบบที่มีการป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่ถูกจำกัดด้วยขอบเขตเซกเตอร์ ระบบนี้เรียกว่าระบบลูเร (Lur'e system) และนำเสนอฟังก์ชันเลียปูโนฟที่ประกอบด้วยพจน์กำลังสองบวกกับอินทิกรัล (integral) ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นเรียกว่าฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟ (Lur'e-Postnikov)

- ปี ค.ศ. 1962 Popov [3] ได้แสดงความเชื่อมโยงระหว่างเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์ที่มาจากฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟ ในเชิงเวลาและเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์เชิงความถี่ เรียกว่าเกณฑ์ของโปปอฟ (Popov criterion)

- ปี ค.ศ. 1994 Boyd, El Ghaoui, Feron และ Balakrishnan [4] ได้นำเสนอเงื่อนไขการคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร โดยใช้เงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์และขอบเขตบนของสัญญาณสมรรถนะขาออก (performance output)

- ปี ค.ศ. 1997 Banjerdpongchai และ How [5, 6, 7] ได้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนโดยใช้เงื่อนไขการคำนวณสมรรถนะของ Boyd *et al.* ด้วยการวนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequalities)

- ปี ค.ศ. 1998 Park, Banjerdpongchai และ Kailath [8] ได้นำเสนอเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์สำหรับระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน (slope restriction) โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟที่มีพจน์กำลังสองของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

- ปี ค.ศ. 1998 Suykens, Vandewalle และ De Moor [9] ได้นำเสนอเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์สำหรับระบบลูเรที่มีการจำกัดความชันในลักษณะใกล้เคียงกับ Park *et al.* แต่เงื่อนไขมีความอนุรักษ์มากกว่า ความอนุรักษ์ดังกล่าวเกิดขึ้นในขั้นตอนการจัดรูปให้เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

- ปี ค.ศ. 2002 Park [10] ได้นำเสนอเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์สำหรับระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟที่มีพจน์กำลังสองของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และพจน์อินทิกรัลของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นแปดพจน์ ซึ่งถือได้ว่าเป็นเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์ที่มีความอนุรักษ์น้อยที่สุดในขณะนี้

1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1. กำหนดเงื่อนไขเพียงพอในการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน จากเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์และขอบเขตของสัญญาณสมรรถนะขาออก โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟที่เพิ่มพจน์คุณสมบัติของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่นำเสนอใน [10] โดยเงื่อนไขดังกล่าวอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

2. ขยายผลจากการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนในข้อแรก ไปสู่การสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน ซึ่งเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (bilinear matrix inequalities) และหาขั้นตอนวิธีในการออกแบบตัวควบคุมคงทนจากเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ โดยใช้วิธีแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น
3. ทดสอบเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุด และขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน เพื่อเปรียบเทียบถึงความอนุรักษ์ของเงื่อนไข รวมทั้งข้อดีและข้อเสีย

1.4 เนื้อหาใหม่ในวิทยานิพนธ์

เนื้อหาใหม่ในวิทยานิพนธ์นี้ คือการนำฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟที่เพิ่มพจน์คุณสมบัติของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่นำเสนอใน [10] มาใช้ในการวิเคราะห์และสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนโดยอาศัยหลักการใน [4, 5, 6, 7] และหลักการของฮอมอโทปี (homotopy) และนำเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุด และวิธีการออกแบบตัวควบคุมคงทน $\mathcal{H}_2$ มาทดสอบกับระบบตัวอย่าง

1.5 ลำดับเนื้อหาของวิทยานิพนธ์

ในบทที่ 2 จะนำเสนอคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ โดยจะกล่าวถึงปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ และยังนำเสนอแนวทางการขยายนิยามของนอร์ม $\mathcal{H}_2$ สำหรับระบบเชิงเส้นไปสู่ระบบไม่เชิงเส้นและบทตั้งที่เป็นประโยชน์ในการออกแบบตัวควบคุม ในบทที่ 3 จะนำเสนอการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน เริ่มต้นด้วยการนำเสนอปัญหาและฟังก์ชันเลียปูโนฟที่พิจารณาและการแปลงวงรอบ (loop transformation) ซึ่งมีประโยชน์อย่างยิ่งในการแปลงขอบเขตเซกเตอร์จากค่าหนึ่งไปเป็นค่าที่ต้องการ จากนั้นจึงนำเสนอเงื่อนไขเพียงพอสำหรับการคำนวณสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร พร้อมทั้งข้อสังเกต ในบทที่ 4 จะเป็นการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนโดยนำเงื่อนไขการคำนวณค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนจากบทที่ 3 มาขยายผล ปัญหาการสังเคราะห์คงทนเดิมเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ แต่ในบทนี้จะนำเสนอขั้นตอนการออกแบบ ด้วยวิธีวนซ้ำแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและใช้หลักการของฮอมอโทปี และเทคนิคการกำจัดเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุมเพื่อให้คำตอบลู่เข้าได้อย่างรวดเร็ว ในบทที่ 5 เป็นการนำเสนอตัวอย่างการคำนวณ ทั้งตัวอย่างจากบทความ และตัวอย่างระบบจริง ในบทที่ 6 เป็นข้อสรุปและข้อเสนอแนะ และในภาคผนวก ก. เป็นชุดคำสั่ง MATLAB ที่ใช้ในการวิเคราะห์และสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน

บทที่ 2

คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ในบทนี้กล่าวถึงคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนในวิทยานิพนธ์นี้ ปัญหาที่เราพิจารณาจะอยู่ในกรอบงานอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้ §2.1 จะแนะนำอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และ §2.2 แนะนำอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ จากนั้น §2.3 จะกล่าวถึงนอร์ม $\mathcal{H}_2$ ซึ่งเราใช้เป็นเครื่องมือในการวัดสมรรถนะของระบบ และ §2.4 จะกล่าวถึงบทตั้งทางพีชคณิตเชิงเส้นที่ใช้ในขั้นตอนการสังเคราะห์ตัวควบคุม

2.1 อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \geq 0 \tag{2.1}$$

โดยที่เมทริกซ์สมมาตร $F_i = F_i^T \in \mathbf{R}^{n\times n},\ i = 0, 1, \ldots, m$ เป็นเมทริกซ์คงตัว และ $x \in \mathbf{R}^m$ เป็นตัวแปร อสมการ (2.1) มีความหมายว่า $F(x)$ เป็นกึ่งบวกแน่นอน (positive semidefinite) นั่นคือ $z^T F(x) z \geq 0$ สำหรับทุกค่า $z \in \mathbf{R}^n$, เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเงื่อนไขไม่เชิงเส้น และไม่ปรับเรียบ (non-smooth) แต่เป็นเงื่อนไขคอนเวกซ์ในตัวแปร x นั่นคือ ถ้า $F(x) \geq 0$ และ $F(y) \geq 0$, สำหรับทุกค่า $0 \leq \lambda \leq 1$ จะได้ว่า

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \geq 0$$

ตัวอย่างของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เช่น อสมการเลียปูโนฟ (Lyapunov inequality)

$$A^T P + PA < 0 \tag{2.2}$$

โดยที่ $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์คงตัว และ $P = P^T$ เป็นตัวแปรเมทริกซ์ กำหนดให้ $P_1, \ldots, P_m$ เมื่อ $m = n(n+1)/2$ เป็นฐานหลัก (basis) ชุดหนึ่งของเซตของเมทริกซ์สมมาตรขนาด $n \times n$ จะได้ว่า (2.2) สามารถเขียนอยู่ในรูปสมการ (2.1) ได้โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_i = -A^T P_i - P_i A$ แต่โดยทั่วไปแล้วเราจะเขียนอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในรูป (2.2) มากกว่า

สำหรับบางกรณี อสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นก็สามารถจัดให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ โดยใช้ส่วนเติมเต็มของชูร์ (Schur complement), สำหรับเงื่อนไขอสมการ

$$R(x) > 0 \quad \text{และ} \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \tag{2.3}$$

เมื่อ $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ และ $S(x)$ มีคุณสมบัติสัมพรรค (affine) บนตัวแปร x จะได้ว่า (2.3) สามารถแทนได้ด้วยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{2.4}$$

ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นมีอยู่หลายแบบ แต่รูปแบบปัญหาในวิทยานิพนธ์นี้มีอยู่สองแบบคือ

1. ปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMI feasibility problem) คือการหาค่า x ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

   $$F(x) \geq 0 \tag{2.5}$$

   เมื่อกำหนดค่า $F_i,\ i = 0, 1, \ldots, m$

2. ปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอน (semidefinite programming) คือการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์เชิงเส้นโดยที่เงื่อนไขบังคับคือเมทริกซ์สมมาตรต้องเป็นกึ่งบวกแน่นอน นั่นคือ

   $$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & F(x) \geq 0 \end{array} \tag{2.6}$$

   โดยที่ $c \in \mathbf{R}^m$ และกำหนดค่า $F_i,\ i = 0, 1, \ldots, m$

สังเกตได้ว่าปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เป็นกรณีพิเศษของปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอน และปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอน เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์ เนื่องจากฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นเชิงเส้น และเงื่อนไขบังคับเป็นคอนเวกซ์ด้วย

วิธีการแก้ปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอนมีหลายวิธี แต่ขั้นตอนวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดคือวิธีจุดภายใน (interior point) (Nesterov และ Nemirovsky, 1994) ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีเวลาพหุนาม (polynomial time) ข้อดีของวิธีนี้ก็คือไม่จำเป็นต้องใช้การวิเคราะห์อนุพันธ์ โดยที่การแก้ปัญหาในแต่ละรอบของการวนซ้ำเป็นเพียงปัญหากำลังสองน้อยสุด (least-squares) เท่านั้น [11]

2.2 อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$F(x,y) := F_{0,0} + \sum_{i=1}^{m} x_i F_{i,0} + \sum_{j=1}^{n} y_j F_{0,j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j F_{i,j} \geq 0 \tag{2.7}$$

โดยที่เมทริกซ์สมมาตร $F_{i,j} = F_{i,j}^T \in \mathbf{R}^{p\times p},\ i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, \ldots, n$ เป็นเมทริกซ์คงตัว และ $x \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^n$ เป็นตัวแปร

กำหนดให้ $c \in \mathbf{R}^m,\ d \in \mathbf{R}^n$ และกำหนดค่า $F_{i,j}$ เมื่อ $i = 0, 1, \ldots, m$ และ $j = 0, 1, \ldots, n$ ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่จะกำหนดโดย

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x + d^T y \\ \text{subject to} & F(x,y) \geq 0 \end{array} \tag{2.8}$$

ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่เป็นปัญหา NP แบบยาก [12], มีวิธีฮิวริสติก (heuristic) หลายวิธีที่ใช้ในการหาคำตอบเฉพาะที่ (local) ของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ เช่น [13, 14, 15] หลักการของวิธีดังกล่าวคือ สำหรับปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (2.8) กำหนดให้ x มีค่าคงที่และหา y ที่สอดคล้องกับ (2.8) ก็จะเป็นปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอนอันหนึ่ง, กำหนดให้ y มีค่าคงที่และหา x ที่สอดคล้องกับ (2.8) ก็จะเป็นปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอนอีกอันหนึ่ง การแก้ปัญหาด้วยวิธีฮิวริสติกทำได้โดยแก้ปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอนสองปัญหาสลับกันจนกว่าคำตอบจะลู่เข้าสู่คำตอบเฉพาะที่

2.3 นอร์ม $\mathcal{H}_2$

สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา เราสามารถนิยามนอร์ม $\mathcal{H}_2$ ได้หลายรูปแบบ [16, 17] แบบแรกกำหนดให้ $G(s)$ ที่เป็นเมทริกซ์ถ่ายโอนของระบบ $\mathcal{G}$ นั่นคือ $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ โดยสมมติให้ $G(s)$ มีเสถียรภาพ จะได้ว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบ $\mathcal{G}$ นิยามได้โดย

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 := \int_0^\infty \mathbf{Tr} G(j\omega)G^T(-j\omega)d\omega \tag{2.9}$$

นอกจากนี้นอร์ม $\mathcal{H}_2$ ยังสามารถนิยามได้โดยใช้ทฤษฎีบทของปาร์เซอวาล (Parseval's theorem) โดยกำหนดให้ $e_1, \ldots, e_{n_w}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) ของปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathbf{R}^{n_w}$ (สมาชิกตัวที่ i^{th} ของ e_i มีค่าเป็น 1 นอกนั้นเป็น 0) และ $z_i(t)$ เป็นสัญญาณออกของระบบที่มีเสถียรภาพเมื่อเราป้อนสัญญาณอิมพัลส์ δe_i (ฟังก์ชันอิมพัลส์ที่เวลา 0 ในทิศทางของเวกเตอร์ e_i) เข้าสู่ระบบโดยกำหนดให้ภาวะเริ่มต้น (initial condition) เป็นศูนย์ จะได้ว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบนิยามได้โดย

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 := \sum_{i=1}^{n_w} \|z_i\|_2^2 \tag{2.10}$$

ในบางครั้งเราอาจพิจารณานอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบโดยให้ w เป็นสัญญาณรบกวนขาวแบบเกาส์ (white Gaussian noise) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ (zero mean) ความแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็นหนึ่งหน่วย (unit covariance) โดยที่ z เป็น กระบวนการเฟ้นสุ่ม (stochastic process) ดังนี้

$$z(t) := \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau$$

นอร์ม $\mathcal{H}_2$ สำหรับระบบดังกล่าวนิยามได้ด้วย

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 := \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\frac{1}{T}\int_0^T z(t)^T z(t)dt \tag{2.11}$$

เราทราบว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ใน (2.9), (2.10) และ (2.11) สมมูลกัน [16, 17] และสามารถคำนวณได้โดยตรง นอร์ม $\mathcal{H}_2$ จะมีค่าจำกัด (finite) ถ้า A มีเสถียรภาพ และ $D = 0$ เราจะได้ว่า

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \mathbf{Tr} B^T P B$$

เมื่อ P เป็นเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอน (positive symmetric) ที่สอดคล้องกับ

$$A^T P + PA + C^T C = 0$$

แต่สำหรับระบบไม่เชิงเส้นหรือระบบที่แปรผันตามเวลา จะนิยามนอร์ม $\mathcal{H}_2$ ด้วย (2.9) และ (2.11) ไม่ได้เนื่องจาก (2.9) เป็นนิยามสำหรับระบบเชิงเส้น และสำหรับ (2.11) ลิมิตอาจจะไม่มีอยู่จริง และคุณสมบัติของสัญญาณรบกวนที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และเป็นแบบเกาส์ไม่นิยามสำหรับระบบไม่เชิงเส้น มีเพียงนิยาม (2.10) เท่านั้นที่สามารถขยายไปสู่ระบบไม่เชิงเส้นได้ [16, 17] พิจารณาระบบ LTI ที่ป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

$$\mathcal{G}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_p p + B_w w \\ q = C_q x, \;\; z = C_z x \\ p = \phi(q) \end{cases} \tag{2.12}$$

เนื่องจากการป้อนสัญญาณเข้าเป็นอิมพัลส์ (impulse) เข้าสู่ระบบโดยกำหนดให้ภาวะเริ่มต้นเป็นศูนย์มีความสัมพันธ์กับการกำหนดค่าเริ่มต้นเมื่อไม่มีสัญญาณเข้า ซึ่งเราจะความสัมพันธ์นี้กับนิยาม (2.10) ในการพิจารณาขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบ (2.12) โดยกำหนดให้ $x_{0,i} = B_w e_i, \; i = 1, \ldots, n_w$ เป็นฐานหลักชุดหนึ่งของค่าเริ่มต้น โดยที่ e_i เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิสัญญาณเข้า $\mathbf{R}^{n_w}$ กำหนดให้ $z_{0,i}$ แทนสัญญาณออกสำหรับระบบที่ไม่มีสัญญาณเข้า $(w = 0)$ และมีค่าเริ่มต้นเป็น $x_{0,i}$ จะได้ว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ สำหรับระบบไม่เชิงเส้นนิยามได้ด้วย

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 := \sum_{i=1}^{n_w} \|z_{0,i}\|_2^2 \tag{2.13}$$

2.4 พีชคณิตเชิงเส้น

ในตอนนี้จะนำเสนอบทตั้งที่เป็นประโยชน์ในการออกแบบตัวควบคุม โดยบทตั้งทั้งสองจะใช้ในการกำจัดตัวแปรในปัญหาอสมการเมทิกซ์เชิงเส้นและสร้างตัวควบคุมขึ้นมาใหม่

บทตั้ง 2.1 (Elimination Lemma [4]) กำหนดให้ $G \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $U \in \mathbf{R}^{n\times p}$ และ $V \in \mathbf{R}^{n\times q}$ กำหนดให้ $U_\perp$ และ $V_\perp$ เป็นส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ U และ V ตามลำดับ จะมีเมทริกซ์ $X \in \mathbf{R}^{p\times q}$ ที่ทำให้

$$G + VX^TU^T + UXV^T < 0$$

ก็ต่อเมื่อ

$$V_\perp^T G V_\perp < 0 \quad \text{และ} \quad U_\perp^T G U_\perp < 0$$

พิสูจน์ ดูใน [4, หน้า 32–33] □

บทตั้ง 2.2 (Completion Lemma [18]) กำหนดให้ P และ $Q \in \mathbf{R}^{m\times m}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน จะมีเมทริกซ์บวกแน่นอน $\tilde{P} \in \mathbf{R}^{2m\times 2m}$ ซึ่งเมทริกซ์ย่อยขนาด $m \times m$ ด้านบนซ้ายของ $\tilde{P}$ คือ P และเมทริกซ์ย่อยขนาด $m \times m$ ด้านบนซ้ายของ $\tilde{P}^{-1}$ คือ Q ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.14}$$

พิสูจน์ ดูใน [18] □

สำหรับเมทริกซ์ P และ Q แต่ละคู่ที่สอดคล้องกับอสมการ (2.14) เมทริกซ์ $\tilde{P}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในบทตั้ง 2.2 (Completion Lemma) สามารถเขียนได้เป็น

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & I \\ I & (P - Q^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

เมื่อ $M \in \mathbf{R}^{m \times m}$ คือเมทริกซ์ใดๆ ที่หาตัวผกผันได้ (invertible) ดังนั้น

$$\tilde{Q} = \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & I \\ I & (Q - P^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

เมื่อ $N = (I - QP)M^{-1}$

2.5 บทสรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนและการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนในวิทยานิพนธ์นี้ โดยปัญหาที่เราพิจารณาอยู่ในรูปของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ และพิจารณาสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบ โดยนิยามสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบไม่เชิงเส้นจากการขยายนิยามของระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา และในตอนท้ายเราได้นำเสนอบทตั้งทางพีชคณิตที่ใช้ในขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม ซึ่งทำให้การลู่เข้าของคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็ว

บทที่ 3

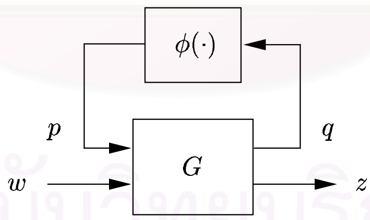
การวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน

3.1 บทนำ

ในบทนี้จะนำเสนอการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเรที่มีขอบเขต เซกเตอร์และมีการจำกัดความชัน จุดประสงค์ของการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเรคือ การประกันระดับของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบวงปิดในขณะที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง จากการวิเคราะห์เสถียรภาพของโปปอฟและขอบเขตของพลังงานขาออกในระบบลูเร ทำให้เราได้เงื่อนไขสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน และสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ [4, หน้า 121–122] และสามารถหาคำตอบได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยใช้วิธีจุดภายใน [4, หน้า 14–18]

เนื้อหาในบทนี้ประกอบไปด้วย §3.2 นำเสนอการกำหนดปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน §3.3 นำเสนอการแปลงวงรอบ ซึ่งเปลี่ยนขอบเขตของเซกเตอร์และค่าความชันที่จำกัดให้อยู่ในช่วงที่พิจารณาได้ และ §3.4 นำเสนอฟังก์ชันเลียปูโนฟที่ใช้ในการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน จากนั้น §3.5 นำเสนอเงื่อนไขเพียงพอในการคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร §3.6 เป็นการวิเคราะห์ผลที่ได้ และ §3.7 เป็นบทสรุป

3.2 กำหนดปัญหา



รูปที่ 3.1: แผนภาพบล็อกสำหรับปัญหาวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน

พิจารณาระบบ LTI ที่แทนความไม่แน่นอนด้วยการป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้นอธิบายได้ด้วยระบบสมการ (3.1) และแสดงดังรูปที่ 3.1

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w \\
q &= C_q x + D_{qp} p + D_{qw} w \\
z &= C_z x + D_{zp} p + D_{zw} w \\
p &= \phi(q) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1(q_1) \\ \vdots \\ \phi_{n_p}(q_{n_p}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

เมื่อ $x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ คือตัวแปรสถานะ, $w : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_w}$ คือสัญญาณรบกวนขาเข้า, $z : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_z}$ คือสัญญาณสมรรถนะขาออก, $q : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_p}$ และ $p : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_p}$ คือสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ϕ_i กำหนดให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเซกเตอร์ $[0, l_i]$ และเงื่อนไขความชัน $(0, m_i)$ นั่นคือ $\phi \in \Phi(l, m)$ โดยที่

$$\Phi(l,m) := \left\{ \begin{array}{l} \phi : \mathbf{R}^{n_p} \to \mathbf{R}^{n_p},\ \phi(q) = \left[\phi_1(q_1), \ldots, \phi_{n_p}(q_{n_p})\right]^T, \\ 0 \le \phi_i(q_i)/q_i \le l_i,\ \phi_i(0) = 0, \\ 0 \le d\phi_i(q_i)/dq_i \le m_i,\ \forall i = 1, \ldots, n_p \end{array} \right\}$$

เมื่อ $l = (l_1, \ldots, l_{n_p})$ เป็นเวกเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นขอบเขตเซกเตอร์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และ $m = (m_1, \ldots, m_{n_p})$ เป็นเวกเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นขอบเขตความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ต่อไปจะใช้สัญลักษณ์ $\phi_i'(\sigma)$ แทน $d\phi_i(\sigma)/d\sigma$

สำหรับปัญหาที่เราพิจารณา กำหนดให้ D_{zw} มีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อให้เป็นไปตามคุณสมบัติตั้งไว้ดี (well-posedness) นั่นคือสามารถคำนวณค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ และกำหนดให้ D_{qp} และ D_{qw} มีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อความง่ายในการแก้ปัญหาการวิเคราะห์คงทน

ปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับคือ สำหรับระบบลูเร (3.1) กำหนดให้ $\phi \in \Phi(l, m)$ เมื่อ l และ m เท่ากับค่าที่กำหนด ให้คำนวณหาค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุดของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร นั่นคือหาค่าต่ำสุดของ $\gamma_2^2 \in \mathbf{R}_+$ เมื่อ $\mathcal{J}_2^2 \le \gamma_2^2$

สำหรับระบบลูเรในรูปทั่วไปที่มีเงื่อนไขเซกเตอร์แตกต่างจากปัญหาที่กำหนดข้างต้น สามารถใช้การแปลงวงรอบในการแปลงขอบเขตเซกเตอร์ให้อยู่ในรูปเดียวกับปัญหาที่กำหนดได้ โดยที่ค่าจำกัดความชันจะเปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังรายละเอียดใน §3.3

3.3 การแปลงวงรอบ

สำหรับระบบลูเรทั่วไปที่ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นอยู่ในเซกเตอร์ $[\alpha_i, \beta_i]$ สามารถแปลงให้อยู่ในเซกเตอร์ $[0, l_i]$ ได้เสมอโดยใช้การแปลงวงรอบ (loop transformation) [4, หน้า 129] พิจารณาระบบลูเรในรูปทั่วไปดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w + B_u u \\ q &= C_q x + D_{qp} p + D_{qw} w + D_{qu} u \\ z &= C_z x + D_{zp} p + D_{zw} w + D_{zu} u \\ y &= C_y x + D_{yp} p + D_{yw} w + D_{yu} u \\ p &= \phi(q) \end{aligned} \tag{3.2}$$

โดยมีเงื่อนไขเซกเตอร์

$$\alpha_i \le \frac{\phi_i(\sigma)}{\sigma} \le \beta_i \tag{3.3}$$

และเงื่อนไขความชัน

$$\delta_i \le \phi_i'(\sigma) \le \xi_i \tag{3.4}$$

นั่นคือฟังก์ชันไม่เชิงเส้นจะถูกจำกัดด้วยเซกเตอร์ $[\alpha_i, \beta_i]$ และจำกัดความชัน (δ_i, ξ_i) นั่นเอง

เราสามารถเปลี่ยนขอบเขตเซกเตอร์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นจาก $[\alpha_i, \beta_i]$ ไปเป็น $[0, l_i]$ โดยกำหนดให้

$$\bar{\phi}_i(\sigma) = \frac{l_i}{\beta_i - \alpha_i}(\phi_i(\sigma) - \alpha_i \sigma) \tag{3.5}$$

หรือเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$\bar{p} = \Gamma^{-1} L(p - \Lambda q) \tag{3.6}$$

เมื่อ $\Gamma = \mathbf{diag}(\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_{n_p} - \alpha_{n_p})$, $\Lambda = \mathbf{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_p})$ และ $L = \mathbf{diag}(l_1, \ldots, l_{n_p})$ จัดรูประบบลูเร (3.2) จะได้

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \bar{A}x + \bar{B}_p p + \bar{B}_w w + \bar{B}_u u \\
q &= \bar{C}_q x + \bar{D}_{qp} p + \bar{D}_{qw} w + \bar{D}_{qu} u \\
z &= \bar{C}_z x + \bar{D}_{zp} p + \bar{D}_{zw} w + \bar{D}_{zu} u \\
y &= \bar{C}_y x + \bar{D}_{yp} p + \bar{D}_{yw} w + \bar{D}_{yu} u \\
\bar{p} &= \bar{\phi}(q)
\end{aligned}$$

โดยมีเงื่อนไขเซกเตอร์

$$0 \leq \frac{\bar{\phi}_i(\sigma)}{\sigma} \leq l_i \tag{3.7}$$

และเงื่อนไขความชัน

$$\frac{l_i(\delta_i - \alpha_i)}{\beta_i - \alpha_i} \leq \frac{d\bar{\phi}_i(\sigma)}{d\sigma} \leq \frac{l_i(\xi_i - \alpha_i)}{\beta_i - \alpha_i} \tag{3.8}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= A + B_p \Lambda \Delta C_q & \bar{C}_z &= C_z + D_{zp} \Lambda \Delta C_q \\
\bar{B}_p &= B_p L^{-1}\Gamma + B_p \Lambda \Delta D_{qp} L^{-1}\Gamma & \bar{D}_{zp} &= D_{zp} L^{-1}\Gamma + D_{zp} \Lambda \Delta D_{qp} L^{-1}\Gamma \\
\bar{B}_w &= B_w + B_p \Lambda \Delta D_{qw} & \bar{D}_{zw} &= D_{zw} + D_{zp} \Lambda \Delta D_{qw} \\
\bar{B}_u &= B_u + B_p \Lambda \Delta D_{qu} & \bar{D}_{zu} &= D_{zu} + D_{zp} \Lambda \Delta D_{qu} \\
\bar{C}_q &= \Delta C_q & \bar{C}_y &= C_y + D_{yp} \Lambda \Delta C_q \\
\bar{D}_{qp} &= \Delta D_{qp} L^{-1}\Gamma & \bar{D}_{yp} &= D_{yp} L^{-1}\Gamma + D_{yp} \Lambda \Delta D_{qp} L^{-1}\Gamma \\
\bar{D}_{qw} &= \Delta D_{qw} & \bar{D}_{yw} &= D_{yw} + D_{yp} \Lambda \Delta D_{qw} \\
\bar{D}_{qu} &= \Delta D_{qu} & \bar{D}_{yu} &= D_{yu} + D_{yp} \Lambda \Delta D_{qu}
\end{aligned}$$

และ $\Delta = (I - D_{qp}\Lambda)^{-1}$

จากการพิจารณาการแปลงวงรอบพบว่าเราสามารถแปลงขอบเขตเซกเตอร์จาก $[\alpha_i, \beta_i]$ ไปเป็นขอบเขตเซกเตอร์ $[0, l_i]$ ได้เสมอ แต่จากอสมการ (3.8) เราจะแปลงการจำกัดความชันจาก (δ_i, ζ_i) ไปเป็น $(0, m_i)$ ได้ในกรณีที่ $\delta_i = \alpha_i$ เท่านั้น ดังนั้นในกรณีที่ $\delta_i \neq \alpha_i$ เราจำเป็นต้องขยายขนาดเซกเตอร์เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ด้วยวิธีที่นำเสนอได้

3.4 ฟังก์ชันเลียปูโนฟ

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้นำแนวคิดในการใช้ฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟ ที่มีพจน์อินทิกรัลแปดเทอม มาจาก [10] และได้ดัดแปลงในส่วนพจน์กำลังสองเพื่อความเหมาะสมในการใช้คำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร ในตอนนี้จะนำเสนอฟังก์ชันเลียปูโนฟดังกล่าวพร้อมทั้งคำอธิบายความหมาย

บทตั้ง 3.1 กำหนดให้ $\phi : \mathbf{R}^{n_p} \rightarrow \mathbf{R}^{n_p}$ เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้นที่สอดคล้องเงื่อนไขเซกเตอร์และความชัน

$$0 \leq \frac{\phi_i(\sigma)}{\sigma} \leq l_i \tag{3.9}$$

$$0 \leq \phi_i'(\sigma) \leq m_i \tag{3.10}$$

สำหรับทุกค่า $\lambda_{j,i} \geq 0$ เมื่อ $j = 1, \ldots, 8$ จะได้ว่าอสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$0 \leq \eta_{1,i} \triangleq \lambda_{1,i} \int_0^{q_i} \phi_i(\sigma)\, d\sigma \tag{3.11}$$

$$0 \leq \eta_{2,i} \triangleq \lambda_{2,i} \int_0^{q_i} \{l_i\sigma - \phi_i(\sigma)\}\, d\sigma \tag{3.12}$$

$$0 \leq \eta_{3,i} \triangleq \lambda_{3,i} \int_0^{q_i} \phi_i'(\sigma)\sigma\, d\sigma \tag{3.13}$$

$$0 \leq \eta_{4,i} \triangleq \lambda_{4,i} \int_0^{q_i} \{m_i - \phi_i'(\sigma)\}\sigma\, d\sigma \tag{3.14}$$

$$0 \leq \eta_{5,i} \triangleq \lambda_{5,i} \int_0^{q_i} \phi_i'(\sigma)\phi_i(\sigma)\, d\sigma \tag{3.15}$$

$$0 \leq \eta_{6,i} \triangleq \lambda_{6,i} \int_0^{q_i} \phi_i'(\sigma)\{l_i\sigma - \phi_i(\sigma)\}\, d\sigma \tag{3.16}$$

$$0 \leq \eta_{7,i} \triangleq \lambda_{7,i} \int_0^{q_i} \{m_i - \phi_i'(\sigma)\}\phi_i(\sigma)\, d\sigma \tag{3.17}$$

$$0 \leq \eta_{8,i} \triangleq \lambda_{8,i} \int_0^{q_i} \{m_i - \phi_i'(\sigma)\}\{l_i\sigma - \phi_i(\sigma)\}\, d\sigma \tag{3.18}$$

พิสูจน์: ดูใน [10]

เป็นที่ทราบกันว่า ฟังก์ชันเลียปูโนฟสำหรับสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ที่มีการป้อนกลับของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น (ระบบลูเร) เป็นฟังก์ชันพลังงานในรูปของกำลังสองของตัวแปรสถานะบวกกับอินทิกรัลของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$V(x) \triangleq x^T P x + 2\lambda_i \int_0^{q_i} \phi_i(\sigma)\, d\sigma \tag{3.19}$$

พจน์อินทิกรัลของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นอาจพิจารณาได้ว่า เป็นพลังงานเสมือนของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นนั่นเอง และจากคุณสมบัติตามบทตั้ง 3.1 เราสามารถสร้างฟังก์ชันเลียปูโนฟ ได้ดังนี้

$$V(x) \triangleq x^T P x + 2 \sum_{j=1}^{8} \sum_{i=1}^{n_p} \eta_{j,i} \tag{3.20}$$

วิทยานิพนธ์นี้จะใช้ฟังก์ชันเลียปูโนฟตามสมการ (3.20) ในการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน

ข้อสังเกต 3.1 ถ้าเรากำหนดให้ตัวคูณ (multiplier) $\lambda_{2,i}, \ldots \lambda_{8,i}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ฟังก์ชันเลียปูโนฟในสมการ (3.20) จะกลับไปเป็นฟังก์ชันเลียปูโนฟในสมการ (3.19) ดังนั้นเป็นไปได้ว่าเงื่อนไขสำหรับคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดจากฟังก์ชันเลียปูโนฟในสมการ (3.20) น่าจะมีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขที่ได้จากฟังก์ชันเลียปูโนฟในสมการ (3.19)

ข้อสังเกต 3.2 ผลรวมของอินทิกรัลของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นทั้งแปดพจน์ในสมการ (3.20) สามารถจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปของอินทิกรัลสี่พจน์ ดังนี้

$$\begin{aligned} 2\sum_{j=1}^{8}\sum_{i=1}^{n_p}\eta_{j,i} &= 2\sum_{i=1}^{n_p}(\lambda_{2,i}l_i+\lambda_{4,i}m_i+\lambda_{8,i}m_il_i)\int_0^{q_i}\sigma d\sigma \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n_p}(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i}+\lambda_{7,i}m_i-\lambda_{8,i}m_i)\int_0^{q_i}\phi_i(\sigma)d\sigma \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n_p}(\lambda_{3,i}-\lambda_{4,i}+\lambda_{6,i}l_i-\lambda_{8,i}l_i)\int_0^{q_i}\phi_i'(\sigma)\sigma d\sigma \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n_p}(\lambda_{5,i}-\lambda_{6,i}-\lambda_{7,i}+\lambda_{8,i})\int_0^{q_i}\phi_i'(\sigma)\phi_i(\sigma)d\sigma \end{aligned} \tag{3.21}$$

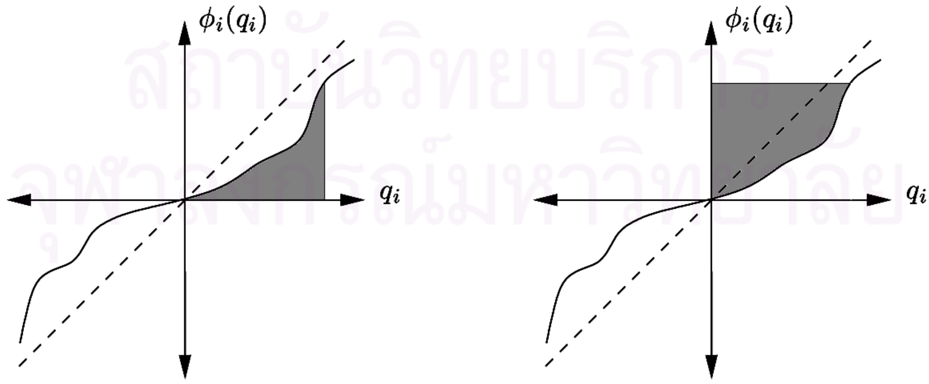
โดยที่อินทิกรัลทั้งสี่พจน์ คือ

$$\int_0^{q_i}\sigma d\sigma = \frac{1}{2}q_i^2 \tag{3.22}$$

$$\int_0^{q_i}\phi_i'(\sigma)\phi_i(\sigma)d\sigma = \frac{1}{2}\left[\phi_i(q_i)\right]^2 \tag{3.23}$$

$$\int_0^{q_i}\phi_i(\sigma)d\sigma = \text{พื้นที่ในส่วนที่แรเงาดังรูป (3.2a)} \tag{3.24}$$

$$\int_0^{q_i}\phi_i'(\sigma)\sigma d\sigma = \text{พื้นที่ในส่วนที่แรเงาดังรูป (3.2b)} \tag{3.25}$$



(a) พจน์ $\int_0^{q_i}\phi_i(\sigma)d\sigma$ (b) พจน์ $\int_0^{q_i}\phi_i'(\sigma)\sigma d\sigma$

รูปที่ 3.2: พื้นที่ในส่วนแรเงาที่สมมูลกับอินทิกรัล

เมื่อพิจารณาพจน์อินทิกรัลพบว่า พจน์ (3.22) แทนพลังงานของสัญญาณเข้าของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น พจน์ (3.23) แทนพลังงานออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และพจน์ (3.24) และ (3.25) แทนพื้นที่ในส่วนแรเงา ดังรูปที่ (3.2) ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นพลังงานเสมือนได้เช่นกัน และสรุปได้ว่าฟังก์ชันเลียปูโนฟรูปแบบใหม่ (3.20) ใช้ประโยชน์จากคุณสมบัติของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมากกว่าฟังก์ชันเลียปูโนฟรูปแบบเดิม (3.19) ซึ่งใช้เพียงพจน์ (3.24) เท่านั้น

นอกจากนั้นยังสังเกตได้ว่าสัมประสิทธิ์ของอินทิกรัลทั้งสี่พจน์มีค่าเป็นลบได้ ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ความอนุรักษ์ลดลงได้ และเนื่องจากฟังก์ชันเลียปูโนฟซึ่งเป็นฟังก์ชันพลังงานต้องมีค่ามากกว่าศูนย์ เราจึงต้องพิสูจน์ว่าฟังก์ชันเลียปูโนฟ (3.20) เป็นบวกโดยใช้วิธีจัดหมู่ (combination) ให้ได้อินทิกรัลของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นครบทั้งแปดเทอม

3.5 เงื่อนไขสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน

จากที่ได้กล่าวถึงสมรรถนะกรณีเลวสุดของระบบไม่เชิงเส้นใน §2.3 เรากำหนดสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบไม่เชิงเส้น (3.2) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathcal{J}_2^2$ เป็นดังนี้

$$\mathcal{J}_2^2 := \sup \sum_{i=1}^{n_w} \int_0^\infty z_i(t)^T z_i(t) dt \tag{3.26}$$

โดยที่ $\{z_1(t), \ldots, z_{n_w}(t)\}$ เป็นสัญญาณสมรรถนะขาออกของระบบไม่เชิงเส้น (3.2) จากการป้อนสัญญาณรบกวนขาเข้าเป็น $\{\delta w_1, \ldots, \delta w_{n_w}\}$ (อิมพัลส์ในทิศทางของเวกเตอร์ $w_1, \ldots, w_{n_w}$) เมื่อค่าเริ่มต้น (initial condition) เป็นศูนย์ ($x_0 = 0$) และสัญญาณสมรรถนะขาออกในกรณีดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $\{z_1(t), \ldots, z_{n_w}(t)\}$ ของระบบไม่เชิงเส้น (3.2) ที่สัญญาณรบกวนขาเข้าเป็นศูนย์ และมีค่าเริ่มต้น $x_i(0) = B_w e_i,\ i = 1, \ldots, n_w$ โดยที่ $\{e_1, \ldots, e_{n_w}\}$ เป็นฐานหลักชุดหนึ่งของ $\mathbf{R}^{n_w}$ เนื่องจากค่า $\mathcal{J}_2^2$ คำนวณได้ยาก ดังนั้นเราจึงคำนวณค่าของเขตบนของ $\mathcal{J}_2^2$ แทนดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 (สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร) ถ้ามีฟังก์ชันเลียปูโนฟในรูปแบบสมการ (3.20) โดยที่ $P = P^T > 0$ และ $\lambda \geq 0$ สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} A^T(P + C_q^T\Sigma_1 C_q) + C_z^T C_z \\ +(P + C_q^T\Sigma_1 C_q)A \end{array} & (\cdot)_{2,1}^T & (\cdot)_{3,1}^T \\ \hline \begin{array}{c} B_p^T(P + C_q^T\Sigma_1 C_q) + D_{zp}^T C_z \\ +\Sigma_2 C_q A + T_1 L C_q \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma_2 C_q B_p + B_p^T C_q^T \Sigma_2 \\ +D_{zp}^T D_{zp} - 2T_1 \end{array} & (\cdot)_{3,2}^T \\ \hline \Sigma_3 C_q + T_2 M C_q A & \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p & -2T_2 \end{array}\right] \leq 0 \tag{3.27}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= L\Lambda_2 + M\Lambda_4 + LM\Lambda_8 \\ \Sigma_2 &= \Lambda_1 - \Lambda_2 + M\Lambda_7 - M\Lambda_8 \\ \Sigma_3 &= \Lambda_3 - \Lambda_4 + L\Lambda_6 - L\Lambda_8 \\ \Sigma_4 &= \Lambda_5 - \Lambda_6 - \Lambda_7 + \Lambda_8 \\ \Lambda_j &= \mathbf{diag}(\lambda_{j,1}, \ldots, \lambda_{j,n_p}) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 8 \\ T_k &= \mathbf{diag}(\tau_{k,1}, \ldots, \tau_{k,n_p}) \geq 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

$$L = \mathbf{diag}(l_1, \ldots, l_{n_p}) \geq 0$$
$$M = \mathbf{diag}(m_1, \ldots, m_{n_p}) \geq 0$$

จะได้ว่าขอบเขตบน (upper bound) ของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร (3.1) มีค่าจำกัดและสามารถคำนวณได้ปัญหาการหาต่ำสุด

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{Tr}\, B_w^T \left[P + C_q^T \Sigma_0 \, C_q\right] B_w \\ \text{subject to} & (3.27),\ P > 0,\ \Lambda_j \geq 0,\ T_k \geq 0 \end{array} \tag{3.28}$$

โดยที่

$$\Sigma_0 = L(\Lambda_1 + \Lambda_2) + M(\Lambda_3 + \Lambda_4) + LM(\Lambda_5 + \Lambda_6 + \Lambda_7 + \Lambda_8)$$

พิสูจน์: พิจารณาระบบลูเร (3.1) ที่มีตัวแปรสถานะเริ่มต้น $x(0)$ และคำนวณค่าขอบเขตบนของพลังงานขาออกในสมการ (3.26) โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูโนฟ (3.20)
จะกล่าวได้ว่า ถ้า

$$\dot{V}(x) + z^T z \leq 0 \tag{3.29}$$

เป็นจริงสำหรับตัวแปรสถานะ x ทุกค่าที่สอดคล้องกับสมการพลวัตของระบบ (3.1), จะได้ว่า

$$\mathcal{J}_2^2 \leq V(x(0)) \tag{3.30}$$

ในการพิสูจน์ จะเริ่มต้นด้วยการหาค่าทางด้านซ้ายของอสมการ (3.29) ก่อน โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลียปูโนฟ (3.20) เทียบกับเวลา และรวมกับพจน์ $z^T z$, จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 \quad \geq \quad & 2x^T P\dot{x} + 2p^T \Lambda_1 C_q \dot{x} + 2x^T C_q^T L\Lambda_2 C_q \dot{x} - 2p^T \Lambda_2 C_q \dot{x} + 2\dot{p}^T \Lambda_3 C_q x + 2x^T C_q^T M\Lambda_4 C_q \dot{x} \\ & -2\dot{p}^T \Lambda_4 C_q x + 2p^T \Lambda_5 \dot{p} + 2\dot{p}^T L\Lambda_6 C_q x - 2p^T \Lambda_6 \dot{p} + 2p^T M\Lambda_7 C_q \dot{x} - 2p^T \Lambda_7 \dot{p} + 2x^T C_q^T LM\Lambda_8 C_q \dot{x} \\ & -2p^T M\Lambda_8 C_q \dot{x} - 2\dot{p}^T L\Lambda_8 C_q x + 2p^T \Lambda_8 \dot{p} + x^T C_z^T C_z x + 2x^T C_z^T D_{zp} p + p^T D_{zp}^T D_{zp} p \end{aligned} \tag{3.31}$$

อสมการ (3.29) สอดคล้องกับอสมการ (3.31) สำหรับตัวแปรสถานะ x ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเซกเตอร์

$$p_i(p_i - l_i C_{i,q} x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n_p \tag{3.32}$$

และเงื่อนไขความชัน

$$\dot{p}_i(\dot{p}_i - m_i C_{i,q} \dot{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n_p \tag{3.33}$$

จาก $\mathcal{S}$-Procedure [4, หน้า 23–24] ได้อสมการ (3.31) ที่รวมเงื่อนไขเซกเตอร์และเงื่อนไขความชันเป็น

$$\begin{aligned} 0 \quad \geq \quad & 2x^T P\dot{x} + 2p^T \Lambda_1 C_q \dot{x} + 2x^T C_q^T L\Lambda_2 C_q \dot{x} - 2p^T \Lambda_2 C_q \dot{x} + 2\dot{p}^T \Lambda_3 C_q x + 2x^T C_q^T M\Lambda_4 C_q \dot{x} \\ & -2\dot{p}^T \Lambda_4 C_q x + 2p^T \Lambda_5 \dot{p} + 2\dot{p}^T L\Lambda_6 C_q x - 2p^T \Lambda_6 \dot{p} + 2p^T M\Lambda_7 C_q \dot{x} - 2p^T \Lambda_7 \dot{p} + 2x^T C_q^T LM\Lambda_8 C_q \dot{x} \\ & -2p^T M\Lambda_8 C_q \dot{x} - 2\dot{p}^T L\Lambda_8 C_q x + 2p^T \Lambda_8 \dot{p} + x^T C_z^T C_z x + 2x^T C_z^T D_{zp} p + p^T D_{zp}^T D_{zp} p \\ & +2x^T C_q^T L T_1 p - 2p^T T_1 p + 2x^T A^T C_q^T M T_2 \dot{p} + 2p^T B_p^T C_q^T M T_2 \dot{p} - 2\dot{p}^T T_2 \dot{p} \end{aligned} \tag{3.34}$$

แทนค่า $\dot{x} = Ax + B_p p$ และเขียนอสมการนี้ใหม่ในรูปกำลังสองของ $\begin{bmatrix} x^T & p^T & \dot{p}^T \end{bmatrix}^T$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x \\ p \\ \dot{p} \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} A^T(P + C_q^T\Sigma_1 C_q) + C_z^T C_z \\ +(P + C_q^T\Sigma_1 C_q)A \end{array} & (\cdot)_{2,1}^T & (\cdot)_{3,1}^T \\ \hline \begin{array}{c} B_p^T(P + C_q^T\Sigma_1 C_q) + D_{zp}^T C_z \\ +\Sigma_2 C_q A + T_1 L C_q \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma_2 C_q B_p + B_p^T C_q^T \Sigma_2 \\ +D_{zp}^T D_{zp} - 2T_1 \end{array} & (\cdot)_{3,2}^T \\ \hline \Sigma_3 C_q + T_2 M C_q A & \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p & -2T_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ p \\ \dot{p} \end{bmatrix} \leq 0 \qquad (3.35)$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (3.27)

ขั้นต่อไปหาขอบเขตบนของ $V(x(0))$ ในอสมการ (3.30) โดยการแทนค่าของขอบเขตบนของอินทิกรัลแต่ละพจน์จะได้

$$\begin{aligned} V(x(0)) \leq\ & x(0)^T P x(0) + x(0)^T C_q^T L(\Lambda_1 + \Lambda_2) C_q x(0) \\ & + x(0)^T C_q^T M(\Lambda_3 + \Lambda_4) C_q x(0) \\ & + x(0)^T C_q^T LM(\Lambda_5 + \Lambda_6 + \Lambda_7 + \Lambda_8) C_q x(0) \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$V(x(0)) \leq x(0)^T \left[P + C_q^T \Sigma_0\, C_q\right] x(0) \qquad (3.36)$$

และจากนิยามของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดจะได้

$$V(x(0)) \leq \mathbf{Tr}\, B_w^T \left[P + C_q^T \Sigma_0\, C_q\right] B_w \qquad (3.37)$$

สรุปได้ว่า (3.27) สมมูลกับ (3.29) และ (3.30) จะเขียนได้เป็น

$$\mathcal{J}_2^2 \leq \mathbf{Tr}\, B_w^T \left[P + C_q^T \Sigma_0\, C_q\right] B_w \qquad (3.38)$$

ดังนั้นเราสามารถคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรได้จากการหาค่าต่ำสุดของ $\mathcal{J}_2^2$ ที่สอดคล้องกับอสมการ (3.38) และอสมการ (3.27) ดังที่กล่าวไว้ในปัญหา (3.28) □

ข้อสังเกต 3.3 เงื่อนไขเพียงพอในการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่ได้อยู่ในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นบนตัวแปร P, Λ_j, และ T_k ถ้าเรากำหนดค่าขอบเขตเซกเตอร์ L และความชัน M จะสามารถคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรได้ โดยการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์เชิงเส้นโดยมีเงื่อนไขอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ข้อสังเกต 3.4 ในกรณีที่ไม่พิจารณาเงื่อนไขความชันและ $\Lambda_2, \ldots, \Lambda_8$ มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ว่าอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (3.27) กลายเป็น

$$\left[\begin{array}{c|c} A^T P + PA + C_z^T C_z & (\cdot)_{2,1}^T \\ \hline \begin{array}{c} B_p^T P + D_{zp}^T C_z \\ +\Lambda_1 C_q A + T_1 L C_q \end{array} & \begin{array}{c} \Lambda_1 C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda_1 \\ +D_{zp}^T D_{zp} - 2T_1 \end{array} \end{array}\right] \leq 0 \qquad (3.39)$$

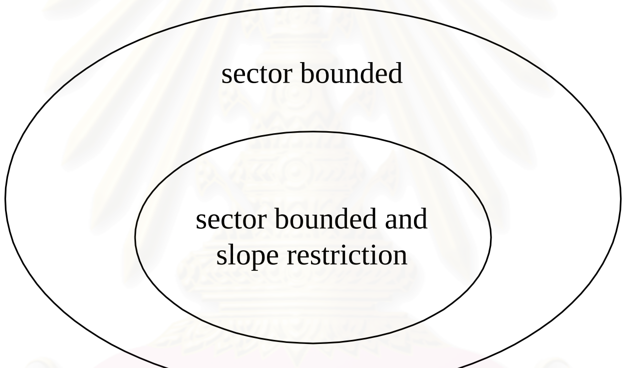
และ (3.38) จะกลายเป็น

$$\mathcal{J}_2^2 \leq \mathbf{Tr}\, B_w^T \left[P + C_q^T L \Lambda_1\, C_q\right] B_w \qquad (3.40)$$

ซึ่งจะเหมือนกับเงื่อนไขสำหรับการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของโปปอฟซึ่งไม่มีการจำกัดความชัน [4, หน้า 121–122] นั่นคือเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟเป็นกรณีพิเศษของเงื่อนไขการคำนวณใหม่ที่นำเสนอ

3.6 วิเคราะห์ผล

การคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดด้วยวิธีโปปอฟ และการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดด้วยวิธีที่นำเสนอพิจารณาปัญหาที่แตกต่างกัน โดยการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ด้วยวิธีโปปอฟพิจารณาระบบลูเรที่มีเงื่อนไขเซกเตอร์ ส่วนการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอพิจารณาระบบลูเรที่มีเงื่อนไขเซกเตอร์และเงื่อนไขความชันด้วย ซึ่งเซตของระบบที่พิจารณามีจำนวนสมาชิกน้อยกว่า ดังรูป



รูปที่ 3.3: เซตของระบบลูเร

การเพิ่มเงื่อนไขความชันให้กับปัญหาที่พิจารณาอาจทำให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดลดลงได้ เนื่องจากไม่ต้องพิจารณาระบบลูเรที่ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมีความชันมากกว่าค่าที่กำหนด นั่นคือเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่นำเสนอจะมีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของโปปอฟ

เราอาจสรุปได้ว่าค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดเป็นฟังก์ชันของ (P, Λ_j, T_k) และถ้ามี (P, Λ_j, T_k) ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (3.27) ก็จะสามารถประกันสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบได้ แต่ในกรณีที่ไม่สามารถหา (P, Λ_j, T_k) ที่สอดคล้องได้เราไม่สามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบได้

เงื่อนไขที่นำเสนอนี้ยังสามารถใช้ได้กับระบบลูเรที่มีฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมากกว่าหนึ่งฟังก์ชันได้ แต่การเพิ่มจำนวนฟังก์ชันไม่เชิงเส้นในการวิเคราะห์ จะทำให้ขนาดของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นใหญ่ขึ้น ส่งผลถึงจำนวนตัวแปรที่มากขึ้นและใช้เวลาคำนวณเพิ่มมากขึ้นด้วย

3.7 บทสรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอเงื่อนไขสำหรับคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน เงื่อนไขดังกล่าวมีพื้นฐานอยู่บนฟังก์ชันเลียปูโนฟ (3.20) ที่นำเสนอ ซึ่งสามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ สำหรับระบบลูเรที่ระบุขอบเขตเซกเตอร์และความชันได้ เงื่อนไขสำหรับการคำนวณที่ได้อยู่ในรูปของปัญหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์บนกรอบงานของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งสามารถหาคำตอบได้อย่างมีประสิทธิภาพ วิธีที่นำเสนอนี้ยังสามารถใช้กับระบบลูเรที่มีฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมากกว่าหนึ่งฟังก์ชันได้ และยังสามารถขยายผลไปสู่การออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนได้

บทที่ 4

การสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน

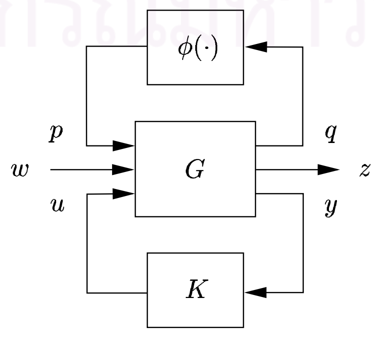
4.1 บทนำ

ในบทนี้จะใช้ผลจากการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนในบทที่แล้ว ในการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเรที่มีเงื่อนไขเซกเตอร์และมีการจำกัดความชัน โดยตัวควบคุมที่ได้มีอันดับเท่ากับระบบ เป้าหมายการควบคุมคือทำให้สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบมีค่าต่ำสุดเมื่อระบบมีความไม่แน่นอนอยู่ภายใต้เงื่อนไขเซกเตอร์และความชัน โดยการค้นหาตัวควบคุม K ที่ป้อนกลับในระบบแล้วทำให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณได้จากเงื่อนไขการวิเคราะห์สมรรถนะคงทนที่นำเสนอในบทที่แล้วมีค่าต่ำสุดนั่นเอง

เงื่อนไขในการคำนวณหาตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ซึ่งเป็นปัญหา NP แบบยาก ในวิทยานิพนธ์นี้จะประยุกต์ใช้หลักการของฮอมอโทปี (Richter และ De Carlo, 1983) [19, 20] ในการหาคำตอบโดยเปลี่ยนปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ให้เป็นชุดของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยใช้การวนซ้ำระหว่างการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (Popov multiplier) และการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม จนกว่าค่าฟังก์ชันจุดประสงค์จะลู่เข้าสู่คำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้นี้จะเป็นคำตอบเฉพาะที่เท่านั้น และจากงานที่ผ่านมา [5, 6, 7] พบว่าการลู่เข้าของคำตอบเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย §4.2 นำเสนอการกำหนดปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน §4.3 นำเสนอขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม ซึ่งประกอบไปด้วย 2 ขั้นตอนคือ §4.3.1 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ และ §4.3.2 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม นอกจากนี้ใน §4.3.3 ยังได้กล่าวถึงวิธีฮอมอโทปีและขั้นตอนการออกแบบ และ §4.4 เป็นการวิเคราะห์ผลที่ได้ และ §4.5 เป็นบทสรุป

4.2 กำหนดปัญหา



รูปที่ 4.1: แผนภาพบล็อกสำหรับปัญหาสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน

พิจารณาระบบ LTI ที่แทนความไม่แน่นอนด้วยการป้อนกลับด้วยฟังชันไม่เชิงเส้น อธิบายได้ด้วยระบบสมการ (4.1) และแสดงดังรูปที่ 4.1

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w + B_u u \\
q &= C_q x + D_{qp} p + D_{qw} w + D_{qu} u \\
z &= C_z x + D_{zp} p + D_{zw} w + D_{zu} u \\
y &= C_y x + D_{yp} p + D_{yw} w + D_{yu} u \\
p &= \phi(q) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1(q_1) \\ \vdots \\ \phi_{n_p}(q_{n_p}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

เมื่อ $x : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^n$ คือตัวแปรสถานะ, $w : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_w}$ คือสัญญาณรบกวนขาเข้า, $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_u}$ คือสัญญาณเข้า, $z : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_z}$ คือสัญญาณสมรรถนะขาออก, $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_y}$ คือสัญญาณออก, $q : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_p}$ และ $p : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^{n_p}$ คือสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ϕ_i กำหนดให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเซกเตอร์ $[0, l_i]$ และเงื่อนไขความชัน $(0, m_i)$ นั่นคือ $\phi \in \Phi(l, m)$ โดยที่

$$
\Phi(l,m) := \left\{ \begin{array}{l} \phi : \mathbf{R}^{n_p} \to \mathbf{R}^{n_p},\ \phi(q) = \left[\phi_1(q_1), \ldots, \phi_{n_p}(q_{n_p})\right]^T, \\ 0 \le \phi_i(q_i)/q_i \le l_i,\ \phi_i(0) = 0, \\ 0 \le d\phi_i(q_i)/dq_i \le m_i,\ \forall i = 1, \ldots, n_p \end{array} \right\}
$$

เมื่อ $l = (l_1, \ldots, l_{n_p})$ เป็นเวกเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นขอบเขตเซกเตอร์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นและ $m = (m_1, \ldots, m_{n_p})$ เป็นเวกเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นขอบเขตความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

สำหรับระบบลูเรในรูปทั่วไปที่มีเงื่อนไขเซกเตอร์แตกต่างจากปัญหาที่กำหนด สามารถใช้การแปลงวงรอบ ในการแปลงขอบเขตเซกเตอร์ให้อยู่ในรูปเดียวกับปัญหาที่กำหนดได้ โดยที่ค่าจำกัดความชันจะเปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังรายละเอียดใน §3.3

สำหรับปัญหาที่เราพิจารณา กำหนดให้ D_{zw} มีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อให้เป็นไปตามคุณสมบัติตั้งไว้ดี (well-posedness) นั่นคือสามารถคำนวณค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ และกำหนดให้ D_{qp}, D_{qw}, D_{qu} และ D_{zp} มีค่าเท่ากับศูนย์เพื่อความง่ายในการแก้ปัญหาการสังเคราะห์คงทน

ในขั้นแรกพิจารณาการป้อนกลับของระบบลูเร (4.1) ผ่านตัวควบคุม K ที่ถูกกำหนดโดย

$$
K = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & 0 \end{array} \right] \tag{4.2}
$$

หรือเขียนในรูปสมการสถานะได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\dot{x_c} &= A_c x_c + B_c y \\
u &= C_c x_c
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

จัดรูปใหม่โดยกำหนดให้ $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T & x_c^T \end{bmatrix}^T$ จะได้

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_p p + \tilde{B}_w w \\
q &= \tilde{C}_q \tilde{x} + \tilde{D}_{qp} p + \tilde{D}_{qw} w \\
z &= \tilde{C}_z \tilde{x} + \tilde{D}_{zp} p + \tilde{D}_{zw} w \\
p &= \phi(q)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

โดยที่

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A} & \tilde{B}_p & \tilde{B}_w \\ \hline \tilde{C}_q & \tilde{D}_{qp} & \tilde{D}_{qw} \\ \hline \tilde{C}_z & \tilde{D}_{zp} & \tilde{D}_{zw} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c|c} A & B_u C_c & B_p & B_w \\ B_c C_y & A_c + B_c D_{yu} C_c & B_c D_{yp} & B_c D_{yw} \\ \hline C_q & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_z & D_{zu} C_c & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเร (4.1) คือกำหนดให้ $\phi \in \Phi(l, m)$ เมื่อ l และ m เท่ากับค่าที่กำหนด ให้หาตัวควบคุม K ที่กำหนดโดย (4.2) ที่ทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเร (4.4) มีค่าต่ำที่สุด นั่นคือการประยุกต์ใช้การวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนกับระบบ (4.4) นั่นเอง ดังนั้นปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนคือการหาค่าเมทริกซ์ A_c, B_c, และ C_c ที่ทำให้ค่า $\gamma_2^2 \geq \mathcal{J}_2^2$ มีค่าต่ำสุดดังปัญหาต่อไปนี้

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{Tr}\, \tilde{B}_w^T \left[\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_0 \tilde{C}_q\right] \tilde{B}_w \\ \text{subject to} & \tilde{P} > 0,\ \Lambda_j \geq 0,\ T_k \geq 0,\ \text{และ} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \tilde{A}^T(\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q) + \\ (\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q)\tilde{A} + \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z \end{array} & (\cdot)_{2,1}^T & (\cdot)_{3,1}^T \\ \hline \begin{array}{c} \tilde{B}_p^T(\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q) \\ + \Sigma_2 \tilde{C}_q \tilde{A} + T_1 L \tilde{C}_q \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma_2 \tilde{C}_q \tilde{B}_p + \\ \tilde{B}_p^T \tilde{C}_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \end{array} & (\cdot)_{3,2}^T \\ \hline \Sigma_3 \tilde{C}_q + T_2 M \tilde{C}_q A & \Sigma_4 + T_2 M \tilde{C}_q \tilde{B}_p & -2T_2 \end{array}\right] \leq 0 \tag{4.5}$$

จากการสังเกตพบว่าฟังก์ชันจุดประสงค์เชิงเส้นที่ต้องการหาค่าต่ำสุดและเงื่อนไขอสมการใน (4.5) เป็นฟังก์ชันของ $(\tilde{P}, \Lambda_j, T_k)$ และ (A_c, B_c, C_c) ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ของตัวควบคุม นอกจากนั้นยังมีพจน์ที่เป็นผลคูณของตัวแปรทั้งสองกลุ่มดังกล่าวทำให้ทั้งฟังก์ชันจุดประสงค์เชิงเส้นและเงื่อนไขอสมการใน (4.5) เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ซึ่งเป็นปัญหา NP แบบยาก ในกรณีนี้เราจะแก้ปัญหานี้โดยใช้วิธีฮอมอโทปี คือการแบ่งปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ออกเป็นชุดของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังที่จะนำเสนอในตอนถัดไป §4.3

ข้อสังเกต 4.1 ถ้ากำหนดพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) ปัญหา (4.5) จะกลายเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และสามารถคำนวณหาค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรที่ป้อนกลับด้วยตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) จากการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (4.5)

4.3 ขั้นตอนการออกแบบ

เนื่องจากปัญหาการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ และเป็นที่ทราบกันว่าปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่เป็นปัญหา NP แบบยาก ในวิทยานิพนธ์นี้จะแก้ปัญหา (4.5) โดยการแทนเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ ด้วยเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองเงื่อนไขและใช้การวนซ้ำจนกว่าจะได้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่ต่ำสุดในย่าน

จากการสังเกตพบว่าเราสามารถแบ่งตัวแปรได้เป็นสองกลุ่ม คือ ตัวคูณโปปอฟ (Λ_j, T_k) และพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) เมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่จะได้ว่าปัญหา (4.5) จะเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นบน $(\tilde{P}, \Lambda_j, T_k)$ และในกรณีที่กำหนดให้ตัวคูณโปปอฟ (Λ_j, T_k) มีค่าคงที่จะได้ว่าปัญหา (4.5) สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นบนตัวแปร $(\tilde{P}, A_c, B_c, C_c)$ ได้

วิธีการออกแบบตัวควบคุมที่จะนำเสนอจะใช้บทตั้ง 2.1 (Elimination Lemma) ในการกำจัดตัวแปร A_c และจัดรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเพื่อให้การลู่เข้าของคำตอบเร็วขึ้น และใช้การวนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหา นั่นคือการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ §4.3.1 และการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม §4.3.2 จนกว่าค่าฟังก์ชันจุดประสงค์จะลู่เข้าสู่ค่าต่ำสุดเฉพาะที่ ดังสรุปขั้นตอนวิธีใน §4.3.3

4.3.1 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ

กำหนดให้ (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่ ปัญหา (4.5) จะกลายเป็นปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนของระบบลูเร (4.1) เมื่อป้อนกลับด้วยตัวควบคุม (4.2) ซึ่งเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

กำหนดให้เมทริกซ์ $\tilde{P}$ เป็นเมทริกซ์บล็อกดังนี้

$$\tilde{P} := \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

แทนค่าลงในฟังก์ชันจุดประสงค์ใน (4.5) จะได้

$$\mathbf{Tr}\left[B_w^T(P_{11} + C_q^T\Sigma_0 C_q)B_w + B_w^T P_{12} B_c D_{yw} + D_{yw}^T B_c^T P_{12}^T B_w + D_{yw}^T B_c^T P_{22} B_c D_{yw}\right] \tag{4.7}$$

และเงื่อนไขอสมการใน (4.5) เป็น

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{array}{c} A^T(P_{11} + C_q^T\Sigma_1 C_q) + \\ (P_{11} + C_q^T\Sigma_1 C_q)A + C_z^T C_z + \\ C_y^T B_c^T P_{12}^T + P_{12} B_c C_y \end{array} & (\cdot)_{2,1}^T & (\cdot)_{3,1}^T & (\cdot)_{4,1}^T \\ \hline
\begin{array}{c} C_c^T B_u^T(P_{11} + C_q^T\Sigma_1 C_q) + \\ A_c^T P_{12}^T + C_c^T D_{yu}^T B_c^T P_{12}^T + \\ P_{12}^T A + P_{22} B_c C_y + C_c^T D_{zu}^T C_z \end{array} & \begin{array}{c} C_c^T B_u^T P_{12} + P_{12}^T B_u C_c + \\ A_c^T P_{22} + P_{22} A_c + C_c^T D_{yu}^T B_c^T P_{22} + \\ P_{22} B_c D_{yu} C_c + C_c^T D_{zu}^T D_{zu} C_c \end{array} & (\cdot)_{3,2}^T & (\cdot)_{4,2}^T \\ \hline
\begin{array}{c} B_p^T(P_{11} + C_q^T\Sigma_1 C_q) + \\ D_{yp}^T B_c^T P_{12}^T + \Sigma_2 C_q A + T_1 L C_q \end{array} & \begin{array}{c} B_p^T P_{12} + D_{yp}^T B_c^T P_{22} + \\ \Sigma_2 C_q B_u C_c \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma_2 C_q B_p + \\ B_p^T C_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \end{array} & (\cdot)_{4,3}^T \\ \hline
\Sigma_3 C_q + T_2 M C_q A & T_2 M C_q B_u C_c & \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p & -2T_2
\end{array}\right] \leq 0 \tag{4.8}$$

จะได้ว่าเมื่อกำหนดพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) จะหาค่าตัวคูณโปปอฟ (Λ_j, T_k) ได้จากการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (4.7) \\ \text{subject to} & (4.8),\ \tilde{P} > 0,\ \Lambda_j \geq 0,\ T_k \geq 0 \end{array} \tag{4.9}$$

4.3.2 การหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม

จากการสังเกตเงื่อนไขอสมการในปัญหา (4.5) พบว่าเมทริกซ์ A_c ปรากฏอยู่เพียงตำแหน่งเดียวคือใน $\tilde{A}$ ดังนั้นเราสามารถลดจำนวนตัวแปรโดยการกำจัด A_c ออกจากอสมการได้โดยกำหนดให้

$$\tilde{A}_0 := \begin{bmatrix} A & B_u C_c \\ B_c C_y & B_c D_{yu} Cc \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \tilde{J} := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $\tilde{A}$ สามารถเขียนได้เป็น $\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \tilde{J} A_c \tilde{J}^T$, และเงื่อนไขอสมการในปัญหา (4.5) จัดรูปได้เป็น

$$\tilde{G} + V A_c^T U^T + U A_c V^T < 0 \tag{4.10}$$

โดยที่ $\tilde{G}$, V, และ U มีค่าดังนี้

$$\tilde{G} := \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \tilde{A}_0^T(\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q) + \\ (\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q)\tilde{A}_0 + \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z \end{array} & (\cdot)^T_{2,1} & (\cdot)^T_{3,1} \\ \hline \begin{array}{c} \tilde{B}_p^T(\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q) + \\ \Sigma_2 \tilde{C}_q \tilde{A}_0 + T_1 \bar{L} \tilde{C}_q \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma_2 \tilde{C}_q \tilde{B}_p + \\ \tilde{B}_p^T \tilde{C}_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \end{array} & (\cdot)^T_{3,2} \\ \hline \Sigma_3 \tilde{C}_q + T_2 \bar{M} \tilde{C}_q \tilde{A}_0 & \Sigma_4 + T_2 \bar{M} \tilde{C}_q \tilde{B}_p & -2T_2 \end{array}\right] \tag{4.11}$$

$$V := \begin{bmatrix} \tilde{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad U := \begin{bmatrix} (\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q)\tilde{J} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากบทตั้ง 2.1 (Elimination Lemma) จะได้ว่าอสมการ (4.10) เป็นจริงก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$V_\perp^T \tilde{G} V_\perp < 0 \tag{4.12}$$

$$U_\perp^T \tilde{G} U_\perp < 0 \tag{4.13}$$

โดยที่ $V_\perp$ และ $U_\perp$ คือส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement) ของ V และ U, กำหนดให้

$$V_\perp = \begin{bmatrix} \tilde{J}_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad U_\perp = \begin{bmatrix} (\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q)^{-1} \tilde{J}_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

กำหนดให้เมทริกซ์ $\tilde{P}$ และ $\tilde{Q}$ เป็น

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \tilde{Q} = (\tilde{P} + \tilde{C}_q^T \Sigma_1 \tilde{C}_q)^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$$

เมื่อ P_{11} และ Q_{11} เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และเมทริกซ์ Q_{12} มีความสัมพันธ์กับ P_{11}, Q_{11}, และ P_{12} โดย $Q_{12} = (I - Q_{11}(P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q))P_{12}^{-T}$, กำหนดให้ $Y := C_c Q_{12}^T$ และ $Z := P_{12} B_c$, จาก (4.12) จะได้

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} A^T(P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) + C_y^T Z^T + \\ (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q)A + ZC_y + C_z^T C_z \end{array} & (\cdot)_{2,1}^T & (\cdot)_{3,1}^T \\ \hline \begin{array}{c} B_p^T(P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) + \\ D_{yp}^T Z^T + \Sigma_2 C_q A + T_1 L C_q \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma_2 C_q B_p + \\ B_p^T C_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \end{array} & (\cdot)_{3,2}^T \\ \hline \Sigma_3 C_q + T_2 M C_q A & \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p & -2T_2 \end{array}\right] < 0 \tag{4.14}$$

และจาก (4.13) จะได้

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} Q_{11}A^T + AQ_{11} + Y^T B_u^T + B_u Y + \\ (C_z Q_{11} + D_{zu} Y)^T (C_z Q_{11} + D_{zu} Y) \end{array} & (\cdot)_{2,1}^T & (\cdot)_{3,1}^T \\ \hline \begin{array}{c} B_p^T + \Sigma_2 C_q A Q_{11} + \\ \Sigma_2 C_q B_u Y + T_1 L C_q Q_{11} \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma_2 C_q B_p + \\ B_p^T C_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \end{array} & (\cdot)_{3,2}^T \\ \hline \begin{array}{c} \Sigma_3 C_q Q_{11} + T_2 M C_q A Q_{11} + \\ T_2 M C_q B_u Y \end{array} & \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p & -2T_2 \end{array}\right] < 0 \tag{4.15}$$

ใช้ส่วนเติมเต็มของชูร์ (Schur complement) อสมการ (4.15) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} Q_{11}A^T + AQ_{11} + Y^T B_u^T + B_u Y & (\cdot)_{2,1}^T & (\cdot)_{3,1}^T & (\cdot)_{4,1}^T \\ \hline \begin{array}{c} B_p^T + \Sigma_2 C_q A Q_{11} + \\ \Sigma_2 C_q B_u Y + T_1 L C_q Q_{11} \end{array} & \begin{array}{c} \Sigma_2 C_q B_p + \\ B_p^T C_q^T \Sigma_2 - 2T_1 \end{array} & (\cdot)_{3,2}^T & 0 \\ \hline \begin{array}{c} \Sigma_3 C_q Q_{11} + T_2 M C_q A Q_{11} + \\ T_2 M C_q B_u Y \end{array} & \Sigma_4 + T_2 M C_q B_p & -2T_2 & 0 \\ \hline C_z Q_{11} + D_{zu} Y & 0 & 0 & -I \end{array}\right] < 0 \tag{4.16}$$

จากบทตั้ง 2.2 (Completion Lemma) สำหรับเมทริกซ์ $Q_{11} > 0,\ P_{11} \geq Q_{11}^{-1}$ เมทริกซ์บล็อกด้านล่างขวาขนาด $n \times n$ ของ $\tilde{P}$ และของ $\tilde{Q}$ จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์ $P_{22} = P_{12}^T(P_{11} - Q_{11}^{-1})^{-1}P_{12}$ และ $Q_{22} = Q_{12}^T(Q_{11} - P_{11}^{-1})^{-1}Q_{12}$, ถ้า $\tilde{P} > 0$ และ $\tilde{P}\tilde{Q} = I$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q & I \\ I & Q_{11} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.17}$$

ดังนั้นเราจะได้อสมการเงื่อนไขทั้งสิ้น สามอสมการคือ (4.14), (4.16) และ (4.17) และพบว่าอสมการ (4.14) และ (4.17) อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้ สำหรับอสมการ (4.16) เป็น BMI โดยมีพจน์ผลคูณระหว่าง (Q, Y) ซึ่งเป็นตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม และ (Λ_j, T_k) ซึ่งเป็นตัวคูณโปปอฟ

ต่อไปเราจะพิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ในปัญหา (4.5) จากการแทนค่าโดยตรงจะได้

$$\mathbf{Tr} \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} + C_q^T \Sigma_0 C_q & Z \\ Z^T & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

เมื่อมีเมทริกซ์สมมาตร $X \in \mathbf{R}^{n_y \times n_y}$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} X &\geq B_c^T P_{22} B_c \\ &\geq Z^T((P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) - Q_{11}^{-1})^{-1} Z \end{aligned} \tag{4.19}$$

ใช้ส่วนเติมเต็มของชูร์ อสมการ (4.19) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} X & Z^T & 0 \\ Z & (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) & I \\ 0 & I & Q_{11} \end{bmatrix} > 0 \tag{4.20}$$

จะสังเกตได้ว่าเงื่อนไขอสมการ (4.20) ครอบคลุมเงื่อนไขในอสมการ (4.17) ด้วย ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องพิจารณาอสมการ (4.17) อีก และจะได้ว่าเมื่อกำหนดให้ตัวคูณโปปอฟ (Λ_j, T_k) มีค่าคงที่จะหาค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม $(P_{11}, Q_{11}, X, Y, Z)$ ได้จากการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (4.18) \\ \text{subject to} & (4.14),\ (4.16),\ (4.20),\ \tilde{P} > 0 \end{array} \tag{4.21}$$

จากนั้นเราสามารถหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม K ได้จาก

$$B_c = P_{12}^{-1} Z \tag{4.22}$$

$$C_c = Y(I - (P_{11} + C_q^T \Sigma_1 C_q) Q_{11})^{-1} P_{12} \tag{4.23}$$

เมื่อ P_{12} เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่สามารถหาตัวผกผันได้ เหตุผลที่เราสามารถเลือกเมทริกซ์ P_{12} ได้เพราะว่าตัวแปรสถานะของตัวควบคุม x_c สามารถเปลี่ยนพิกัด (coordinates) ได้นั่นเอง

และเมื่อเราทราบค่า $\tilde{P}$, Λ_j, T_k, B_c และ C_c ก็สามารถหาค่า A_c ที่สอดคล้องกับอสมการ (4.10) ได้ ซึ่งอาจจะพิจารณาเป็นปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น หรืออาจจะหา A_c จากวิธีวิเคราะห์ (analytical solution) ได้อีกวิธีหนึ่ง [5, 23]

4.3.3 วิธีฮอมอโทปีและขั้นตอนการออกแบบ

ใน §4.3.1 และ §4.3.2 เราได้นำเสนอการแบ่งปัญหาการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน ซึ่งเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ออกเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหา คือปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (4.9) และปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม (4.21) การแก้ปัญหาการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนทำได้โดยการวนซ้ำแก้ปัญหาโดยการกำหนดให้ค่า (Λ_j, T_k) มีค่าคงที่และแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม จากนั้นกำหนดให้ค่า (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่และแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟสลับกันไปจนกว่าค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ลู่เข้าสู่ค่าต่ำสุดเฉพาะที่

อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหาด้วยวิธีดังกล่าวอาจจะไม่สามารถหาคำตอบได้ เนื่องจากปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ที่สามารถหาคำตอบได้ (feasible) เมื่อแปลงไปเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นแล้วอาจจะไม่สามารถหาคำตอบได้ (infeasible) ถ้าเรากำหนดค่า (Λ_j, T_k) หรือ (A_c, B_c, C_c) ไม่เหมาะสม ดัง

นั้นเราจะนำหลักการของวิธีฮอมอโทปี (homotopy) (Richter และ De Carlo, 1983) [19, 20] มาใช้เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว

หลักการของวิธีฮอมอโทปี คือการเริ่มต้นจากการแก้ปัญหาง่ายก่อน แล้วค่อยๆ เพิ่มความยากของปัญหาจนกระทั่งแก้ปัญหาที่ต้องการซึ่งเป็นปัญหายากได้ นั่นคือปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ ที่เป็นปัญหายากจะถูกแบ่งออกเป็นชุดของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ที่ง่ายลง ในแต่ละช่วงของการแก้ปัญหาจะได้ค่า (Λ_j, T_k) และ (A_c, B_c, C_c) ที่สอดคล้องกับความยากของปัญหาในระดับนั้น ทำให้สามารถใช้ค่าดังกล่าว ในการแก้ปัญหาโดยการแปลงปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ เป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหาดังที่กล่าวไว้ข้างต้นได้ หลักการของการกำหนดปัญหาสำหรับวิธีฮอมอโทปีเป็นดังนี้

พิจารณาเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่

$$F(K, \tilde{P}, \Lambda_j, T_k) < 0 \qquad (4.24)$$

กำหนดฮอมอโทปีเป็น

$$H(K, \tilde{P}, \Lambda_j, T_k, \lambda) = F((1-\lambda)K_F + \lambda K, \tilde{P}, \Lambda_j, T_k) \qquad (4.25)$$

เมื่อ K_F เป็นตัวควบคุมเริ่มต้นที่กำหนดโดย $K_F = C_F(sI - A_F)^{-1}B_F$ และ $\lambda \in \mathbf{R}$ อยู่ในช่วง $[0, 1]$ นั่นคือ $H(K, \tilde{P}, \Lambda_j, T_k, \lambda)$ เป็นค่าประมาณแบบฮอมอโทปีในช่วงระหว่างตัวควบคุมเริ่มต้นและตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่ต้องการ ดังนี้

$$H(K, \tilde{P}, \Lambda_j, T_k, \lambda) = \begin{cases} F(K_F, \tilde{P}, \Lambda_j, T_k), & \lambda = 0 \\ F(K, \tilde{P}, \Lambda_j, T_k), & \lambda = 1 \end{cases} \qquad (4.26)$$

ดังนั้นเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ (4.24) ที่พิจารณาก็จะกลายเป็นชุดของปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่

$$H(K, \tilde{P}, \Lambda_j, T_k, \lambda) < 0 \qquad (4.27)$$

โดยที่ค่าของ λ เพิ่มจาก 0 ไปเป็น 1

สำหรับปัญหาการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน ปัญหาที่เราต้องการแก้ก็คือหาตัวควบคุมที่ทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดมีค่าต่ำสุดเมื่อขอบเขตของเซกเตอร์มีค่าตามที่กำหนด ในกรณีที่ขนาดขอบเขตเซกเตอร์มีขนาดใหญ่ ปัญหานี้ถือว่าเป็นปัญหายาก ถ้าเราใช้การวนซ้ำ (4.9) และ (4.21) ในการแก้ปัญหา อาจจะไม่ได้คำตอบที่ต้องการ แต่เราจะประยุกต์ใช้หลักการของฮอมอโทปีโดยเริ่มต้นแก้ปัญหาที่ง่ายก่อน นั่นคือกำหนดให้ขอบเขตเซกเตอร์มีขนาดเล็ก l_0 แล้วแก้ปัญหา ตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) ที่ได้จะเป็นตัวควบคุมที่ทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดมีค่าต่ำสุดเมื่อขอบเขตเซกเตอร์มีขนาด l_0 และ (Λ_j, T_k) ก็เป็นตัวคูณโปปอฟที่สอดคล้อง เมื่อเราได้คำตอบของปัญหาง่ายแล้ว ก็เพิ่มขอบเขตเซกเตอร์ให้มากขึ้นแล้วนำคำตอบที่ได้ ทั้ง (A_c, B_c, C_c) และ (Λ_j, T_k) มาเป็นค่าเริ่มต้นของการแก้ปัญหาต่อไป ทำซ้ำจนกว่าปัญหาที่พิจารณาจะกลายเป็นปัญหาที่เราต้องการหาคำตอบ

จากหลักการที่กล่าวมาสามารถนำไปออกแบบขั้นตอนวิธีสำหรับแก้ปัญหาสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนได้ดังที่แสดงไว้ด้านล่าง โดยวงรอบนอกจะใช้หลักการของวิธีฮอมอโทปีในการออกแบบ และในวงรอบใน

จะเป็นการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ โดยการเปลี่ยนให้เป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหา โดยการกำหนดตัวแปรบางส่วนให้เป็นค่าคงที่แล้วแก้ปัญหาด้วยการวนซ้ำระหว่างอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นทั้งสอง ดังที่กล่าวถึงใน §4.3.1 และ §4.3.2

ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน

1. กำหนดให้ขอบเขตเซกเตอร์มีค่าเท่ากับศูนย์ (ความไม่แน่นอนมีค่าเป็นศูนย์) และหาค่าเริ่มต้นของ (A_c, B_c, C_c) โดยการออกแบบตัวควบคุม LQG หรือตัวควบคุมคงทนที่ออกแบบได้ง่าย
2. หาค่าเริ่มต้นของ (Λ_j, T_k) โดยแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (4.9) เมื่อพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่
3. เพิ่มค่าขอบเขตเซกเตอร์และความชันหนึ่งขั้น $(m_i = k_i l_i)$
4. ทำซ้ำ { [**วงรอบนอก**]
   (a) ทำซ้ำ { [**วงรอบใน**]
      i. แก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม (4.21) นั่นคือการหาค่า $(P_{11}, Q_{11}, X, Y, Z)$ เมื่อ (Λ_j, T_k) มีค่าคงที่ และจากบทตั้ง 2.2 (Completion Lemma) เราสามารถคำนวณหา $\tilde{P}$, B_c และ C_c ได้ และในขั้นนี้จะได้ค่า γ_2^2 ด้วย
      ii. หาค่า A_c โดยแก้ปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ (feasibility problem) ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (4.10) หรือใช้วิธีวิเคราะห์
      iii. หาค่า (Λ_j, T_k) โดยแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวคูณโปปอฟ (4.9) เมื่อพารามิเตอร์ของตัวควบคุม (A_c, B_c, C_c) มีค่าคงที่

      } [**วงรอบใน**] จนกว่า γ_2^2 มีค่าลดลงน้อยกว่าเงื่อนไขที่กำหนด
   (b) เพิ่มค่าของขอบเขตเซกเตอร์และความชันขึ้นหนึ่งขั้น และกำหนดค่าเริ่มต้นของ (Λ_j, T_k) ในรอบถัดไปด้วยค่าในรอบที่แล้ว

   } [**วงรอบนอก**] จนกว่าจะได้ความคงทน (robustness) ตามต้องการ หรือไม่สามารถหาคำตอบที่สอดคล้องกับอสมการได้

4.4 วิเคราะห์ผล

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน โดยใช้หลักการวนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองปัญหาที่นำเสนอนั้นจะคล้ายกับงาน [13] แต่ข้อแตกต่างสำคัญคือ [13] จะวนซ้ำเพื่อหา

ค่า $(\tilde{P}, \Lambda_j, T_k)$ และ (A_c, B_c, C_c) ในปัญหาเดิม (4.5) แต่สำหรับวิธีที่นำเสนอจะกำจัดเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุม A_c ออกไปจากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในการหาค่า (A_c, B_c, C_c) ด้วย แล้วจึงคำนวณหาค่า A_c ในภายหลัง ซึ่งทำให้การลู่เข้าของคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็วกว่า [13] มาก

จากการใช้หลักการของวิธีฮอมอโทปี อาจมีข้อที่ต้องพิจารณาคือการเพิ่มระดับความยากของปัญหาแนวทางหนึ่งในการเพิ่มระดับความยากของปัญหาคือ กำหนดให้ค่า λ เป็น $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N}{N}$ และแก้ปัญหาในกรณีที่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ให้เพิ่มค่า N เป็นสองเท่าแล้วแก้ปัญหา ถ้าเพิ่มค่า N จนมีค่ามากกว่าค่าที่กำหนดก็สรุปได้ว่าขั้นตอนวิธีล้มเหลว

คำตอบที่ได้ไม่รับรองว่าจะเป็นคำตอบที่ดีที่สุดในวงกว้าง แต่จาก [5, 6] จะกล่าวได้ว่าคำตอบที่ได้จะเป็นค่าที่ดีที่สุดในย่าน และเงื่อนไขในการคำนวณทั้งหมดอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งหาคำตอบได้ด้วยการโปรแกรมกึ่งแน่นอน

ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอ เป็นการขยายผลมาจากการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ บทที่ 3 และทั้งการวิเคราะห์และสังเคราะห์ที่นำเสนอ เป็นวิธีแก้ปัญหาที่เป็นเอกภาพคือใช้ทฤษฎีเดียวกันในการแก้ปัญหา ทำให้ทำความเข้าใจได้ง่ายและสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการพิจารณาสมรรถนะแบบอื่นได้

4.5 บทสรุป

ในบทนี้เราได้นำเสนอขั้นตอนวิธีในการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบลูเรที่มีความไม่แน่นอนแบบไม่เชิงเส้น เงื่อนไขอสมการที่ใช้ในการคำนวณได้มาจากเงื่อนไขสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนของระบบลูเรในบทที่ 3 เงื่อนไขที่ได้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ ซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้โดยการวนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และใช้หลักการของวิธีฮอมอโทปี การกำจัดเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุมออกจากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น สำหรับการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม มีผลทำให้การลู่เข้าของคำตอบเป็นไปได้อย่างรวดเร็ว โดยแนวทางในการแก้ปัญหาดังกล่าวได้นำมาจาก [5, 6, 7]

บทที่ 5

ตัวอย่างเชิงเลข

5.1 บทนำ

ในบทนี้จะนำเสนอตัวอย่างเชิงเลขเพื่อทดสอบวิธีการวิเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน และการสังเคราะห์คงทน $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอ ระบบที่นำมาเป็นตัวอย่าง คือ §5.2 ระบบทดสอบจากบทความ นำมาจากตัวอย่างที่ใช้ในการเปรียบเทียบเสถียรภาพสัมบูรณ์ (absolute stability) สำหรับระบบลูเร [10, 21, 22] และ §5.3 เป็นตัวอย่างการทดสอบกับระบบอันดับหนึ่ง (first-order system) และระบบอันดับสอง (second-order system) ในรูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอนทั่วไป นอกจากนั้นยังมีระบบทางกล (mechanic) คือ §5.4 ระบบมวลสปริง (mass-spring) และ §5.5 ระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ (coupled rotating disk)

สำหรับระบบทดสอบจากบทความ ระบบอันดับหนึ่ง และระบบอันดับสอง จะนำเสนอเฉพาะการวิเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนเท่านั้น แต่สำหรับระบบทางกล คือระบบมวลสปริงและระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ จะนำเสนอทั้งการวิเคราะห์และการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน ในการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน จะใช้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดจากวิธีโปปอฟ (Popov) [4, 5, 7] และค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบเชิงเส้น เป็นค่าเปรียบเทียบ ในการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน จะใช้ตัวควบคุมที่ได้จากวิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุมโปปอฟ (Popov controller synthesis) [5, 7] เป็นตัวควบคุมเปรียบเทียบ

5.2 ปัญหาทดสอบจากบทความ

เนื่องจากการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน เป็นการขยายผลมาจากการวิเคราะห์เสถียรภาพสัมบูรณ์ของระบบลูเร ดังนั้นเราจึงนำปัญหาที่ใช้ทดสอบเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์จาก [10, 21, 22] มาทดสอบเงื่อนไขในการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรที่นำเสนอ ดังนี้

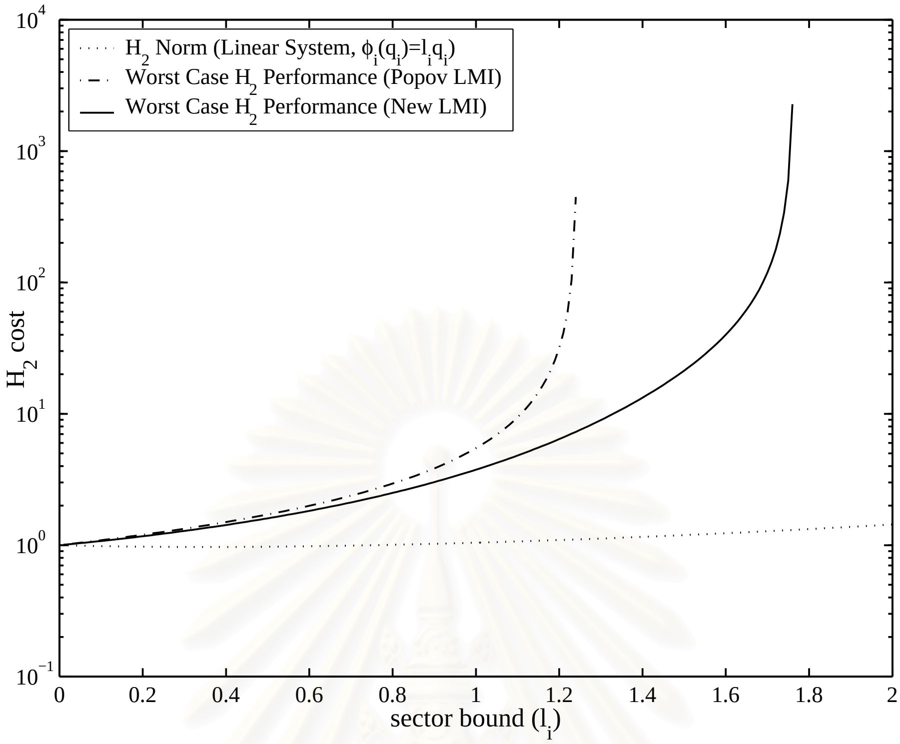
1. ปัญหาจากบทความ [22] (Haddad และ Kapila, 1995)

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ \hline C_z & D_{zp} & D_{zw} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|c} -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. ปัญหาจากบทความ [10] (PooGyeon Park, 2002)

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ \hline C_z & D_{zp} & D_{zw} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -0.1 & -0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0.3 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

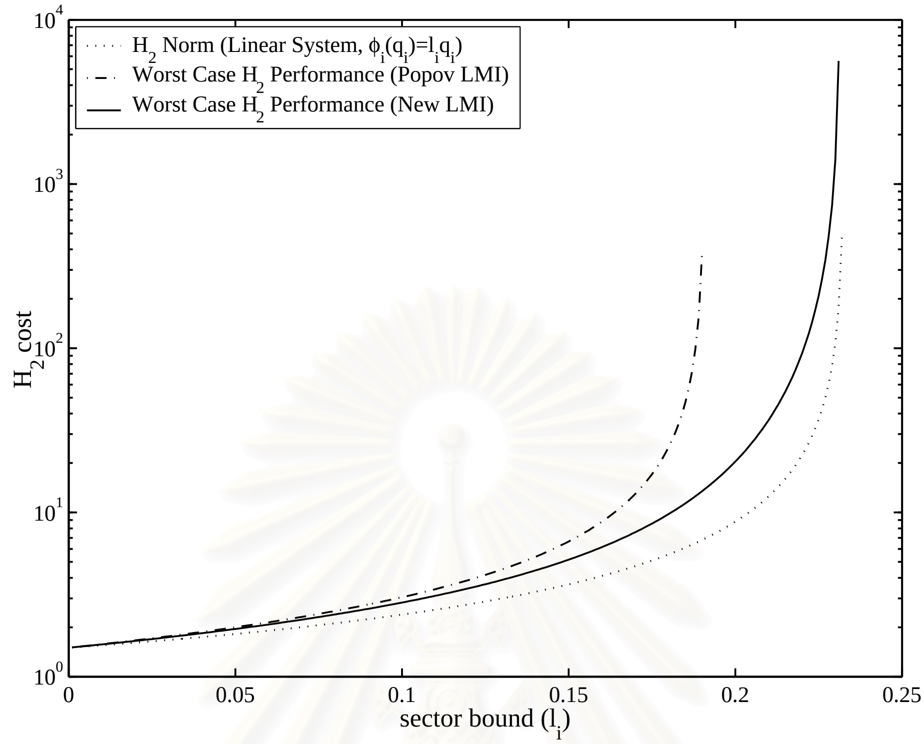
3. ปัญหาจากบทความ [21] (Josselson และ Raju, 1974)



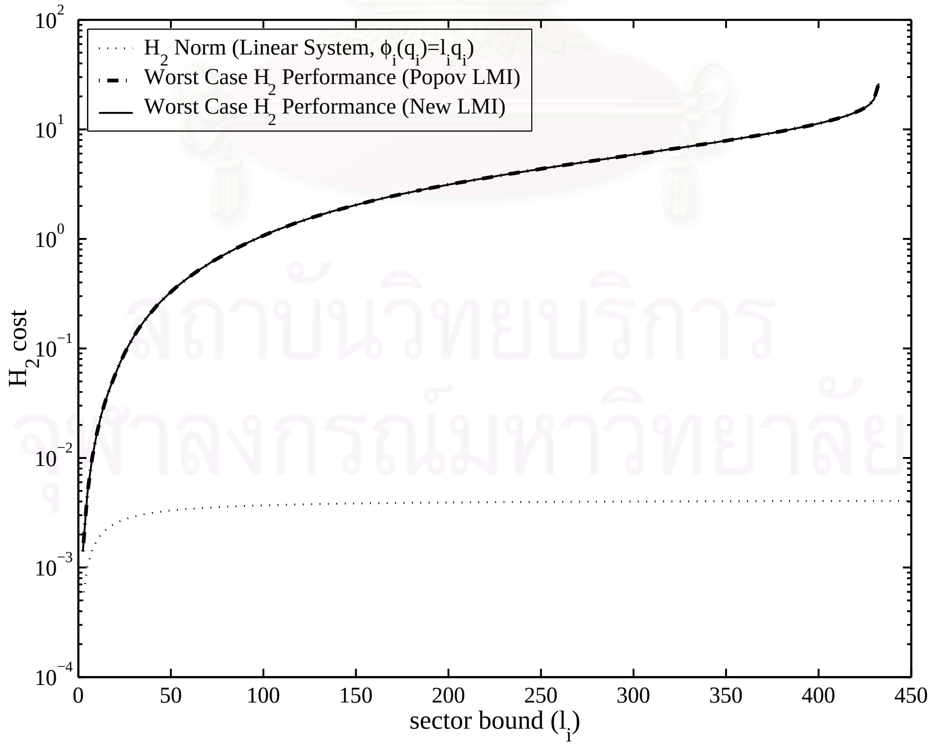
รูปที่ 5.1: เปรียบเทียบขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดสำหรับปัญหา 1

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & B_p & B_w \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} \\ \hline C_z & D_{zp} & D_{zw} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccccccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

สำหรับปัญหา 1 และ 2 กำหนดให้ขอบเขตความชันมีค่าเท่ากับขอบเขตเซกเตอร์ $(m = l)$ สำหรับปัญหา 3 ขอบเขตความชันมีค่าเป็นสองเท่าของขอบเขตเซกเตอร์ $(m = 2l)$ และในกรณีของปัญหา 2 และ 3 ที่ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมีมากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน (multiple nonlinearity) กำหนดให้ขอบเขตเซกเตอร์และความชันของทุกฟังก์ชันมีค่าเท่ากัน จากนั้นคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดจากเงื่อนไขที่นำเสนอใน §3.5 เปรียบเทียบกับค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณจากเงื่อนไขของโปปอฟ [5, 7, 4] และค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบเชิงเส้น (กำหนดให้ $\phi_i(q_i) = l_i q_i$) โดยแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ (แกนตั้ง) กับค่าขอบเขตเซกเตอร์ (l_i) (แกนนอน) ของปัญหา 1, 2 และ 3 ดังรูปที่ 5.1, 5.2 และ 5.3 ตามลำดับ



รูปที่ 5.2: เปรียบเทียบขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดสำหรับปัญหา 2



รูปที่ 5.3: เปรียบเทียบขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดสำหรับปัญหา 3

จากผลการคำนวณพบว่าค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณได้จากเงื่อนไขใหม่มีค่าต่ำกว่าค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่ได้จากเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ และนอกจากนั้นยังมีช่วงที่เงื่อนไขใหม่สามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ในขณะที่เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟไม่สามารถประกันได้ (ช่วงที่เส้นกราฟหายไปคือช่วงที่ไม่สามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้) แสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอมีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟ

จากรูปที่ 5.1, 5.2 และ 5.3 สังเกตได้ว่าเมื่อขอบเขตเซกเตอร์มีขนาดเพิ่มขึ้น (ความไม่แน่นอนเพิ่มมากขึ้น) จะทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบมีค่าสูงขึ้น (สมรรถนะของระบบเลวลง) นอกจากนี้ยังพบว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบเชิงเส้นยังมีค่าต่ำกว่าค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบเสมอ เนื่องจากระบบเชิงเส้นเป็นกรณีพิเศษของระบบลูเรนั่นเอง ($\phi_i(q_i) = l_i q_i$) และจากกราฟรูปที่ 5.3 พบว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอและเงื่อนไขของโปปอฟให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่เท่ากันสำหรับทุกค่าของขอบเขตเซกเตอร์ จึงเป็นที่น่าสนใจว่าปัญหา 1 และ 2 มีข้อแตกต่างจากปัญหา 3 อย่างไร เงื่อนไขใหม่จึงมีความอนุรักษ์น้อยกว่า และระบบที่มีสมบัติแบบใดที่เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอมีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟ

ข้อสังเกต 5.1 ช่วงขอบเขตเซกเตอร์ที่เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ สามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดได้ จะเท่ากับช่วงขอบเขตเซกเตอร์ที่เงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์ [10] สามารถประกันเสถียรภาพสัมบูรณ์ของระบบลูเรได้

ข้อสังเกต 5.2 จากการทดลองเพิ่มเติมโดยการเปลี่ยนค่าเมทริกซ์ B_w และ C_z พบว่าค่าของเมทริกซ์ดังกล่าว ไม่มีผลต่อความแตกต่างของความอนุรักษ์ของเงื่อนไขการคำนวณสมรรถนะที่นำเสนอกับเงื่อนไขการคำนวณสมรรถนะของโปปอฟ แต่จะมีผลโดยตรงกับค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ ที่คำนวณได้

5.3 ระบบอันดับหนึ่งและระบบอันดับสอง

จากการทดสอบกับปัญหาในบทความพบว่า บางกรณีเงื่อนไขการคำนวณที่นำเสนอและเงื่อนไขของโปปอฟให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่เท่ากันสำหรับทุกค่าของขอบเขตเซกเตอร์ ดังนั้นในตอนนี้เราจึงทดสอบกับระบบอันดับหนึ่งและระบบอันดับสองที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปเพื่อทดสอบว่าตำแหน่งของโพล (pole) มีผลกับความแตกต่างของขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดดังกล่าวหรือไม่

กำหนดให้ $G_1(s) = C_q(sI - A)^{-1}B_p$ โดยที่ $B_w = B_p$ และ $C_z = C_q$ มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$G_1(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{5.1}$$

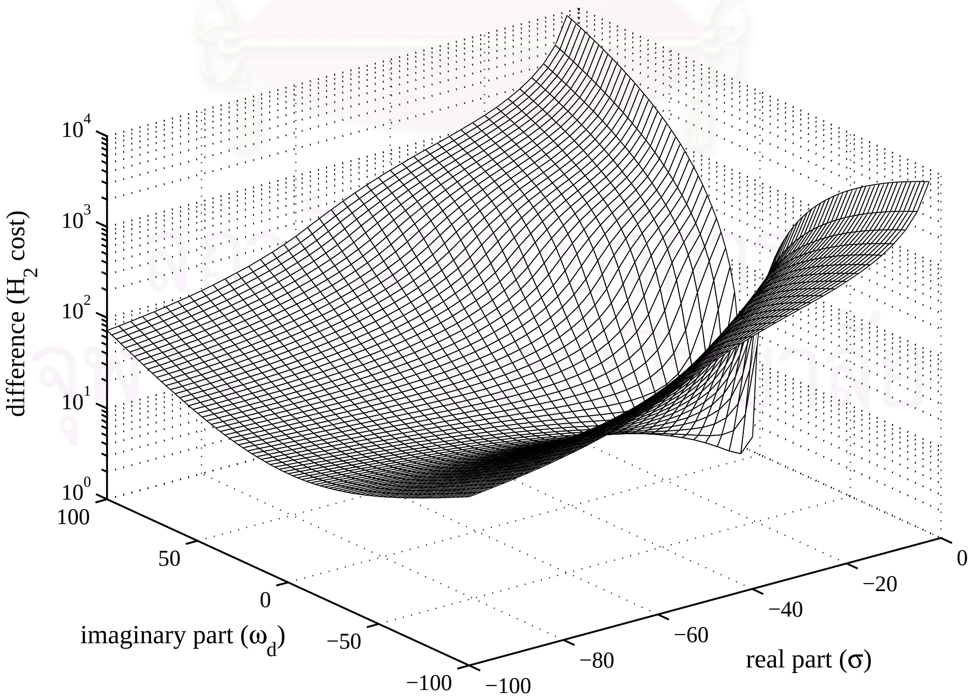
พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเชิงเส้นอันดับหนึ่ง (5.1) โดยกำหนดให้มีการป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้นหนึ่งฟังก์ชัน และให้ขอบเขตความชันมีค่าเท่ากับขอบเขตเซกเตอร์ กำหนดค่า τ และคำนวณผลต่างของขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่ได้จากเงื่อนไขการคำนวณที่นำเสนอ

กับเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ ณ จุดสุดท้ายที่เงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟสามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ จากการย้ายตำแหน่งโพลจาก $s = -0.1$ ไปจนถึง $s = -100$ แล้วคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่ทุกจุด พบว่าค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่ได้จากเงื่อนไขการคำนวณที่นำเสนอเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ มีค่าเท่ากันทุกจุด ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า สำหรับระบบอันดับหนึ่งที่มีการป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้นหนึ่งฟังก์ชัน เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอมีความอนุรักษ์เท่ากับเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ

กำหนดให้ $G_2(s) = C_q(sI - A)^{-1}B_p$ โดยที่ $B_w = B_p$ และ $C_z = C_q$ มีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$G_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{5.2}$$

พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเชิงเส้นอันดับสอง (5.2) โดยกำหนดให้มีการป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้นหนึ่งฟังก์ชัน และให้ขอบเขตความชันมีค่าเท่ากับขอบเขตเซกเตอร์ กำหนดค่า ω_n และ ζ จากนั้นคำนวณผลต่างของขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่ได้จากเงื่อนไขการคำนวณที่นำเสนอ กับเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ ณ จุดสุดท้ายที่เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟสามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ จากการย้ายตำแหน่งโพลไปบนระนาบโดยที่มีค่าจริงและค่าจินตภาพของโพลอยู่ระหว่าง 0 ถึง 100 ($0 \leq \sigma \leq 100$ และ $0 \leq \omega_d \leq 100$) แล้วคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่ทุกจุด พบว่าเงื่อนไขการคำนวณที่นำเสนอให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ต่ำกว่าค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่ได้จากเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ ณ จุดที่ตำแหน่งโพลห่างจากจุดกำเนิดโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อค่าจินตภาพของโพล (ω_d) มีค่ามาก ดังรูปที่ 5.4

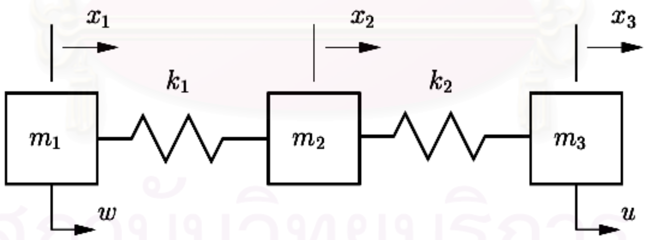


รูปที่ 5.4: ผลต่างระหว่างขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ จากเงื่อนไขที่นำเสนอกับเงื่อนไขของโปปอฟ

จากผลการทดสอบรูปที่ 5.4 สรุปได้ว่าสำหรับระบบอันดับสองที่มีการป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้นหนึ่งฟังก์ชัน ในกรณีหน่วงขาด (underdamped) และกรณีหน่วงวิกฤต (critically damped) เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอจะมีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ เมื่อตำแหน่งของโพลอยู่ห่างจากจุดกำเนิด และเมื่อค่าจริง (σ) และค่าจินตภาพ (ω_d) ของโพลมีค่ามากขึ้น ความแตกต่างของค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่คำนวณได้ก็จะมากขึ้นด้วย ดังนั้นสำหรับระบบอันดับสองที่มีความถี่การแกว่งของผลตอบสนองสูงและระบบที่มีผลตอบสนองเร็ว (ω_d และ σ มีค่ามาก) เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่นำเสนอจะมีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ

5.4 ระบบมวลสปริง

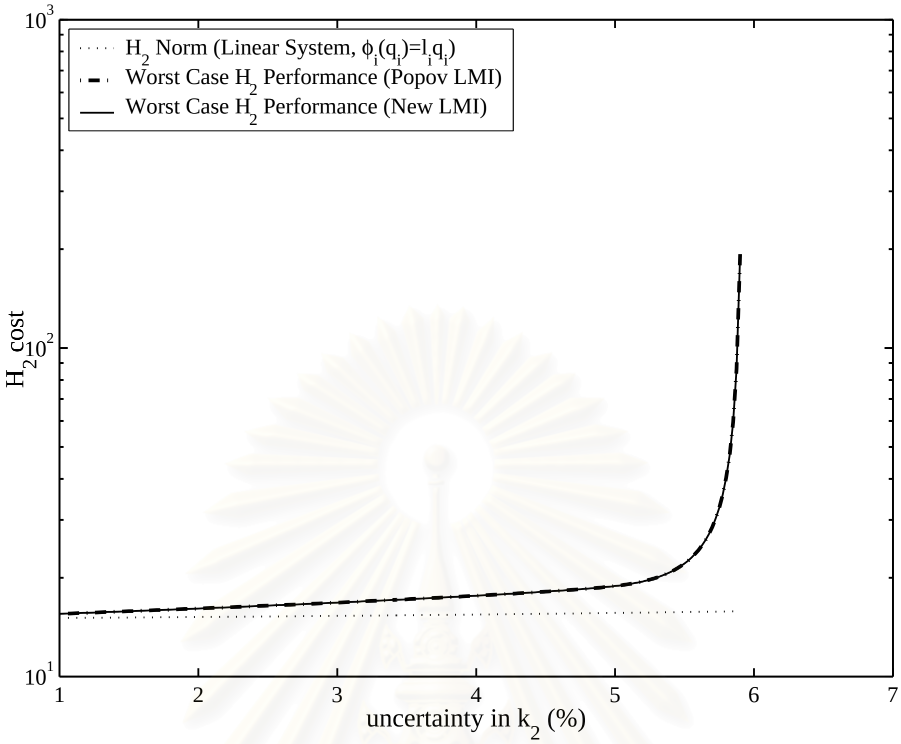
ระบบมวลสปริงเป็นระบบเชิงกลที่นิยมใช้ในการทดสอบวิธีการออกแบบตัวควบคุม เนื่องจากเป็นระบบที่ควบคุมได้ยาก จุดที่ป้อนสัญญาณเข้าและจุดที่ต้องการควบคุมเป็นคนละจุดกัน ดังนั้นเมื่อพารา-มิเตอร์ของระบบเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อย ระบบก็อาจจะขาดเสถียรภาพได้ สำหรับในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์และสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบมวลสปริง แบบมีมวลสามก้อน โดยระบบมวลสปริงที่นำมาเป็นตัวอย่างนี้มาจาก [5, 6, 7] ลักษณะกายภาพของระบบจะเป็นมวลสามก้อน m_1, m_2 และ m_3 ยึดติดกันด้วยสปริงสองอันที่มีค่าคงที่สปริง k_1 และ k_2 โดยป้อนสัญญาณเข้า u ที่มวลก้อนที่สาม และให้สัญญาณรบกวน w เข้าที่มวลก้อนแรก ค่าที่ต้องการควบคุมคือ $y = (x_1 + x_2)$ และสมรรถนะขาออกคือ $z = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ u \end{bmatrix}$ ดังรูป



รูปที่ 5.5: ระบบมวลสปริง

พารามิเตอร์ของระบบมวลสปริงที่พิจารณาเป็นดังนี้

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
A & B_p & B_w & B_u \\ \hline
C_q & D_{qp} & D_{qw} & D_{qu} \\ \hline
C_z & D_{zp} & D_{zw} & D_{zu} \\ \hline
C_y & D_{yp} & D_{yw} & D_{yu}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{cccccc|c|cc|c}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\
\frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{k_2}{m_3} & -\frac{k_2}{m_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_3} & 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \\ \hline
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

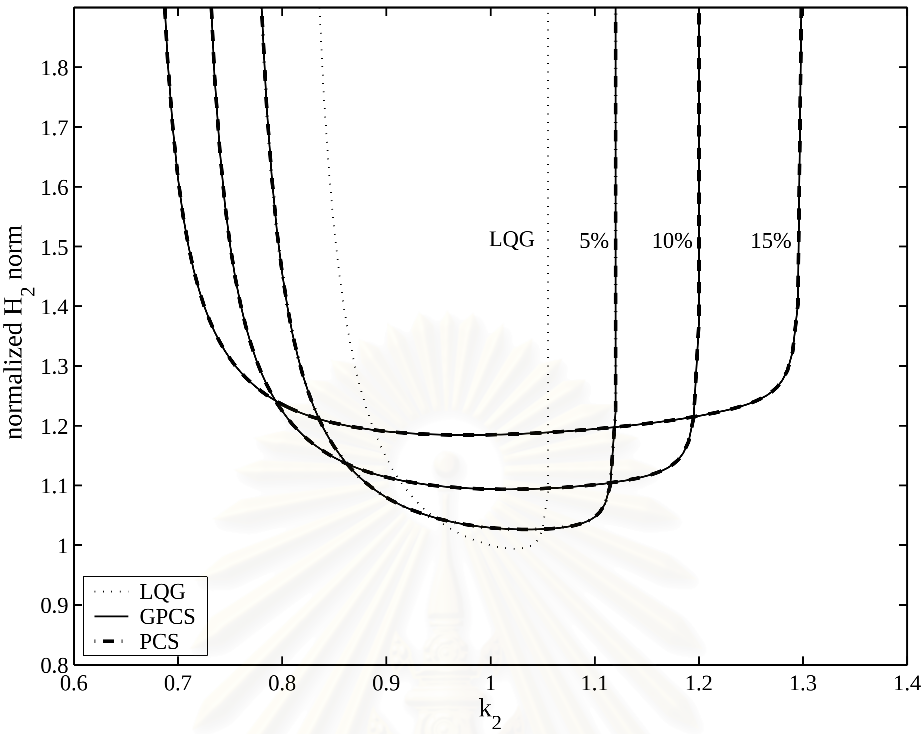


รูปที่ 5.6: เปรียบเทียบขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดสำหรับระบบมวลสปริง

ความไม่แน่นอนเกิดขึ้นระหว่างมวลก้อนที่สองและก้อนที่สามโดย $k_2 = k_{2,nom}(1+\delta)$ เมื่อ $k_{2,nom}$ เป็นค่าที่ระบุ (nominal value) และความไม่แน่นอนแทนด้วย $\delta \in \mathbf{R}$ กำหนดให้ $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $k_1 = 1$ และ $k_{2,nom} = 1$ เพื่อที่จะประยุกต์ใช้การวิเคราะห์และสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอ เราประมาณความไม่แน่นอนของความแข็งตึงของสปริง (spring stiffness) โดยกำหนดให้ $k_2(x) = k_{2,nom}[x + \gamma\phi(x)]$ เมื่อ $\phi(x)$ เป็นขอบเขตเซกเตอร์ $[-1, 1]$ และเป็นฟังก์ชันของการกระจัด (displacement) x, $\gamma > 0$ เป็นตัวคูณเพื่อระบุถึงขนาดของความไม่แน่นอนที่พิจารณา และกำหนดให้ขอบเขตความชันของ $\phi(x)$ เป็น $(-1, 1)$ จะสังเกตได้ว่าขอบเขตเซกเตอร์ด้านล่างไม่ได้มีค่าเป็นศูนย์ เราจึงต้องใช้การแปลงวงรอบ §3.3 ในการแปลงขอบเขตเซกเตอร์ดังกล่าวก่อน จึงทำการวิเคราะห์และสังเคราะห์ต่อไป

ในตัวอย่างการวิเคราะห์นี้จะออกแบบตัวควบคุม LQG สำหรับระบบมวลสปริง จากนั้นจะวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดจากเงื่อนไขที่นำเสนอเปรียบเทียบกับสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณจากเงื่อนไขของโปปอฟ และค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบเชิงเส้น (กำหนดให้ $\phi_i(q_i) = l_i q_i$) เมื่อความไม่แน่นอนมีค่าเพิ่มขึ้น โดยแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ (แกนตั้ง) กับเปอร์เซนต์ความไม่แน่นอนใน k_2 (แกนนอน) ดังรูปที่ 5.6

เราทราบว่าตัวควบคุม LQG ให้สมรรถนะที่ดีเมื่อระบบปราศจากความไม่แน่นอน และจากรูป 5.6 แสดงให้เห็นว่าระบบควบคุม LQG มีสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ เพิ่มขึ้นเมื่อเปอร์เซนต์ความไม่แน่นอนมีค่ามากขึ้น จนถึงจุดหนึ่งเราไม่สามารถประกันสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบได้ และในกรณีระบบนี้ก็ไม่สามารถหาค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ได้เนื่องจากระบบไม่มีเสถียรภาพ นอกจากนั้นเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำ



รูปที่ 5.7: เปรียบเทียบตัวควบคุมสำหรับระบบมวลสปริง

เสนอและเงื่อนไขของโปปอฟให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดเท่ากันทุกค่าของความไม่แน่นอนที่เท่ากัน และมีค่ามากกว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ซึ่งอาจจะตั้งข้อสมมติฐานได้ว่าการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่ใช้เงื่อนไขการคำนวณสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอ จะให้ตัวควบคุมเหมือนกับตัวควบคุมจากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของโปปอฟ [5, 6, 7]

ต่อไปจะออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบมวลสปริงด้วยขั้นตอนการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่ได้นำเสนอใน §4.3 โดยกำหนดให้ความไม่แน่นอนใน k_2 เป็น 5, 10 และ 15 เปอร์เซนต์ นั่นคือ $\gamma = [0.05,\ 0.10,\ 0.15]$ โดยในการออกแบบกำหนดให้เกณฑ์การหยุด (stopping criterion) ของวงรอบในมีความแม่น (accuracy) แบบสัมบูรณ์ (absolute) และสัมพัทธ์ (relative) เป็น 0.1 เปอร์เซนต์ของค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และช่วงก้าว (step size) ของวงรอบนอก ในการเพิ่มขนาดของขอบเขตเซกเตอร์เป็น 5 เปอร์เซนต์ และนำตัวควบคุมที่ได้มาเปรียบเทียบกับตัวควบคุม LQG และตัวควบคุมที่ได้จากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของโปปอฟ โดยแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalized $\mathcal{H}_2$ norm) (หารด้วยค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบควบคุม LQG เมื่อระบบเป็นระบบที่ระบุ (nominal system)) กับค่าคงที่สปริง k_2 ดังรูปที่ 5.7 โดยมีตัวควบคุม ดังนี้

$$K_{5\%} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
0.1078 & 0.1866 & -0.1567 & 0.9022 & -0.9460 & 0.2117 & -0.6413 \\
0.6902 & 0.4978 & 0.0952 & -0.6364 & 2.4967 & -1.1191 & -0.8961 \\
0.7215 & 0.3855 & 0.3120 & 0.5716 & -0.4468 & 0.5855 & 0.5344 \\
-12.8409 & -6.3264 & -5.1210 & -9.3810 & -9.0508 & 6.7747 & -2.8922 \\
-20.1981 & -11.7916 & -8.7353 & -16.0020 & -15.4044 & 11.5218 & -4.8112 \\
-35.9878 & -19.2279 & -16.5641 & -28.5115 & -27.4157 & 20.4980 & -8.1959 \\
\hline
1.1310 & 0.6043 & 0.4891 & 0.8960 & 0.8652 & -0.6478 & 0
\end{array}\right]$$

$$K_{10\%} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} -0.2797 & 0.0077 & -0.4379 & 0.5606 & -1.2741 & 0.4518 & -0.6191 \\ 0.4958 & 0.4380 & 0.0027 & -0.7714 & 2.3694 & -1.0741 & -1.3521 \\ 1.2070 & 0.6698 & 0.6857 & 1.0396 & 0.0199 & 0.1632 & 0.9527 \\ -15.1364 & -7.8451 & -8.0317 & -12.1763 & -11.8580 & 9.7137 & -3.4332 \\ -21.4499 & -12.9037 & -12.1869 & -18.4757 & -17.9486 & 14.6950 & -4.9634 \\ -37.4968 & -20.8090 & -22.3040 & -32.2975 & -31.3200 & 25.6323 & -8.3010 \\ \hline 1.0998 & 0.6103 & 0.6248 & 0.9473 & 0.9248 & -0.7579 & 0 \end{array}\right]$$

$$K_{15\%} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} -0.5092 & -0.0936 & -0.7234 & 0.3273 & -1.5298 & 0.6559 & -0.5431 \\ 0.3442 & 0.3976 & -0.1130 & -0.8945 & 2.2567 & -1.0190 & -1.8324 \\ 1.6022 & 0.9223 & 1.1459 & 1.4611 & 0.5186 & -0.3090 & 1.3231 \\ -17.5728 & -9.5398 & -11.8531 & -15.1131 & -15.5330 & 13.3657 & -4.0284 \\ -23.1839 & -14.3454 & -16.5814 & -21.1419 & -21.6821 & 18.6503 & -5.1602 \\ -39.6325 & -22.8137 & -29.3457 & -36.1417 & -36.9884 & 31.8056 & -8.5219 \\ \hline 1.0744 & 0.6185 & 0.7684 & 0.9798 & 1.0107 & -0.8702 & 0 \end{array}\right]$$

จากรูป 5.7 เห็นได้ชัดเจนว่าที่ค่า k_2 ที่ระบุ ตัวควบคุม LQG ให้ค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ต่ำที่สุดเนื่องจาก LQG เป็นตัวควบคุมเหมาะที่สุด (optimal controller) นั่นเอง แต่เป็นที่ทราบกันว่าในการออกแบบตัวควบคุม LQG ไม่ได้คำนึงถึงความไม่แน่นอน ดังนั้นระบบควบคุม LQG จึงมีความคงทนต่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของระบบน้อยกว่าตัวควบคุมที่ได้จากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอ ซึ่งเราจะเรียกว่า GPCS (Generalized Popov Controller Synthesis) และตัวควบคุมจากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของโปปอฟ ซึ่งเราจะเรียกว่า PCS (Popov Controller Synthesis) สังเกตได้จากเมื่อค่าคงที่สปริง k_2 มีการแปรเปลี่ยนไปจนถึงจุดหนึ่งระบบควบคุม LQG จะขาดเสถียรภาพในขณะที่ตัวควบคุมจากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนยังคงมีเสถียรภาพและมีค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ จำกัด

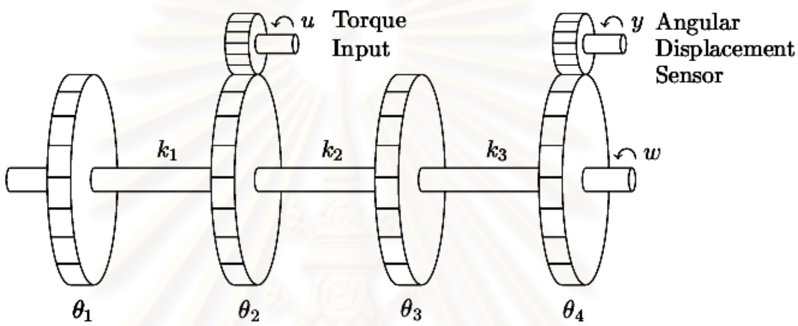
จากกราฟยังเห็นได้ว่าค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบที่ควบคุมด้วยตัวควบคุมที่ได้จากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอ และตัวควบคุมจากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของโปปอฟ ให้ค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ที่เท่ากันทุกค่า k_2 และตัวควบคุมทั้งสองสามารถประกันสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบลูเรที่ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นอยู่ในเซกเตอร์ที่กำหนดได้ และกราฟแสดงให้เห็นถึงการชดเชยข้อดีข้อเสียระหว่างสมรรถนะ (performance) ของระบบกับความคงทน (robustness) ต่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของระบบ นั่นคือ ถ้าต้องการความคงทนต่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของระบบมาก สมรรถนะที่สามารถประกันได้ก็จะลดลงไปด้วย (ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดเพิ่มขึ้น)

จากการคำนวณพบว่าตัวควบคุมที่ได้จากขั้นตอนการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอ เหมือนกับตัวควบคุมที่ได้จากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของโปปอฟทุกประการ และค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ในแต่ละช่วงของการออกแบบก็เท่ากันด้วย ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าสำหรับปัญหามวลสปริงที่นำเสนอ ขั้นตอนการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอให้ผลเหมือนกับการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของโปปอฟทุกประการ

5.5 ระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ

ระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ (coupled rotating disk system) เป็นระบบเชิงกลอีกระบบหนึ่งที่น่าสนใจ เพราะเป็นระบบที่ควบคุมได้ยาก จุดที่ป้อนสัญญาณเข้าและจุดที่ต้องการควบคุมเป็นคนละจุด

กันเหมือนกับกรณีของระบบมวลสปริง เมื่อค่าคงที่สปริงของแกนหมุนเปลี่ยนไปเล็กน้อย จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงมุมเฟสไปได้อย่างมาก ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์และสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อแบบจานสี่อัน โดยระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อที่นำมาเป็นตัวอย่างนี้มาจาก [23] ลักษณะกายภาพของระบบจะเป็นจานสี่อันที่มีการกระจัดเชิงมุม θ_1, θ_2, θ_3 และ θ_4 ยึดติดกันด้วยแกนสามอันที่สามารถพิจารณาเป็นสปริงได้ โดยมีค่าคงที่สปริง k_1, k_2 และ k_3 โดยป้อนสัญญาณเข้า u ที่จานอันที่สอง และให้สัญญาณรบกวน w เข้าที่จานอันที่สี่ ค่าที่ต้องการควบคุมคือการกระจัดเชิงมุม $y = \theta_4$ และสมรรถนะขาออกคือ $z = \begin{bmatrix} \theta_4 + 0.1\dot{\theta}_4 \\ u \end{bmatrix}$ ดังรูปที่ 5.8

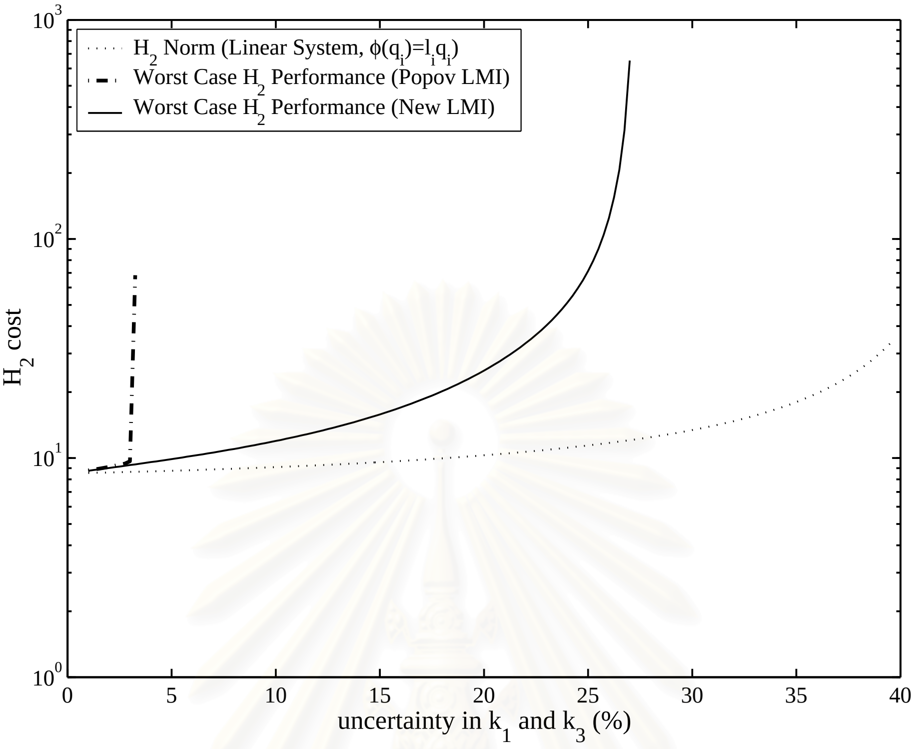


รูปที่ 5.8: ระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ

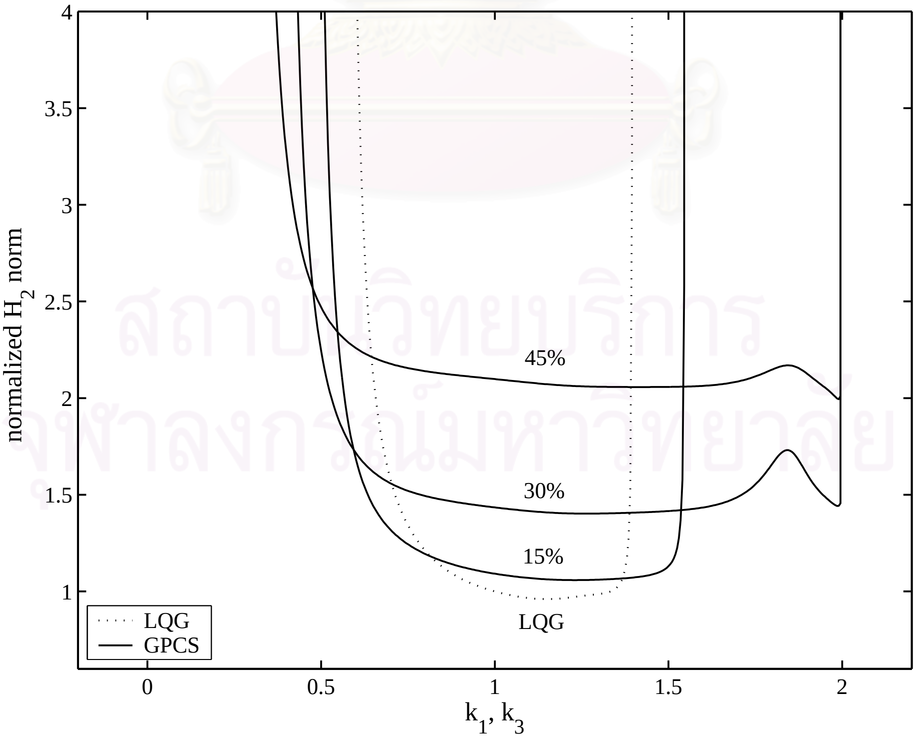
พารามิเตอร์ของระบบมวลสปริงที่พิจารณาเป็นดังนี้

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c} A & B_p & B_w & B_u \\ \hline C_q & D_{qp} & D_{qw} & D_{qu} \\ \hline C_z & D_{zp} & D_{zw} & D_{zu} \\ \hline C_y & D_{yp} & D_{yw} & D_{yu} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccccc|cc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & 0 & 0 & -0.02 & 0.02 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0.01 & -0.02 & 0.01 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0.01 & -0.02 & 0.01 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0.01 & -0.01 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

กำหนดให้ความไม่แน่นอนเกิดขึ้นที่ k_1 และ k_3 ดังรูป (พิจารณาความไม่แน่นอนในลักษณะเดียวกับระบบมวลสปริง) โดยกำหนดให้ความไม่แน่นอนอยู่ในขอบเขตเขตเซกเตอร์ $[-1, 1]$ และขอบเขตความชัน $(-1, 1)$ ในตัวอย่างการวิเคราะห์นี้จะออกแบบตัวควบคุม LQG สำหรับระบบมวลสปริง จากนั้นจะวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดจากเงื่อนไขที่นำเสนอเปรียบเทียบกับสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณจากเงื่อนไขของโปปอฟ และค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบเชิงเส้น (กำหนดให้ $\phi_i(q_i) = l_i q_i$) เมื่อความไม่แน่นอนมีค่าเพิ่มขึ้น โดยแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ (แกนตั้ง) กับเปอร์เซนต์ความไม่แน่นอนใน k_1 และ k_3 (แกนนอน) ดังรูปที่ 5.9



รูปที่ 5.9: เปรียบเทียบขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดสำหรับระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ



รูปที่ 5.10: เปรียบเทียบตัวควบคุมสำหรับระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ

จากรูป 5.9 แสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ต่ำกว่าค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่ได้จากเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟทุกค่าของความไม่แน่นอนที่เท่ากัน แต่จะมีค่ามากกว่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ เสมอ และยังสังเกตได้ว่าเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟสามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้เมื่อความไม่แน่นอนไม่เกิน 3 เปอร์เซนต์เท่านั้น ซึ่งน้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณที่เสนอซึ่งสามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบได้ถึงความไม่แน่นอนที่ 27 เปอร์เซนต์

ต่อไปจะออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนสำหรับระบบมวลสปริงด้วยขั้นตอนการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่ได้นำเสนอใน §4.3 โดยกำหนดให้ความไม่แน่นอนใน k_1 และ k_3 เป็น 15, 30 และ 45 เปอร์เซนต์ โดยในการออกแบบกำหนดให้เกณฑ์การหยุดของวงรอบในมีความแม่นแบบสัมบูรณ์ และสัมพัทธ์ เป็น 0.1 เปอร์เซนต์ของค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และช่วงก้าว ของวงรอบนอก ในการเพิ่มขนาดของขอบเขตเซกเตอร์เป็น 15 เปอร์เซนต์ และนำตัวควบคุมที่ได้มาเปรียบเทียบกับตัวควบคุม LQG โดยแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐาน (หารด้วยค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ของระบบควบคุม LQG เมื่อระบบเป็นระบบที่ระบุ) กับค่าคงที่สปริง k_1 และ k_3 ดังรูปที่ 5.10 โดยมีตัวควบคุมดังนี้

$$K_{15\%} = \left[\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0.2541 & 0.5764 & 0.6656 & 0.3447 & 1.9912 & -1.2334 & 0.1803 & 0.7474 & -0.3463 \\
0.5010 & 1.1364 & 1.3123 & 0.6796 & -1.9480 & 1.5051 & -0.6709 & 1.4997 & 0.7430 \\
0.1857 & 0.4213 & 0.4865 & 0.2520 & -0.0151 & -1.1663 & 2.1203 & -0.4423 & -0.2196 \\
0.1640 & -0.4875 & -0.4717 & 0.7277 & 0.2051 & 0.3146 & -1.1838 & 0.5627 & -0.6820 \\
-8.7362 & -17.5481 & -20.2643 & -10.4947 & -0.4821 & 7.4814 & -5.3601 & -22.8812 & -2.5309 \\
-19.4964 & -45.2239 & -51.0693 & -26.4482 & -1.3245 & 18.9190 & -13.5021 & -57.6802 & -5.1942 \\
-10.9853 & -24.9181 & -29.7752 & -14.9024 & -0.5624 & 10.5524 & -7.5923 & -32.5001 & -3.3594 \\
-5.9695 & -13.5407 & -15.6367 & -9.0981 & -0.3865 & 5.7801 & -4.1255 & -17.6665 & -1.1491 \\ \hline
1.0152 & 2.3029 & 2.6593 & 1.3772 & 0.0555 & -0.9779 & 0.6918 & 3.0144 & 0
\end{array}\right]$$

$$K_{30\%} = \left[\begin{array}{rrrrrrrr|r}
0.9698 & 1.5693 & 1.6634 & 0.3561 & 1.6374 & -1.3807 & 0.6619 & 1.2675 & -0.6120 \\
2.7476 & 4.4462 & 4.7129 & 1.0091 & -2.6473 & 0.7314 & 0.7553 & 3.7114 & 1.2491 \\
2.1088 & 3.4124 & 3.6170 & 0.7744 & -0.6886 & -1.8778 & 3.3873 & 1.8083 & -0.6129 \\
-0.2377 & -1.0184 & -1.0539 & 1.0017 & 0.7082 & 0.2635 & -1.6751 & 0.4443 & -0.5589 \\
-26.9040 & -41.9183 & -44.4319 & -9.5131 & 7.2369 & 11.3931 & -17.2882 & -34.2510 & -2.4688 \\
-85.4614 & -139.2950 & -146.5876 & -31.3853 & 23.1304 & 37.9701 & -56.9008 & -113.1450 & -5.7273 \\
-40.8402 & -66.0882 & -71.0511 & -14.9984 & 11.3950 & 17.9596 & -27.2872 & -53.9594 & -3.1445 \\
-27.3911 & -44.3246 & -46.9825 & -11.0592 & 7.3917 & 12.1774 & -18.3239 & -36.1740 & -1.2202 \\ \hline
2.9918 & 4.8414 & 5.1317 & 1.0987 & -0.8318 & -1.3179 & 1.9775 & 3.9750 & 0
\end{array}\right]$$

$$K_{45\%} = \left[\begin{array}{rrrrrrrr|r}
2.8687 & 3.6477 & 3.4439 & 0.3409 & 0.9393 & -1.5789 & 1.5431 & 1.9369 & -0.6633 \\
9.9267 & 12.6227 & 11.9186 & 1.1806 & -4.6595 & -0.5085 & 4.1746 & 6.8675 & 1.4744 \\
7.8426 & 9.9725 & 9.4156 & 0.9323 & -2.4468 & -2.8091 & 6.1466 & 4.3672 & -0.7512 \\
0.1005 & -0.2023 & -0.1355 & 1.3716 & 0.7809 & -0.0838 & -1.4989 & 1.2636 & -0.6347 \\
-78.8307 & -98.9681 & -93.4446 & -9.2541 & 23.0816 & 18.5540 & -41.6113 & -52.8048 & -2.4923 \\
-295.2796 & -376.4721 & -354.5164 & -35.1095 & 85.9032 & 71.2338 & -157.5446 & -200.6676 & -6.3309 \\
-129.4877 & -164.6543 & -156.4647 & -15.3963 & 38.2356 & 30.9412 & -69.2940 & -87.7771 & -3.2142 \\
-97.4553 & -123.9224 & -117.0061 & -12.5877 & 28.3842 & 23.4909 & -52.1868 & -66.0358 & -1.4043 \\ \hline
6.7312 & 8.5593 & 8.0816 & 0.8004 & -1.9847 & -1.6104 & 3.5785 & 4.5871 & 0
\end{array}\right]$$

จากรูป 5.10 เห็นได้ชัดเจนว่าที่ค่า k_1 และ k_3 ที่ระบุ ตัวควบคุม LQG ให้ค่านอร์ม $\mathcal{H}_2$ ต่ำที่สุดแต่จะมีความคงทนต่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์น้อยกว่า ตัวควบคุมที่ได้จากการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอ และเส้นกราฟยังแสดงให้เห็นถึงการชดเชยข้อดีข้อเสียระหว่างสมรรถนะของระบบกับความคงทนต่อการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของระบบอีกด้วย

หมายเหตุ 5.1 สำหรับการสังเคราะห์คงทนสำหรับระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ เราไม่ได้เปรียบเทียบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่ออกแบบด้วยวิธีที่นำเสนอ กับตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่ออกแบบโดยวิธีโปปอฟ เนื่องจากเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟประกันค่าสมรรถนะได้เมื่อความไม่แน่นอนมีค่าน้อยกว่า 5 เปอร์เซนต์ ดังนั้นเป็นการยากที่จะออกแบบตัวควบคุมวิธีโปปอฟโดยที่มีความไม่แน่นอนเท่ากับค่าที่เราใช้ในการออกแบบตัวควบคุมที่นำเสนอได้

5.6 การลู่เข้าของคำตอบ

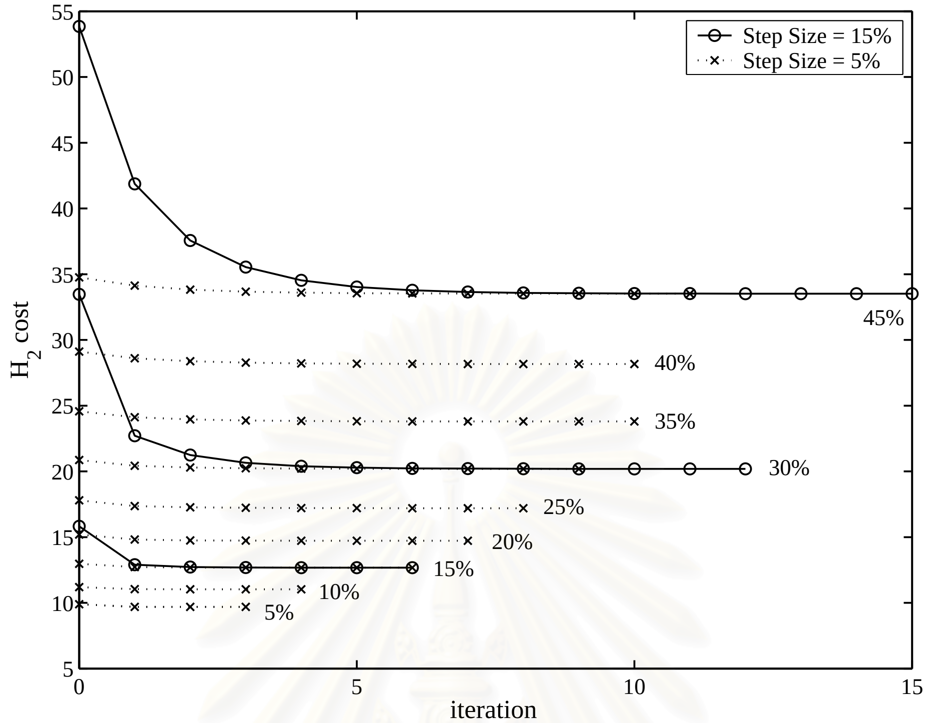
ในตอนนี้จะพิจารณาถึงการลู่เข้าของคำตอบ ในขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอ สำหรับระบบมวลสปริง กำหนดให้ออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน ที่พิจารณาความไม่แน่นอนของค่าคงที่สปริง k_2 ขนาด 5 เปอร์เซนต์ โดยในการออกแบบกำหนดให้เกณฑ์การหยุดของวงรอบใน มีความแม่นแบบสัมบูรณ์และสัมพัทธ์เป็น 0.1 เปอร์เซนต์ของค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และช่วงก้าวของวงรอบนอก ในการเพิ่มขนาดของขอบเขตเซกเตอร์เป็น 5 เปอร์เซนต์ ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ และค่าตัวคูณเป็นดังตาราง 5.1

k	$\mathcal{H}_2$ cost	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6	Λ_7	Λ_8	T_1	T_2
0	18.8630	0.3350	0.1865	0.2396	0.2396	0.6701	0.3730	0.6701	0.3730	0.6919	1.07e-7
1	17.7330	0.2756	0.1677	0.2085	0.2086	0.5510	0.3355	0.5509	0.3353	0.5297	3.72e-7
2	17.5398	0.2655	0.1651	0.2036	0.2036	0.5310	0.3303	0.5310	0.3303	0.4907	1.81e-7
3	17.5254	0.2630	0.1645	0.2024	0.2024	0.5261	0.3290	0.5261	0.3290	0.4794	2.60e-7
4	17.5242	0.2623	0.1643	0.2021	0.2021	0.5247	0.3286	0.5247	0.3286	0.4759	2.78e-7
5	17.5240	0.2621	0.1642	0.2019	0.2019	0.5242	0.3284	0.5242	0.3284	0.4749	2.80e-7

ตารางที่ 5.1: ค่าตัวแปรในช่วงการวนซ้ำเมื่อค่าคงที่สปริง k_2 มีความไม่แน่นอน 5%

พิจารณาการลู่เข้าของขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และตัวคูณดังตาราง 5.1 พบว่าค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ และตัวคูณลดลงทุกๆ รอบของการวนซ้ำ และลู่เข้าสู่ค่าต่ำสุดเฉพาะที่ นอกจากนี้ยังสังเกตได้ว่าตัวคูณ $\Lambda_3 \approx \Lambda_4$, $\Lambda_5 \approx \Lambda_7$ และ $\Lambda_6 \approx \Lambda_8$ และ $T_2 \approx 0$ โดยเหตุการณ์นี้เกิดขึ้นเนื่องจาก $Z_3 = \Lambda_3 - \Lambda_4 + L\Lambda_6 - L\Lambda_8$ และ $Z_4 = \Lambda_5 - \Lambda_6 - \Lambda_7 + \Lambda_8$ และ T_2 ถูกเงื่อนไขบังคับให้มีค่าน้อยๆ จากเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งต้องศึกษาต่อไปว่าเกิดขึ้นเพราะเหตุใด

จากกรณีดังกล่าวพบว่าค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ และค่าของตัวคูณ มีค่าลดลงทุกรอบของการวนซ้ำ และลู่เข้าสู่คำตอบภายใน 5 รอบของการวนซ้ำ โดยคำตอบที่ได้เป็นคำตอบเฉพาะที่ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอมีประสิทธิภาพดี



รูปที่ 5.11: การลู่เข้าของฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ ของระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ

ต่อไปจะพิจารณาถึงการเปลี่ยนขนาดช่วงก้าวของวงรอบนอก โดยออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนด้วยวิธีที่นำเสนอ สำหรับระบบจานหมุนแบบเชื่อมต่อ กำหนดให้ออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน ที่พิจารณาความไม่แน่นอนของค่าคงที่สปริง k_1 และ k_3 ขนาด 45 เปอร์เซนต์ โดยในการออกแบบกำหนดให้เกณฑ์การหยุดของวงรอบใน มีความแม่นแบบสัมบูรณ์และสัมพัทธ์เป็น 0.1 เปอร์เซนต์ของค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และช่วงก้าวของวงรอบนอกในการเพิ่มขนาดของขอบเขตเซกเตอร์มี 2 แบบ คือ 5 เปอร์เซนต์ และ 15 เปอร์เซนต์ ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ ในแต่ละรอบของการวนซ้ำแสดงดังรูป 5.11 โดยที่กราฟเส้นทึบแสดงค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ ในกรณีที่ใช้ช่วงก้าว 15 เปอร์เซนต์ และกราฟเส้นไข่ปลาแทนกรณีที่ใช้ช่วงก้าว 5 เปอร์เซนต์

จากกราฟพบว่าช่วงก้าวที่ต่างกัน จะให้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ที่เท่ากันเสมอ โดยสังเกตได้จากเส้นกราฟที่ 15, 30 และ 45 เปอร์เซนต์ ซึ่งลู่เข้าสู่ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ ค่าเดียวกัน และยังให้ตัวควบคุมที่มีค่าใกล้เคียงกันมากด้วย นอกจากนี้จะสังเกตได้ว่า เมื่อใช้ช่วงก้าวที่สั้นกว่า ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ เริ่มต้นในแต่ละรอบ (วงรอบนอก) จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ ที่เป็นคำตอบ ซึ่งทำให้ใช้การวนซ้ำในแต่ละรอบ (วงรอบนอก) น้อยกกว่าการใช้ช่วงก้าวที่ยาวกว่า

จากการทดสอบการลู่เข้าของคำตอบ ของทั้งสองระบบพบว่าวิธีการออกแบบตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอ ให้ค่าฟังก์ชันจุดประสงค์ $\mathcal{H}_2$ ลดลงทุกรอบของการวนซ้ำ และเข้าสู่คำตอบเฉพาะที่ภายใน 16 รอบของการวนซ้ำ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีการออกแบบที่นำเสนอมีประสิทธิภาพดี นอกจากนี้การเลือกช่วงก้าวของวงรอบนอกที่เหมาะสมยังมีผลต่อการลู่เข้าของคำตอบอีกด้วย

5.7 วิเคราะห์ผล

จากตัวอย่างเชิงเลขที่นำเสนอมาข้างต้นจะพบว่าผลที่ได้แบ่งระบบออกเป็นสองกลุ่มคือ ระบบที่เงื่อนไขการคำนวณที่นำเสนอใหม่ให้ความอนุรักษ์น้อยลงกว่าเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ และระบบที่เงื่อนไขการคำนวณที่นำเสนอใหม่ให้ความอนุรักษ์เท่ากับเงื่อนไขการคำนวณของโปปอฟ ความอนุรักษ์ที่ลดลงเกิดจากการใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นในฟังก์ชันเลียปูโนฟ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้เราไม่สามารถสรุปได้เป็นกฎเกณฑ์ตายตัวว่าระบบลักษณะใดที่เงื่อนไขการคำนวณที่นำเสนอให้ความอนุรักษ์ที่ลดลง แต่จะสามารถบอกแนวโน้มได้เป็นกรณีๆ ไป ซึ่งเราสามารถสรุปได้ว่าระบบที่มีโพลเด่น (dominant pole) มีค่าจินตภาพ คือเป็นโพลที่เป็นค่าเชิงซ้อน จะมีแนวโน้มที่เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอมีจะความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟ โดยเฉพาะกรณีที่ค่าจินตภาพของโพลมีขนาดใหญ่ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าจริงของโพล

ในขั้นตอนการคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ เงื่อนไขที่นำเสนอใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าเงื่อนไขของโปปอฟเนื่องจากจำนวนตัวแปรตัดสินใจที่มากกว่า และสำหรับระบบที่มีขนาดใหญ่และจำนวนฟังก์ชันไม่เชิงเส้นจำนวนมาก จะทำให้ข้อแตกต่างระหว่างเวลาที่ใช้เพิ่มขึ้นอย่างมาก

ขั้นตอนวิธีในการสังเคราะห์คงทน $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอไม่สามารถประกันการลู่เข้าของคำตอบวงกว้าง แต่จากการคำนวณพบว่าคำตอบจะลู่เข้าสู่คำตอบเฉพาะที่ และในทุกๆ รอบของการวนซ้ำ ค่าของขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของที่คำนวณได้จะมีค่าลดลงทุกๆ รอบ และจะลู่เข้าสู่คำตอบเฉพาะที่ โดยใช้เวลามากกว่าการออกแบบตัวควบคุมโดยวิธีโปปอฟ และแนวโน้มการใช้เวลาในการคำนวณเหมือนกับกรณีการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน เนื่องจากอัตราการเพิ่มของตัวแปรตัดสินใจต่อปัญหาที่พิจารณามีค่าใกล้เคียงกัน แต่จะสังเกตได้ว่าจำนวนรอบของการวนซ้ำของวิธีออกแบบตัวควบคุมที่นำเสนอ และวิธีออกแบบตัวควบคุมโปปอฟไม่แตกต่างกันมากนัก เพราะว่าจำนวนรอบของการวนซ้ำจะขึ้นอยู่กับค่าของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่พิจารณา

5.8 บทสรุป

ในบทนี้นำเสนอตัวอย่างการวิเคราะห์และสังเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนของระบบลูเร โดยระบบที่พิจารณามีหลายแบบ มีทั้งกรณีที่มีฟังก์ชันไม่เชิงเส้นเพียงฟังก์ชันเดียวและกรณีที่มีฟังก์ชันไม่เชิงเส้นหลายฟังก์ชัน จากตัวอย่างการคำนวณพบว่าเงื่อนไขสำหรับการคำนวณสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดและขั้นตอนวิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอซึ่งเป็นปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอน สามารถหาคำตอบได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยใช้วิธีจุดภายใน และให้คำตอบที่มีความอนุรักษ์ลดลงจากเงื่อนไขสำหรับการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของโปปอฟ และขั้นตอนวิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟ โดยตัวควบคุมที่ได้สามารถประกันสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ที่ค่าหนึ่งเมื่อมีความไม่แน่นอนอยู่ในขอบเขตเซกเตอร์ที่กำหนด

บทที่ 6

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

6.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ และปัญหาการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน สำหรับระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรได้มากจากเงื่อนไขเสถียรภาพสัมบูรณ์ (absolute stability) รวมกับค่าขอบเขตของสัญญาณสมรรถนะขาออก ในบทที่ 3 ได้นำเสนอฟังก์ชันเลียปูโนฟแบบลูเร-โพสนิคอฟที่เพิ่มเติมพจน์คุณสมบัติของส่วนไม่เชิงเส้น และใช้ฟังก์ชันเลียปูโนฟดังกล่าวในการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน ปัญหาที่ได้จะอยู่ในรูปของการโปรแกรมกึ่งแน่นอน คือการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์เชิงเส้นโดยที่เงื่อนไขบังคับคือเมทริกซ์สมมาตรต้องเป็นกึ่งบวกแน่นอน และสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยใช้วิธีจุดภายใน

ในการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทน จะใช้ผลจากการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทนในบทที่ 3 โดยหาตัวควบคุมที่ทำให้ขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์มีค่าน้อยที่สุดเมื่อระบบมีความไม่แน่นอนที่กำหนดด้วยขอบเขตเซกเตอร์และความชัน โดยตัวควบคุมที่ได้มีอันดับเท่ากับระบบ ในบทที่ 4 ได้นำเสนอจากจัดรูปแบบปัญหาและพบว่าปัญหาดังกล่าว เป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ซึ่งเป็นปัญหา NP แบบยาก และยังไม่มีขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบที่รับประกันได้ว่าคำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบวงกว้าง ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่โดยการเปลี่ยนให้เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองอสมการ แล้ววนซ้ำแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นทั้งสอง และใช้หลักการของฮอมอโทปี เพื่อทำให้การกำหนดตัวแปรให้เป็นค่าคงที่ในการเปลี่ยนปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ไปเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นทำได้เหมาะสม และคำตอบที่ได้จากวิธีนี้จะเป็นคำตอบเฉพาะที่

ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม โดยแปลงปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นคู่ไปเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองอสมการ โดยแบ่งตัวแปรเป็นกลุ่มของตัวคูณ และกลุ่มของพารามิเตอร์ของตัวควบคุมโดยตรงนั้น คำตอบที่ได้จะลู่เข้าช้ามาก ดังนั้นในวิทยานิพนธ์นี้จึงได้ใช้วิธีกำจัดเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุมออกไปจากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในขั้นตอนการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุม แล้วจึงมาคำนวณหาเมทริกซ์พลวัตของตัวควบคุมในภายหลัง วิธีนี้ทำให้การลู่เข้าของคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็วขึ้น

จากตัวอย่างเชิงเลขในบทที่ 5 พบว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของระบบลูเรที่นำเสนอ มีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดของโปปอฟ และสำหรับบางระบบค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่ได้จากเงื่อนไขที่นำเสนอมีค่าเท่ากับค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่ได้จากเงื่อนไขของโปปอฟ ซึ่งเป็นปัญหาที่น่าสนใจว่าระบบที่มีสมบัติแบบใด ที่เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอมีความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟ และจากการทดลองกับระบบหลายระบบ พบว่า

มีปัจจัยจากตัวระบบเองที่ทำให้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่คำนวณได้จากสองเงื่อนไขมีค่าแตกต่างกันซึ่งต้องพิจารณาเป็นกรณีไป ซึ่งเราสามารถสรุปได้ว่าระบบที่มีโพลเด่น (dominant pole) มีค่าจินตภาพคือเป็นโพลที่เป็นค่าเชิงซ้อน จะมีแนวโน้มที่เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ที่นำเสนอมีจะความอนุรักษ์น้อยกว่าเงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของโปปอฟ โดยเฉพาะกรณีที่ค่าจินตภาพของโพลมีขนาดใหญ่ เมื่อเปรียบเทียบกับค่าจริงของโพล

ในการสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของระบบลูเรพบว่าขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมที่นำเสนอสามารถให้ตัวควบคุมที่สามารถประกันสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ที่ค่าหนึ่งเมื่อมีความไม่แน่นนอนอยู่ในขอบเขตเซกเตอร์ที่กำหนด และสำหรับระบบมวลสปริงที่พิจารณา ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณจากเงื่อนไขที่นำเสนอและค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่คำนวณจากเงื่อนไขโปปอฟมีค่าเท่ากัน ดังนั้นเมื่อสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน ขั้นตอนวิธีที่เสนอ และขั้นตอนวิธีสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของโปปอฟ จึงให้ตัวควบคุมเดียวกัน

ข้อเด่นของวิธีที่เสนอ

1. มีวิธีแก้ปัญหาที่เป็นเอกภาพ ใช้ทฤษฎีเดียวในการพิจารณาปัญหาการวิเคราะห์และการสังเคราะห์ โดยได้ตัวควบคุมที่ประกันเสถียรภาพคงทน และสมรรถนะคงทนของระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน ทำให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการพิจารณาสมรรถนะแบบอื่นได้

2. เงื่อนไขมีความอนุรักษ์น้อยกว่า ทำให้ได้ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ กรณีเลวสุดที่น้อยกว่า และสามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ในขอบเขตที่กว้างขึ้น

3. ในกรณีที่เงื่อนไขการคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ มีความอนุรักษ์น้อยกว่า จะทำให้การออกแบบตัวควบคุมโดยใช้หลักการของฮอมอโทปีง่ายขึ้นเนื่องจากสามารถประกันค่าสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ได้ในขอบเขตที่กว้างขึ้น ดังนั้นความยากของปัญหาเมื่อความไม่แน่นอนมีค่ามากขึ้นจึงเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ ทำให้สามารถเลือกช่วงก้าวที่ยาวขึ้นได้

ข้อด้อยของวิธีที่เสนอ

1. อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นมีขนาดใหญ่ขึ้นและจำนวนตัวแปรตัดสินใจ (decision variable) มีจำนวนมากขึ้นทำให้ใช้เวลาในการหาคำตอบนานขึ้น

6.2 ข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้ยังไม่สามารถสรุปได้อย่างชัดแจ้งว่า ระบบที่มีสมบัติแบบใดที่การวิเคราะห์ และสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนที่นำเสนอจะให้ผลดีกว่าการวิเคราะห์และสังเคราะห์ $\mathcal{H}_2$ คงทนของโปปอฟ คงทราบเพียงแนวโน้มของความแตกต่างเท่านั้น แนวทางที่จะแยกแยะได้อย่างชัดเจน อาจจะเป็นการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ ระหว่างพจน์คุณสมบัติของส่วนไม่เชิงเส้นที่เพิ่มเติมเข้ามากับลักษณะของระบบ และการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นกับสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบ

6.3 งานวิจัยในอนาคต

แนวทางวิจัยต่อไปอาจเป็นการวิเคราะห์ถึงความสัมพันธ์ระหว่างพจน์คุณสมบัติของส่วนไม่เชิงเส้นที่เพิ่มเติมเข้ามากับลักษณะของระบบ และการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างความชันของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นกับสมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ ของระบบ เพื่อให้ทราบอย่างชัดแจ้งถึงลักษณะของระบบที่เหมาะสมในการนำขั้นตอนวิธีที่นำเสนอไปประยุกต์ใช้ และอาจจะนำไปประยุกต์ใช้กับระบบจริงเช่น ระบบควบคุมที่มีการอิ่มตัวของตัวขับเร้า (actuator) นอกจากนั้นอาจพิจารณาสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ เป็นดรรชนีชี้วัดสมรรถนะของระบบเพื่อวิเคราะห์สมรรถนะ และสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบลูเรได้

รายการอ้างอิง

1. Tahk, M. and Speyer, J. L. Modeling of Parameter Variations and Asymptotic LQG Synthesis. IEEE Trans. Aut. Control AC-32 (September 1987): 793–801.

2. Lur'e, A. I. and Postnikov, V. N. On The Theory of Stability of Control Systems. Applied Mathematics and Mechanics 8 (1944): In Russian.

3. Popov, V. M. Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control. Automation and Remote Control 22 (1962): 857–875.

4. Boyd, S.; El Ghaoui, L.; Feron, E. and Balakrishnan, V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

5. Banjerdpongchai, D. Parametric Robust Controller Synthesis Using Linear Matrix Inequalities. Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, CA, October 1997.

6. Banjerdpongchai, D. and How, J. P. Convergence Analysis of a Parametric Robust $\mathcal{H}_2$ Controller Synthesis Algorithm. Proc. IEEE Conf. on Decision and Control (1997): 1020–1025.

7. Banjerdpongchai, D. and How, J. P. Parametric Robust $\mathcal{H}_2$ Control Design Using Iterative Linear Matrix Inequalities Synthesis. AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics, 23 (January–February 2000): 138–142.

8. Park, P.; Banjerdpongchai D. and Kailath T. The Asymptotic Stability of Nonlinear (Lur'e) Systems with Multiple Slope Restrictions. IEEE Trans. Aut. Control AC-43 (July 1998): 979–982.

9. Suykens, J. A. K.; Vandewalle J. and De Moor B. An Absolute Stability Criterion for the Lur'e Problem with Sector and Slope Restricted Nonlinearities. IEEE Trans. Circuits. Syst., I 9 (July 1998): 1007–1009.

10. Park, P. Stability Criteria of Sector- and Slope-Restricted Lur'e Systems. IEEE Trans. Aut. Control AC-47 (February 2002): 308–313.

11. Vandenberghe, L. and Boyd, S. Semidefinite Programming. SIAM Review 38 (March 1996): 49–95.

12. Toker, O. and Ozbay, H. On The NP-Hardness of Solving Bilinear Matrix Inequalities and Simultaneous Stabilization with Static Output Feedback. Proc. American Conrol Conf.(1995): 2525–2526.

13. El Ghaoui, L. and Balakrishnan, V. Synthesis of Fixed-Structure Controllers via Numerical Optimization. Proc. IEEE Conf. on Decision and Control (1994): 2678–2683.

รายการอ้างอิง (ต่อ)

14. Goh, K. C.; Safonov, M. G. and Papavassilopoulos, G. P. A Global Optimization Approach for the BMI Problem. Proc. IEEE Conf. on Decision and Control (1994): 2009–2014.

15. Goh, K. C.; Turan L.; Safonov, M. G.; Papavassilopoulos, G. P. and Ly, J. H. Biaffine Matrix Inequality Properties and Computational Methods. Proc. American Conrol Conf.(1994): 850–855.

16. Stoorvogel, A. A. The Robust $\mathcal{H}_2$ Control Problem: A Worst-Case Design. IEEE Trans. Aut. Control AC-38 (September 1993): 1358–1370.

17. Hall, S. R. and How, J. P. Mixed $\mathcal{H}_2/\mu$ Performance Bounds using Dissipation Theory. Proc. IEEE Conf. on Decision and Control (1993): 1536–1541.

18. Packard, A.; Zhou, K.; Pandey, P. and Becker, G. A Collection of Robust Control Problems Leading to LMI's. Proc. IEEE Conf. on Decision and Control (1991): 1245–1250.

19. Richter, A. L. and De Carlo, R. A. Continuation Methods: Theory and Applications. IEEE Trans. Aut. Control AC-28 (June 1983): 660–665.

20. Richter, A. L. and De Carlo, R. A. A Homotopy Method for Eigenvalue Assignment Using Decentralized State Feedback. IEEE Trans. Aut. Control AC-29 (February 1984): 148–158.

21. Josselson, R. and Raju, G. V. S. Absolute Stability of Control Systems with Many Sector and Slope-Restricted Nonlinearities. Int. J. Control 16 (1974): 609–614.

22. Haddad, W. M. and Kapila, V. Abolute Stability Criteria for Multiple Slope-Restricted Monotonic Nonlinearities. IEEE Trans. Aut. Control AC-40 (February 1995): 361–365

23. Livadas, C. Optimal $\mathcal{H}_2$/Popov Controller Design Using Linear Matrix Inequalities. Master thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, February 1996.

24. Gahinet, P.; Nemirovski, A.; Laub, A. J. and Chilali, M. LMI Control Toolbox for Use with MATLAB. (n.p.): The Math Works, 1995.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ชุดคำสั่งในการคำนวณ

ในภาคผนวก ก. จะนำเสนอชุดคำสั่งสำหรับการวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน และการสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน ชุดคำสั่งดังกล่าวเป็นรูทีน (routine) ในโปรแกรม MATLAB และแก้ปัญหาการโปรแกรมกึ่งแน่นอน (semidefinite programming) โดยใช้ชุดคำสั่งใน LMI Control Toolbox [24] ซึ่งแก้ปัญหาโดยใช้วิธีจุดภายใน (interior point method)

ก.1 การวิเคราะห์สมรรถนะ $\mathcal{H}_2$ คงทน

h2lure.m

```
function [h2cost,Lambda,T] = h2lure(A,Bp,Bw,Cq,Cz,L,M,reltol,maxiter)

% [h2cost,Lambda,T] = h2lure(A,Bp,Bw,Cq,Cz,L,M,reltol,maxiter)
%
% Function:    h2lure         This function uses the new sufficient conditions
%                             for determine the overbound of the worst case H2
%                             performance of Lur'e system with slope restrictions.
%
% Inputs:      A,Bp,Bw,Cq,Cz  System dynamics.
%              L              Diagonal matrix represent sector bounded.
%              M              Diagonal matrix represent slope restriction.
% (optional)   reltol         Relative tolerance.
% (optional)   maxiter        Maximum number of iteration.
%
% Outputs:     h2cost         The overbound of the worst case H2 performance.
%              Lambda         Popov multipliers.
%              T              Multipliers T1,T2.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if nargin<9,
   maxiter=1000;
   if nargin<8,
      reltol=1e-4;
   end
end

n = size(A,1);
np = size(Bp,2);

%------------------------------------------------------------------------------%

setlmis([])

% DEFINE LMI VARIABLE
P = lmivar(1,[n 1]);

for j=1:10,
```

```
    [Temp,n1,sTemp] = lmivar(1,[1 0]);

    for i=1:np-1,
        [TAdd,n2,sTAdd] = lmivar(1,[1 0]);
        [Temp,n1,sTemp] = lmivar(3,[sTemp,zeros(i,1); zeros(1,i),sTAdd]);
    end

    switch j
        case 1, L1 = Temp;
        case 2, L2 = Temp;
        case 3, L3 = Temp;
        case 4, L4 = Temp;
        case 5, L5 = Temp;
        case 6, L6 = Temp;
        case 7, L7 = Temp;
        case 8, L8 = Temp;
        case 9, T1 = Temp;
        case 10, T2 = Temp;
    end
end

%-------------------------------------------------------------------------------------%

% MAIN SUFFICIENT CONDITION
lmiterm([1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([1 1 1 0],Cz'*Cz);
lmiterm([1 1 1 L2],Cq'*L,Cq*A,'s');
lmiterm([1 1 1 L4],Cq'*M,Cq*A,'s');
lmiterm([1 1 1 L8],Cq'*L*M,Cq*A,'s');

lmiterm([1 1 2 P],1,Bp);
lmiterm([1 1 2 L2],Cq'*L,Cq*Bp);
lmiterm([1 1 2 L4],Cq'*M,Cq*Bp);
lmiterm([1 1 2 L8],Cq'*L*M,Cq*Bp);
lmiterm([1 1 2 L1],A'*Cq',1);
lmiterm([1 1 2 L2],-A'*Cq',1);
lmiterm([1 1 2 L7],A'*Cq'*M,1);
lmiterm([1 1 2 L8],-A'*Cq'*M,1);
lmiterm([1 1 2 T1],Cq'*L,1);

lmiterm([1 1 3 L3],Cq',1);
lmiterm([1 1 3 L4],-Cq',1);
lmiterm([1 1 3 L6],Cq'*L,1);
lmiterm([1 1 3 L8],-Cq'*L,1);
lmiterm([1 1 3 T2],A'*Cq'*M,1);

lmiterm([1 2 2 L1],1,Cq*Bp,'s');
lmiterm([1 2 2 L2],1,-Cq*Bp,'s');
lmiterm([1 2 2 L7],M,Cq*Bp,'s');
lmiterm([1 2 2 L8],-M,Cq*Bp,'s');
lmiterm([1 2 2 T1],-2,1);

lmiterm([1 2 3 L5],1,1);
lmiterm([1 2 3 L6],-1,1);
lmiterm([1 2 3 L7],-1,1);
lmiterm([1 2 3 L8],1,1);
lmiterm([1 2 3 T2],Bp'*Cq'*M,1);
```

```
lmiterm([1 3 3 T2],-2,1);

% LYAPUNOV MATRIX
lmiterm([-2 1 1 P],1,1);

% MULTIPLIERS
lmiterm([-3 1 1 L1],1,1);
lmiterm([-4 1 1 L2],1,1);
lmiterm([-5 1 1 L3],1,1);
lmiterm([-6 1 1 L4],1,1);
lmiterm([-7 1 1 L5],1,1);
lmiterm([-8 1 1 L6],1,1);
lmiterm([-9 1 1 L7],1,1);
lmiterm([-10 1 1 L8],1,1);
lmiterm([-11 1 1 T1],1,1);
lmiterm([-12 1 1 T2],1,1);

LMISYS=getlmis;

%-------------------------------------------------------------------------------------%

% DEFINE AN OBJECTIVE FUNCTION
nx = decnbr(LMISYS);
c = zeros(nx,1);

for j = 1:nx,
   [Pj,L1j,L2j,L3j,L4j,L5j,L6j,L7j,L8j] = ...
          defcx(LMISYS,j,P,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8);
   c(j) = trace(Bw'*(Pj+(Cq'*(L*(L1j+L2j)+...
          M*(L3j+L4j)+M*L*(L5j+L6j+L7j+L8j))*Cq))*Bw);
end

%-------------------------------------------------------------------------------------%

% SOLVE AN OPTIMIZATION PROBLEM
options = [reltol,maxiter,0,0,1];
[copt,xopt] = mincx(LMISYS,c,options);

if ( isempty(xopt))
   L1v = dec2mat(LMISYS,xopt,L1);
   L2v = dec2mat(LMISYS,xopt,L2);
   L3v = dec2mat(LMISYS,xopt,L3);
   L4v = dec2mat(LMISYS,xopt,L4);
   L5v = dec2mat(LMISYS,xopt,L5);
   L6v = dec2mat(LMISYS,xopt,L6);
   L7v = dec2mat(LMISYS,xopt,L7);
   L8v = dec2mat(LMISYS,xopt,L8);
   T1v = dec2mat(LMISYS,xopt,T1);
   T2v = dec2mat(LMISYS,xopt,T2);
   h2cost = copt;
   Lambda = diag([L1v,L2v,L3v,L4v,L5v,L6v,L7v,L8v]);
   T = diag([T1v,T2v]);
else
   h2cost = inf;
   Lambda = [];
   T = [];
end

%-------------------------------------------------------------------------------------%
```

ก.2 การสังเคราะห์ตัวควบคุม $\mathcal{H}_2$ คงทน

rh2syn.m

```
function [Ac,Bc,Cc,h2cost] = rh2syn(tA,tBp,tBw,tBu,tCq,tCz,tCy,tDqp,tDqw,tDqu,tDzp,tDzw,tDzu,...
                              tDyp,tDyw,tDyu,finalunc,stepunc,Ac,Bc,Cc,abstol,reltol,maxiter)

% [Ac,Bc,Cc,h2cost] = rh2syn(tA,tBp,tBw,tBu,tCq,tCz,tCy,tDqp,tDqw,tDqu,tDzp,tDzw,tDzu,...
%                         tDyp,tDyw,tDyu,finalunc,stepunc,Ac,Bc,Cc,abstol,reltol,maxiter)
%
% Function:    rh2syn            This function uses the V-K iterative scheme for the
%                                design of the robust H2 controller for Lur'e system
%                                with slope restrictions.
%
% Inputs:      tA,tBp,tBw,tBu,   System dynamics.
%              tCq,tCz,tCy,
%              tDqp,tDqw,tDqu,
%              tDzp,tDzw,tDzu,
%              tDyp,tDyw,tDyu
%
%              finalunc          Percent of desire uncertainty.
%              stepunc           Size of increasing uncertainty.
% (optional)   Ac,Bc,Cc          Initial controller dynamics.
% (optional)   abstol            Absolute tolerance.
% (optional)   reltol            Relative tolerance.
% (optional)   maxiter           Maximum number of iteration.
%
% Outputs:     Ac,Bc,Cc          Robust H2 controller dynamics.
%              h2cost            The overbound of the worst case H2 performance.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if nargin<24,
   maxiter=100;
   if nargin<23,
      abstol=1e-3;
      reltol=1e-3;
      if nargin<21,
         % DESIGN LQG CONTROLLER
         W = [tCz'*tCz, tCz'*tDzu; tDzu'*tCz, tDzu'*tDzu];
         V = [tBw*tBw', tBw*tDyw'; tDyw*tBw', tDyw*tDyw'];
         [Ac,Bc,Cc,Dc] = lqg(tA,tBu,tCy,tDyu,W,V);
         Cc = -Cc;
      end
   end
end

np=size(tBp,2);

%-------------------------------------------------------------------------------%

unc = 0;

%OUTER LOOP
while unc<finalunc,
   unc=unc+stepunc;

   % APPLY LOOP TRANSFORMATION
```

```
    Lam = unc*[-1]*eye(np);
    Gam = unc*[2]*eye(np);
    D = inv(eye(size(tDqp*Lam,1))-tDqp*Lam);

    A = tA+tBp*Lam*D*tCq;
    Bp = tBp*Gam+tBp*Lam*D*tDqp*Gam;
    Bw = tBw+tBp*Lam*D*tDqw;
    Bu = tBu+tBp*Lam*D*tDqu;

    Cq = D*tCq;
    Dqp = D*tDqp*Gam;
    Dqw = D*tDqw;
    Dqu = D*tDqu;

    Cz = tCz+tDzp*Lam*D*tCq;
    Dzp = tDzp*Gam+tDzp*Lam*D*tDqp*Gam;
    Dzw = tDzw+tDzp*Lam*D*tDqw;
    Dzu = tDzu+tDzp*Lam*D*tDqu;

    Cy = tCy+tDyp*Lam*D*tCq;
    Dyp = tDyp*Gam+tDyp*Lam*D*tDqp*Gam;
    Dyw = tDyw+tDyp*Lam*D*tDqw;
    Dyu = tDyu+tDyp*Lam*D*tDqu;

    %-------------------------------------------------------------------------------%

    L = eye(np);  M = L;
    abserr_k = 1;  relerr_k = 1;
    h2cost(1) = 1e6;
    k = 1;

    % INITIAL MULTIPLIERS
    [L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,T1,T2] = vlmi(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,Dzp,Dzw,Dzu,...
                                      Dyp,Dyw,Dyu,L,M,Ac,Bc,Cc);

    % INNER LOOP
    while (((abserr_k > abstol) | (relerr_k > reltol)) & (k < maxiter))
        k=k+1;

        % SYNTHESIS (K-ITERATION)
        [P,Z,Q,Y,X,h2cost(k)] = klmi(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,Dzp,Dzw,Dzu,...
                                Dyp,Dyw,Dyu,L,M,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,T1,T2);
        [Ac,Bc,Cc] = solveac(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,Dzp,Dzw,Dzu,...
                     Dyp,Dyw,Dyu,L,M,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,T1,T2,P,Z,Q,Y,X);

        % ANALYSIS (V-ITERATION)
        [L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,T1,T2] = vlmi(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,Dzp,Dzw,Dzu,...
                                          Dyp,Dyw,Dyu,L,M,Ac,Bc,Cc);

        abserr_k = abs(h2cost(k-1)-h2cost(k));
        relerr_k = abserr_k/h2cost(k-1);
    end

    fprintf('uncertainty = %4.1f%%, minimum h2cost = %8.4f\n',100*unc,h2cost(k));
end

h2cost=h2cost(k);

%-------------------------------------------------------------------------------%
```

vlmi.m

```
function [L1v,L2v,L3v,L4v,L5v,L6v,L7v,L8v,T1v,T2v] = vlmi(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,...
                                                  Dzp,Dzw,Dzu,Dyp,Dyw,Dyu,L,M,Ac,Bc,Cc)

% [L1v,L2v,L3v,L4v,L5v,L6v,L7v,L8v,T1v,T2v] = vlmi(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,...
%                                              Dzp,Dzw,Dzu,Dyp,Dyw,Dyu,L,M,Ac,Bc,Cc)
%
% Function:   vlmi           This MATLAB routine perform V-iteration for robust
%                            H2 controller synthesis procedure.
%
% Inputs:     A,Bp,Bw,Bu,    System dynamics.
%             Cq,Cz,Cy,
%             Dqp,Dqw,Dqu,
%             Dzp,Dzw,Dzu,
%             Dyp,Dyw,Dyu
%
%             L              Diagonal matrix represent sector bounded.
%             M              Diagonal matrix represent slope restriction.
%             Ac,Bc,Cc       Controller dynamics.
%
% Outputs:    L1v,L2v,L3v,   Popov multipliers.
%             L4v,L5v,L6v,
%             L7v,L8v
%             T1v,T2v        Multipliers T.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n = size(A,1);
np = size(Bp,2);

% CLOSED-LOOP WITH CONTROLLER
tA = [ A Bu*Cc; Bc*Cy Ac+Bc*Dyu*Cc];
tBp = [ Bp; Bc*Dyp];
tBw = [ Bw; Bc*Dyw];
tCq = [ Cq zeros(size(Cq,1),size(Bu*Cc,2))];
tCz = [ Cz Dzu*Cc];

%-----------------------------------------------------------------------------%

setlmis([])

% DEFINE LMI VARIABLE
tP = lmivar(1,[2*n 1]);

for j=1:10,
   [Temp,n1,sTemp] = lmivar(1,[1 0]);

   for i=1:np-1,
      [TAdd,n2,sTAdd] = lmivar(1,[1 0]);
      [Temp,n1,sTemp] = lmivar(3,[sTemp,zeros(i,1); zeros(1,i),sTAdd]);
   end

   switch j
      case 1, L1 = Temp;
      case 2, L2 = Temp;
      case 3, L3 = Temp;
      case 4, L4 = Temp;
      case 5, L5 = Temp;
```

```
        case 6, L6 = Temp;
        case 7, L7 = Temp;
        case 8, L8 = Temp;
        case 9, T1 = Temp;
        case 10, T2 = Temp;
    end
end

%-------------------------------------------------------------------------------%

% MAIN SUFFICIENT CONDITION
lmiterm([1 1 1 tP],1,tA,'s');
lmiterm([1 1 1 L2],tCq'*L,tCq*tA,'s');
lmiterm([1 1 1 L4],tCq'*M,tCq*tA,'s');
lmiterm([1 1 1 L8],tCq'*L*M,tCq*tA,'s');
lmiterm([1 1 1 0],tCz'*tCz);

lmiterm([1 2 1 tP],tBp',1);
lmiterm([1 2 1 L2],tBp'*tCq'*L,tCq);
lmiterm([1 2 1 L4],tBp'*tCq'*M,tCq);
lmiterm([1 2 1 L8],tBp'*tCq'*L*M,tCq);
lmiterm([1 2 1 L1],1,tCq*tA);
lmiterm([1 2 1 L2],-1,tCq*tA);
lmiterm([1 2 1 L7],M,tCq*tA);
lmiterm([1 2 1 L8],-M,tCq*tA);
lmiterm([1 2 1 T1],1,L*tCq);

lmiterm([1 2 2 L1],1,tCq*tBp,'s');
lmiterm([1 2 2 L2],-1,tCq*tBp,'s');
lmiterm([1 2 2 L7],M,tCq*tBp,'s');
lmiterm([1 2 2 L8],-M,tCq*tBp,'s');
lmiterm([1 2 2 T1],-2,1);

lmiterm([1 3 1 L3],1,tCq);
lmiterm([1 3 1 L4],-1,tCq);
lmiterm([1 3 1 L6],L,tCq);
lmiterm([1 3 1 L8],-L,tCq);
lmiterm([1 3 1 T2],1,M*tCq*tA);

lmiterm([1 3 2 L5],1,1);
lmiterm([1 3 2 L6],-1,1);
lmiterm([1 3 2 L7],-1,1);
lmiterm([1 3 2 L8],1,1);
lmiterm([1 3 2 T2],1,M*tCq*tBp);

lmiterm([1 3 3 T2],-2,1);

% LYAPUNOV MATRIX
lmiterm([-2 1 1 tP],1,1);

% MULTIPLIERS
lmiterm([-3 1 1 L1],1,1);
lmiterm([-4 1 1 L2],1,1);
lmiterm([-5 1 1 L3],1,1);
lmiterm([-6 1 1 L4],1,1);
lmiterm([-7 1 1 L5],1,1);
lmiterm([-8 1 1 L6],1,1);
lmiterm([-9 1 1 L7],1,1);
```

```
lmiterm([-10 1 1 L8],1,1);
lmiterm([-11 1 1 T1],1,1);
lmiterm([-12 1 1 T2],1,1);

LMISYS = getlmis;

%--------------------------------------------------------------------------------%

% DEFINE AN OBJECTIVE FUNCTION
nx = decnbr(LMISYS);
c = zeros(nx,1);

for j = 1:nx,
   [tPj,L1j,L2j,L3j,L4j,L5j,L6j,L7j,L8j] = defcx(LMISYS,j,tP,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8);
   c(j) = trace(tBw'*(tPj+tCq'*(L*(L1j+L2j)+M*(L3j+L4j)+L*M*(L5j+L6j+L7j+L8j))*tCq)*tBw);
end

%--------------------------------------------------------------------------------%

% SOLVE AN OPTIMIZATION PROBLEM
options = [1e-6,1000,0,0,1];
[copt,xopt] = mincx(LMISYS,c,options);

if ( isempty(xopt))
   L1v =dec2mat(LMISYS,xopt,L1);
   L2v =dec2mat(LMISYS,xopt,L2);
   L3v =dec2mat(LMISYS,xopt,L3);
   L4v =dec2mat(LMISYS,xopt,L4);
   L5v =dec2mat(LMISYS,xopt,L5);
   L6v =dec2mat(LMISYS,xopt,L6);
   L7v =dec2mat(LMISYS,xopt,L7);
   L8v =dec2mat(LMISYS,xopt,L8);
   T1v =dec2mat(LMISYS,xopt,T1);
   T2v =dec2mat(LMISYS,xopt,T2);
else
   disp('V-LMIs are Infisible!!');
end

%--------------------------------------------------------------------------------%
```

klmi.m

```
function [Pv,Zv,Qv,Yv,Xv,h2cost] = klmi(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,Dzp,Dzw,Dzu,...
                                    Dyp,Dyw,Dyu,L,M,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,T1,T2)

% [Pv,Zv,Qv,Yv,Xv,h2cost] = klmi(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,Dzp,Dzw,Dzu,...
%                             Dyp,Dyw,Dyu,L,M,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,T1,T2)
%
% Function:   klmi           This MATLAB routine perform K-iteration for robust H2
%                            controller synthesis procedure.
%
% Inputs:     A,Bp,Bw,Bu,    System dynamics.
%             Cq,Cz,Cy,
%             Dqp,Dqw,Dqu,
%             Dzp,Dzw,Dzu,
%             Dyp,Dyw,Dyu
%
%             L              Diagonal matrix represent sector bounded.
```

```
%           M                Diagonal matrix represent slope restriction.
%
%           L1v,L2v,L3v,     Popov multipliers.
%           L4v,L5v,L6v,
%           L7v,L8v
%           T1v,T2v          Multipliers T.
%
% Outputs:  Pv,Zv,Qv,Yv,Xv   Controller parameter variables.
%           h2cost           The overbound of the worst case H2 performance.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n = size(A,1);   np = size(Bp,2);
ny = size(Cy,1);   nu = size(Bu,2);

Z1 = L*L2+M*L4+L*M*L8;  Z2 = L1-L2+M*L7-M*L8;
Z3 = L3-L4+L*L6-L*L8;   Z4 = L5-L6-L7+L8;

%-----------------------------------------------------------------------------------%

setlmis([])

% DEFINE LMI VARIABLE
P = lmivar(1,[n 1]);
Q = lmivar(1,[n 1]);
Z = lmivar(2,[n ny]);
Y = lmivar(2,[nu n]);
X = lmivar(1,[ny 1]);

%-----------------------------------------------------------------------------------%

% MAIN SUFFICIENT CONDITION
lmiterm([1 1 1 P],1,A,'s');
lmiterm([1 1 1 Z],1,Cy,'s');
lmiterm([1 1 1 0],Cz'*Cz+A'*Cq'*Z1*Cq+Cq'*Z1*Cq*A);
lmiterm([1 2 1 P],Bp',1);
lmiterm([1 2 1 -Z],Dyp',1);
lmiterm([1 2 1 0],Bp'*Cq'*Z1*Cq+Z2*Cq*A+T1*L*Cq);
lmiterm([1 2 2 0],Z2*Cq*Bp+Bp'*Cq'*Z2-2*T1);
lmiterm([1 3 1 0],Z3*Cq+T2*M*Cq*A);
lmiterm([1 3 2 0],Z4+T2*M*Cq*Bp);
lmiterm([1 3 3 0],-2*T2);

lmiterm([2 1 1 Q],A,1,'s');
lmiterm([2 1 1 Y],Bu,1,'s');
lmiterm([2 2 1 Q],Z2*Cq*A,1);
lmiterm([2 2 1 Q],T1*L*Cq,1);
lmiterm([2 2 1 Y],Z2*Cq*Bu,1);
lmiterm([2 2 1 0],Bp');
lmiterm([2 2 2 0],Z2*Cq*Bp+Bp'*Cq'*Z2-2*T1);
lmiterm([2 3 1 Q],Z3*Cq,1);
lmiterm([2 3 1 Q],T2*M*Cq*A,1);
lmiterm([2 3 1 Y],T2*M*Cq*Bu,1);
lmiterm([2 3 2 0],Z4+T2*M*Cq*Bp);
lmiterm([2 3 3 0],-2*T2);
lmiterm([2 4 1 Q],Cz,1);
lmiterm([2 4 1 Y],Dzu,1);
lmiterm([2 4 4 0],-1);
```

```
lmiterm([-3 1 1 X],1,1);
lmiterm([-3 2 1 Z],1,1);
lmiterm([-3 2 2 P],1,1);
lmiterm([-3 2 2 0],Cq'*Z1*Cq);
lmiterm([-3 3 2 0],1);
lmiterm([-3 3 3 Q],1,1);

LMISYS = getlmis;

%---------------------------------------------------------------------------------%

% DEFINE AN OBJECTIVE FUNCTION
nx = decnbr(LMISYS);
c = zeros(nx,1);

for j = 1:nx,
   [Pj,Zj,Xj] = defcx(LMISYS,j,P,Z,X);
   c(j) = trace(Bw'*Pj*Bw + Bw'*Zj*Dyw + Dyw'*Zj'*Bw + Dyw'*Xj*Dyw);
end

%---------------------------------------------------------------------------------%

% SOLVE AN OPTIMIZATION PROBLEM
options = [1e-6,1000,0,0,1];
[copt,xopt] = mincx(LMISYS,c,options);

if ( isempty(xopt))
   Pv = dec2mat(LMISYS,xopt,P);
   Zv = dec2mat(LMISYS,xopt,Z);
   Qv = dec2mat(LMISYS,xopt,Q);
   Yv = dec2mat(LMISYS,xopt,Y);
   Xv = dec2mat(LMISYS,xopt,X);
   h2cost = copt+trace(Bw'*Cq'*(L*(L1+L2)+M*(L3+L4)+L*M*(L5+L6+L7+L8))*Cq*Bw);
else
   disp('K-LMIs are Infisible!!');
end

%---------------------------------------------------------------------------------%
```

solveac.m

```
function [Acv,Bc,Cc] = solveac(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,Dzp,Dzw,Dzu,...
                          Dyp,Dyw,Dyu,L,M,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,T1,T2,P,Z,Q,Y,X)

% [Acv,Bc,Cc] = solveac(A,Bp,Bw,Bu,Cq,Cz,Cy,Dqp,Dqw,Dqu,Dzp,Dzw,Dzu,...
%                    Dyp,Dyw,Dyu,L,M,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,T1,T2,P,Z,Q,Y,X)
%
% Function:   solveac        This MATLAB routine perform K-iteration.
%                            (solving for controller dynamics Ac,Bc,Cc)
%
% Inputs:     A,Bp,Bw,Bu,    System dynamics.
%             Cq,Cz,Cy,
%             Dqp,Dqw,Dqu,
%             Dzp,Dzw,Dzu,
%             Dyp,Dyw,Dyu
%
%             L              Diagonal matrix represent sector bounded.
%             M              Diagonal matrix represent slope restriction.
```

```
%           L1v,L2v,L3v,     Popov multipliers.
%           L4v,L5v,L6v,
%           L7v,L8v
%           T1v,T2v          Multipliers T.
%
%           Pv,Zv,Qv,Yv,Xv   Controller parameter variables.
%
% Outputs:  Acv,Bc,Cc        Controller dynamics.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n = size(A,1);  np = size(Bp,2);

Z1 = L*L2+M*L4+L*M*L8;   Z2 = L1-L2+M*L7-M*L8;
Z3 = L3-L4+L*L6-L*L8;   Z4 = L5-L6-L7+L8;

N = eye(n);
Bc = Z;
Cc = Y*inv(eye(size(P*Q,1))-(P+Cq'*Z1*Cq)*Q);
R = inv(P+Cq'*Z1*Cq-inv(Q));
tP = [P N;N' R];

tA = [A, Bu*Cc; Bc*Cy, Bc*Dyu*Cc];
tBp = [Bp; Bc*Dyp];
tBw = [Bw; Bc*Dyw];
tCq = [Cq, zeros(size(Cq,1),size(Bu*Cc,2))];
tCz = [Cz, Dzu*Cc];
tJ = [zeros(n,n); eye(n)];

%----------------------------------------------------------------------------------%

% DEFINE AN LMI
setlmis([])

Ac = lmivar(2,[n n]);

lmiterm([1 1 1 0],tA'*(tP+tCq'*Z1*tCq)+(tP+tCq'*Z1*tCq)*tA+tCz'*tCz);
lmiterm([1 1 1 Ac],(tP+tCq'*Z1*tCq)*tJ,tJ','s');
lmiterm([1 2 1 0],tBp'*(tP+tCq'*Z1*tCq)+Z2*tCq*tA+T1*L*tCq);
lmiterm([1 2 2 0],Z2*tCq*tBp+tBp'*tCq'*Z2-2*T1);
lmiterm([1 3 1 0],Z3*tCq+T2*M*tCq*tA);
lmiterm([1 3 2 0],Z4+T2*M*tCq*tBp);
lmiterm([1 3 3 0],-2*T2);

LMISYS = getlmis;

%----------------------------------------------------------------------------------%

% SOLVE AN OPTIMIZATION PROBLEM
options = [0,1000,1e9,10,1];
[tmin,xfeas] = feasp(LMISYS,options);

if tmin<=0,
   Acv = dec2mat(LMISYS,xfeas,Ac);
else
   disp('Can''t solving for Ac!!');
end

%----------------------------------------------------------------------------------%
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายฐาปนา นามประดิษฐ์ เกิดเมื่อวันศุกร์ที่ 23 ธันวาคม พุทธศักราช 2520 ณ จังหวัดจันทบุรี เป็นบุตรนายยุทธนาและนางวัชนี นามประดิษฐ์ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม จากภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปีการศึกษา 2541 ศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุมเมื่อปีการศึกษา 2543

ผลงานนำเสนอในงานประชุมวิชาการ

1. Nampradit, T. and Banjerdpongchai, D. Performance Analysis of Lur'e Systems with Multiple Slope Restrictions Using Convex Optimization. In Proceedings of the 4th Asian Control Conference, Singapore (2002): 1097–1102.
2. ฐาปนา นามประดิษฐ์ และ เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย การกู้วงรอบถ่ายโอนสำหรับแขนกลแบบอ่อนตัวข้อต่อเดียว การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 24, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (2544): 569–574.
3. ฐาปนา นามประดิษฐ์ และ เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย การหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์เพื่อวิเคราะห์สมรรถนะระบบลูเรที่มีการจำกัดความชัน การประชุมวิชาการทางวิศวกรรมไฟฟ้าครั้งที่ 25, มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ (2545): 51-55.