การวิเคราะห์การกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้จุดสังเกตหลายจุด

นาย ณัฐวุฒิ พุทธประสิทธิ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-1115-8

ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING FROM CONDUCTING OBJECTS BY USING BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH MULTIPLE OBSERVATION POINTS

Mr. Natthawoot Putprasit

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2002

ISBN 974-17-1115-8

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำ โดยวิธีเบาวน์ดาริอีลีเมนต์ที่ใช้จุดสังเกตหลายจุด
โดย	นาย ณัฐวุฒิ พุทธประสิทธิ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ฉัตรชัย ไวยาพัฒนกร)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. โมไนย ไกรฤกษ์)

ณัฐวุฒิ พุทธประสิทธิ์ : การวิเคราะห์การกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำโดยวิธีเบาวน์ดาริอีลีเมนต์ที่ใช้จุดสังเกตหลายจุด (ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTEIRNG FROM CONDUCTING OBJECTS BY USING BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH MULTIPLE OBSERVATION POINTS) อ. ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว, 99 หน้า. ISBN 974-17-1115-8.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีวิเคราะห์การกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำที่มีรูปร่างไม่เจาะจงโดยวิธีเบาวน์ดาริอีลีเมนต์ ข้อเสียในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำผิวปิดโดยใช้วิธีเบาวน์ดาริอีลีเมนต์คือจะเกิดผลเฉลยปลอมเทียมขึ้นที่ความถี่บางค่าซึ่งเรียกปัญหานี้ว่า ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน วิทยานิพนธ์นี้เสนอเทคนิคใหม่ในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในโดยกำหนดตำแหน่งของจุดสังเกตในสมการอินทิกรัลให้อยู่บนผิวสมมติสองผิวที่อยู่ใกล้กับผิวของตัวกระเจิงคลื่น นอกจากนี้ยังได้ทดลองวัดคลื่นกระเจิงที่เกิดจากการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำรูปทรงกลมและรูปทรงกระบอก

ผลการคำนวณตามวิธีที่เสนอในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากวิธีเบาวน์ดาริอีลีเมนต์ที่ตำแหน่งของจุดสังเกตในสมการอินทิกรัลอยู่บนผิวสมมติผิวเดียวของผู้วิจัยอื่นและผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ ผลการคำนวณที่ได้สอดคล้องกันกับผลคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และปราศจากผลเฉลยปลอมเทียม ผลการทดลองที่ได้มีแนวโน้มไปในทางเดียวกันกับผลการคำนวณ

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....

ปีการศึกษา 2545

4170685621 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: BEM / ELECTROMAGNETIC SCATTERING PROBLEMS / INTERIOR RESONANCE PROBLEMS

NATTHAWOOT PUTPRSIT : ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING FROM CONDUCTING OBJECTS BY USING BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH MULTIPLE OBSERVATION POINTS. THESIS ADVISOR:ASSIST.PROF. TUPTIM ANGKAEW Ph.D., 99 pp. ISBN 974-17-1115-8.

This thesis presents an analysis of electromagnetic wave scattering from arbitrary shape conducting objects in 3D space by using the boundary element method. One drawback associated with using the boundary element method to analyse electromagnetic wave scattering from closed conducting surface is occurrence of spurious solution at some frequencies, which is called “internal resonance problem”. This thesis proposed a technique to overcome the internal resonance problems by placing the location of observation points of integral equation on two fictitious surfaces closed to the scatterer surface. In addition, the measurements of scattered wave from conducting sphere and conducting cylinder have been carried out.

The computational results of the presented method have been verified with the result from previously published data, for which the observation points are located on one fictitious surface, and the results from analytical method. The computational results agree well with result from the analytical method, and there is no occurrence of spurious solutions. The results of measurement are inclined to the computational results.

Department Electrical Engineering Student’s signature ....

Field of study Electrical Engineering Advisor’s signature ....

Academic year 2002

กิจติกรรมประกาศ

งานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นั้นสำเร็จลุล่วงไปได้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ได้ให้คำแนะนำในการวิจัย แนวทางในการวิจัย ตลอดจนให้คำปรึกษา ข้อคิดเห็นต่างๆในการวิจัยและจัดหาอุปกรณ์การดำเนินการวิจัยให้แก่ผู้วิจัยอย่างครบถ้วน และขอขอบพระคุณ Prof. Masonori Matsuhara แห่ง Okayama University of Science ประเทศญี่ปุ่น ที่ได้ให้แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน

ขอขอบคุณ นาย ชัยรัตน์ วิเชียรมงคลกุล ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำและคำปรึกษาในงานวิทยานิพนธ์นี้, ขอขอบคุณ นายสุรพัชร์ เจริญยิ่ง ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำและคำปรึกษาในงานวิทยานิพนธ์นี้, ขอขอบคุณ นางสาวอัชราภรณ์ เนตรนิล, นาย คฑา สุวรรณวัฒน์, นาย ณัฐพงศ์ คูวัฒนา, นาย สุวิชาญ กาวาฮารา ที่ได้สละเวลาให้ความช่วยเหลือในการทดลอง

นอกจากนั้นขอขอบคุณสมาชิกของห้องปฏิบัติการวิจัยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทุกท่านที่คอยให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจให้ตลอดมา

ท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดาของผู้วิจัยที่ได้สนับสนุนด้านการเรียนและเป็นกำลังใจให้แก่ผู้วิจัยตลอดเวลาที่ได้ศึกษาและดำเนินการวิจัยจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

คำอธิบายสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
A	พื้นที่ภาพฉายของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมบนระนาบ xy
$\|A\|$	นอร์มของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์
$\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ
$\vec{a}_p$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของจุดสังเกต
BEM	วิธีเบาวน์ดาริอีลีเมนต์
$cond$	เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์
d	ระยะห่างระหว่างโนด
$\vec{E}$	เวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้า
$\vec{E}^{inc}$	เวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ
E_z	ความเข้มสนามไฟฟ้าในแนวแกน z
G	ฟังก์ชันกรีน
G_r, G_t	อัตราขยายกำลังของสายอากาศรับและสายอากาศส่ง ตามลำดับ
$\vec{H}$	เวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็ก
$\vec{H}^{inc}$	เวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นตกกระทบ
H_z	ความเข้มสนามแม่เหล็กในแนวแกน z
j	สัญลักษณ์ของส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน
$\vec{J}$	เวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า
J_z	ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าในแนวแกน z
k	เลขคลื่น
l_i^e	ความยาวด้านที่ i ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมอีลีเมนต์ที่ e และใช้ในการกำหนดทิศทางของสนามในอีลีเมนต์ขอบ
$\vec{n}$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉากกับผิวของตัวกระเจิงคลื่น
N_n	จำนวนโนด
N_s	จำนวนด้านทั้งหมดของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม
$\vec{N}_1^e, \vec{N}_2^e, \vec{N}_3^e$	ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ
P_r	กำลังที่รับได้โดยสายอากาศรับ
P_t	กำลังที่ส่งโดยสายอากาศส่ง

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\vec{p}$	เวกเตอร์ตำแหน่งของจุดสังเกต
$\vec{q}$	เวกเตอร์ตำแหน่งของจุดแหล่งกำเนิด
RCS	ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์
$\vec{t}$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวสัมผัสกับผิวของตัวกระเจิงคลื่น
Δ	พื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม
ε_0	สภาพยอมของอวกาศว่าง
μ_0	สภาพซาบซึมได้ของอวกาศว่าง
ω	ความถี่เชิงมุม
σ	ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์
λ	ความยาวคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
$\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$	ค่าไอเกนที่มากที่สุดและน้อยที่สุด ตามลำดับ
∇	ตัวดำเนินการเดล
∇_q	ตัวดำเนินการเดลเทียบกับจุดแหล่งกำเนิด

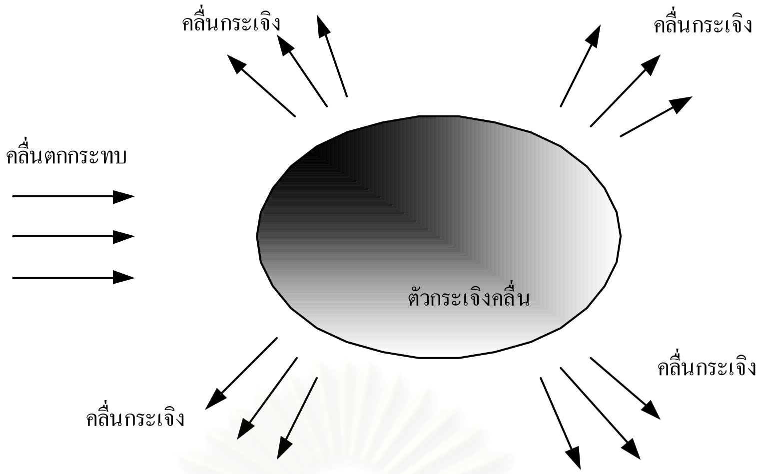
บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันได้มีการพัฒนารูปแบบของการประยุกต์ใช้งานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในด้านการสื่อสารในหลายรูปแบบด้วยกัน เช่น ระบบวิทยุติดตามตัว, ระบบไมโครเวฟภาคพื้นดิน, ระบบโทรศัพท์เคลื่อนที่ และระบบการสื่อสารผ่านดาวเทียม เป็นต้น ระบบเหล่านี้เป็นการติดต่อสื่อสารกันระหว่างผู้ส่งกับผู้รับ และนอกจากนี้ยังมีการพัฒนารูปแบบการใช้งานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ถือว่ามีความสำคัญและเป็นประโยชน์อย่างมากอีกรูปแบบหนึ่งคือระบบเรดาร์ ระบบเรดาร์นั้นได้มีการค้นคว้าและนำมาใช้งานโดยกองทัพสหรัฐอเมริกาในปี ค.ศ. 1940 ซึ่งคำว่า radar นั้นมาจากคำว่า radio detection and ranging สืบเนื่องมาจากในช่วงแรกนั้นเรดาร์ที่มีการใช้งานอยู่นั้นใช้เพื่อวัตถุประสงค์ 2 ประการด้วยกันคือ การตรวจสอบและระบุตำแหน่งของวัตถุเป้าหมาย แต่ในปัจจุบันนี้ได้มีการพัฒนาเรดาร์เพื่อใช้ในการจำแนกประเภทของเป้าหมาย, ระบุชนิดของเป้าหมายและการสร้างภาพจำลองของวัตถุเป้าหมาย และยังมีการนำระบบเรดาร์มาพัฒนาและใช้งานในหลายรูปแบบด้วยกัน ได้แก่ ระบบควบคุมการคมนาคมทางอากาศและทางทะเล การตรวจสอบสภาพอากาศ การตรวจจับความเร็ว การศึกษาค้นคว้าและวิจัยทางดาราศาสตร์ การตรวจสอบและศึกษาสภาพของแหล่งทรัพยากร นอกจากนี้ยังมีการพัฒนาเพื่อนำมาใช้ในด้านการทหาร เช่น การตรวจสอบตำแหน่งของข้าศึกและระบบนำวิถีของอาวุธ เป็นต้น จากที่กล่าวมานี้จะเห็นว่าระบบเรดาร์นั้นได้มีการนำมาใช้งานในหลายด้านด้วยกัน

การทำงานของเรดาร์อาศัยการศึกษาเกี่ยวกับปรากฏการณ์การกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าหรือปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งโดยทั่วไปปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีรูปแบบของปัญหาดังรูปที่ 1.1 ปัญหานี้เกิดจากการที่ภาคส่งหรือแหล่งกำเนิดคลื่นส่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามาตกกระทบบนวัตถุเป้าหมาย และสนามของคลื่นตกกระทบนี้จะกระตุ้นให้มีกระแสเหนี่ยวนำเกิดขึ้นที่วัตถุเป้าหมาย กระแสเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นนี้จะเป็นเสมือนแหล่งกำเนิดคลื่นอันที่สองที่จะแผ่กระจายคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกจากวัตถุเป้าหมายไปยังภาครับ และการพิจารณาเกี่ยวกับปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั้นมักจะเรียกวัตถุเป้าหมายว่า ตัวกระเจิงคลื่น (scatterer) และคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระจายหรือกระเจิงออกมาจากตัวกระเจิงคลื่นนั้นมักจะเรียกว่า คลื่นกระเจิง (scattered wave)



รูปที่ 1.1 รูปแบบของปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

แนวทางในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแบ่งได้เป็น 2 วิธีคือ ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method) และระเบียบวิธีตัวเชิงเลข (numerical method) การใช้ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั้นจะเหมาะกับปัญหาที่ตัวกระเจิงคลื่นมีโครงสร้างเป็นรูปทรงเรขาคณิตที่สอดคล้องกับระบบพิกัดที่ใช้ในการวิเคราะห์ ตัวอย่างเช่น ตัวกระเจิงคลื่นที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกที่มีหน้าตัดของทรงกระบอกเป็นรูปวงกลมและตัวกระเจิงคลื่นที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลม เป็นต้น ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นสามารถใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่ตัวกระเจิงคลื่นมีรูปร่างไม่เจาะจงได้ ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ ประเภทที่ใช้สมการอนุพันธ์ในการวิเคราะห์ปัญหาและประเภทที่ใช้สมการอินทิกรัลในการวิเคราะห์ปัญหา

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สมการอนุพันธ์ในการวิเคราะห์ปัญหา ได้แก่ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (finite element method) และ วิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) วิธีการเหล่านี้จะพิจารณาบริเวณทั้งหมดของปัญหา ทำให้ตัวไม่ทราบค่าที่ต้องการหานั้นมีจำนวนมาก และเนื่องจากปัญหาการกระเจิงคลื่นนี้มีบริเวณของปัญหาเป็นบริเวณเปิดจึงทำให้ไม่เหมาะสมที่จะใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีผลต่างสืบเนื่องในการวิเคราะห์ แต่อย่างไรก็ตามได้มีการปรับปรุงวิธีการทั้งสองนี้ให้สามารถใช้กับปัญหาในบริเวณเปิดได้ โดยใช้เทคนิคอื่นๆ ร่วมด้วย ตัวอย่างเช่น อินฟินิตอีลีเมนต์ (infinite element) และเงื่อนไขขอบเขตแบบดูดกลืน (absorbing boundary condition) แต่วิธีการเหล่านี้จะมีความซับซ้อนมากเมื่อตัวกระเจิงคลื่นมีโครงสร้างไม่เจาะจง ตัวอย่างของงานวิจัยที่ใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีผลต่างสืบเนื่องในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้แก่

Yao-Bi, Nicolas, and Nicolas (1993) เสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์การกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบดูดกลืนเปรียบเทียบกับวิธีการผสมที่ใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการแก้ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าคลื่นใน 2 มิติ

Belhora and Pichon (1995) เสนอเงื่อนไขขอบเขตแบบดูดกลืนที่ใช้ร่วมกับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ โดยเงื่อนไขขอบเขตแบบดูดกลืนนี้พิจารณาตามเงื่อนไขการแพร่กระจายคลื่นของซอมเมอร์เฟลด์ (Sommerfeld radiation boundary condition) และเงื่อนไขการแผ่กระจายคลื่นของเบยลิสส์และเตอร์เคล (Bayliss–Turkel radiation boundary condition)

Gratkowski (1996) เสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้อินฟินิตอีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติ โดยให้อีลีเมนต์ที่อยู่ติดกับบริเวณเปิดอยู่ในรูปของอินฟินิตอีลีเมนต์ที่เป็นอีลีเมนต์ปลายเปิดแทนอีลีเมนต์แบบทั่วไปที่เป็นรูปปิดเพื่อใช้รูปแบบอินฟินิตอีลีเมนต์ในการประมาณสนามที่ระยะไกล

Chen and Hong (1997) เสนอวิธีผลต่างสืบเนื่องที่ใช้กับสมการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กและใช้สมการวัดความไม่แปรปรวน (measured equation of invariance, MEI) ในการวิเคราะห์การกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สมการอินทิกรัลในการวิเคราะห์ปัญหา ได้แก่ วิธีโมเมนต์ (moment method) และ วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ (boundary element method) วิธีการเหล่านี้เป็นการสร้างสมการที่ผูกความสัมพันธ์เฉพาะตรงบริเวณผิวของตัวกระเจิงคลื่นโดยจะเป็นการพิจารณาเฉพาะบริเวณขอบเขตของปัญหาเท่านั้น จึงทำให้สามารถลดมิติของปัญหาลงได้หนึ่งมิติเป็นผลให้ตัวไม่ทราบค่าที่ต้องการหานั้นมีจำนวนน้อยลง อีกทั้งวิธีการนี้ยังสามารถใช้กับปัญหาที่มีบริเวณของปัญหาเป็นบริเวณปิดหรือบริเวณเปิดก็ได้ ตัวอย่างของงานวิจัยที่ใช้วิธีโมเมนต์และวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาได้แก่

Kagami and Fukai (1984) เสนอการใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติ โดยพิจารณาปัญหาของความไม่ต่อเนื่องของท่อนำคลื่น (waveguide discontinuities problems) ปัญหาตัวกลางชนิดหลายชั้น (multi-layered media problem) และปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic scattering problems) เป็นกรณีของปัญหาที่วิเคราะห์เพื่อแสดงให้เห็นว่าวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เป็นวิธีเชิงตัว

เลขที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเนื่องจากใช้จำนวนตัวไม่ทราบค่าน้อยกว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และให้ผลที่มีความแม่นยำและยังสามารถใช้กับปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบริเวณเปิดได้โดยที่ไม่ต้องใช้วิธีการอื่นๆร่วมด้วย

Huber, Rieger, Haas, and Rucker (1999) เสนอวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้สนามเป็นตัวแปรในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยใช้อีลีเมนต์ขอบอันดับสูงในการประมาณสนามบนผิวโค้งและใช้วิธีกาเลอคินในการสร้างระบบสมการเชิงเส้น

ในงานวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเนื่องจากวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์สามารถลดมิติของปัญหาลงได้หนึ่งมิติทำให้ตัวไม่ทราบค่ามีจำนวนน้อยลงและสามารถใช้กับปัญหาที่มีบริเวณของปัญหาเป็นบริเวณเปิดได้และกำหนดขอบเขตของงานวิทยานิพนธ์นี้ไว้ในกรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำเท่านั้น

การวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์นั้นเป็นที่ทราบกันดีว่าจะมีปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน (interior resonance problems) เกิดขึ้น ทำให้คำตอบที่ได้มีความผิดพลาดจากคำตอบที่แท้จริงมากที่ความถี่บางค่า หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือมีความถี่เอกฐาน (singular frequency) เกิดขึ้น ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในนี้เกิดขึ้นเมื่อใช้วิธีสมการอินทิกรัลตามขอบ (boundary integral equation) กับตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นผิวปิด ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในนี้ได้มีผู้ศึกษามาก่อนแล้วและพบว่า ความถี่เอกฐานที่เกิดขึ้นนี้สอดคล้องกับความถี่เรโซแนนซ์ (resonant frequency) ของโพรง (cavity) ที่มีรูปร่างเช่นเดียวกับตัวกระเจิงคลื่นและตัวกลางภายในโพรงมีสมบัติเช่นเดียวกับบริเวณภายนอกตัวกระเจิงคลื่น ที่ความถี่เรโซแนนซ์ของโพรงนี้จะไม่มีคำตอบสำหรับสมการอินทิกรัลตามขอบ (boundary integral equation) เนื่องจากตัวดำเนินการอินทิกรัลอยู่ในภาวะเอกฐาน ณ ความถี่นี้ แต่เมื่อใช้วิธีการแบ่งส่วนย่อย (discretization) ในการแก้สมการอินทิกรัลนี้ พบว่า ดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะไม่เท่ากับศูนย์ แต่จะมีค่าน้อยมาก ๆ เนื่องจากความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากวิธีการแบ่งส่วนย่อยที่ใช้ในการประมาณค่า และจากการศึกษาพบว่ามีผู้เสนอวิธีในการแก้ไขปัญหาเรโซแนนซ์ภายในอยู่หลายแนวทางด้วยกัน เช่น การปรับผิวของจุดสังเกตจากตำแหน่งที่อยู่บนผิวของตัวกระเจิงคลื่นให้อยู่ที่ผิวขอบเขตสมมติ (fictitious boundary) การสมมติให้เลขคลื่นในสมการอินทิกรัลตามขอบเป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเสมือนกับว่ามีการสูญเสียเกิดขึ้นในตัวกลางและการใช้สมการอินทิกรัลของสนามรวม (combined field integral equation) ที่ใช้สมการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้า (electric field integral equation) และสมการอินทิกรัลของสนามแม่เหล็ก

(magnetic field integral equation) ร่วมกัน ตัวอย่างของงานวิจัยในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน ได้แก่

Toyoda, Matsuhara and Kumagai (1988) เสนอการใช้สมการอินทิกรัลแบบขยาย (extended integral equation) และใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้จุดสังเกตอยู่บนผิวสมมติที่อยู่ใกล้กับผิวตัวกระเจิงคลื่นเพื่อแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติจากตัวกระเจิงคลื่นที่มีโครงสร้างเป็นทรงกระบอก วิธีการดังกล่าวนี้สามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้โดยอาศัยการปรับเลื่อนผิวสมมติเพื่อทำให้ความถี่ที่เกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเลื่อนไปจากความถี่เดิมที่เคยเกิดปัญหาขึ้นทำให้สามารถหาผลเฉลย ณ ความถี่ที่ต้องการ แต่ยังคงมีปัญหาเรโซแนนซ์เกิดขึ้นที่ความถี่อื่น

Collins, Jin, and Volakis (1992) เสนอการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติที่ใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีสมการอินทิกรัลตามขอบร่วมกันโดยการใช้วิธีสมมติให้เลขคลื่นในสมการอินทิกรัลตามขอบเป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งวิธีการนี้สามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้ แต่ต้องสมมติให้มีการสูญเสียเกิดขึ้นภายในตัวกลางที่คลื่นแพร่กระจาย

Monzon and Damaskos (1994) เสนอวิธีโมเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ใช้เทคนิควัตถุพาราสิติก (parasitic body technique) ในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน โดยใช้หลักในการแบ่งผลเฉลยหรือสนามที่ได้ที่ความถี่เรโซแนนซ์ออกเป็นสนามที่เป็นผลเฉลยที่ถูกต้องและผลเฉลยพาราสิติกที่เป็นส่วนของสนามเรโซแนนซ์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ ณ ความถี่เรโซแนนซ์ และอาศัยกลไกการสูญเสียในตัวกลางที่ผิวภายนอกตัวกระเจิงคลื่นในการลดผลที่เกิดขึ้นจากผลเฉลยพาราสิติก แต่วิธีการนี้ใช้การกำหนดให้มีการสูญเสียเกิดขึ้นภายในตัวกลางที่คลื่นแพร่กระจายซึ่งในความเป็นจริงนั้นไม่มีการสูญเสียเกิดขึ้น

Sheng, Jin, Chew, and Lu (1998) เสนอวิธีโมเมนต์ที่ใช้สมการอินทิกรัลของสนามรวมที่ประกอบด้วยสมการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้าและสมการอินทิกรัลของสนามแม่เหล็กเพื่อแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติจากตัวกระเจิงคลื่นเอกพันธ์และใช้อัลกอริทึมมัลติลีเวลฟาสท์มัลติโพล (multilevel fast multipole algorithm) เพื่อช่วยในการลดหน่วยความจำที่ต้องการใช้ซึ่งทำให้ลดเวลาในการคำนวณ ซึ่งวิธีการสมการอินทิกรัลของสนามรวมนี้สามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้ แต่อย่างไรก็ตามวิธีการนี้ต้องใช้สมการอินทิกรัลถึงสองสมการทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าวิธีที่ใช้สมการอินทิกรัลเพียงสมการเดียวและยังมีความซับซ้อนเพิ่มขึ้น

Yoshii (1999) เสนอวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวเพื่อแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติจากตัวกระเจิงคลื่นที่มีโครงสร้างเป็นทรงกระบอก วิธีการดังกล่าวนี้สามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้และไม่มีปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเกิดขึ้นที่ความถี่ใดเลย วิธีการนี้มีข้อดีคือไม่ต้องดัดแปลงสมการในการคำนวณมากนัก

Yufa and Shanjia (2000) เสนอวิธีโมเมนต์ในการวิเคราะห์การกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติจากตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นวัตถุตัวนำและแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในโดยอาศัยแนวคิดที่ว่า กระแสเชิงผิว (surface current) ประกอบด้วย กระแสที่ไม่ใช่โหมดเรโซแนนซ์ (non resonant mode current) ซึ่งเป็นกระแสที่ทำให้เกิดสนามของคลื่นกระเจิงที่ถูกต้องและกระแสโหมดเรโซแนนซ์ (resonant mode current) และจะใช้เทคนิคการแตกค่าเอกฐาน (singular value decomposition) และวิธีอินเวอร์สเพาเวอร์ (inverse power method) เพื่อหากระแสที่ไม่ใช่โหมดเรโซแนนซ์โดยใช้เงื่อนไขที่ว่า สนามรวมที่จุดภายใน (interior point) ของตัวกระเจิงคลื่นต้องเป็นศูนย์

จากงานวิจัยที่กล่าวมานี้ผู้เสนอวิทยานิพนธ์เห็นว่าการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในตามแนวความคิดของ Yoshii ที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวนั้นมีข้อดีเนื่องจากไม่เกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่ความถี่ใด และไม่ต้องดัดแปลงวิธีที่ใช้ในการคำนวณตามระเบียบวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์มากนักเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการอื่นที่ได้กล่าวมาแล้ว อย่างไรก็ตามงานวิจัยของ Yoshii ได้พิจารณาเฉพาะปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติเท่านั้น ดังนั้นผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงมีความคิดที่จะนำวิธีการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในตามแนวคิดของ Yoshii มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติเพื่อให้ได้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่สามารถกำจัดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเสนอวิธีวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติที่เกิดจากการตกกระทบของคลื่นระนาบกับวัตถุตัวนำผิวเรียบที่มีรูปร่างไม่เจาะจงโดยใช้ วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์

2. เพื่อเสนอวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่สามารถคำนวณได้อย่างมีเสถียรภาพและไม่มีปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน โดยใช้จุดสังเกตหลายจุดในการสร้างสมการตามระเบียบวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. วิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติจากการตกกระทบของคลื่นระนาบบนตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำผิวเรียบโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้จุดสังเกตหลายจุดเพื่อแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน

2. เขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณตามวิธีวิเคราะห์ ในข้อ 1

3. ทดสอบดัชนีแสดงสภาวะเลวของเมตริกซ์ในกรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำทรงกลม

4. หาค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในข้อ 3 แล้วเทียบกับคำตอบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

5. ทดสอบกับกรณีตัวอย่างอื่น ๆ ที่มีการตีพิมพ์ไว้

6. ทำการทดลองเกี่ยวกับการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำและเปรียบเทียบผลที่ได้จากการทดลองกับผลที่ได้จากการใช้วิธีเชิงตัวเลข

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้วิธีการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติจากวัตถุตัวนำที่ไม่มีสภาวะเลวของสมการเมตริกซ์และไม่มีปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน

2. โปรแกรมจำลองผลการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นใน 3 มิติจากวัตถุตัวนำ

1.5 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาวิธีวิเคราะห์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการแก้ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

2. ศึกษา วิเคราะห์ และหาวิธีลดความบกพร่องของชุดคำตอบที่ได้จากวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการแก้ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

3. นำวิธีการในข้อ 2 มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการกระเจิงของคลื่นใน 3 มิติ

4. เขียนโปรแกรมจำลองผลการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่น ในข้อ 3

5. ทำการทดลองเกี่ยวกับการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำ

6. เปรียบเทียบและวิเคราะห์ผล

7. จัดทำเอกสารวิทยานิพนธ์

บทที่ 2

การวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติ โดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์

2.1 ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติ โดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ทฤษฎีต่างๆที่นำเสนอในบทนี้จะเป็นหลักการที่ใช้ในการคำนวณในบทต่อไป เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย ในหัวข้อ 2.2 กล่าวถึงสมการพื้นฐานในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติโดยนำเสนอในรูปแบบของสมการสเกลาร์ซึ่งจะใช้ระเบียบวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหานี้และจะกล่าวถึงการเลือกผิวของจุดสังเกตที่ใช้ในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน ในหัวข้อ 2.3 จะนำเสนอตัวอย่างการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในกรณีของตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกหน้าตัดเป็นรูปวงกลมและยาวเป็นอนันต์ โดยใช้การเลือกผิวของจุดสังเกตในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน ซึ่งจะพิจารณาในกรณีที่ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวและกรณีที่ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว

2.2 สมการพื้นฐานในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติ

ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติเป็นปัญหาที่ตัวกระเจิงคลื่นมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกที่มีความยาวตามแนวแกนของทรงกระบอกมากกว่าความยาวคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ามาก ทำให้สามารถประมาณได้ว่า ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของสนามตามแนวแกนของทรงกระบอก เมื่อพิจารณาปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากตัวกระเจิงคลื่นที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกที่มีหน้าตัดของทรงกระบอกคงตัวและทรงกระบอกวางตัวอยู่ในแนวแกน z ดังรูปที่ 2.1 โดยกำหนดให้ Γ เป็นผิวของตัวกระเจิงคลื่น, Ω_o เป็นบริเวณภายนอกของตัวกระเจิงคลื่น และ Ω_i เป็นบริเวณภายในตัวกระเจิงคลื่น

ในที่นี้จะพิจารณากรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เป็นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าฮาร์มอนิกเชิงเวลา (time harmonic electromagnetic field) ซึ่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะต้องสอดคล้องกับสมการแมกซ์เวลล์ในโดเมนความถี่ดังนี้

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{a}_z J_z + j\omega\varepsilon_0 \vec{E} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \tag{2.2}$$

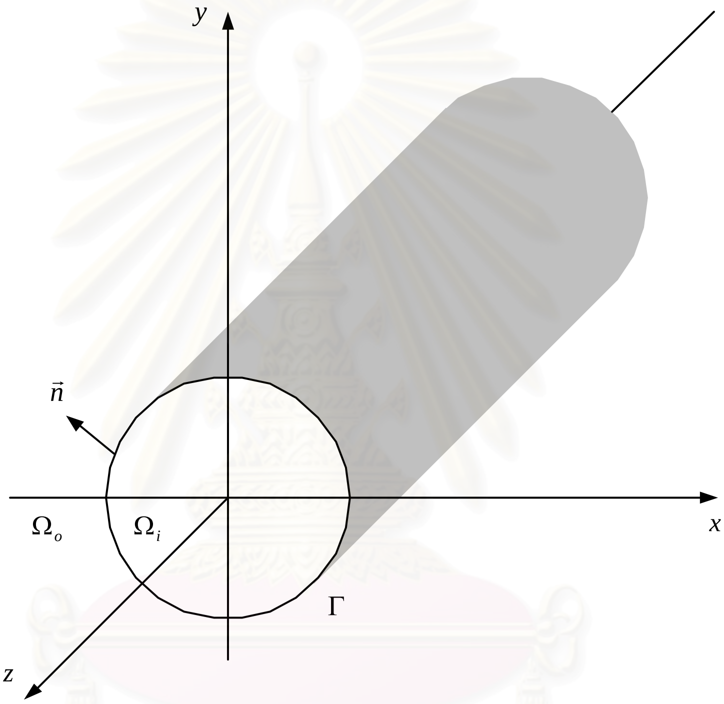
ในที่นี้

$\vec{E}$ และ $\vec{H}$ คือ เวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้าและเวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็ก

J_z คือ ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าในแนวแกน z

ε_0 และ μ_0 คือ สภาพยอมและสภาพซาบซึมได้ของอวกาศว่าง

ω คือ ความถี่เชิงมุมของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า



รูปที่ 2.1 ตัวกระเจิงคลื่นที่มีโครงสร้างรูปทรงกระบอกที่มีหน้าตัดของทรงกระบอกคงตัว และทรงกระบอกวางตัวอยู่ในแนวแกน z

เมื่อแยกองค์ประกอบของสนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็กและตัวดำเนินการเดล ออกเป็น 2 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าตามขวางและในแนวแกน z องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กตามขวางและในแนวแกน z แล้ว สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{a}_z H_z \tag{2.3}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{a}_z E_z \tag{2.4}$$

เนื่องจากการประมาณให้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของสนามตามแนวแกน z ดังนั้นตัวดำเนินการเดลสามารถแสดงได้เป็นดังนี้

$$\nabla = \nabla_t + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_t \tag{2.5}$$

$$\nabla_t = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.6}$$

เมื่อแทนสมการที่ (2.3), (2.4) และ (2.5) ลงในสมการที่ (2.1) และ (2.2) จะได้

$$\nabla_t \times \vec{H}_t + \nabla_t \times \vec{a}_z H_z = \vec{a}_z J_z + \vec{a}_z j\omega\varepsilon_0 E_z + j\omega\varepsilon_0 \vec{E}_t \tag{2.7}$$

$$\nabla_t \times \vec{E}_t + \nabla_t \times \vec{a}_z E_z = -\vec{a}_z j\omega\mu_0 H_z + j\omega\mu_0 \vec{H}_t \tag{2.8}$$

และจากสมการที่ (2.5) และ (2.6) นี้ทำให้สามารถแบ่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าออกได้เป็น 2 ชุดคือ TE_z และ TM_z

TM_z :
$$\nabla_t \times \vec{H}_t = \vec{a}_z J_z + \vec{a}_z j\omega\varepsilon_0 E_z \tag{2.9}$$

$$\nabla_t \times \vec{a}_z E_z = j\omega\mu_0 \vec{H}_t \tag{2.10}$$

TE_z :
$$\nabla_t \times \vec{E}_t = -\vec{a}_z j\omega\mu_0 H_z \tag{2.11}$$

$$\nabla_t \times \vec{a}_z H_z = j\omega\varepsilon_0 \vec{E}_t \tag{2.12}$$

โดยในกรณีของ TM_z (E-wave) นั้น $E_x = E_y = H_z = 0$ และในกรณีของ TE_z (H-wave) นั้น $H_x = H_y = E_z = 0$ ซึ่งในกรณีทั้งสองนี้มีสมการคลื่นเป็นดังนี้

TM_z :
$$\nabla_t^2 E_z + k^2 E_z = j\omega\mu_0 J_z \tag{2.13}$$

TE_z :
$$\nabla_t^2 H_z + k^2 H_z = 0 \tag{2.14}$$

สนามทั้งสองกรณีนี้สามารถแสดงในรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$\nabla_t^2 f + k^2 f = -g \qquad \text{ในบริเวณ}\,\Omega_o \tag{2.15}$$

โดยที่ f เป็นสนามในบริเวณ Ω_o ซึ่ง $f = E_z$ ในกรณีของ TM_z และ $f = H_z$ ในกรณีของ TE_z k เป็นเลขคลื่น (wave number) ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในบริเวณ Ω_o และ g เป็นแหล่งกำเนิดที่อยู่ในบริเวณ Ω_o

เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ตามขอบเขต Γ ที่เป็นผิวตัวนำสมบูรณ์ ต้องสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

กรณีการกระเจิงคลื่นของ TM_z $\qquad f = 0 \qquad$ (2.16)

กรณีการกระเจิงคลื่นของ TE_z $\qquad \vec{n}\cdot\nabla f = 0 \qquad$ (2.17)

โดยที่ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางพุ่งออกจากตัวกระเจิงคลื่นและตั้งฉากกับขอบเขต Γ

เมื่อใช้ทฤษฎีบทของกรีน (Green's theorem) กับสมการที่ (2.15) ในการแปลงความสัมพันธ์จากความสัมพันธ์ในบริเวณทั้งหมดของปัญหาการกระเจิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าให้เป็นความสัมพันธ์ที่ขอบเขตของปัญหาการกระเจิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งก็คือผิวของตัวกระเจิงคลื่นจะทำให้ได้สมการอินทิกรัลเป็นดังนี้

เมื่อ $\vec{p}\in\Omega_o$

$$\oint_\Gamma \left\{ G(\vec{p},\vec{q})\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q} - \frac{\partial G(\vec{p},\vec{q})}{\partial n_q} f(\vec{q}) \right\} dl_q = f^{inc}(\vec{p}) - f(\vec{p}) \qquad (2.18)$$

เมื่อ $\vec{p}\in\Omega_i$

$$\oint_\Gamma \left\{ G(\vec{p},\vec{q})\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q} - \frac{\partial G(\vec{p},\vec{q})}{\partial n_q} f(\vec{q}) \right\} dl_q = f^{inc}(\vec{p}) \qquad (2.19)$$

และ

$$f^{inc}(\vec{p}) = \int_{\Omega_o} g(\vec{q})G(\vec{p},\vec{q})dS_q \qquad (2.20)$$

$$G(\vec{p},\vec{q}) = -\frac{j}{4}H_0^2(k|\vec{p}-\vec{q}|) \qquad (2.21)$$

โดยที่

$f^{inc}(\vec{p})$ เป็นสนามตกกระทบที่จุด $\vec{p}$ ที่เกิดขึ้นโดยแหล่งกำเนิด $g(\vec{q})$

$G(\vec{p},\vec{q})$ เป็นฟังก์ชันกรีนแบบ 2 มิติในอวกาศว่างไร้ขอบเขต

$H_0^2(k|\vec{p}-\vec{q}|)$ เป็นฟังก์ชันแฮงเคลชนิดที่สองอันดับศูนย์ (Hankel function of second kind of zeroth order)

$\frac{\partial}{\partial n_q}$ เป็นอนุพันธ์ในแนวตั้งฉากเทียบกับ $\vec{q}$ ตามขอบเขต Γ

$\oint_{\Gamma} dl_q$ เป็นอินทิกรัลเชิงเส้นเทียบกับ $\vec{q}$ ตามขอบเขต Γ

$\int_{\Omega_0} dS_q$ เป็นอินทิกรัลเชิงผิวเทียบกับ $\vec{q}$ บนบริเวณ Ω_o

$\vec{p}$ และ $\vec{q}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดสังเกตและจุดแหล่งกำเนิด ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.18) แล้วพบว่า สนามที่จุดใดๆใน Ω_o สามารถหาได้จาก f และ $\frac{\partial f}{\partial n_q}$ ที่ขอบเขต Γ ของตัวกระเจิงคลื่น ดังนั้นจะต้องหา f และ $\frac{\partial f}{\partial n_q}$ ที่ขอบเขต Γ ให้ได้ก่อนจึงจะสามารถหาสนามใน Ω_o ได้ เราสามารถหา f และ $\frac{\partial f}{\partial n_q}$ ที่ขอบเขต Γ ของตัวกระเจิงคลื่นได้จากสมการที่ (2.19) และเมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (2.16) หรือ (2.17) ร่วมด้วยจะทำให้ได้สมการอินทิกรัลเป็นดังนี้

ในกรณีของ TM_z

เมื่อ $\vec{p} \in \Omega_i$:

$$\oint_{\Gamma}\left\{G(\vec{p},\vec{q})\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q}\right\}dl_q = f^{inc}(\vec{p}) \tag{2.22}$$

ในกรณีของ TE_z

เมื่อ $\vec{p} \in \Omega_i$:

$$-\oint_{\Gamma}\left\{\frac{\partial G(\vec{p},\vec{q})}{\partial n_q}f(\vec{q})\right\}dl_q = f^{inc}(\vec{p}) \tag{2.23}$$

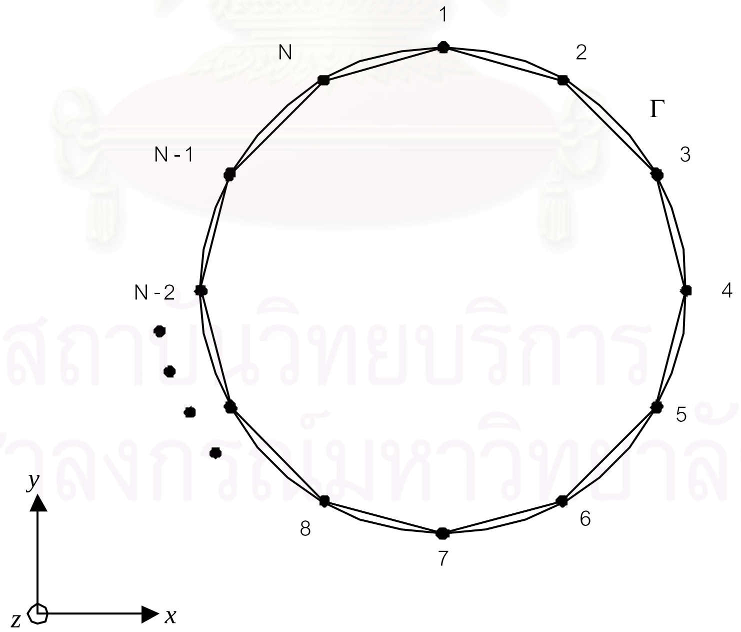
การแก้สมการอินทิกรัลดังในสมการที่ (2.22) และ (2.23) นี้จะใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ โดยจะพิจารณากรณีของคลื่นที่ตกกระทบบนตัวกระเจิงคลื่นเป็น TM_z เป็นกรณีตัวอย่างในการแก้สมการอินทิกรัลโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ซึ่งมีฟังก์ชัน $\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q}$ เป็นฟังก์ชันที่เราต้องการหาคำตอบ วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เป็นการรวมเทคนิคของวิธีสมการอินทิกรัลตามขอบและเทคนิคการแบ่งส่วนย่อยมาใช้ในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาโดยวิธีนี้นั้นเริ่มโดยการแบ่งบริเวณตามแนวขอบเขตของปัญหาหรือผิวของตัวกระเจิงคลื่นออกเป็นส่วนย่อยให้มีจำนวนเท่ากับ

N ส่วน ซึ่งในปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติ บริเวณตามแนวขอบของปัญหาจะเป็นเส้นรอบรูปของภาคตัดขวางของตัวกระเจิงคลื่น แล้วจึงกำหนดหมายเลขให้กับอีลีเมนต์โดยเริ่มจาก 1 จนถึง N และกำหนดหมายเลขให้กับจุดหัวและจุดท้ายของอีลีเมนต์ที่เรียกว่า โนด (node) โดยเริ่มตั้งแต่ 1 จนถึง N $(q_n\,; n=1,2,3,...,N)$ ดังรูปที่ 2.2 และสร้างคำตอบทดสอบโดยกำหนดให้ฟังก์ชันที่ต้องการหา $\dfrac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q}$ ที่ขอบเขตของปัญหาเป็นผลรวมของฟังก์ชันที่ต้องการหาในแต่ละช่วงอีลีเมนต์ และในการประมาณฟังก์ชันในแต่ละช่วงอีลีเมนต์จะประมาณด้วยฟังก์ชันฐานแบบ 1 มิติ ดังรูปที่ 2.3 คูณกับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ซึ่งแสดงในรูปผลคูณเมตริกซ์ได้ดังนี้

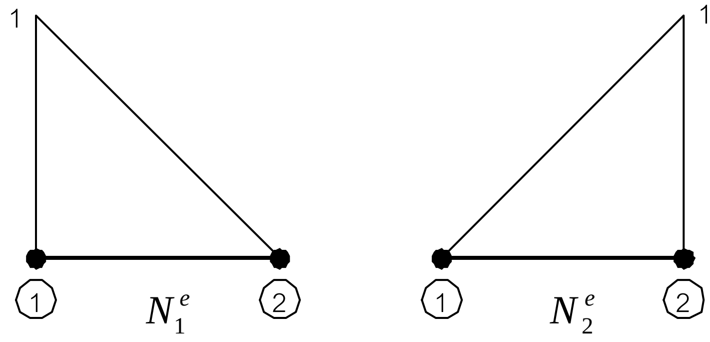
$$\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q} = \sum_{e=1}^{N}\left(\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q}\right)^e = \sum_{e=1}^{N}\{N^e\}^T\{\phi^e\} \tag{2.24}$$

โดยที่ $\{N^e\}=\begin{bmatrix} N_1^e(\vec{q}) \\ N_2^e(\vec{q}) \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×1 เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบ 1 มิติ

$\{\phi^e\}=\begin{bmatrix} \phi_1^e \\ \phi_2^e \end{bmatrix}$ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ซึ่งในที่นี้ ϕ_1^e และ ϕ_2^e คือ $\dfrac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q}$ ที่โนดที่ 1 และโนดที่ 2 ของอีลีเมนต์ที่ e ตามลำดับ



รูปที่ 2.2 การแบ่งขอบเขต Γ ของตัวกระเจิงคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์ย่อย



(ก) (ข)

รูปที่ 2.3 ฟังก์ชันฐานแบบ 1 มิติ (ก) N_1^e (ข) N_2^e

เมื่อแทนฟังก์ชัน $\dfrac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q}$ ตามสมการที่ (2.24) ลงในสมการที่ (2.22) จะได้ว่า

$$\sum_{e=1}^{N} \oint_{\Gamma} \left[G(p,q) \{N^e\}^T \{\phi^e\} \right] dl_q = f^{inc}(\vec{p}) \tag{2.25}$$

การหาผลเฉลยของสมการที่ (2.25) จะทำโดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) ตามวิธีพอยน์ทแมชชิง (point matching method) กล่าวคือจะหาผลคูณภายใน (inner product) ของสมการที่ (2.25) กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก และเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเป็นฟังก์ชันเดลต้า (delta function) โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักจำนวน N ตัว ซึ่งผลที่ได้คือชุดสมการพีชคณิตเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า แสดงได้ดังนี้

$$\sum_{e=1}^{N} \oint_{\Gamma} \left[G(\vec{p}_j, \vec{q}) \{N^e\}^T \{\phi^e\} \right] dl_q = f^{inc}(\vec{p}_j) \tag{2.26}$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, N$$

เมื่อจัดรูปสมการที่ (2.26) ให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ แสดงได้ดังนี้

$$[A][\Phi] = [B] \tag{2.27}$$

โดยที่

$[A]$ เป็นเมตริกซ์มิติ $N \times N$

และ $\left[A\right]=\sum_{e=1}^{N}\oint_{\Gamma}\left[G\left(\vec{p}_{j},\vec{q}\right)\left\{N^{e}\right\}^{T}\right]dl_{q}$ (2.28)

$\left[B\right]$ เป็นเมตริกซ์มิติ $N\times 1$

และ $\left[B\right]=f^{inc}\left(\vec{p}_{j}\right)$ (2.29)

$\left[\Phi\right]$ เป็นเมตริกซ์มิติ $N\times 1$

การวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์นั้นมักจะมีปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเกิดขึ้นซึ่งทำให้คำตอบที่ได้มีความผิดพลาดจากคำตอบที่แท้จริงมาก ณ ความถี่บางค่า หรือ มีความถี่เอกฐานเกิดขึ้นนั่นเอง ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในนี้เกิดขึ้นเมื่อใช้วิธีสมการอินทิกรัลตามขอบกับตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นผิวปิด ซึ่งพบว่า ความถี่เอกฐานที่เกิดขึ้นนี้สอดคล้องกับความถี่เรโซแนนซ์ของโพรงที่มีรูปร่างเช่นเดียวกับตัวกระเจิงคลื่นและตัวกลางภายในโพรงมีสมบัติเช่นเดียวกับบริเวณภายนอกตัวกระเจิง

จากการศึกษาพบว่า แนวทางหนึ่งในการแก้ไขปัญหาเรโซแนนซ์ภายในคือการปรับเลื่อนผิวของจุดสังเกตจากตำแหน่งเดิมที่อยู่บนผิวของตัวกระเจิงคลื่นให้อยู่ที่ผิวสมมติซึ่งผิวนี้จะอยู่ใกล้กับผิวของตัวกระเจิงคลื่นมากโดย Toyoda et al. (1988) ได้เสนอวิธีที่ใช้ผิวสมมติผิวเดียว ซึ่งสามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้โดยอาศัยการปรับเลื่อนผิวสมมติ เมื่อเกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่ความถี่ที่ต้องการ ผลจากการแก้ปัญหาตามวิธีนี้จะทำให้ความถี่ที่เกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเลื่อนไปจากความถี่เดิมที่เคยเกิดปัญหา จึงทำให้สามารถหาคำตอบ ณ ความถี่ที่ต้องการได้ แต่ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในก็ยังไม่ได้ถูกกำจัดไป กล่าวคือปัญหาเรโซแนนซ์ภายในก็ยังเกิดขึ้น ณ ความถี่อื่น ต่อมา Yoshii (1999) ได้เสนอวิธีแก้ไขปัญหาเรโซแนนซ์ภายในโดยใช้ผิวสมมติเพิ่มขึ้นอีกผิวหนึ่งจากเดิมที่เคยใช้ผิวเดียว พบว่า สามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้และไม่เกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่ความถี่ใดเลย

2.2.1 การเลือกผิวของจุดสังเกต

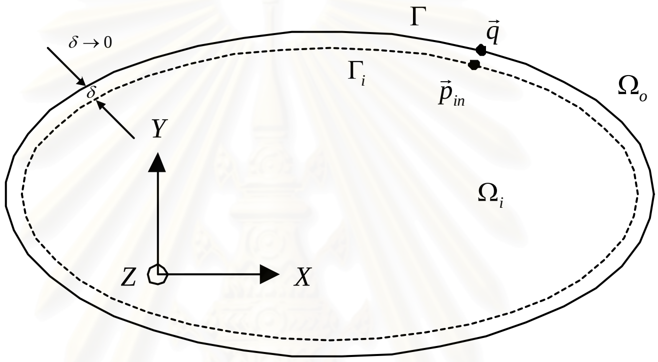
ในงานวิทยานิพนธ์นี้จะใช้การเลือกผิวของจุดสังเกตในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ซึ่งประกอบด้วย การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวและการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว

2.2.1.1 การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว

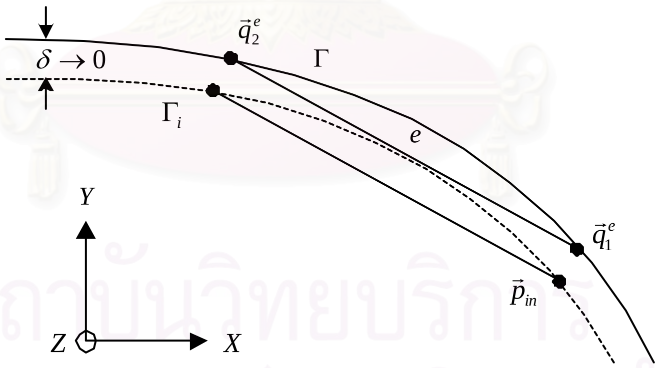
การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวนี้จะกำหนดจุดสังเกต $\vec{p}=\vec{p}_{in}$ ให้อยู่บนเส้นวงปิด Γ_i ที่เป็นผิวสมมติซึ่งอยู่ใกล้กับขอบเขต Γ มาก ดังรูปที่ 2.4 และกำหนดให้ระยะห่างระหว่างผิว Γ และ Γ_i เป็น δ และกำหนดให้อัตราส่วนระหว่าง Γ_i ต่อ Γ เป็น α_i ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ทั้งสองคือ $\alpha_i = 1-\delta$ ทำให้ได้จุดสังเกตบนผิวสมมติเป็นดังนี้

$$\vec{p}_{in} = \alpha_i \, \vec{q}_n \qquad , n = 1, 2, 3, ..., N \tag{2.30}$$

โดยที่ $0 < \alpha_i < 1$ และ α_i ควรมีค่าเข้าใกล้ 1



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.4 การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวในปัญหา 2 มิติ
(ก) ผิวของจุดสังเกตที่เป็นผิวสมมติผิวเดียว (ข) จุดสังเกตบนผิวสมมติ Γ_i

เมื่อแทนสมการที่ (2.30) ลงในสมการที่ (2.26) จะได้ว่า

$$\sum_{e=1}^{N} \oint_{\Gamma} \left[G(\vec{p}_{in}, \vec{q}) \{N^e\}^T \{\phi^e\} \right] dl_q = f^{inc}(\vec{p}_{in}) \tag{2.31}$$

$$in = 1, 2, 3, ..., N$$

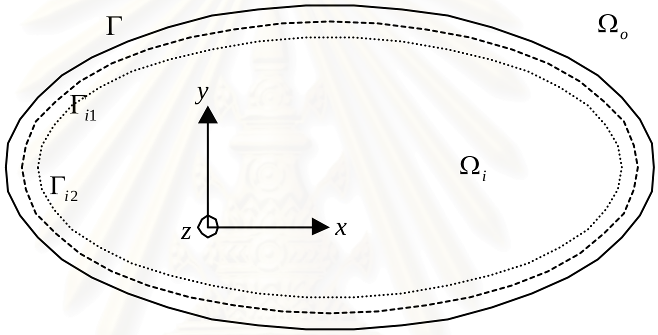
เมื่อจัดรูปให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ $[A][\Phi]=[B]$ โดยมี

$$[A]=\sum_{e=1}^{N}\oint_{\Gamma}\left[G(\vec{p}_{in},\vec{q})\{N^{e}\}^{T}\right]dl_{q} \tag{2.32}$$

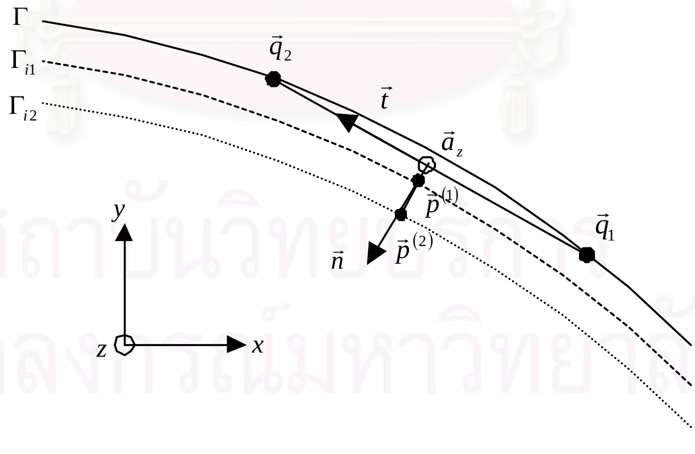
$$[B]=f^{inc}(\vec{p}_{in}) \tag{2.33}$$

2.2.1.2 การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว

การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวนี้จะกำหนดจุดสังเกต 2 จุด ให้อยู่บนเส้นวงปิด Γ_{i1} และ Γ_{i2} โดยที่ผิวสมมติทั้งสองนี้อยู่ใกล้กันมากและผิวสมมติทั้งสองยังอยู่ใกล้กับขอบเขต Γ มากด้วย ดังรูปที่ 2.5



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.5 การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวในปัญหา 2 มิติ

(ก) ผิวของจุดสังเกตที่เป็นผิวสมมติสองผิว (ข) จุดสังเกตบนผิวสมมติ Γ_{i1} และ Γ_{i2}

กำหนดให้จุดสังเกตบนผิวสมมติทั้งสองเป็นดังนี้

$$\vec{p}^{(1)} = \left(\frac{\vec{q}_1 + \vec{q}_2}{2}\right) + \beta^{(1)} d\,\vec{n} \tag{2.34}$$

$$\vec{p}^{(2)} = \left(\frac{\vec{q}_1 + \vec{q}_2}{2}\right) + \beta^{(2)} d\,\vec{n} \tag{2.35}$$

โดยที่

$d = |\,\vec{q}_2 - \vec{q}_1\,|$ เป็นระยะระหว่างโนด

$\vec{t} = \dfrac{(\vec{q}_2 - \vec{q}_1)}{d}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่อยู่ในแนวสัมผัสกับผิวของตัวกระเจิงคลื่น

$\vec{n} = \vec{a}_z \times \vec{t}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่อยู่ในแนวตั้งฉากกับผิวของตัวกระเจิงคลื่นและมีทิศพุ่งเข้าไปภายในตัวกระเจิงคลื่น

$\beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่าน้อยๆ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้ $\beta^{(2)} > \beta^{(1)}$

เมื่อแทนจุดสังเกตทั้งสองจากสมการที่ (2.34) และ(2.35) ในแต่ละอีลีเมนต์ลงในสมการที่ (2.26) ตามลำดับ ให้จุดสังเกตทั้งสองในอีลีเมนต์ที่ m เป็น $\vec{p}_m^{(1)}$ และ $\vec{p}_m^{(2)}$ โดยที่ $m = 1, 2, 3, \ldots, N$ จะได้ว่า

$$\sum_{e=1}^{N} \oint_{\Gamma} \left[G\left(\vec{p}_m^{(1)}, \vec{q}\right) \{N^e\}^T \{\phi^e\} \right] dl_q = f^{inc}\left(\vec{p}_m^{(1)}\right) \tag{2.36}$$

$$\sum_{e=1}^{N} \oint_{\Gamma} \left[G\left(\vec{p}_m^{(2)}, \vec{q}\right) \{N^e\}^T \{\phi^e\} \right] dl_q = f^{inc}\left(\vec{p}_m^{(2)}\right) \tag{2.37}$$

และใช้ค่าสเกลาร์ $\alpha_m^{(1)}$ และ $\alpha_m^{(2)}$ ซึ่งเป็นคอนจูเกตเชิงซ้อน คูณสมการที่ (2.36) และ (2.37) ตามลำดับ แล้วจึงนำสมการทั้งสองมารวมกัน เป็นดังนี้

$$\sum_{e=1}^{N} \oint_{\Gamma} \left[\left(\alpha_m^{(1)} G\left(\vec{p}_m^{(1)}, \vec{q}\right) + \alpha_m^{(2)} G\left(\vec{p}_m^{(2)}, \vec{q}\right) \right) \{N^e\}^T \{\phi^e\} \right] dl_q = \alpha_m^{(1)} f^{inc}\left(\vec{p}_m^{(1)}\right) + \alpha_m^{(2)} f^{inc}\left(\vec{p}_m^{(2)}\right) \tag{2.38}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots, N$$

โดยที่ $$\alpha_m^{(1)} = 1 - \frac{j}{\left|\vec{p}_m^{(2)} - \vec{p}_m^{(1)}\right|} \tag{2.39}$$

$$\alpha_m^{(2)} = 1 + \frac{j}{\left|\vec{p}_m^{(2)} - \vec{p}_m^{(1)}\right|} \tag{2.40}$$

เมื่อจัดรูปให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ $[A][\Phi] = [B]$ โดยมี

$$[A] = \sum_{e=1}^{N} \oint_{\Gamma} \left[\left(\alpha_m^{(1)} G\left(\vec{p}_m^{(1)}, \vec{q}\right) + \alpha_m^{(2)} G\left(\vec{p}_m^{(2)}, \vec{q}\right) \right) \left\{N^e\right\}^T \right] dl_q \tag{2.41}$$

$$[B] = \alpha_m^{(1)} f^{inc}\left(\vec{p}_m^{(1)}\right) + \alpha_m^{(2)} f^{inc}\left(\vec{p}_m^{2}\right) \tag{2.42}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots, N$$

และเมื่อทราบค่าของ $\frac{\partial f}{\partial n_q}$ ที่ผิวของตัวกระเจิงคลื่นแล้วจะสามารถหาสนามที่ตำแหน่งใดๆ ในบริเวณ Ω_o ได้จากสมการที่ (2.18) และใช้เงื่อนไขขอบเขตร่วมด้วย และเช่นเดียวกันจากสมการที่ (2.18) สนามของคลื่นกระเจิงในบริเวณ Ω_o แสดงได้เป็นดังนี้

$$f^{sca}(\vec{p}) = -\oint_{\Gamma} \left\{ G(\vec{p}, \vec{q}) \frac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q} \right\} dl_q \tag{2.43}$$

การหาค่าของอินทิกรัลในที่นี้ใช้การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ (Gauss's quadrature) (รายละเอียดดังในภาคผนวก ก) และใช้การปรับเปลี่ยนรูปของอีลีเมนต์เชิงเส้นในปริภูมิ 2 มิติ (รายละเอียดดังในภาคผนวก ข) ร่วมด้วย

2.2.2 การพิจารณาเสถียรภาพของการคำนวณ

การพิจารณาเสถียรภาพของการคำนวณในที่นี้จะใช้เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (Mittra, 1975) เป็นค่าดัชนีที่บอกถึงสภาวะเลวของเมตริกซ์ ซึ่งเมื่อเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์เอกฐานหรือใกล้จะเป็นเมตริกซ์เอกฐานและไม่มีคำตอบเฉพาะตัว เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะมีค่าสูงมากและเข้าใกล้อนันต์ และเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (condition number) แสดงได้ดังนี้

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \tag{2.44}$$

ซึ่งในที่นี้จะใช้นอร์มเป็นแบบยูคลิเดียน (euclidean norm)

ดังนั้นเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเป็น

$$cond(A)=\sqrt{\left|\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}\right|} \tag{2.45}$$

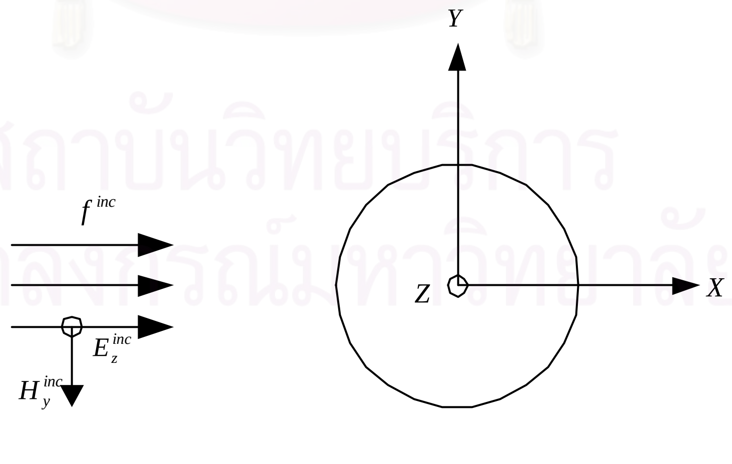
โดยที่ $\lambda_{\max}$ และ $\lambda_{\min}$ เป็นค่าเจาะจง (eigenvalue) ที่มากที่สุดและน้อยที่สุดของเมตริกซ์ $\left[A^T\right]\left[A\right]$

2.3 ผลการคำนวณในกรณีตัวอย่าง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคำนวณในกรณีตัวอย่างของการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกและมีหน้าตัดเป็นรูปวงกลม เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการ และผลของการเลือกใช้ผิวของจุดสังเกตทั้งสองแบบ

2.3.1 ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกหน้าตัดเป็นรูปวงกลมและมีความยาวเป็นอนันต์

พิจารณาปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในกรณีคลื่นตกกระทบ TM_z เป็นคลื่นระนาบ $E_z^{inc}=\exp(-jkx)$ มีการแพร่กระจายในทิศทาง $+x$ ตกกระทบบนตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกและมีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมและมีรัศมีของทรงกระบอกเท่ากับ 1 เมตรและมีความยาวเป็นอนันต์ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในกรณีคลื่นตกกระทบ TM_z ตกกระทบบนตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกและมีหน้าตัดเป็นรูปวงกลม

จะพิจารณาเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นค่าดัชนีบอกสภาวะเลว (ill-condition) ของเมตริกซ์ และพิจารณาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เอกสถิต (monostatic radar cross section) ซึ่งเป็นภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เมื่อกำหนดให้ภาครับ (receiver) อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับภาคส่ง (transmitter) ซึ่งจากสมการที่ (2.34) เมื่อให้ $\vec{p}=-r\,\vec{a}_x\,;r\rightarrow\infty$ จะได้ว่า

$$\sigma=2\pi r\left|\,f^{sca}\right|^2=\frac{1}{4k}\left|\oint_{\Gamma}\left\{\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial n_q}\right\}\cdot\exp\left(-\,jk\left(\vec{a}_x\cdot\vec{q}\right)\right)dl_q\right|^2 \tag{2.46}$$

เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว โดยกำหนดให้ $\alpha_i=0.99$ และ $\alpha_i=0.95$ พิจารณาในช่วง $ka=0$ ถึง $ka=5$ ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ โดยใช้จำนวนอีลีเมนต์ N เท่ากับ 100 อีลีเมนต์ และมีจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเท่ากับ 100 ตัว และใช้ค่าความถี่จำนวน 5000 จุด โดยแบ่งระยะห่างของความถี่อย่างสม่ำเสมอเป็น 0.001 ในช่วงของโดเมนความถี่จาก $ka=0$ ถึง $ka=5$

ในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i=0.99$ นั้น ได้ผลดังรูปที่ 2.7 ซึ่งพบว่า เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าสูงมากและมีจุดเอกฐานเกิดขึ้น 2 จุดในช่วง $ka=0$ ถึง $ka=5$ คือที่ $ka=2.435$ และ $ka=3.881$ ดังในตารางที่ 2.1 และ 2.2 ตามลำดับ ซึ่งเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วและมีค่าสูงมากเข้าใกล้อนันต์แสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่มีเสถียรภาพและเป็นเมตริกซ์เอกฐาน ณ ตำแหน่ง $ka=2.435$ และ $ka=3.881$ เมื่อพิจารณาค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในรูปที่ 2.8 พบว่าที่จุดเอกฐานทั้งสองมีความผิดพลาดสูงมากเกิดขึ้นที่บริเวณรอบๆ ใกล้กับจุดเอกฐานทั้งสองและภาคตัดขวางเป้าเรดาร์มีการเปลี่ยนแปลงค่าเกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว

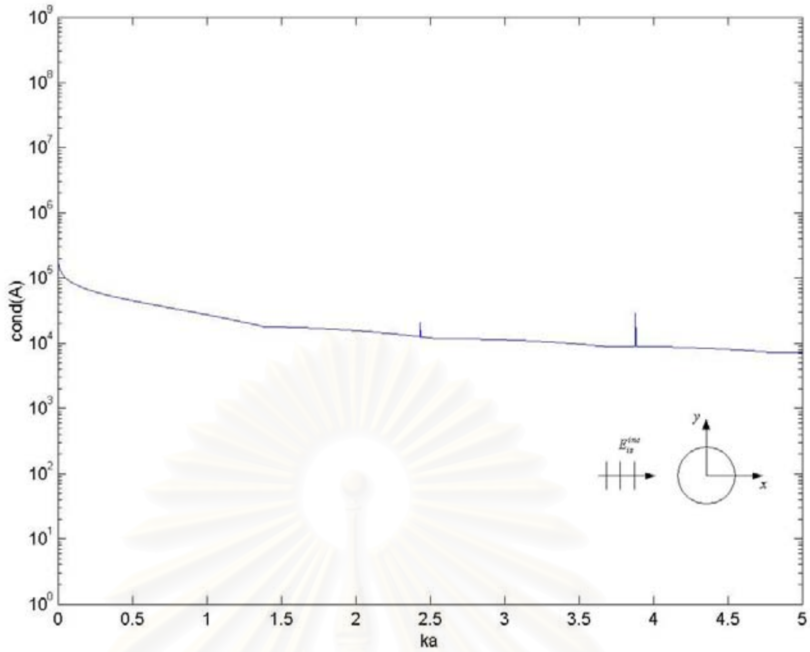
เช่นเดียวกันเมื่อพิจาณากรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i=0.95$ ได้ผลดังรูปที่ 2.9 ซึ่งพบว่า เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าสูงมากและสูงกว่าเมื่อใช้ $\alpha_i=0.99$ มากและมีจุดเอกฐานเกิดขึ้น 2 จุดในช่วงของ $ka=0$ ถึง $ka=5$ คือที่ $ka=2.532$ และ $ka=4.033$ ดังในตารางที่ 2.3 และ 2.4 ตามลำดับ เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วและมีค่าสูงมากเข้าใกล้อนันต์ เมื่อพิจารณาค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในรูปที่ 2.10 พบว่าที่จุดเอกฐานทั้งสองมีความผิดพลาดสูงมากเกิดขึ้นที่บริเวณรอบๆ ใกล้กับจุดเอกฐานทั้งสองและภาคตัดขวางเป้าเรดาร์มีการเปลี่ยนแปลงค่าเกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว

ตารางที่ 2.1 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ณ ความถี่เรโซแนนซ์ที่หนึ่งที่เกิดขึ้นในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i = 0.99$

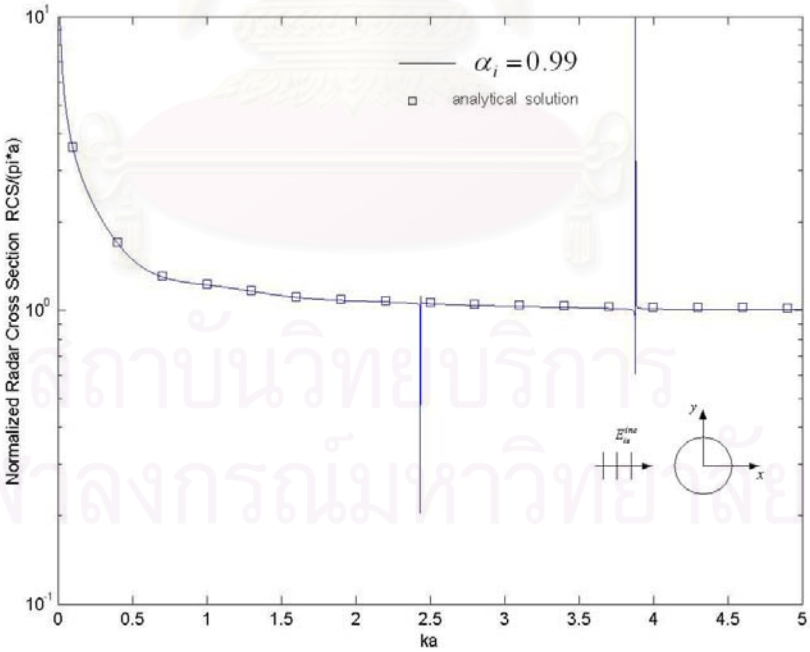
ka	$cond(A)$
2.432	12,620
2.433	12,612
2.434	12,604
2.435	20,714
2.436	12,588
2.437	12,580
2.438	12,572

ตารางที่ 2.2 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ณ ความถี่เรโซแนนซ์ที่สองที่เกิดขึ้นในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i = 0.99$

ka	$cond(A)$
3.878	9,241
3.879	9,604
3.880	11,542
3.881	29,247
3.882	11,219
3.883	9,547
3.884	9,215



รูปที่ 2.7 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ พิจารณาในช่วงของ $ka = 0$ ถึง $ka = 5$



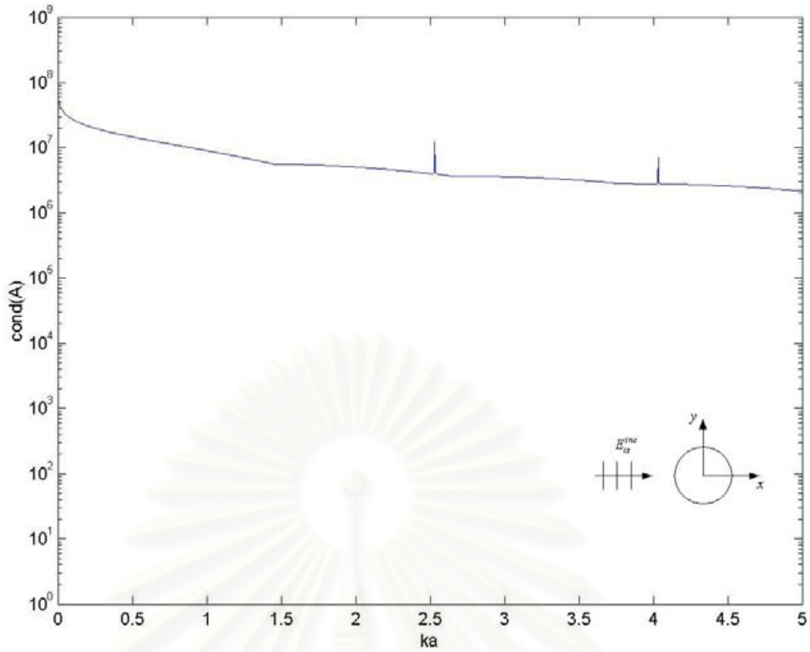
รูปที่ 2.8 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ พิจารณาในช่วงของ $ka = 0$ ถึง $ka = 5$

ตารางที่ 2.3 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ณ ความถี่เรโซแนนซ์ที่หนึ่งที่เกิดขึ้นในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i = 0.95$

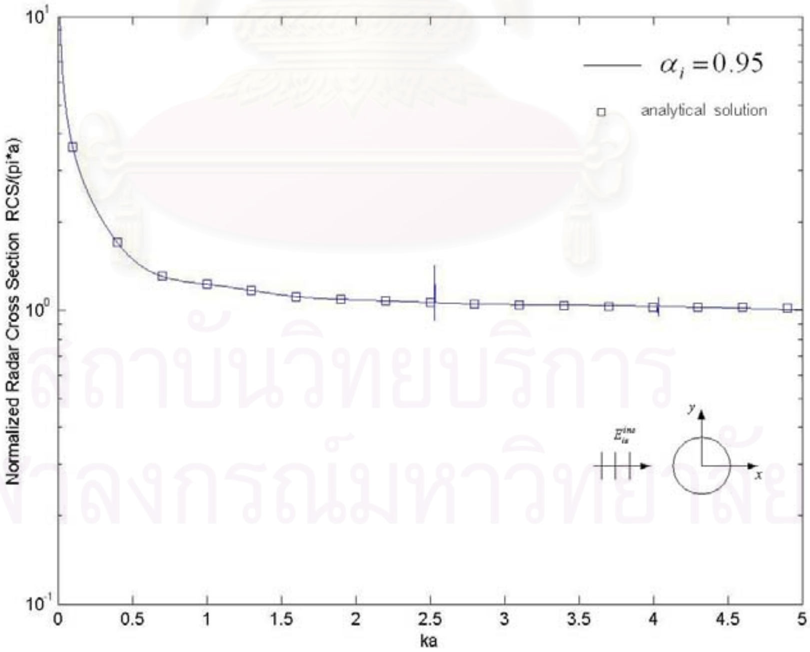
ka	$cond(A)$
2.529	4,249,536
2.530	4,429,717
2.531	4,746,541
2.532	12,393,016
2.533	4,783,755
2.534	4,396,793
2.535	4,247,429

ตารางที่ 2.4 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ณ ความถี่เรโซแนนซ์ที่สองที่เกิดขึ้นในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i = 0.95$

ka	$cond(A)$
4.030	2,968,304
4.031	3,104,706
4.032	3,224,432
4.033	6,968,859
4.034	3,283,244
4.035	3,170,804
4.036	3,024,504

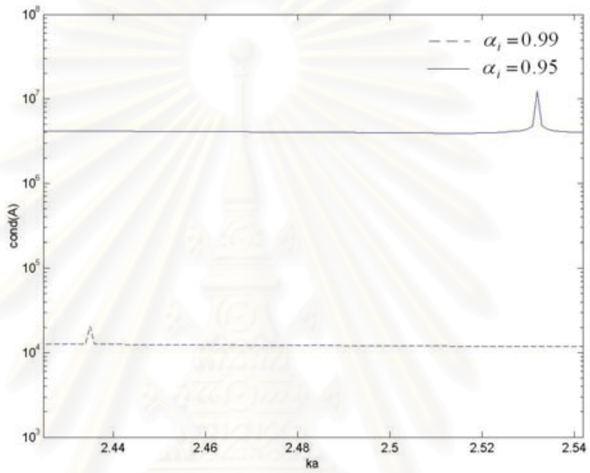


รูปที่ 2.9 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.95$ พิจารณาในช่วงของ $ka = 0$ ถึง $ka = 5$

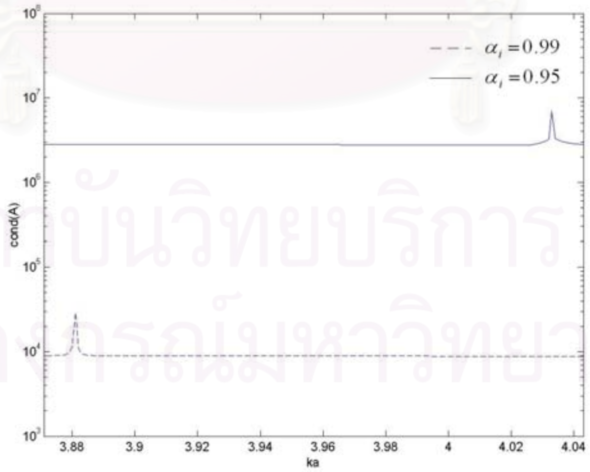


รูปที่ 2.10 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.95$ พิจารณาในช่วงของ $ka = 0$ ถึง $ka = 5$

จากผลของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว โดยกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ และ $\alpha_i = 0.95$ พบว่า เมื่อใช้ $\alpha_i = 0.99$ จะมีจุดเอกฐานที่หนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $ka = 2.435$ และจุดเอกฐานที่สองอยู่ที่ตำแหน่ง $ka = 3.881$ และเมื่อใช้ $\alpha_i = 0.95$ จะมีจุดเอกฐานที่หนึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง $ka = 2.532$ และจุดเอกฐานที่สองอยู่ที่ตำแหน่ง $ka = 4.033$ ดังรูปที่ 2.11 นั่นคือจุดเอกฐานที่เกิดขึ้นมีการปรับเลื่อนไปตามพารามิเตอร์ α_i ที่เลือกใช้ดังรูปที่ 2.11 และ ดังในตารางที่ 2.5 เป็นผลให้ตำแหน่งที่ค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์มีความผิดพลาดสูงมากนั้นเลื่อนตำแหน่งไปด้วย ดังรูปที่ 2.12



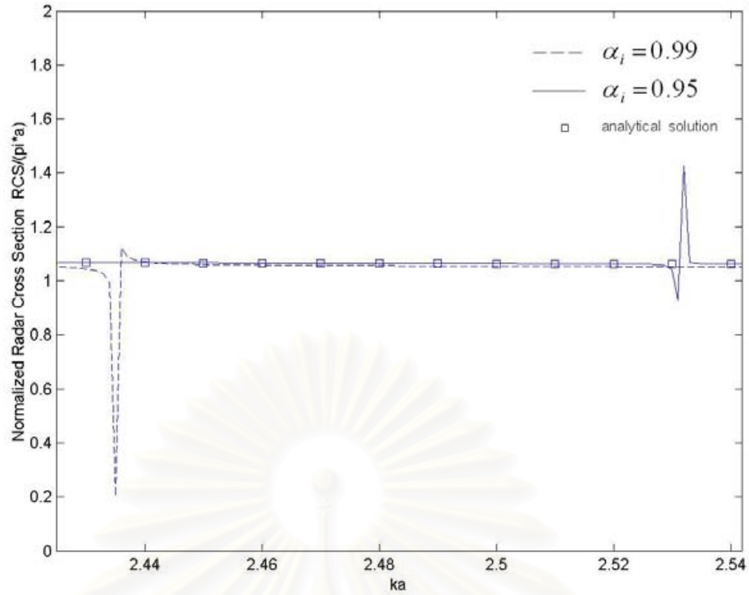
(ก)



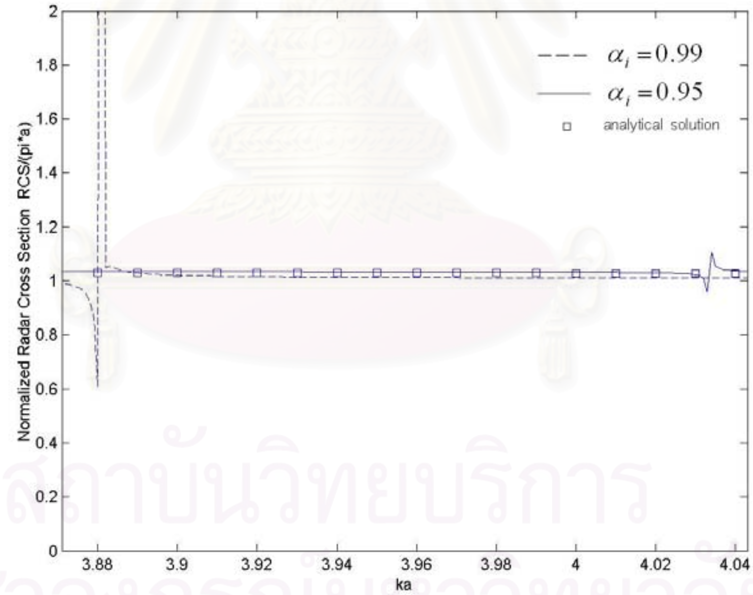
(ข)

รูปที่ 2.11 การเลื่อนของความถี่เรโซแนนซ์เมื่อเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ α_i

(ก) ความถี่เรโซแนนซ์ที่หนึ่ง (ข) ความถี่เรโซแนนซ์ที่สอง



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.12 การเลื่อนตำแหน่งที่ค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์มีความผิดพลาดเกิดขึ้นมาก
เมื่อเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ α_i
(ก) ความถี่เรโซแนนซ์ที่หนึ่ง (ข) ความถี่เรโซแนนซ์ที่สอง

ตารางที่ 2.5 การเลื่อนความถี่เรโซแนนซ์ที่หนึ่งเมื่อเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ α_i

α_i	ความถี่เรโซแนนซ์ (ka)
0.99	2.435 ($\approx$ 2.4048 / 0.99)
0.98	2.454 ($\approx$ 2.4048 / 0.98)
0.97	2.480 ($\approx$ 2.4048 / 0.97)
0.96	2.506 ($\approx$ 2.4048 / 0.96)
0.95	2.532 ($\approx$ 2.4048 / 0.95)

จะเห็นว่าการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในโดยใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว พบว่าสามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้โดยอาศัยการปรับเลื่อนผิวสมมติซึ่งก็คือการปรับเปลี่ยนค่า α_i ของผิวสมมติ เมื่อเกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่ความถี่ที่ต้องการ ซึ่งทำให้ความถี่ที่เกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเลื่อนไปจากความถี่เดิมที่เคยเกิดปัญหาขึ้น ทำให้สามารถหาผลเฉลย ณ ความถี่ที่ต้องการได้ แต่อย่างไรก็ตามปัญหาเรโซแนนซ์ภายในยังไม่ถูกกำจัดไป กล่าวคือปัญหาเรโซแนนซ์ภายในยังคงเกิดขึ้น ณ ความถี่อื่น

ตารางที่ 2.6 การเปรียบเทียบภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ $ka = 2$ ที่ได้จากวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์กรณีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ α_i

α_i	$RCS/(\pi a)$
0.99	1.0873
0.98	1.0872
0.97	1.0874
0.96	1.0875
0.95	1.0876
analytical solution	1.0873

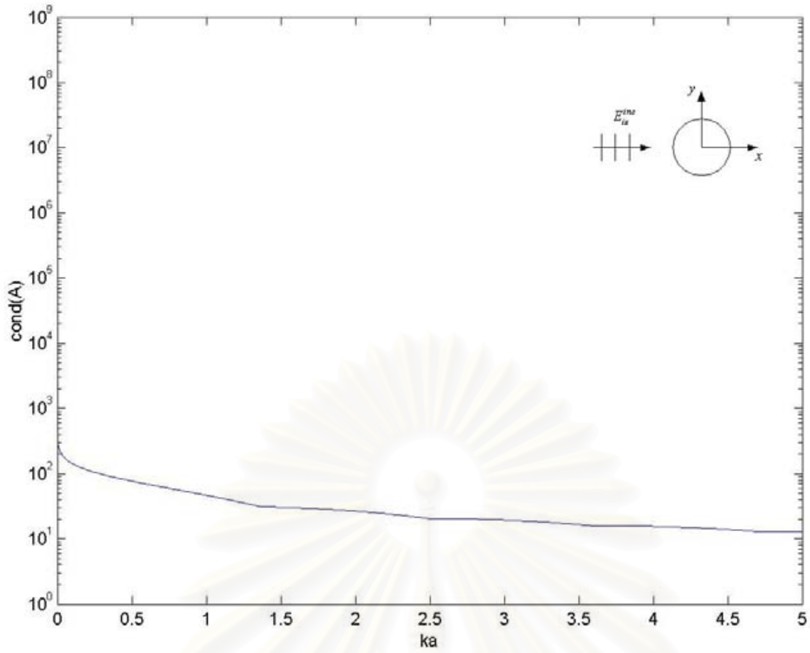
จะเห็นว่าเมื่อเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ α_i ที่ใช้ในการกำหนดผิวของจุดสังเกตที่เป็นผิวสมมติผิวเดียว ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวจะเข้าใกล้ผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ เมื่อกำหนด α_i เข้าใกล้ 1 แต่เมื่อ α_i มีค่าลดลง ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี

เบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะมีค่าลดลงแล้วจึงเพิ่มขึ้น ซึ่งแสดงว่าผลการคำนวณดังกล่าวนี้มีการแกว่งของคำตอบที่ได้รอบๆ ผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ดังในตารางที่ 2.6

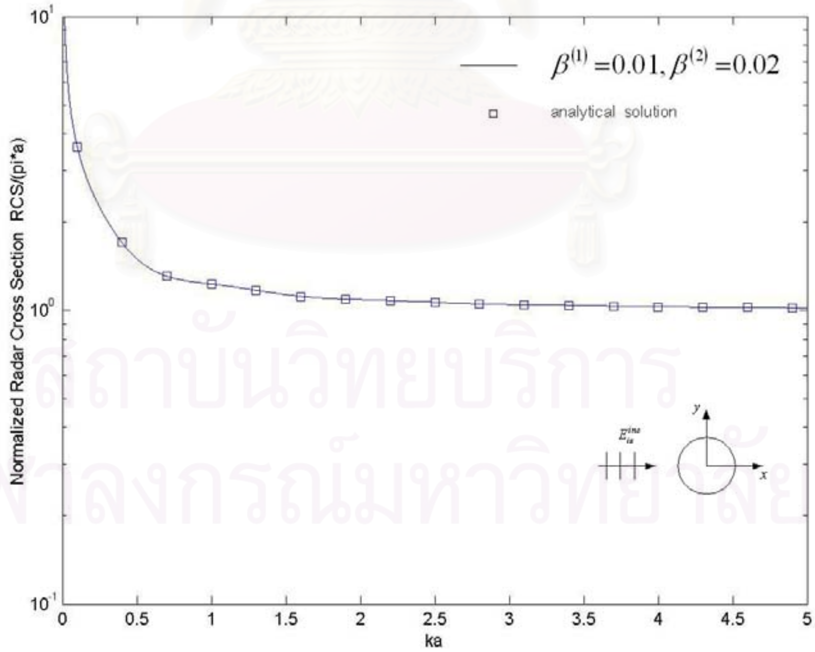
และเมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว โดยที่กำหนดให้ $\left(\beta^{(1)}=0.01, \beta^{(2)}=0.02\right), \left(\beta^{(1)}=0.001, \beta^{(2)}=0.002\right)$ และ $\left(\beta^{(1)}=0.0001, \beta^{(2)}=0.0002\right)$ และพิจารณาในช่วง $ka=0$ ถึง $ka=5$ ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ โดยใช้จำนวนอีลีเมนต์ N เท่ากับ 100 อีลีเมนต์และมีจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเท่ากับ 100 ตัว และใช้ค่าความถี่จำนวน 5000 จุด โดยแบ่งระยะห่างของความถี่อย่างสม่ำเสมอเป็น 0.001 ในช่วงของโดเมนความถี่จาก $ka=0$ ถึง $ka=5$

ในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวโดยที่ $\beta^{(1)}=0.01$, $\beta^{(2)}=0.02$ นั้นได้ผลดังรูปที่ 2.13 ซึ่งพบว่าเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำและไม่มีตำแหน่งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วหรือไม่มีจุดเอกฐานเกิดขึ้น ซึ่งแสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีเสถียรภาพ และเมื่อพิจารณาค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์นั้นจากรูปที่ 2.14 พบว่าไม่มีตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วเกิดขึ้นที่บริเวณใดเลย

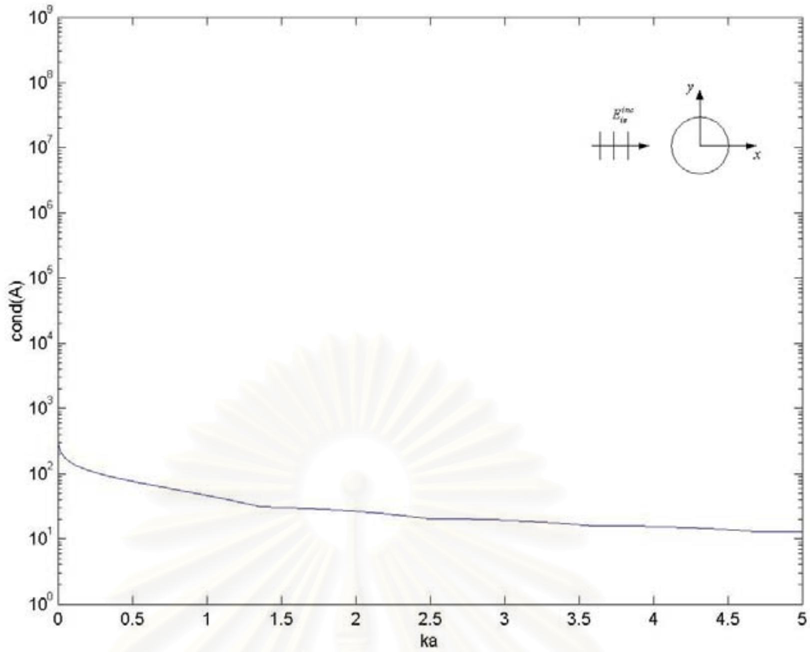
เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวโดยที่ $\beta^{(1)}=0.001$, $\beta^{(2)}=0.002$ ได้ผลของเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ดังรูปที่ 2.15 และผลของภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ดังรูปที่ 2.16 และเมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ ได้ผลของเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ดังรูปที่ 2.17 และผลของภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ดังรูปที่ 2.18 จากทั้งสองกรณีนี้พบว่าเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำและไม่มีตำแหน่งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วหรือไม่มีจุดเอกฐานเกิดขึ้นเช่นกัน เมื่อพิจารณาค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ พบว่า ไม่มีตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วเกิดขึ้นที่บริเวณใดเลย และเมื่อเปรียบเทียบภาคตัดขวาเป้าเรดาร์ที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวในทั้ง 3 กรณีกับผลของภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์จะเห็นว่า ผลที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันมากและมีแนวโน้มของค่าไปในทิศทางเดียวกัน



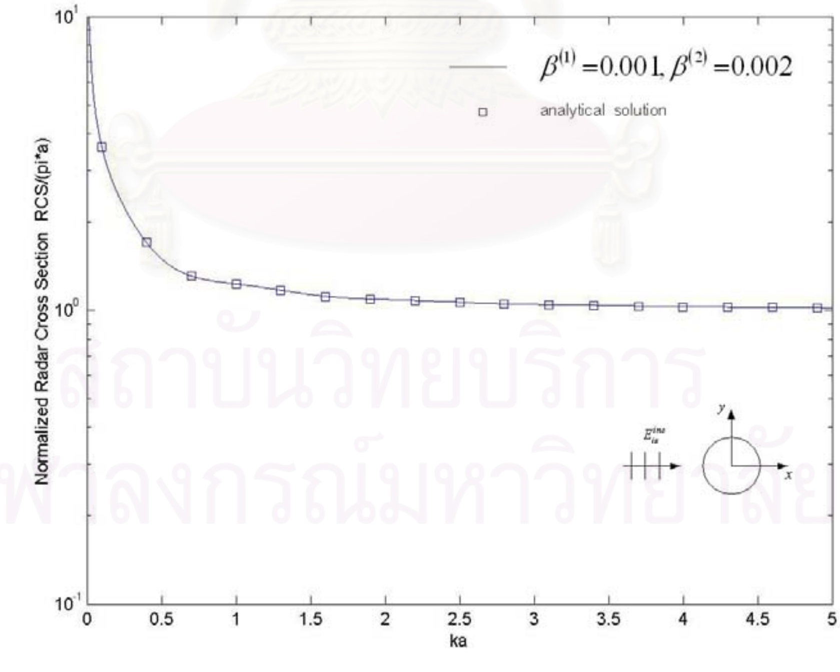
รูปที่ 2.13 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว เมื่อกำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.01$, $\beta^{(2)}=0.02$ พิจารณาในช่วงของ $ka=0$ ถึง $ka=5$



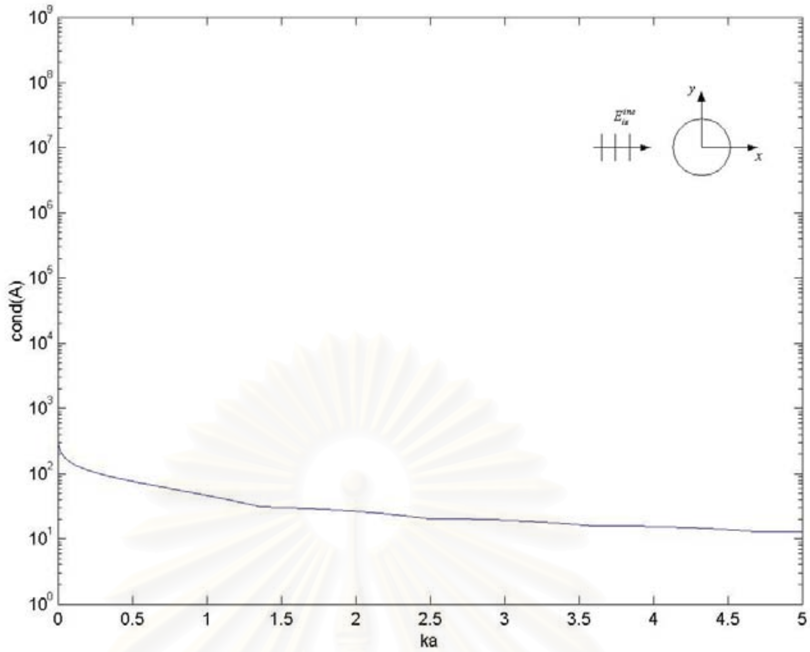
รูปที่ 2.14 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว เมื่อกำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.01$, $\beta^{(2)}=0.02$ พิจารณาในช่วงของ $ka=0$ ถึง $ka=5$



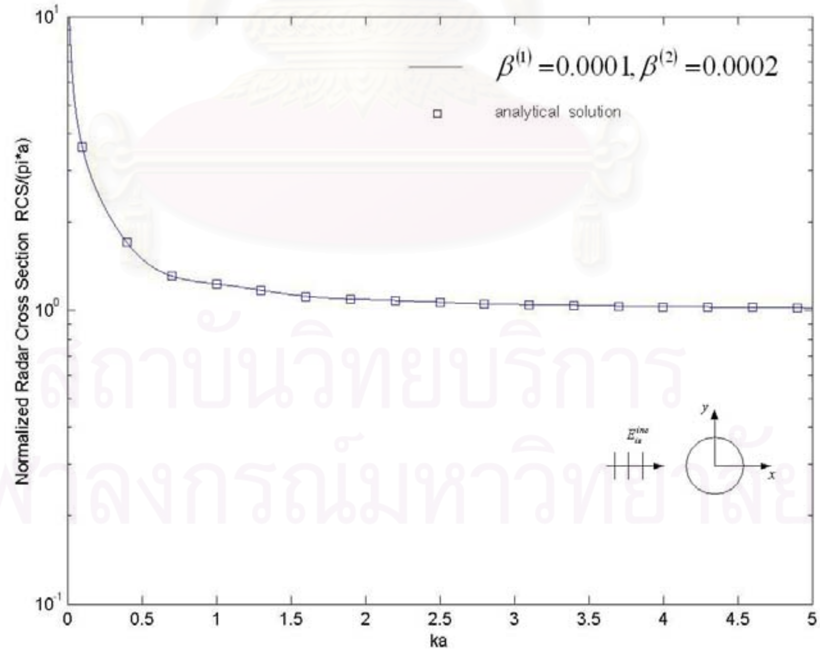
รูปที่ 2.15 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว
เมื่อกำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.001$, $\beta^{(2)}=0.002$ พิจารณาในช่วงของ $ka=0$ ถึง $ka=5$



รูปที่ 2.16 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว
เมื่อกำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.001$, $\beta^{(2)}=0.002$ พิจารณาในช่วงของ $ka=0$ ถึง $ka=5$

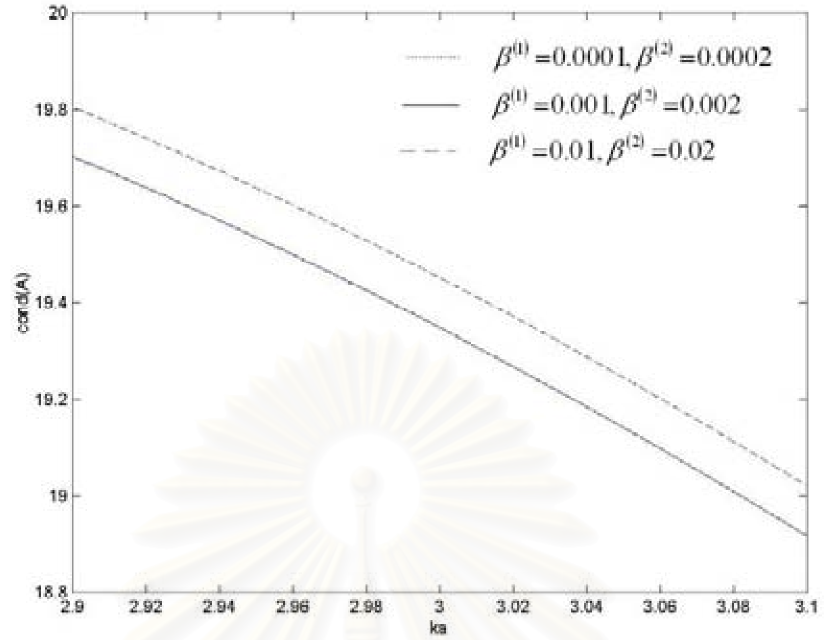


รูปที่ 2.17 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว
เมื่อกำหนดให้ $\beta^{(1)} = 0.0001$, $\beta^{(2)} = 0.0002$ พิจารณาในช่วงของ $ka = 0$ ถึง $ka = 5$

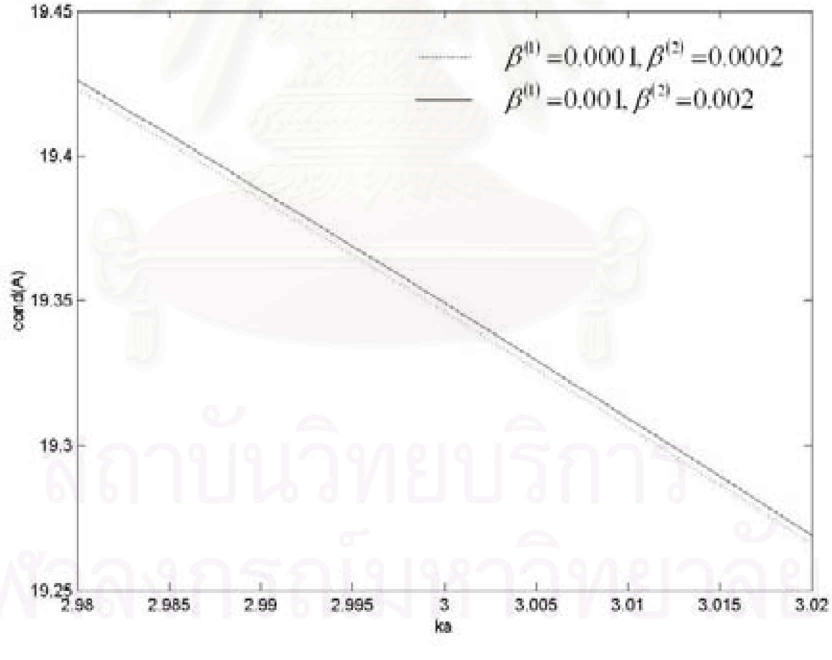


รูปที่ 2.18 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว
เมื่อกำหนดให้ $\beta^{(1)} = 0.0001$, $\beta^{(2)} = 0.0002$ พิจารณาในช่วงของ $ka = 0$ ถึง $ka = 5$

จากผลการคำนวณของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวโดยให้ $\left(\beta^{(1)}=0.01,\beta^{(2)}=0.02\right)$,$\left(\beta^{(1)}=0.001,\beta^{(2)}=0.002\right)$ และ $\left(\beta^{(1)}=0.0001,\beta^{(2)}=0.0002\right)$ พบว่า เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เมื่อเลือกใช้ $\beta^{(1)}=0.0001,\beta^{(2)}=0.0002$ มีค่าต่ำกว่าเมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.001,\beta^{(2)}=0.002$ และ $\beta^{(1)}=0.01,\beta^{(2)}=0.02$ และค่าเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เมื่อเลือกใช้ $\beta^{(1)}=0.001,\beta^{(2)}=0.002$ มีค่าต่ำกว่าเมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.01,\beta^{(2)}=0.02$ ดังรูปที่ 2.19 และจากรูปที่ 2.20 พบว่า ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.01,\beta^{(2)}=0.02$ ได้ผลที่ใกล้เคียงกับภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์มากกว่าเมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.001,\beta^{(2)}=0.002$ และ $\beta^{(1)}=0.0001,\beta^{(2)}=0.0002$ โดยที่เมื่อใช้จำนวนอีลีเมนต์เท่ากับ 100 อีลีเมนต์และมีจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเท่ากับ 100 ตัว ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.01,\beta^{(2)}=0.02$ จะมีความผิดพลาดจากผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ประมาณ $\frac{1.050-1.048}{1.048}\times 100=0.19\%$ และ ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.001,\beta^{(2)}=0.002$ และ $\beta^{(1)}=0.0001,\beta^{(2)}=0.0002$ จะมีความผิดพลาดจากผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ประมาณ $\frac{1.051-1.048}{1.048}\times 100=0.29\%$ ดังนั้นจะเห็นว่า ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.001,\beta^{(2)}=0.002$ และ $\beta^{(1)}=0.0001,\beta^{(2)}=0.0002$ จะได้ผลที่ต่างจากเมื่อใช้ $\beta^{(1)}=0.01,\beta^{(2)}=0.02$ เพียงเล็กน้อยเท่านั้น

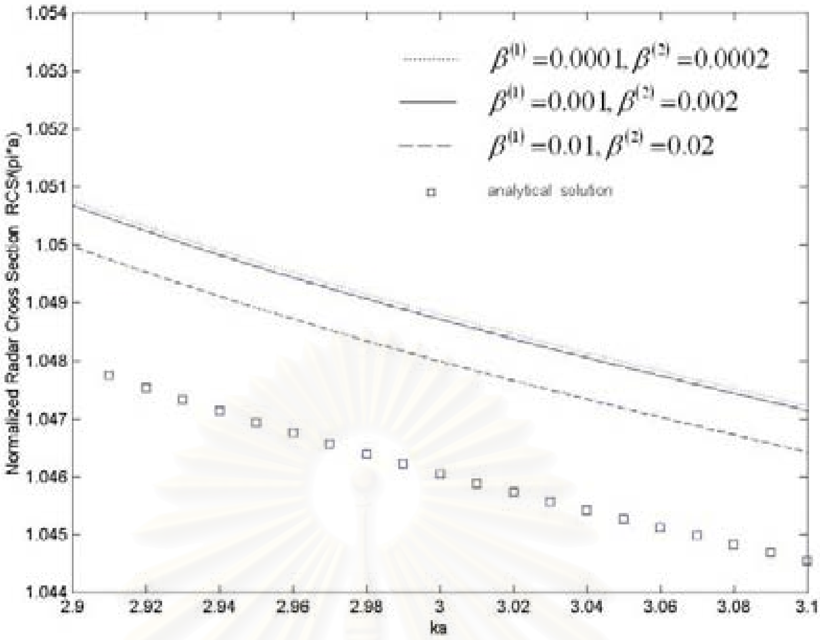


(ก)



(ข)

รูปที่ 2.19 การเปรียบเทียบเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว เมื่อกำหนดให้ 1) $\beta^{(1)}=0.01$, $\beta^{(2)}=0.02$ 2) $\beta^{(1)}=0.001$, $\beta^{(2)}=0.002$ และ 3) $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ (ก) กรณีของ 1), 2) และ 3) (ข)-กรณีของ 2) และ 3)



รูปที่ 2.20 การเปรียบเทียบภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในกรณีของใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวเมื่อกำหนดให้ 1) $\beta^{(1)}=0.01$, $\beta^{(2)}=0.02$ 2) $\beta^{(1)}=0.001$, $\beta^{(2)}=0.002$ และ 3) $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$

จะเห็นว่าการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในโดยใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวนั้นสามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้โดยที่จะไม่มีปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเกิดขึ้นที่ความถี่ใดเลย และพบว่า เมื่อใช้ $\beta^{(1)}$ และ $\beta^{(2)}$ ที่มีค่าน้อยๆ และ $\beta^{(1)}$ และ $\beta^{(2)}$ มีค่าใกล้เคียงกันมากๆนั้นจะทำให้เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำลง ซึ่งแสดงว่าเมตริกซ์มีเสถียรภาพที่ดีขึ้น

2.4 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอวิธีวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการสเกลาร์และการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในโดยใช้วิธีการเลือกผิวของจุดสังเกตในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน และทดสอบการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในกรณีของตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกและมีหน้าตัดเป็นรูปวงกลม ในกรณีของการเลือกผิวของจุดสังเกตที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวนั้นสามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้โดยอาศัยการปรับเลื่อนผิวสมมติโดยการปรับเปลี่ยนค่า α_i ของผิวสมมติ เมื่อเกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่ความถี่ที่ต้องการซึ่งทำให้ความถี่ที่เกิดปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเลื่อนไปจากความถี่เดิมที่เคยเกิดปัญหาขึ้น

ทำให้สามารถหาผลเฉลย ณ ความถี่ที่ต้องการได้ แต่ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในยังคงเกิดขึ้น ณ ความถี่อื่น และในกรณีของการเลือกผิวของจุดสังเกตที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวนั้น สามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้โดยที่ไม่มีปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเกิดขึ้นที่ความถี่ใดเลย และเมื่อเลือกใช้พารามิเตอร์ $\beta^{(1)}$ และ $\beta^{(2)}$ ที่มีค่าน้อยๆ และ $\beta^{(1)}$ และ $\beta^{(2)}$ มีค่าใกล้เคียงกันมากๆนั้นจะได้เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำซึ่งแสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีเสถียรภาพในการคำนวณดีขึ้น

บทที่ 3

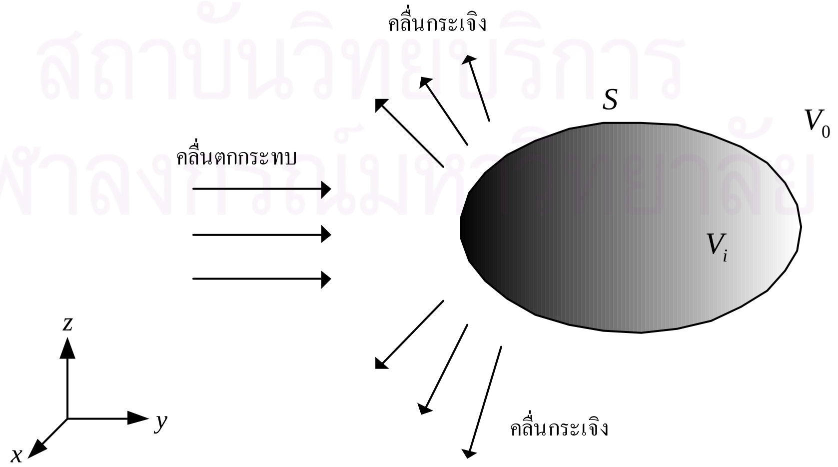
การวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ โดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์

3.1 ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ โดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ เนื้อหาในบทนี้ประกอบด้วย ในหัวข้อ 3.2 กล่าวถึงสมการพื้นฐานในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติที่จะใช้ในการคำนวณ โดยนำเสนอในรูปแบบของสมการเวกเตอร์ซึ่งจะใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหานี้ และกล่าวถึงการเลือกผิวของจุดสังเกตที่ใช้ในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน ในหัวข้อ 3.3 จะนำเสนอตัวอย่างการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในกรณีของตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมและรูปทรงกระบอกที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลม โดยใช้การเลือกผิวของจุดสังเกตในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในซึ่งจะพิจารณาในกรณีที่ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวและกรณีที่ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว

3.2 สมการพื้นฐานในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ

ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติในที่นี้เป็นปัญหาที่ตัวกระเจิงคลื่นมีรูปร่างไม่เจาะจง เมื่อพิจารณาปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากตัวกระเจิงคลื่นที่มีรูปร่างใดๆ ดังรูปที่ 3.1 โดยกำหนดให้ S เป็นผิวของตัวกระเจิงคลื่น V_0 เป็นบริเวณภายนอกของตัวกระเจิงคลื่น และ V_i เป็นบริเวณในตัวกระเจิงคลื่น



รูปที่ 3.1 ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติจากตัวกระเจิงคลื่นที่มีรูปร่างใดๆ

ในที่นี้จะพิจารณากรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เป็นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าฮาร์มอนิกเชิงเวลาซึ่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านี้จะต้องสอดคล้องกับสมการแมกซ์เวลล์ในโดเมนความถี่ดังนี้

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon_0\vec{E} \tag{3.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \tag{3.2}$$

เมื่อพิจารณาสมการคลื่นแบบเวกเตอร์ของปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ จะได้เป็นดังนี้

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\vec{E} = j\omega\mu_0\vec{J} \tag{3.3}$$

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{H} + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\vec{H} = -\nabla \times \vec{J} \tag{3.4}$$

และถ้าพิจารณาในกรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตบนผิวตัวนำสมบรูณ์เป็นดังนี้

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \tag{3.5}$$

เมื่อใช้ทฤษฎีบทของกรีนแบบเวกเตอร์ (vector Green 's theorem) กับสมการที่ (3.3) และ (3.4) จะทำให้ได้สมการอินทิกรัลเป็นดังนี้

เมื่อ $\vec{p} \in V_0$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{p}) = \vec{E}^{inc}(\vec{p}) - \oint_S \Big\{ & -j\omega\mu_0\left(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{q})\right)G(\vec{p},\vec{q}) + \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\left(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{q})\right)\cdot\nabla_q\right)\nabla_q G(\vec{p},\vec{q}) \\ & + \left(\vec{n}\times\vec{E}(\vec{q})\right)\times\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\, dS_q \Big\}\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{p}) = \vec{H}^{inc}(\vec{p}) - \oint_S \Big\{ & -j\omega\varepsilon_0\left(\vec{n}\times\vec{E}(\vec{q})\right)G(\vec{p},\vec{q}) + \frac{1}{j\omega\mu_0}\left(\left(\vec{n}\times\vec{E}(\vec{q})\right)\cdot\nabla_q\right)\nabla_q G(\vec{p},\vec{q}) \\ & + \left(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{q})\right)\times\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\, dS_q \Big\} \quad .\end{aligned} \tag{3.7}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}\vec{E}^{inc}(\vec{p}) = \int_V & \left\{ -j\omega\mu_0\vec{J}(\vec{q})G(\vec{p},\vec{q}) + \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\nabla_q . J(\vec{q})\right)\nabla_q G(\vec{p},\vec{q}) \right\} dV_q \\ & -\frac{1}{3}\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\vec{J}(\vec{p})\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\vec{H}^{inc}(\vec{p})=\int_V \left\{\vec{J}(q)\times\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\right\}dV_q \tag{3.9}$$

และเมื่อ $\vec{p}\in V_i$

$$\vec{E}^{inc}(\vec{p})= \oint_S \Big\{- j\omega\mu_0\left(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{q})\right)G(\vec{p},\vec{q})+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\left(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{q})\right)\cdot\nabla_q\right)\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})$$

$$+\left(\vec{n}\times\vec{E}(\vec{q})\right)\times\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\Big\}dS_q \tag{3.10}$$

$$\vec{H}^{inc}(\vec{p})= \oint_S \Big\{j\omega\varepsilon_0\left(\vec{n}\times\vec{E}(\vec{q})\right)G(\vec{p},\vec{q})-\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(\left(\vec{n}\times\vec{E}(\vec{q})\right)\cdot\nabla_q\right)\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})$$

$$+\left(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{q})\right)\times\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\Big\}dS_q \tag{3.11}$$

โดยที่

$$\vec{E}^{inc}(\vec{p})=\int_V \left\{- j\omega\mu_0\vec{J}(\vec{q})G(\vec{p},\vec{q})+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\nabla_q.J(\vec{q})\right)\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\right\}dV_q \tag{3.12}$$

$$\vec{H}^{inc}(\vec{p})=\int_V \left\{\vec{J}(q)\times\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\right\}dV_q \tag{3.13}$$

จากสมการที่ (3.6) และ (3.7) นั้นพบว่า สนามที่จุดใดๆ ใน V_0 สามารถหาได้จาก $\vec{H}(\vec{q})$ และ $\vec{E}(\vec{q})$ ที่ผิวขอบเขต S ของตัวกระเจิงคลื่น ดังนั้นจะต้องหา $\vec{H}(\vec{q})$ และ $\vec{E}(\vec{q})$ ที่ผิวขอบเขต S ก่อนจึงจะสามารถหาสนามใน V_0 ซึ่งสามารถหา $\vec{H}(\vec{q})$ และ $\vec{E}(\vec{q})$ ที่ผิวขอบเขต S ได้จากสมการที่ (3.10) และ (3.11) เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวของตัวกระเจิงคลื่นร่วมด้วยจะทำให้ได้สมการอินทิกรัลเป็นดังนี้

$$\vec{E}^{inc}(\vec{p})= \oint_S \Big\{- j\omega\mu_0\left(\vec{n}_q\times\vec{H}(\vec{q})\right)G(\vec{p},\vec{q})$$

$$+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\left(\vec{n}_q\times\vec{H}(\vec{q})\right)\cdot\nabla_q\right)\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\Big\}dS_q \tag{3.14}$$

และ

$$\vec{H}^{inc}(\vec{p})= \oint_S \left\{\left(\vec{n}_q\times\vec{H}(\vec{q})\right)\times\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\right\}dS_q \tag{3.15}$$

และจากสมการที่ (3.14) และ (3.15) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็นดังนี้

$$\vec{E}^{inc}(\vec{p}) = \oint_S \Big\{ -j\omega\mu_0 \big(\vec{n}_q \times \vec{H}(\vec{q})\big) G(\vec{p},\vec{q}) + \frac{j}{\omega\varepsilon_0} \big(\vec{n}_q \cdot \big(\nabla_q \times \vec{H}(\vec{q})\big)\big) \nabla_q G(\vec{p},\vec{q}) \Big\} dS_q \tag{3.16}$$

$$\vec{H}^{inc}(\vec{p}) = \oint_S \Big\{ \big(\vec{n}_q \times \vec{H}(\vec{q})\big) \times \nabla_q G(\vec{p},\vec{q}) \Big\} dS_q \tag{3.17}$$

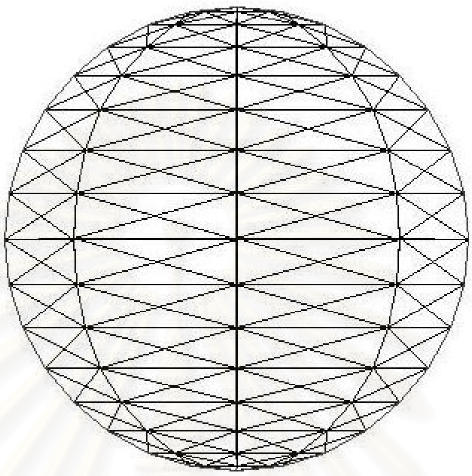
ในการแก้สมการอินทิกรัลดังสมการที่ (3.16) และ (3.17) นี้จะใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ โดยกำหนดให้ $\vec{H}(\vec{q})$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาคำตอบ โดยในที่นี้จะพิจารณากรณีของสมการที่ (3.16) ซึ่งเป็นสมการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้า (electric field integral equation) เป็นกรณีตัวอย่างในการแก้สมการอินทิกรัลโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ซึ่งมีฟังก์ชัน $\vec{H}(\vec{q})$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหา การแก้ปัญหาเริ่มโดยการแบ่งบริเวณตามแนวขอบเขตของปัญหาหรือผิวของตัวกระเจิงคลื่นออกเป็นส่วนย่อยหรืออีลีเมนต์ย่อยให้มีจำนวนเท่ากับ N อีลีเมนต์ ในปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิตินี้ บริเวณตามแนวขอบของปัญหาจะเป็นพื้นผิวของตัวกระเจิงคลื่น จากนั้นจึงกำหนดหมายเลขให้กับอีลีเมนต์และกำหนดหมายเลขโนดให้กับจุดยอดของอีลีเมนต์ซึ่งกำหนดให้มีจำนวนโนดทั้งหมดเท่ากับ N_n โนด โดยในที่นี้จะใช้รูปร่างของอีลีเมนต์เป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูปที่ 3.2 และสร้างคำตอบทดสอบโดยกำหนดให้ฟังก์ชันที่ต้องการหา $\vec{H}(\vec{q})$ ที่ขอบเขตของปัญหาเป็นผลรวมของฟังก์ชันที่ต้องการหาในแต่ละอีลีเมนต์ การประมาณฟังก์ชันในแต่ละช่วงอีลีเมนต์จะประมาณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคูณกับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า แสดงในรูปผลคูณเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\vec{H}(\vec{q}) = \sum_{e=1}^{N} \left\{\vec{N}^e\right\}^T \left\{\phi_t^e\right\} \tag{3.18}$$

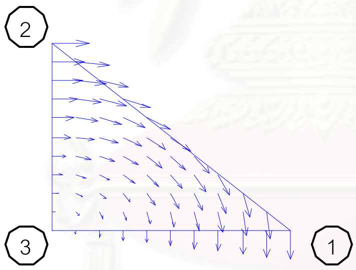
โดยที่

$\left\{\vec{N}^e\right\} = \begin{bmatrix} \vec{N}_1^e \\ \vec{N}_2^e \\ \vec{N}_3^e \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 3×1 ซึ่งมี $\vec{N}_1^e, \vec{N}_2^e$ และ $\vec{N}_3^e$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ (รายละเอียดดังในภาคผนวก จ) ดังรูปที่ 3.3

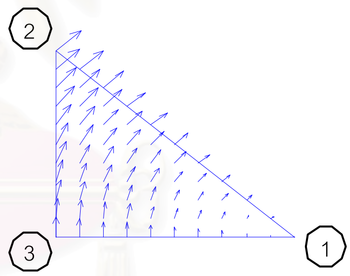
$\{\phi_t^e\}=\begin{bmatrix}\phi_{t1}^e\\ \phi_{t2}^e\\ \phi_{t3}^e\end{bmatrix}$ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ซึ่งในที่นี้ ϕ_{t1}^e , ϕ_{t2}^e และ ϕ_{t3}^e คือ องค์ประกอบในแนวสัมผัสกับขอบที่ 1, ขอบที่ 2 และ ขอบที่ 3 ของอีลีเมนต์ของ $\vec{H}(\vec{q})$ ที่อีลีเมนต์ที่ e ตามลำดับ



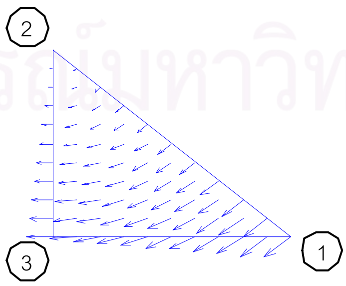
รูปที่ 3.2 การแบ่งผิว S ของตัวกระเจิงคลื่นออกเป็นอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม



(ก) $\vec{N}_1^e$



(ข) $\vec{N}_2^e$



(ค) $\vec{N}_3^e$

รูปที่ 3.3 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ (ก) $\vec{N}_1^e$ (ข) $\vec{N}_2^e$ (ค) $\vec{N}_3^e$

เมื่อแทนฟังก์ชัน $H(\vec{q})$ ตามสมการที่ (3.18) ลงในสมการที่ (3.16) จะได้ว่า

$$\vec{E}^{inc}(\vec{p})=\sum_{e=1}^{N}\left[\oint_{S}\left\{-j\omega\mu_0\,\vec{n}_q^{\,e}\times\left\{\vec{N}^{e}\right\}^{T}\left\{\phi_t^{e}\right\}G(\vec{p},\vec{q})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{j}{\omega\varepsilon_0}\vec{n}_q^{\,e}\cdot\left(\nabla_q\times\left\{\vec{N}^{e}\right\}^{T}\left\{\phi_t^{e}\right\}\right)\nabla_q G(\vec{p},\vec{q})\right\}dS_q\right] \tag{3.19}$$

การหาผลเฉลยของสมการที่ (3.19) จะทำโดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) ตามวิธีกาเลอคิน (Galerkin method) กล่าวคือจะหาผลคูณภายใน (inner product) ของสมการที่ (3.19) กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ซึ่งตามวิธีกาเลอคินนั้น จะเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักให้เท่ากับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ ซึ่งผลที่ได้คือชุดสมการพีชคณิตเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า แสดงได้ดังนี้

$$\oint_{S_p}\left\{\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\vec{E}^{inc}(\vec{p})\right\}dS_p=\sum_{e=1}^{N}\left[\oint_{S_p}\oint_{S}\left\{-j\omega\mu_0\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\left(\vec{n}_q^{\,e}\times\left\{N^{e}\right\}^{T}\right)G(\vec{p},\vec{q})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{j}{\omega\varepsilon_0}\left(\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\left[\vec{n}_q^{\,e}\cdot\left(\nabla_q\times\left\{\vec{N}^{e}\right\}^{T}\right)\right]\nabla_q G(p,q)\right)\right\}dS_q\,dS_p\right]\left\{\phi_t^{e}\right\} \tag{3.20}$$

$$ej=1,2,3,\ldots,N$$

เนื่องจากใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบในการประมาณฟังก์ชันในอีลีเมนต์แต่ละอีลีเมนต์จึงทำให้พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่านั้นเป็นองค์ประกอบที่แต่ละด้านของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม ดังนั้นจำนวนของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดจะเท่ากับจำนวนด้านของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดที่ประกอบขึ้นเป็นผิวของตัวกระเจิงคลื่น ซึ่งในที่นี้จะสมมติให้มีจำนวนด้านของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมดเท่ากับ N_s ด้าน ดังนั้นจะมีจำนวนของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดเท่ากับ N_s ตัวด้วย

และจากสมการที่ (3.20) เมื่อจัดรูปให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ แสดงได้ดังนี้

$$[A][\Phi]=[B] \tag{3.21}$$

โดยที่

$[A]$ เป็นเมตริกซ์มิติ $N_s\times N_s$

$$[A]=\sum_{e=1}^{N}\left[\oint_{S_p}\oint_{S}\left\{-j\omega\mu_0\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\left(\vec{n}_q^{e}\times\left\{N^{e}\right\}^{T}\right)G(\vec{p},\vec{q})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{j}{\omega\varepsilon_0}\left(\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\left[\vec{n}_q^{e}\cdot\left(\nabla_q\times\left\{\vec{N}^{e}\right\}^{T}\right)\right]\nabla_q G(p,q)\right)\right\}dS_q dS_p\right] \quad (3.22)$$

$[B]$ เป็นเมตริกซ์มิติ $N_s \times 1$

$$[B]=\oint_{S_p}\left\{\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\vec{E}^{inc}(\vec{p})\right\}dS_p \quad (3.23)$$

$[\Phi]$ เป็นเมตริกซ์มิติ $N_s \times 1$ และ $ej=1,2,3,...,N$

การวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ใน 3 มิติจะมีปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเกิดขึ้นเช่นเดียวกันกับการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ใน 2 มิติ ดังนั้นการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่เกิดขึ้นนี้จึงเลือกใช้แนวทางในการแก้ปัญหาแบบเดียวกันกับที่ใช้ในบทที่ 2 ซึ่งก็คือการเลือกผิวของจุดสังเกต โดยแบ่งออกเป็นการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวและการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว

3.2.1 การเลือกผิวของจุดสังเกต

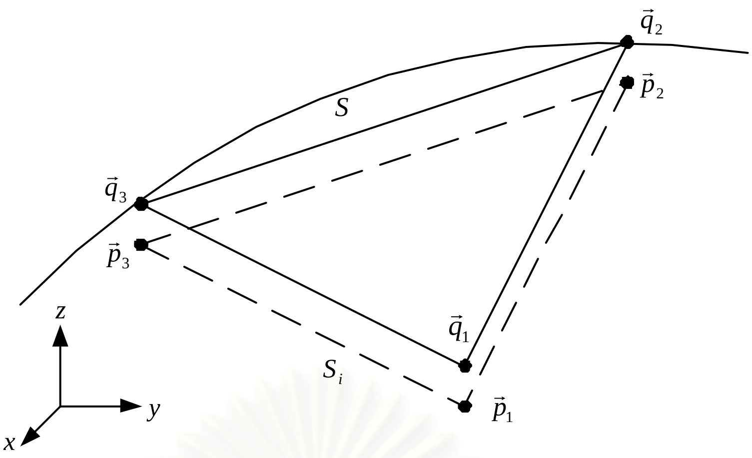
การเลือกผิวของจุดสังเกตในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ใน 3 มิตินี้จะประกอบด้วย การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวและการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว

3.2.1.1 การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว

การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวนี้จะกำหนดจุดสังเกตให้อยู่บนผิวปิด S_i ที่เป็นผิวสมมติซึ่งอยู่ใกล้กับผิวของตัวกระเจิงคลื่น S มาก ดังรูปที่ 3.4 และกำหนดให้ระยะห่างระหว่างผิว S และ S_i เป็น δ และกำหนดให้อัตราส่วนระหว่าง S_i ต่อ S เป็น α_i ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ทั้งสองคือ $\alpha_i = 1-\delta$ ทำให้ได้จุดสังเกตบนผิวสมมติเป็นดังนี้

$$\vec{p}_{in}=\alpha_i\,\vec{q}_n \qquad ,n=1,2,3,...,N_n \quad (3.24)$$

โดยที่ $0<\alpha_i<1$ และ α_i ควรมีค่าเข้าใกล้ 1



รูปที่ 3.4 จุดสังเกตบนผิวสมมติ S_i เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวในปัญหา 3 มิติ

เมื่อแทนสมการที่ (3.24) ลงในสมการที่ (3.21) จะได้ว่า

$$\left[A_{in}\right][\Phi]=\left[B_{in}\right] \tag{3.25}$$

โดยที่ $\left[A_{in}\right],\left[B_{in}\right]$ เป็นเมตริกซ์ $[A]$ และ $[B]$ เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตตามสมการที่ (3.24) ดังนั้นจะได้ $\left[A_{in}\right]$ และ $\left[B_{in}\right]$ เป็นดังนี้

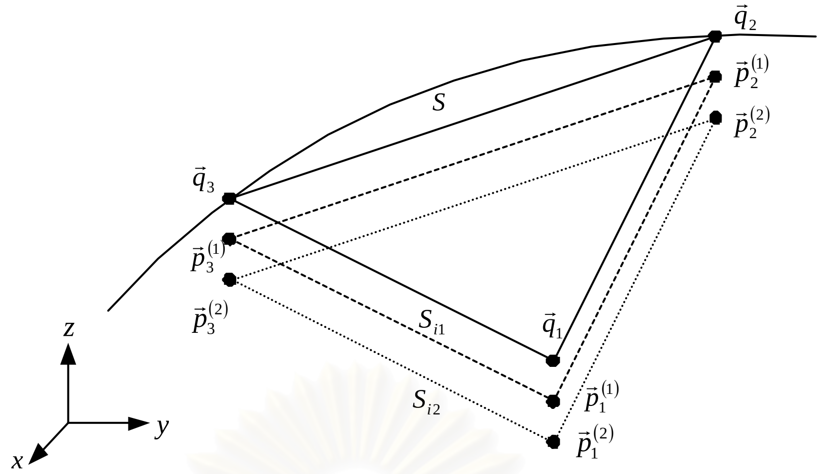
$$\begin{aligned}\left[A_{in}\right]=\sum_{e=1}^{N}\Bigg[\oint_{S_i}\oint_{S}\Big\{&-j\omega\mu_0\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\left(\vec{n}_q^{e}\times\left\{N^{e}\right\}^{T}\right)G(\vec{p}_{in},\vec{q})\\&+\frac{j}{\omega\varepsilon_0}\left(\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\left[\vec{n}_q^{e}\cdot\left(\nabla_q\times\left\{\vec{N}^{e}\right\}^{T}\right)\right]\nabla_q G(\vec{p}_{in},\vec{q})\right)\Big\}dS_q\,dS_p\Bigg]\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\left[B_{in}\right]=\oint_{S_i}\left\{\left\{\vec{N}^{ej}\right\}\cdot\vec{E}^{inc}\left(\vec{p}_{in}\right)\right\}dS_p \tag{3.27}$$

และ $\vec{N}^{ej}=\vec{N}^{ej}\left(\vec{p}_{in}\right)$ เป็นฟังก์ชันของจุดสังเกตบนผิว S_i

3.2.1.2 การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว

การใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวนี้จะกำหนดจุดสังเกตให้อยู่บนผิวปิด S_{i1} และ S_{i2} โดยที่ผิวสมมติทั้งสองนี้อยู่ใกล้กันมากและผิวสมมติทั้งสองยังอยู่ใกล้กับผิวของตัวกระเจิงคลื่น S มากด้วย ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 จุดสังเกตบนผิวสมมติ S_{i1} และ S_{i2} เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว ในปัญหา 3 มิติ

กำหนดให้จุดสังเกตทั้งสองบนผิวสมมติ S_{i1} และ S_{i2} เป็นดังนี้

$$\vec{p}_n^{\,(1)} = \left(1-\beta^{(1)}\right)\vec{q}_n \tag{3.28}$$

$$\vec{p}_n^{\,(2)} = \left(1-\beta^{(2)}\right)\vec{q}_n \tag{3.29}$$

โดยที่

$\beta^{(1)}, \beta^{(2)}$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่าน้อยๆ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้ $\beta^{(2)} > \beta^{(1)}$

และ $n = 1, 2, 3, \ldots, N_n$

เมื่อแทนสมการที่ (3.28) และ (3.29) ลงในสมการที่ (3.21) จะได้ว่า

$$\left[A^{(1)}\right]\left[\Phi\right] = \left[B^{(1)}\right] \tag{3.30}$$

$$\left[A^{(2)}\right]\left[\Phi\right] = \left[B^{(2)}\right] \tag{3.31}$$

โดยที่

$\left[A^{(1)}\right], \left[B^{(1)}\right]$ และ $\left[A^{(2)}\right], \left[B^{(2)}\right]$ เป็นเมตริกซ์ $\left[A\right]$ และ $\left[B\right]$ เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตตามสมการที่ (3.28) และ (3.29) ตามลำดับ

ถ้ากำหนดให้จุดกึ่งกลางด้านของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมที่อยู่บนผิวของจุดสังเกตทั้งสองผิวดังเป็นดังนี้

$$\vec{p}_{mi}^{e(1)} = \frac{\vec{p}_i^{e(1)} + \vec{p}_j^{e(1)}}{2} \tag{3.32}$$

$$\vec{p}_{mi}^{e(2)} = \frac{\vec{p}_i^{e(2)} + \vec{p}_j^{e(2)}}{2} \tag{3.33}$$

โดยที่

$\vec{p}_i^{e(1)}$ และ $\vec{p}_i^{e(2)}$ เป็นจุดยอดที่ i ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมอีลีเมนต์ที่ e บนผิวของจุดสังเกตผิวที่หนึ่งและที่สองตามลำดับ โดย $(i, j)=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

$\vec{p}_{mi}^{e(1)}, \vec{p}_{mi}^{e(2)}$ เป็นจุดกึ่งกลางด้านของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมอีลีเมนต์ที่ e บนผิวของจุดสังเกตผิวที่หนึ่งและที่สองตามลำดับ โดย $mi = m1, m2, m3$

และจากสมการที่ (3.32) และ (3.33) จะได้จำนวนจุดกึ่งกลางด้านของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมทั้งหมดเท่ากับจำนวนด้านทั้งหมดของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม (N_s) ซึ่งกำหนดให้ $\vec{s}_m^{(1)}$ และ $\vec{s}_m^{(2)}$ เป็นจุดกึ่งกลางด้านของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมจุดที่ m โดยที่ $m=1,2,3,\ldots,N_s$

จากนั้นใช้ค่าสเกลาร์ $\alpha_m^{(1)}$ และ $\alpha_m^{(2)}$ ซึ่งเป็นคอนจูเกตเชิงซ้อน คูณสมการที่ (3.30) และ (3.31) ตามลำดับ แล้วจึงนำสมการทั้งสองมารวมกัน ได้ผลเป็นดังนี้

$$\left[\alpha_m^{(1)}\left[A^{(1)}\right]+\alpha_m^{(2)}\left[A^{(2)}\right]\right][\Phi] = \left[\alpha_m^{(1)}\left[B^{(1)}\right]+\alpha_m^{(2)}\left[B^{(2)}\right]\right] \tag{3.34}$$

$$m=1,2,3,\ldots,N_s$$

โดยที่

$$\alpha_m^{(1)} = 1 - \frac{j}{\left|\vec{s}_m^{(2)} - \vec{s}_m^{(1)}\right|} \tag{3.35}$$

$$\alpha_m^{(2)} = 1 + \frac{j}{\left|\vec{s}_m^{(2)} - \vec{s}_m^{(1)}\right|} \tag{3.36}$$

เมื่อทราบ $\vec{H}(\vec{q})$ ที่ผิวของตัวกระเจิงคลื่นแล้ว สนามที่จุดใดๆ ใน V_0 สามารถหาได้จากสมการที่ (3.6) และใช้เงื่อนไขขอบเขตร่วมด้วย และเช่นเดียวกันสนามของคลื่นกระเจิงใน V_0 แสดงได้ดังนี้

$$\vec{E}^s(\vec{p}) = -\oint_S \left\{ -j\omega\mu_0 \left(\vec{n} \times \vec{H}(\vec{q})\right) G(\vec{p},\vec{q}) + \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left(\left(\vec{n} \times \vec{H}(\vec{q})\right) \cdot \nabla_q\right) \nabla_q G(\vec{p},\vec{q}) \right\} dS' \quad (3.37)$$

เมื่อพิจารณาในบริเวณของสนามระยะไกลจะได้ว่า

$$\vec{E}^s(\vec{p}) = \frac{\exp\left(-jk|\vec{p}|\right)}{k|\vec{p}|} \vec{F}\left(\vec{a}_p\right) \quad (3.38)$$

โดยที่

$\vec{F}\left(\vec{a}_p\right)$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ (vectorial function) ที่เรียกว่า scattering amplitude ซึ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ที่มีองค์ประกอบในแนวสัมผัสกับผิวของวัตถุเท่านั้นโดย

$$\vec{F}\left(\vec{a}_p\right) = -\frac{jk^2}{4\pi} Z_w \left(\vec{a}_p \times \vec{a}_p \times \oint_S \left(\vec{n} \times \vec{H}(\vec{q})\right) \exp\left(jk\,\vec{q}' \cdot \vec{a}_p\right) dS' \right) \quad (3.39)$$

และ Z_w เป็นอิมพิแดนซ์ของคลื่นโดย $Z_w = \frac{k}{\omega\varepsilon}$

เมื่อพิจารณาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุในกรณีเอกสถิตที่กำหนดให้ภาครับอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับภาคส่งจะได้เป็นดังนี้

$$\sigma = \lim_{|\vec{p}| \to \infty} 4\pi r^2 \frac{P^s}{P^{inc}} = \lim_{|\vec{p}| \to \infty} 4\pi \frac{\left|\vec{F}\left(\vec{a}_p\right)\right|^2}{k^2 \left|\vec{E}_0\right|^2} \quad (3.40)$$

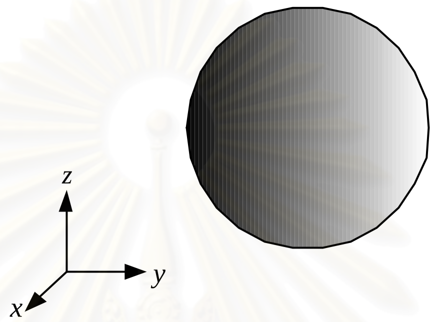
การหาค่าของอินทิกรัลในที่นี้ใช้การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ (รายละเอียดดังในภาคผนวก ก) และใช้การปรับเปลี่ยนรูปของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมในปริภูมิ 3 มิติ (รายละเอียดดังในภาคผนวก ค) ร่วมด้วย

3.3 ผลการคำนวณในกรณีตัวอย่าง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคำนวณในกรณีตัวอย่างของการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยใช้วิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ซึ่งตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการและผลของการเลือกใช้ผิวของจุดสังเกตทั้งสองแบบ

3.3.1 ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลม

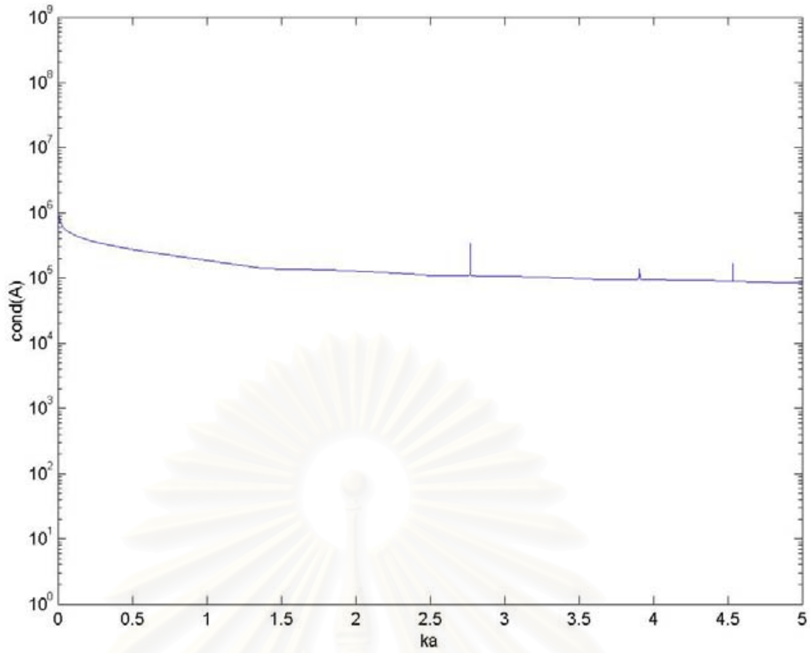
พิจารณาปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในกรณีที่คลื่นตกกระทบเป็นคลื่นระนาบ $\vec{E}^{inc} = \vec{a}_z \exp(-jkx)$ ซึ่งมีการแพร่กระจายในทิศทาง $+x$ ตกกระทบบนตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมและมีรัศมีของทรงกลมเท่ากับ 1 เมตร ดังรูปที่ 3.6



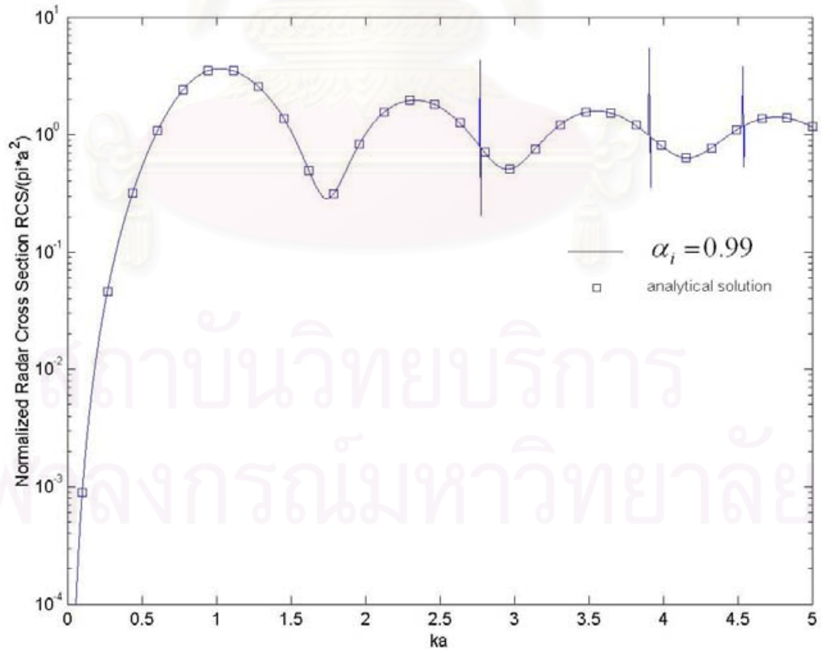
รูปที่ 3.6 ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลม

เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว โดยกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ พิจารณาในช่วง $ka = 0$ ถึง $ka = 5$ ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ โดยใช้จำนวนอีลีเมนต์ N เท่ากับ 240 อีลีเมนต์และมีจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเท่ากับ 360 ตัว และใช้ค่าความถี่จำนวน 5000 จุด โดยแบ่งระยะห่างของความถี่อย่างสม่ำเสมอเป็น 0.001 ในช่วงของโดเมนความถี่จาก $ka = 0$ ถึง $ka = 5$

กรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i = 0.99$ ได้ผลดังรูปที่ 3.7 ซึ่งพบว่า เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าสูงมากและมีจุดเอกฐานเกิดขึ้น 3 จุดในช่วง $ka = 0$ ถึง $ka = 5$ คือที่ $ka = 2.770$, $ka = 3.9007$ และ $ka = 4.535$ ซึ่งเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วและมีค่าสูงมากเข้าใกล้อนันต์แสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่มีเสถียรภาพและเป็นเมตริกซ์เอกฐาน ณ ตำแหน่ง $ka = 2.770$, $ka = 3.9007$ และ $ka = 4.535$ เมื่อพิจารณาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุในรูปที่ 3.8 พบว่าที่บริเวณใกล้ๆ กับจุดเอกฐานทั้งสามมีความผิดพลาดสูงมากเกิดขึ้นที่บริเวณรอบๆ ใกล้กับจุดเอกฐานทั้งสามและค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์มีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นอย่างรวดเร็วหรือกล่าวได้ว่ามีความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดเกิดขึ้นสูงมาก

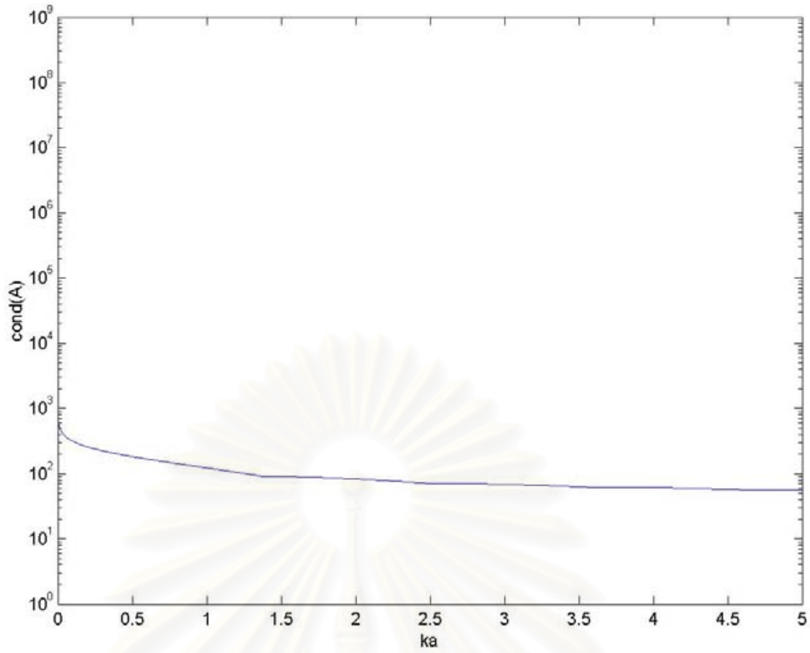


รูปที่ 3.7 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกลม

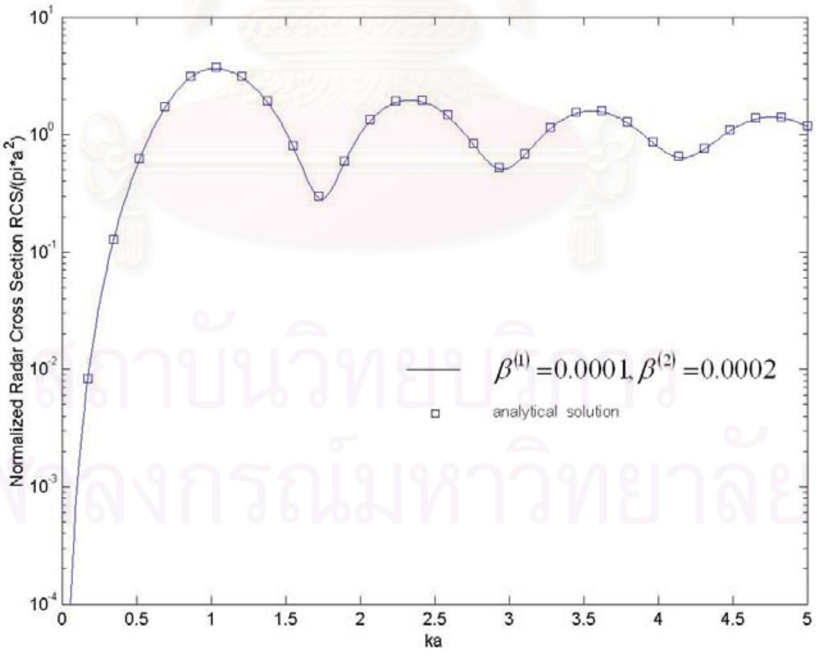


รูปที่ 3.8 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกลม

กรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวโดยที่ $\beta^{(1)} = 0.0001$, $\beta^{(2)} = 0.0002$ ได้ผลดังรูปที่ 3.9 ซึ่งพบว่าเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำและไม่มีตำแหน่งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วหรือไม่มีจุดเอกฐานเกิดขึ้น และเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ยังมีค่าค่อนข้างคงที่เมื่อ ka มีค่ามากขึ้นซึ่งแสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีเสถียรภาพในการคำนวณ และเมื่อพิจารณาค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในรูปที่ 3.10 พบว่าไม่มีตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วเกิดขึ้นที่บริเวณใดเลยในช่วง $ka = 0$ จนถึง $ka = 5$ และเมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กับผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกลมจะเห็นว่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากการคำนวณตามวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวนั้นในผลที่ใกล้เคียงกับผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์และมีแนวโน้มของค่าในทิศทางเดียวกัน



รูปที่ 3.9 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวเมื่อกำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกลม



รูปที่ 3.10 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวเมื่อกำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกลม

พิจารณาความสัมพันธ์ของจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้ในการแบ่งผิวของตัวกระเจิงคลื่นกับภาคตัวขวางเป้าเรดาร์เอกสถิตในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในกรณีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว โดยกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ และกรณีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวโดยกำหนดให้ $\beta^{(1)} = 0.0001$, $\beta^{(2)} = 0.0002$ เมื่อตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลม โดยในที่นี้เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดคือค่าสัมบูรณ์ของอัตราส่วนที่เป็นผลต่างของผลเฉลยที่ได้จากวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์กับผลเฉลยที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ มีสมการเป็นดังนี้

$$\%error = \left| \frac{BEM - analytical\, solution}{analytical\, solution} \right| \times 100 \tag{3.41}$$

ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้เขียนโปรแกรมโดยใช้ภาษาฟอร์แทรน90 ด้วยโปรแกรม visual fortran 6.5 บนระบบปฏิบัติการวินโดวส์ XP ทำงานบนคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลที่ใช้ซีพียูเพนเทียม IV 1.7 GHz หน่วยความจำหลัก 512 MB โดยที่ผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ $RCS/(\pi a^2)$ ที่ $ka = 2$ เท่ากับ 1.0081

ตารางที่ 3.1 การเปรียบเทียบภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ $ka = 2$ ของตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมที่ได้จากวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวที่กำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ กับผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

จำนวนอีลีเมนต์	จำนวนตัวแปร	เวลา (วินาที)	$RCS/(\pi a^2)$	%error
56	84	15.04	0.8956	11.1596
90	135	24.12	0.9574	5.0293
132	198	82.36	0.9812	2.6684
182	273	130.08	0.9974	1.0614
240	360	262.40	1.0036	0.4464

ตารางที่ 3.1 เป็นการคำนวณภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ $ka = 2$ ของตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวที่กำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ แบ่งจำนวนอีลีเมนต์อยู่ในช่วง 56 ถึง 240 อีลีเมนต์และมีจำนวนตัวแปรหรือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของสนามอยู่ในช่วง 84 ถึง 360 ตัว การเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ทำให้มีความผิดพลาดจากผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์น้อยลง การลู่เข้าหาผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ของภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวที่กำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ จะเริ่มที่ค่า

น้อยกว่าผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และค่าจะค่อยๆเพิ่มขึ้นมากขึ้นหรือลู่เข้าหาผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์เมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์

ตารางที่ 3.2 การเปรียบเทียบภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ $ka=2$ ของตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมที่ได้จากวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวที่กำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ กับผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

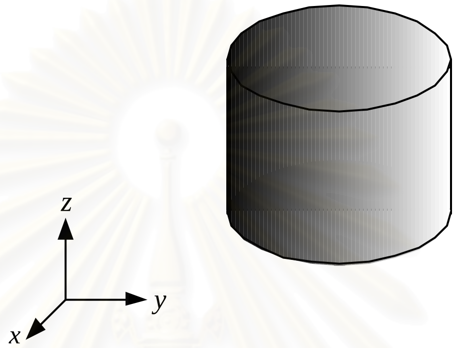
จำนวนอีลีเมนต์	จำนวนตัวแปร	เวลา (วินาที)	$RCS/\left(\pi a^2\right)$	$\%error$
56	84	20.22	0.9006	10.6636
90	135	32.48	0.9580	4.9697
132	198	116.40	0.9824	2.5494
182	273	192.82	0.9978	1.0217
240	360	398.16	1.0038	0.4265

ตารางที่ 3.2 เป็นการคำนวณภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ $ka=2$ ของตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวที่กำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ แบ่งจำนวนอีลีเมนต์อยู่ในช่วง 56 ถึง 240 อีลีเมนต์และมีจำนวนตัวแปรหรือพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าของสนามอยู่ในช่วง 84 ถึง 360 ตัว การเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ทำให้มีความผิดพลาดจากผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์น้อยลง การลู่เข้าหาผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ของภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวที่กำหนดให้ $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ จะเริ่มที่ค่าน้อยกว่าผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และค่าจะค่อยๆเพิ่มขึ้นมากขึ้นหรือลู่เข้าหาผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์เมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์

การพิจารณาเปรียบเทียบเวลาในการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวกับเวลาในการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว พบว่า เวลาในการคำนวณเมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวเพิ่มขึ้นจากเวลาในการคำนวณเมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวประมาณ 50% เช่น เมื่อจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าเท่ากับ 273 ตัว เวลาในการคำนวณเมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวเท่ากับ 130.08 วินาทีและเวลาในการคำนวณเมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวเท่ากับ 192.82 วินาที ดังนั้นจะใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นประมาณ $\frac{192.82-130.08}{130.08}\times 100 = 48.23\%$ เป็นต้น

3.3.2 ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอก

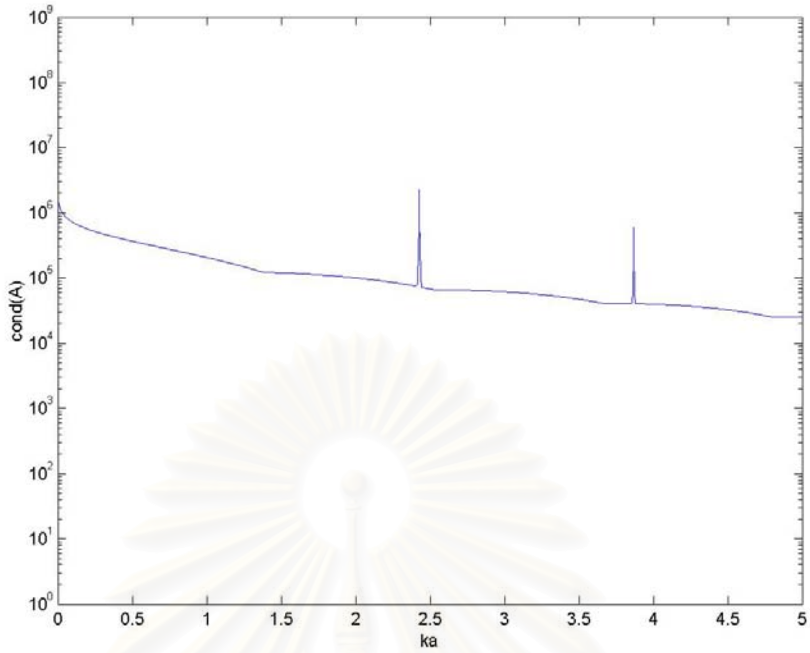
พิจารณาปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในกรณีคลื่นตกกระทบเป็นคลื่นระนาบ $\vec{E}^{inc} = \vec{a}_z \exp(-jkx)$ ซึ่งมีการแพร่กระจายในทิศทาง $+x$ ตกกระทบบนตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกและมีรัศมีของทรงกะบอกเท่ากับ 1 เมตร และความสูงของทรงกระบอกเท่ากับ 2 เมตร ดังรูปที่ 3.11



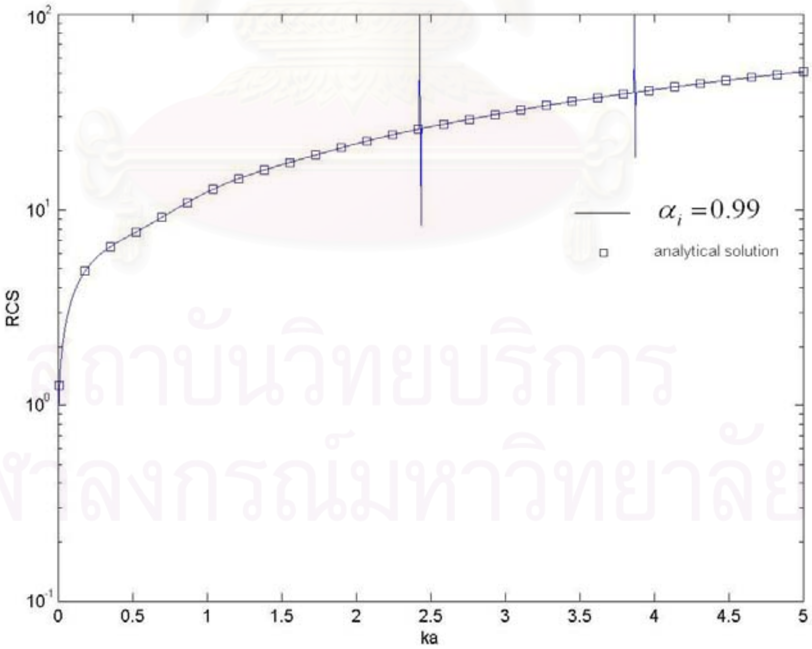
รูปที่ 3.11 ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลม

เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว โดยกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ พิจารณาในช่วง $ka = 0$ ถึง $ka = 5$ ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ โดยใช้จำนวนอีลีเมนต์ N เท่ากับ 368 อีลีเมนต์และมีจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเท่ากับ 552 ตัว และใช้ค่าความถี่จำนวน 5000 จุด โดยแบ่งระยะห่างของความถี่อย่างสม่ำเสมอเป็น 0.001 ในช่วงของโดเมนความถี่จาก $ka = 0$ ถึง $ka = 5$

กรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i = 0.99$ ได้ผลดังรูปที่ 3.12 ซึ่งพบว่า เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าสูงมากและมีจุดเอกฐานเกิดขึ้น 2 จุดในช่วงของ $ka = 0$ ถึง $ka = 5$ คือที่ $ka = 2.428$ และ $ka = 3.868$ ซึ่งเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วและมีค่าสูงมากเข้าใกล้อนันต์แสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่มีเสถียรภาพและเป็นเมตริกซ์เอกฐานที่ ณ ตำแหน่ง $ka = 2.428$ และ $ka = 3.868$ เมื่อพิจารณาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุในรูปที่ 3.13 พบว่า ที่บริเวณใกล้ๆ กับจุดเอกฐานทั้งสองมีความผิดพลาดสูงมากเกิดขึ้นที่บริเวณรอบๆ ใกล้กับจุดเอกฐานทั้งสองและค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์มีการเปลี่ยนแปลงค่าเกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว

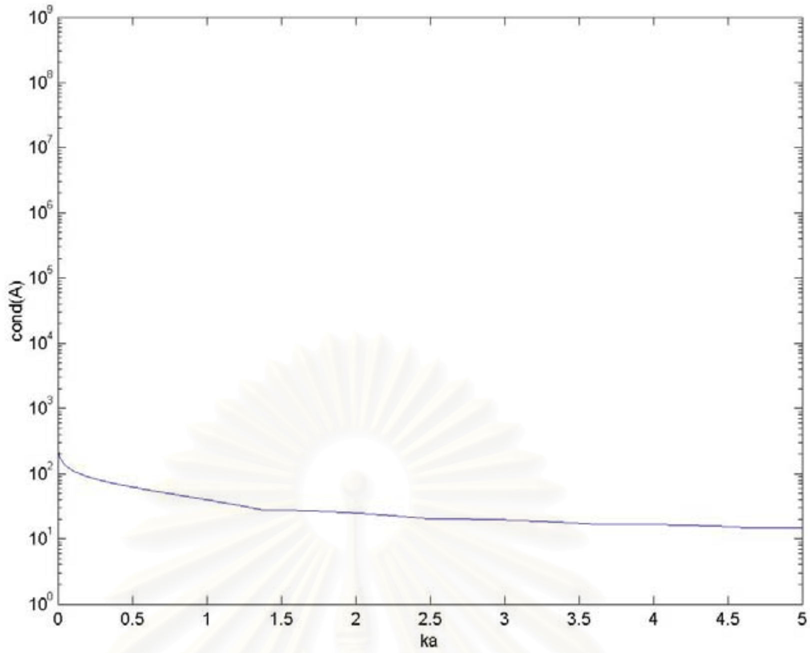


รูปที่ 3.12 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกระบอก

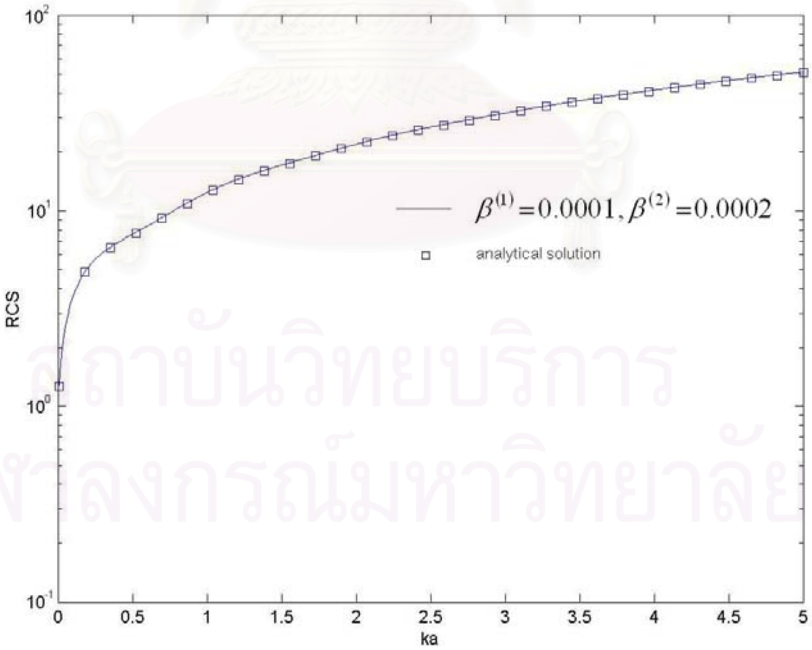


รูปที่ 3.13 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกระบอก

และในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวโดยกำหนดให้ $\beta^{(1)} = 0.0001$, $\beta^{(2)} = 0.0002$ ได้ผลดังรูปที่ 3.14 ซึ่งพบว่าเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำและไม่มีตำแหน่งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วหรือไม่มีจุดเอกฐานเกิดขึ้นซึ่งแสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีเสถียรภาพ และเมื่อพิจารณาค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในรูปที่ 3.15 พบว่า ไม่มีตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วเกิดขึ้นที่บริเวณใดเลยในช่วง $ka = 0$ จนถึง $ka = 5$ และเมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กับผลที่ได้จากการใช้วิธีเชิงวิเคราะห์กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกระบอกจะเห็นว่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากการคำนวณตามวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในกรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวนั้นในผลที่ใกล้เคียงกับผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์และมีแนวโน้มของค่าในทิศทางเดียวกัน



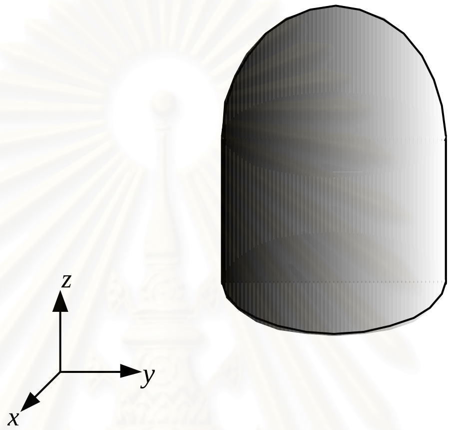
รูปที่ 3.14 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว เมื่อ $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกระบอก



รูปที่ 3.15 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว เมื่อ $\beta^{(1)}=0.0001$, $\beta^{(2)}=0.0002$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปทรงกระบอก

3.3.3 ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปหัวกระสุน

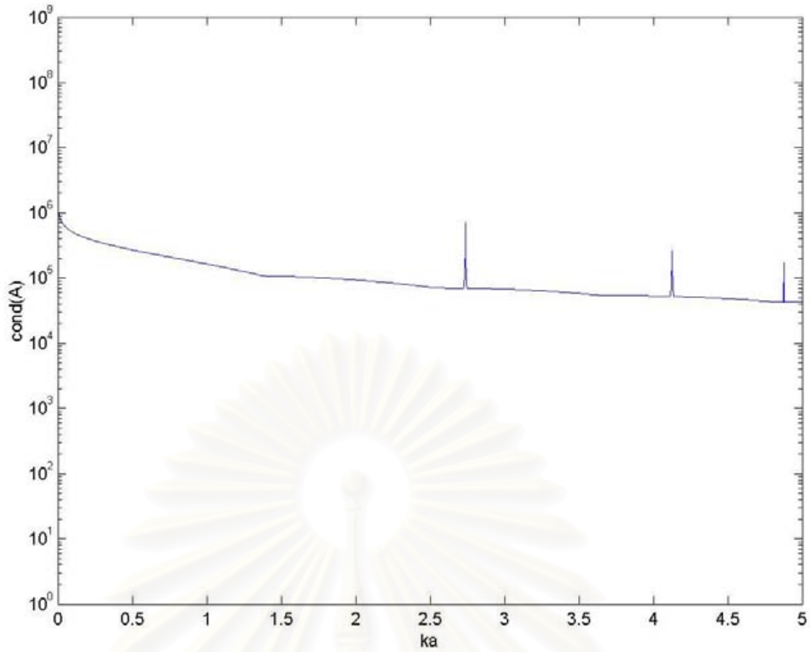
พิจารณาปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในกรณีคลื่นตกกระทบเป็นคลื่นระนาบ $\vec{E}^{inc} = \vec{a}_z \exp(-jkx)$ ซึ่งมีการแพร่กระจายในทิศทาง $+x$ ตกกระทบบนตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปหัวกระสุนที่ประกอบด้วยรูปทรงกระบอกที่มีรัศมีของทรงกระบอกเท่ากับ 1 เมตร และความสูงของทรงกระบอกเท่ากับ 2 เมตร และมีครึ่งทรงกลมที่มีรัศมีของทรงกลมเท่ากับ 1 เมตรประกบอยู่ที่ฝาด้านบนของทรงกระบอก ดังรูปที่ 3.16



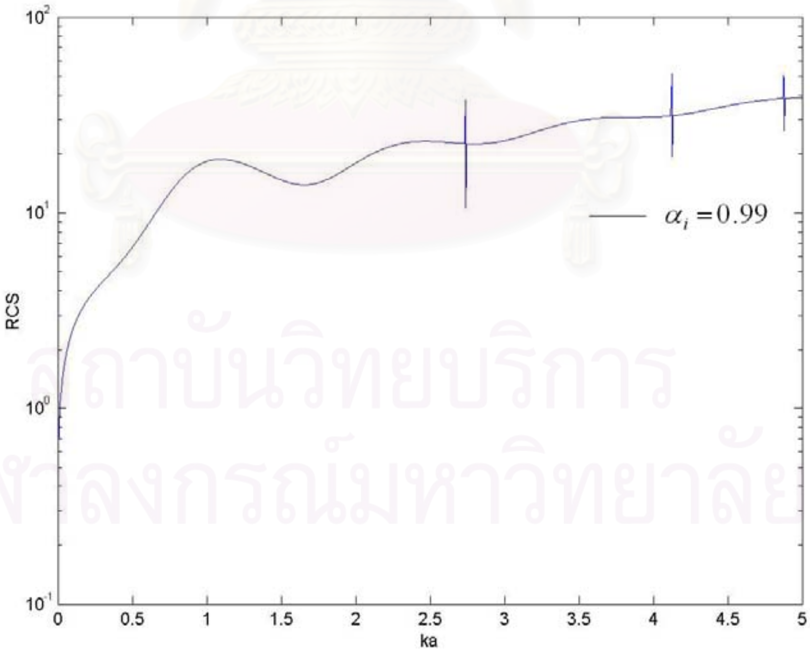
รูปที่ 3.16 ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์และมีโครงสร้างเป็นรูปหัวกระสุน

เมื่อใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว โดยกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ พิจารณาในช่วง $ka = 0$ ถึง $ka = 5$ ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ โดยใช้จำนวนอีลีเมนต์ N เท่ากับ 368 อีลีเมนต์และมีจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าเท่ากับ 552 ตัว และใช้ค่าความถี่จำนวน 5000 จุด โดยแบ่งระยะห่างของความถี่อย่างสม่ำเสมอเป็น 0.001 ในช่วงของโดเมนความถี่จาก $ka = 0$ ถึง $ka = 5$

กรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวโดยที่ $\alpha_i = 0.99$ ได้ผลดังรูปที่ 3.17 ซึ่งพบว่า เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าสูงมากและมีจุดเอกฐานเกิดขึ้น 3 จุดในช่วงของ $ka = 0$ ถึง $ka = 5$ คือที่ $ka = 2.738$,$ka = 4.126$ และ $ka = 4.877$ ซึ่งเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วและมีค่าสูงมากเข้าใกล้อนันต์แสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่มีเสถียรภาพและเป็นเมตริกซ์เอกฐานที่ ณ ตำแหน่ง $ka = 2.738$,$ka = 4.126$ และ $ka = 4.877$ เมื่อพิจารณาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุในรูปที่ 3.18 พบว่าที่บริเวณใกล้ๆ กับจุดเอกฐานทั้งสามมีความผิดพลาดสูงมากเกิดขึ้นที่บริเวณรอบๆ ใกล้กับจุดเอกฐานทั้งสามและค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์มีการเปลี่ยนแปลงค่าเกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว

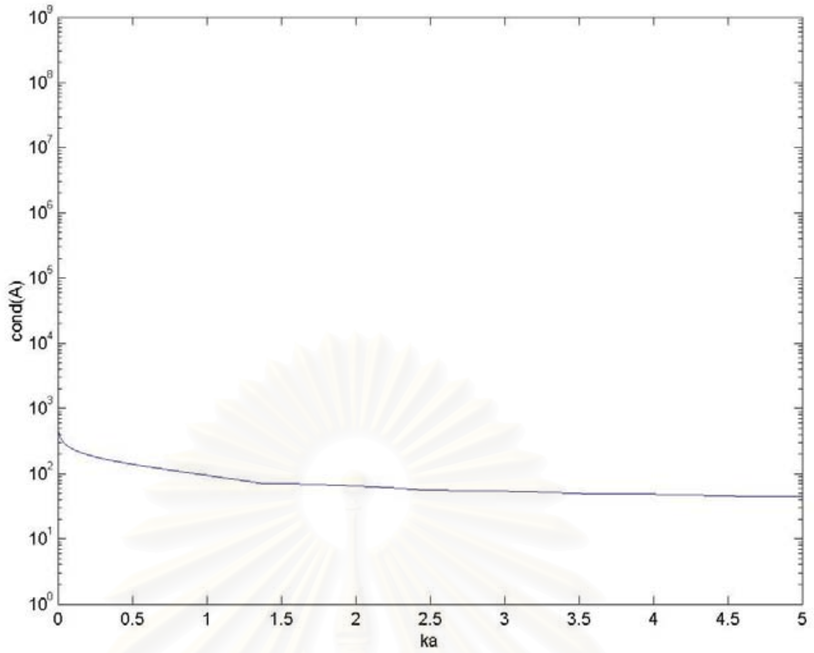


รูปที่ 3.17 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปหัวกระสุน

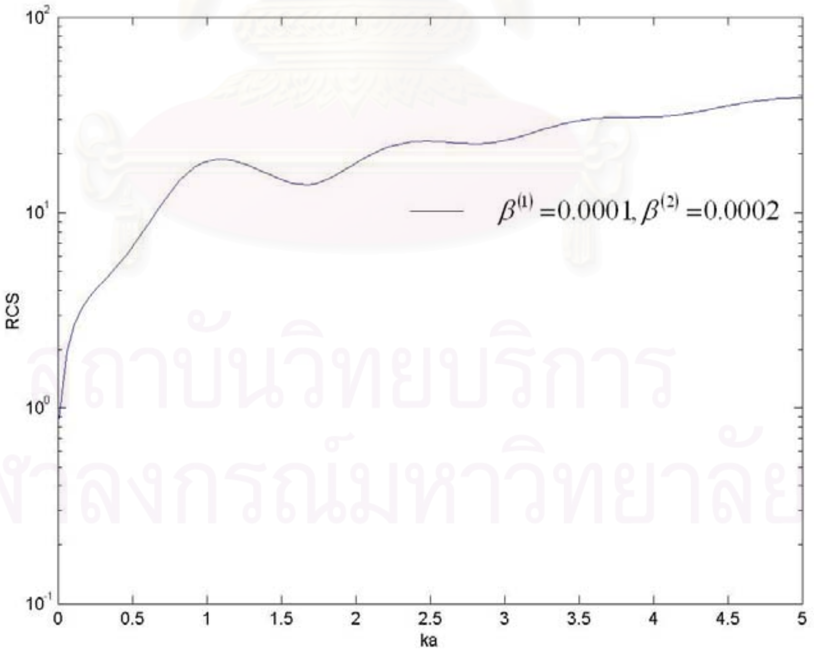


รูปที่ 3.18 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว เมื่อกำหนดให้ $\alpha_i = 0.99$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปหัวกระสุน

กรณีของการใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวโดยกำหนดให้ $\beta^{(1)} = 0.0001$, $\beta^{(2)} = 0.0002$ ได้ผลดังรูปที่ 3.19 ซึ่งพบว่าเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำและไม่มีตำแหน่งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วหรือไม่มีจุดเอกฐานเกิดขึ้นซึ่งแสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีเสถียรภาพ และเมื่อพิจารณาค่าภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในรูปที่ 3.20 พบว่าไม่มีตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างรวดเร็วเกิดขึ้นที่บริเวณใดเลยในช่วง $ka = 0$ จนถึง $ka = 5$



รูปที่ 3.19 เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว
เมื่อ $\beta^{(1)} = 0.0001$, $\beta^{(2)} = 0.0002$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปหัวกระสุน



รูปที่ 3.20 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว
เมื่อ $\beta^{(1)} = 0.0001$, $\beta^{(2)} = 0.0002$ กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำสมบูรณ์รูปหัวกระสุน

3.4 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอวิธีวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ โดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในรูปของสมการเวกเตอร์และแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในโดยใช้วิธีการเลือกผิวของจุดสังเกตในการแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายใน และทดสอบการคำนวณในกรณีของตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมและตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นตัวนำสมบูรณ์ซึ่งมีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกและมีหน้าตัดเป็นรูปวงกลม กรณีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวยังคงมีปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเกิดขึ้น แต่อย่างไรก็ตามสามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้โดยอาศัยการปรับเลื่อนผิวสมมติโดยการปรับเปลี่ยนค่า α_i ของผิวสมมติเพื่อเลื่อนตำแหน่งที่เกิดปัญหาเรโซแนนซ์เมื่อเกิดปัญหา ณ ความถี่ที่ต้องการหาคำตอบ และกรณีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิว พบว่า สามารถแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในได้โดยที่ไม่มีปัญหาเรโซแนนซ์ภายในเกิดขึ้นที่ความถี่ใดเลยโดยใช้หลักในการเลือกค่าพารามิเตอร์ $\beta^{(1)}$ และ $\beta^{(2)}$ ที่ใช้ในการปรับเลื่อนผิวของจุดสังเกตทั้งสองผิวให้มีค่าน้อยๆ และ $\beta^{(1)}$ และ $\beta^{(2)}$ มีค่าใกล้เคียงกันมากๆ นั้นจะทำให้เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำแสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีเสถียรภาพในการคำนวณดีขึ้น

บทที่ 4

การทดลองวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์

4.1 ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการทดลองวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุ ซึ่งในที่นี้จะใช้วัตถุตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำซึ่งเป็นตัวนำไฟฟ้าอย่างดีที่มีค่าความนำไฟฟ้าสูงมากๆ ในหัวข้อ 4.2 จะกล่าวถึงหลักการและทฤษฎีที่ใช้เกี่ยวกับภาคตัดขวางเป้าเรดาร์และการคำนวณหาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุตัวกระเจิงคลื่น ในหัวข้อ 4.3 จะเป็นผลการทดลองวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในกรณีตัวอย่างซึ่งจะเปรียบเทียบผลการทดลองในการวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กับผลการคำนวณที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.2.1.2 และผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ และวัตถุที่ใช้ในการทดลองจะเป็นวัตถุตัวนำที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมและวัตถุตัวนำที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกที่หน้าตัดของทรงกระบอกเป็นรูปวงกลม

4.2 หลักการและทฤษฎีที่ใช้

4.2.1 ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์

ในการพิจารณาปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นโดยตัวกระเจิงคลื่นนั้นจะมีพารามิเตอร์ที่สำคัญคือภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ซึ่งมักจะใช้สัญลักษณ์เป็น σ ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เป็นปริมาณที่บ่งบอกถึงการรับเอากำลังงานของคลื่นตกกระทบของตัวกระเจิงคลื่นและการแผ่กระจายของคลื่นกระเจิงจากวัตถุตัวกระเจิงคลื่นไปยังภาครับ ซึ่งภาคตัดขวางเป้าเรดาร์นั้นเป็นอัตราส่วนระหว่างกำลังงานของคลื่นกระเจิงที่แผ่กระจายออกจากวัตถุตัวกระเจิงคลื่นต่อความหนาแน่นของกำลังงานของคลื่นตกกระทบ และในการพิจารณาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านี้ยังแบ่งออกเป็น 2 กรณีโดยใช้ตำแหน่งของภาครับหรือจุดสังเกตเป็นเกณฑ์คือ ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เอกสถิตซึ่งพิจารณาจากปัญหาการกระเจิงคลื่นในกรณีที่ตำแหน่งของภาครับหรือจุดสังเกตอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับภาคส่งหรือแหล่งกำเนิดคลื่น และภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ทวิสถิต (bistatic radar cross section) ซึ่งพิจารณาจากปัญหาการกระเจิงคลื่นในกรณีที่ตำแหน่งของภาครับหรือจุดสังเกตอยู่ที่ตำแหน่งอื่นที่ไม่ใช่ตำแหน่งของภาคส่งหรือแหล่งกำเนิดคลื่น และสำหรับรูปแบบของปัญหากระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิตินั้นพารามิเตอร์ของการกระเจิงจะเรียกว่า scattering width (SW)

หรือ radar cross section per unit length ซึ่งสมการของ scattering width และ radar cross section (RCS) เป็นดังนี้

$$\sigma_{2-D} = \begin{cases} \lim\limits_{\rho\to\infty}\left(2\pi\rho\dfrac{S^s}{S^i}\right) \\ \lim\limits_{\rho\to\infty}\left(2\pi\rho\dfrac{\left|\vec{E}^s\right|^2}{\left|\vec{E}^i\right|^2}\right) \\ \lim\limits_{\rho\to\infty}\left(2\pi\rho\dfrac{\left|\vec{H}^s\right|^2}{\left|\vec{H}^i\right|^2}\right) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\sigma_{3-D} = \begin{cases} \lim\limits_{\rho\to\infty}\left(4\pi r^2\dfrac{S^s}{S^i}\right) \\ \lim\limits_{\rho\to\infty}\left(4\pi r^2\dfrac{\left|\vec{E}^s\right|^2}{\left|\vec{E}^i\right|^2}\right) \\ \lim\limits_{\rho\to\infty}\left(4\pi r^2\dfrac{\left|\vec{H}^s\right|^2}{\left|\vec{H}^i\right|^2}\right) \end{cases} \tag{4.2}$$

โดยที่

ρ, r คือระยะทางจากเป้าหมายถึงภาครับจุดหรือสังเกต

S^i, S^s คือความหนาแน่นของกำลังงานของคลื่นตกกระทบและคลื่นกระเจิง ตามลำดับ

$\vec{E}^i, \vec{E}^s$ คือความเข้มสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบและคลื่นกระเจิง ตามลำดับ

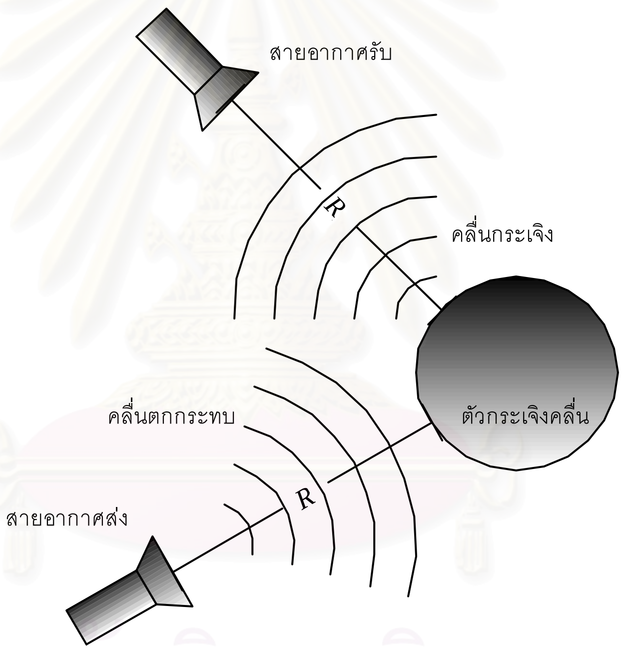
$\vec{H}^i, \vec{H}^s$ คือความเข้มสนามแม่เหล็กของคลื่นตกกระทบและคลื่นกระเจิง ตามลำดับ

หน่วยของ SW จะเป็นหน่วยของความยาวซึ่งจะมีหน่วยเป็นเมตรในระบบ SI และหน่วยของ RCS จะเป็นหน่วยของพื้นที่ซึ่งจะมีหน่วยเป็นตารางเมตรในระบบ SI และโดยทั่วไปมักจะแสดงค่าในรูปของเดซิเบลซึ่งจะเป็น dB/m (dBm) สำหรับ SW และ dB/m^2 (dBsm) สำหรับ RCS โดยเทียบกับค่าอ้างอิงเป็นความยาว 1 เมตรและพื้นที่ 1 ตารางเมตร ตามลำดับ

และโดยทั่วไปแล้วภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุนั้นจะขึ้นอยู่กับขนาดทางไฟฟ้าของวัตถุ, รูปทรงของวัตถุ, วัสดุที่ใช้ทำเป็นวัตถุ, ทิศทางของมุมที่ตกกระทบและทิศทางของตำแหน่งจุดสังเกต และโพลาไรเซชันของภาคส่งและภาครับ นอกจากนี้ยังขึ้นกับระยะห่างของจุดสังเกตอีกด้วย เช่น หากจุดสังเกตอยู่ในบริเวณของสนามระยะใกล้ ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุก็จะขึ้นกับระยะห่างของจุดสังเกต และหากมีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันของวัตถุและเครื่องรับ จะทำให้ภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุขึ้นอยู่กับความเร็วสัมพัทธ์ด้วย เป็นต้น

4.2.2 สมการเรดาร์

ในการหาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุเป้าหมายหรือตัวกระเจิงคลื่นนั้นมักจะใช้หลักการของเรดาร์ที่ใช้ในการการตรวจสอบวัตถุเป้าหมายดังในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 หลักการของเรดาร์ที่ใช้ในการหาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของตัวกระเจิงคลื่น

จากหลักการของเรดาร์นั้นสามารถแสดงในรูปแบบของสมการคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า สมการเรดาร์ (radar equation) ซึ่งมีรูปแบบของสมการดังนี้

$$P_r = \frac{P_t \, G_r \, G_t \, \lambda^2 \, \sigma}{(4\pi)^3 \, R^4} \tag{4.3}$$

โดยที่

P_r เป็นกำลังที่รับได้โดยสายอากาศรับ

P_t เป็นกำลังที่ส่งโดยสายอากาศส่ง

G_r และ G_t อัตราขยายกำลังของสายอากาศรับและสายอากาศส่ง ตามลำดับ

λ เป็นความยาวคลื่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

σ เป็นภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุเป้าหมาย

R เป็นระยะทางระหว่างสายอากาศส่งและวัตถุเป้าหมายซึ่งในที่นี้กำหนดให้เท่ากับระยะทางระหว่างวัตถุเป้าหมายและสายอากาศรับด้วย

แต่ในระบบที่ใช้งานอยู่โดยทั่วไปนั้นมักจะมีการสูญเสียเกิดขึ้นระบบด้วย ดังนั้นจากสมการที่ (4.2) จะได้ว่า

$$P_r = \frac{P_t\, G_r\, G_t\, \lambda^2\, \sigma\, L_s}{(4\pi)^3\, R^4} \tag{4.4}$$

โดยที่ L_s เป็นพารามิเตอร์ที่เกิดจากการสูญเสียของระบบ

และถ้านำสมการที่ (4.3) มาจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปแบบของเดซิเบล จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P_r[dB] = {} & P_t[dB] + G_t[dB] + G_r[dB] + \lambda^2[dB] + \sigma[dB] + L_s[dB] \\ & -(4\pi)^3[dB] - R^4[dB] \end{aligned} \tag{4.5}$$

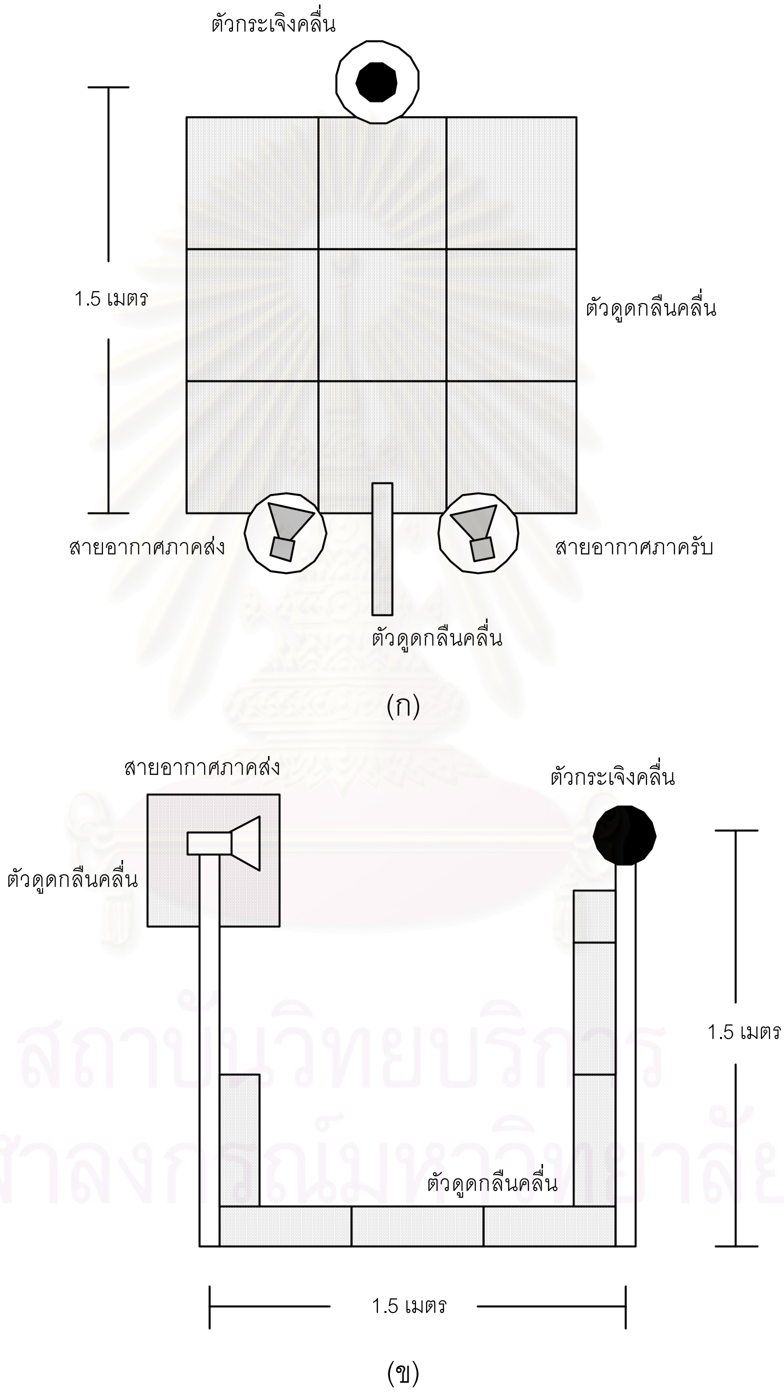
ตัวอย่างการคำนวณค่าในรูปแบบเดซิเบล เช่น $G_t[dB] = 10\log(G_t)$ เป็นต้น

4.3 ผลการทดลองในกรณีตัวอย่าง

ในการทดลองนี้จะใช้ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นวัตถุตัวนำรูปทรงกลมและวัตถุตัวนำรูปทรงกระบอกเป็นกรณีตัวอย่างและหาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุดังกล่าวนี้ โดยใช้แบบจำลองในการทดลองดังรูปที่ 4.2 และรายละเอียดของค่าต่างๆที่ใช้ในการทดลองเป็นดังนี้

กำลังส่ง	0 dBm
สายอากาศที่ใช้ในการทดลอง	สายอากาศฮอร์น
ความถี่ที่ใช้	3.3–4.9 GHz

ความสูงของสายอากาศรับ-ส่ง	1.5	m
ระยะห่างระหว่างตัวกระเจิงคลื่นและสายอากาศส่ง	1.5	m
ระยะห่างระหว่างตัวกระเจิงคลื่นและสายอากาศรับ	1.5	m

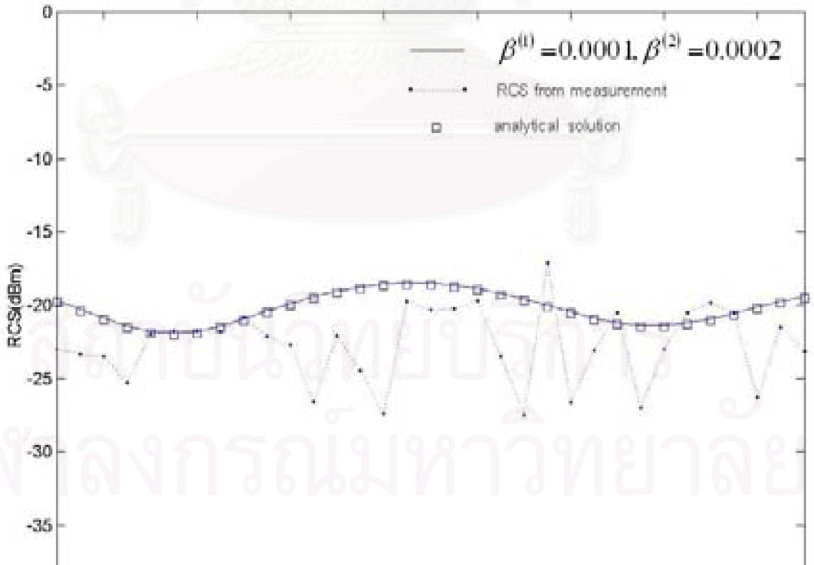


รูปที่ 4.2 แบบจำลองการทดลองวัดการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
(ก) มุมมองจากด้านบน (ข) มุมมองจากด้านข้าง

ในการทดลองนี้ใช้ระยะระหว่างสายอากาศส่งถึงตัวกระเจิงคลื่นเท่ากับระยะระหว่างสายอากาศรับถึงตัวกระเจิงคลื่นโดยใช้ระยะห่างเท่ากับ 1.5 เมตรซึ่งเป็นบริเวณสนามระยะไกลของสายอากาศทั้งสอง และใช้ตัวดูดกลืนคลื่นในการป้องกันผลกระทบจากการสะท้อนของคลื่นในส่วนที่เราไม่ต้องการให้เกิดขึ้น เช่น การสะท้อนของคลื่นจากพื้นดินและการสะท้อนของคลื่นจากฐานตั้งที่ใช้วางตัวกระเจิงคลื่น เป็นต้น

4.3.1 กรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำรูปทรงกลม

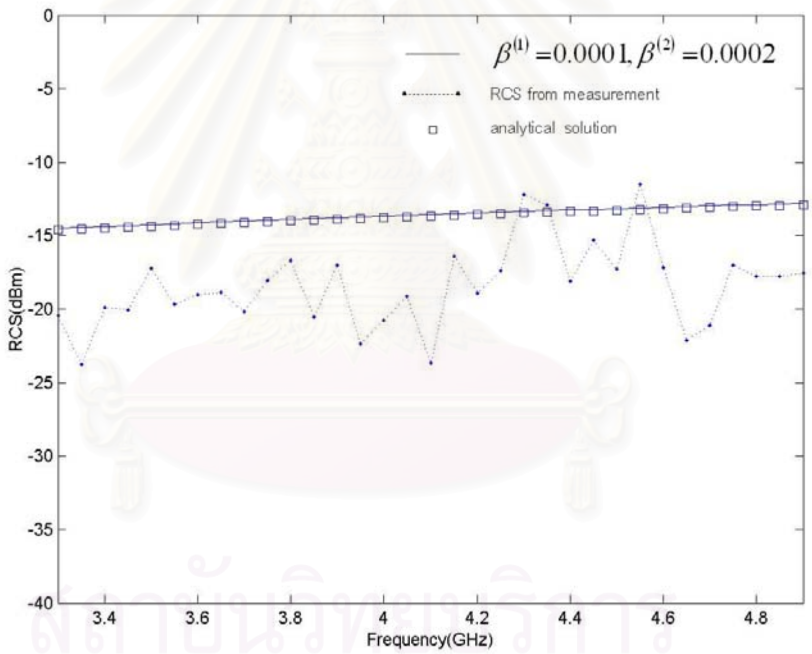
การทดลองในตัวอย่างที่หนึ่งนี้ใช้ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นวัตถุตัวนำรูปทรงกลมที่มีรัศมีของทรงกลมเท่ากับ 0.056 เมตรและชุบผิวด้วยทองแดงเพื่อให้มีสมบัติในการนำไฟฟ้าที่ดีโดยที่ค่านำไฟฟ้าของทองแดงเท่ากับ 5.76×10^7 ซีเมนต์ต่อเมตร พิจารณาหาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เอกสถิตของวัตถุและเปรียบเทียบผลการวัดกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวและผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ พบว่า ผลการวัดมีแนวโน้มใกล้เคียงและไปในทิศทางเดียวกันกับผลการคำนวณ ดังในรูปที่ 4.3 แต่ผลการวัดยังมีช่วงห่างกับผลการคำนวณ ความแตกต่างนี้เกิดจากความแตกต่างกันของแบบจำลองในการวัดกับแบบจำลองในการคำนวณและผลจากแบบจำลองในการวัดไม่เป็นอุดมคติ



รูปที่ 4.3 ผลการทดลองวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ในกรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำรูปทรงกลมที่มีรัศมีของมรงกลมเท่ากับ 0.056 เมตร

4.3.2 กรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำรูปทรงกระบอก

ในการทำการทดลองในตัวอย่างที่สองนี้ใช้ตัวกระเจิงคลื่นที่เป็นวัตถุตัวนำรูปทรงกลมที่มีรัศมีของทรงกระบอกเท่ากับ 0.05 เมตรและมีความสูงของทรงกระบอกเท่ากับ 0.10 เมตร และชุบผิวด้วยทองแดงเพื่อให้มีสมบัติในการนำไฟฟ้าที่ดีโดยที่ค่านำไฟฟ้าของทองแดงเท่ากับ 5.76×10^{7} ซีเมนต์ต่อเมตร พิจารณาหาภาคตัดขวางเป้าเรดาร์เอกสถิตของวัตถุและเปรียบเทียบผลการวัดกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวและผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ พบว่า ผลการวัดมีแนวโน้มไปในทางเดียวกันกับผลการคำนวณ ดังในรูปที่ 4.3 แต่ผลการวัดยังมีช่วงห่างกับผลการคำนวณ ความแตกต่างนี้เกิดจากความแตกต่างกันของแบบจำลองในการวัดกับแบบจำลองในการคำนวณและผลจากแบบจำลองในการวัดไม่เป็นอุดมคติ



รูปที่ 4.4 ผลการทดลองวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กรณีตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำรูปทรงกระบอกที่มีรัศมีของทรงกระบอกเท่ากับ 0.05 เมตรและมีความสูงของทรงกระบอกเท่ากับ 0.10 เมตร

ผลของความแตกต่างของแบบจำลองในการวัดกับแบบจำลองในการคำนวณทำให้ผลการวัดที่ได้จากการทดลองกับผลการคำนวณมีช่วงห่างกันในกรณีตัวอย่างทั้งสองกรณี ข้อแตกต่างของแบบจำลองในการวัดกับแบบจำลองในการคำนวณ เช่น แบบจำลองในการวัดนั้น

กำหนดให้ตำแหน่งของสายอากาศรับและสายอากาศส่งอยู่ใกล้ๆกันหรือก็คือสายอากาศทั้งสองไม่ได้อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน แต่แบบจำลองในการคำนวณนั้นกำหนดให้สายอากาศรับและสายอากาศส่งอยู่ในตำแหน่งเดียวกัน และความไม่เป็นอุดมคติของแบบจำลองในการวัดทำให้ต้องชดเชยค่าสูญเสียต่างๆในการทดลอง เช่น การชดเชยสนามสะท้อนจากพื้นดิน และผลจากสภาพแวดล้อมต่างๆ ในการทดลองเนื่องจากเป็นการทดลองในบริเวณภายนอก (outdoor test) เป็นต้น

4.4 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอการทดลองวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุตัวนำซึ่งเป็นตัวนำไฟฟ้าอย่างดีที่มีค่าความนำไฟฟ้าสูงมากๆ โดยวัตถุที่ใช้ในการทดลองนี้เป็นวัตถุตัวนำที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมและวัตถุตัวนำที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกที่หน้าตัดของทรงกระบอกเป็นรูปวงกลม และเปรียบเทียบผลการทดลองในการวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กับผลการคำนวณที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวและผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ผลการวัดมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันกับผลการคำนวณ แต่ผลการวัดยังมีช่วงห่างกับผลการคำนวณ ความแตกต่างนี้เกิดจากความแตกต่างกันของแบบจำลองในการคำนวณกับแบบจำลองในการวัด เนื่องจากแบบจำลองในการวัดไม่เป็นอุดมคติ ซึ่งทำให้ต้องชดเชยค่าสูญเสียต่างๆในการทดลอง เช่น การชดเชยสนามสะท้อนจากพื้นดิน เป็นต้น

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

ในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์การกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากวัตถุตัวนำโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์และใช้วิธีการเลือกผิวของจุดสังเกตที่เป็นผิวสมมติสองผิวเพื่อแก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์เนื่องจากปัญหาเรโซแนนซ์ภายในจะทำให้คำตอบที่ได้มีความผิดพลาดจากคำตอบที่แท้จริงมากที่ความถี่เรโซแนนซ์ ในวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอปัญหาในรูปแบบของสมการสเกลาร์สำหรับปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติที่ตัวกระเจิงคลื่นมีโครงสร้างเป็นทรงกระบอกและนำเสนอปัญหาในรูปแบบของสมการเวกเตอร์สำหรับปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติที่ตัวกระเจิงคลื่นมีรูปร่างไม่เจาะจงโดยจะพิจารณาในกรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำและเปรียบเทียบผลการคำนวณระหว่างวิธีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียวและวิธีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวโดยใช้เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นตัวบ่งชี้ถึงสภาวะเลวของเมตริกซ์หรือความไม่มีเสถียรภาพของเมตริกซ์และเปรียบเทียบผลการคำนวณภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ที่ได้จากทั้งสองวิธีที่กล่าวมาแล้วกับผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์

จากผลการคำนวณสามารถสรุปได้ว่า วิธีการเลือกผิวของจุดสังเกตที่เป็นผิวสมมติสองผิวสามารถใช้แก้ปัญหาเรโซแนนซ์ภายในที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติและใน 3 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ได้ เนื่องจากไม่มีจุดเอกฐานเกิดขึ้นที่ความถี่ใดเลยและเลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำนั่นคือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีเสถียรภาพในการคำนวณซึ่งในการเลือกผิวของจุดสังเกตที่เป็นผิวสมมติสองผิวนั้นจะใช้การปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ $\beta^{(1)}$ และ $\beta^{(2)}$ ในการปรับเลื่อนผิวของจุดสังเกตและเมื่อเลือกค่า $\beta^{(1)}$ และ $\beta^{(2)}$ ที่มีค่าน้อยมากๆและ $\beta^{(1)}$ มีค่าใกล้เคียงกับ $\beta^{(2)}$ มากๆ นั้นจะทำให้เลขแสดงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าต่ำลงแสดงว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีเสถียรภาพในการคำนวณที่ดีขึ้น

และจากการคำนวณตามวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยใช้ผิวของจุดสังเกตที่เป็นผิวสมมติสองผิวนี้จะใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นจากแบบเดิมที่ใช้ผิวของจุดสังเกตที่เป็นผิวสมมติผิวเดียวเนื่องจากต้องสร้าง

ระบบสมการเชิงเส้นสองชุด แต่อย่างไรก็ตามวิธีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวนั้นจะนำสมการทั้งสองมาคูณกับค่าคงที่ก่อนแล้วจึงนำมารวมกันทำให้สุดท้ายได้ระบบสมการเชิงเส้นเพียงชุดเดียว ดังนั้นในการแก้ระบบสมการนั้นจะใช้เวลาใกล้เคียงกับวิธีที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติผิวเดียว

ในการทดลองวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์ของวัตถุตัวนำซึ่งเป็นตัวนำไฟฟ้าอย่างดีที่มีค่าความนำไฟฟ้าสูงมากๆ โดยวัตถุที่ใช้ในการทดลองนี้เป็นวัตถุตัวนำที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกลมและวัตถุตัวนำที่มีโครงสร้างเป็นรูปทรงกระบอกและมีหน้าตัดของทรงกระบอกเป็นรูปวงกลม และเปรียบเทียบผลการทดลองในการวัดภาคตัดขวางเป้าเรดาร์กับผลการคำนวณที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้ผิวของจุดสังเกตเป็นผิวสมมติสองผิวและผลที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์ ผลการวัดมีแนวโน้มใกล้เคียงและไปในทางเดียวกันกับผลการคำนวณ แต่ผลการวัดยังมีช่วงห่างกับผลการคำนวณ ความแตกต่างนี้เกิดจากความแตกต่างกันของแบบจำลองในการคำนวณกับแบบจำลองในการวัด เนื่องจากแบบจำลองในการวัดไม่เป็นอุดมคติ

ข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้วิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในกรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบรูณ์เท่านั้น ในงานวิจัยต่อไปสามารถทำการวิจัยในกรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัสดุไดอิเล็กตริกและวัสดุที่มีความสูญเสีย

นอกจากนั้นในวิทยานิพนธ์นี้ไม่ได้ให้ความสำคัญกับเทคนิคในการประมาณการอินทิเกรตและวิธีที่ใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อปรับปรุงวิธีการคำนวณให้มีประสิทธิภาพและใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง ดังนั้นในการคำนวณควรเลือกใช้เทคนิคประมาณการอินทิเกรตที่ให้ผลการคำนวณที่แม่นยำและเป็นวิธีที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยและควรเลือกใช้วิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีประสิทธิภาพในการแก้สมการเมตริกซ์ที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีสมาชิกทุกตัวไม่เป็นศูนย์เพื่อช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณของการแก้ระบบสมการเชิงเส้น

รายการอ้างอิง

Ahn, C.H., Jeong, B.H., and Lee, S.Y. Efficient vectorial hybrid FE-BE method for electromagnetic scattering problem. IEEE Transactions on Magnetics. 30, 5 (September 1994): 3136-3139.

Balanis, C.A. Advanced Engineering electromagnetics. John Wiley & Son, 1989.

Becker, A.A. The boundary element method in engineering: A complete course. McGraw-Hill, 1992.

Belhora, A.K., and Pichon, L. Efficient absorbing boundary condition for the finite element solution of 3D scattering problems. IEEE Transactions on Magnetics 31, 3 (May 1995): 1534-1537.

Bhattacharyya, A.K., and Sengupta, D.L. Radar cross section analysis and control. Artech House, 1991.

Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C. Boundary element techniques theory and applications in engineering. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.

Canning, F.X. Protecting EFIE based scattering computation from effects of interior resonance. IEEE Transaction on Antennas Propagation 39, 11 (November 1991): 1545-1552.

Chen, G. Boundary element methods. Academic Press, 1992.

Chen, J. and Hong, W. Scattering analysis of 3-D body by MEI. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1997, 1:310-313.

Chakrabarti, A. Galerkin methods in solving integral equations with applications to scattering problems. VIIth International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, 1998, MMET 98, 1 (1998): 79-87.

Collins, J.D., Jin, J.M., and Volakis, J.L., Eliminating interior resonances in finite element-boundary integral methods for scattering. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 40, 12 (December 1992): 1583-1585.

Correia, L.M. An algorithm for the analysis of scattering by arbitrary shape conducting bodies in the resonance region. Antennas and Propagation Society International Symposium, 1992. AP-S. Digest, 2 (1992).:769-772.

Eibert, T.F., and Hansen, V. On the interior resonance problem of FEM/BEM-hybrid-and BEM approaches. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1996, AP-S. Digest, 1 (1996): 154-157.

Gratkowski, S. New Infinite element for a finite element analysis of 2D scattering problems. IEEE Transaction on Magnetics 32, 3 (May 1996): 882-885.

Huber, C.J., Rieger, W., Haas, M, and Rucker, W.M., Application of curlivinear high order edge elements to scattering problems using the boundary element method., IEEE Transactions on Magnetics 35, 3 (May 1999):1510-1513.

Jin, J.M. The finite element method in electromagnetics. John Wiley & Sons,1993.

Kagami, S., and Fukai, I. Application of boundary –element method to electromagnetic field problems. IEEE Transactions Microwave Theory Technique 32, 4 (April 1984): 455-461.

Kingsley, S., and Quegan, S. Understanding radar systems. McGraw-Hill. 1992.

Leviatan, Y. Generalized formulations for electromagnetic scattering from perfectly conducting and homogeneous material bodies-theory and numerical solution. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 36, 12 (December 1988): 1722-1734.

Liu, Y., and Webb, K.J. Detection of interior resonance errors of surface integral boundary conditions for scattering problems. Antennas and Propagation Society International Symposium, 1995. AP-S. Digest, 2 (1995): 1029-1032.

Liu, Y., and Webb, K.J. On detection of the interior resonance errors of surface integral boundary conditions for electromagnetic scattering problems. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 49, 6 (June 2001): 939-943.

Matsuhara, M., Kamura, M., and Maruta, A. Boundary element analysis of electromagnetic field in cylindrical structures. International Conference on Computation in Electrmagnetics, 1991: 43-46.

Mittra, R. Numerical and asymptotic techniques in electromagnetics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975.

Monzon, J.C., and Damaskos, N.J. A scheme for eliminating internal resonance: the parasitic body technique. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 42, 8 (August 1994):1089-1096.

Morita, N., Kumagai, N., and Mautz, J.R. Integral equation methods for electromagnetics. Artech House, 1990.

Sheng, X.Q., Jin, J.M., Chew, W.C., and Lu, C.C. Solution of combined-field integral equation using multilevel fast multipole algorithm for scattering by homogeneous bodies. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 46, 11 (November 1998): 1718-1726.

Tai, C.T. Gennerailized Vector and dyadic analysis. IEEE Press, New York, 1992.

Toyoda, I., Matsuhara, M., and Kumagai, N. Extended integral equation formulation for scattering problems from a cylindrical scatterer. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 36, 11 (November 1988): 1580-1586.

Tsang, L., Kong, J.A., and Ding, K.H. Scattering of electromagnetic waves. John Wiley & Sons, 2000.

Yamashita, E. Analysis methods for electromagnetic wave problems. Artech House, 1990.

Yang, B.S., Gillson, A.W., and Goggans, P.M. Interior resonance problems associates with hybrid integral equation/partial differential equation methods. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1992, 2 (1992):781-784.

Yao-Bi, J.L., Nicolas, L., and Nicolas, A. 2D electromagnetic scattering by simple shape: a quantification of the error due too open boundary. IEEE Transactions on Magnetics 29, 2 (March 1993): 1830-1834.

Yufa, S., and Shanjia, X. A new method for solving the induced surface current for arbitrary conducting bodies at resonant frequencies. 2000 2nd International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology Proceedings. (2000):371-374.

ภาคผนวก

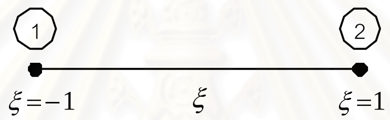
ภาคผนวก ก

การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์

ก.1 การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 1 มิติ

การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 1 มิติในส่วนนี้จะเป็นการประมาณการอินทิเกรตบนอีลีเมนต์เชิงเส้นซึ่งจะอยู่ในรูปของอีลีเมนต์อ้างอิงใน 1 มิติดังรูปที่ (ก.1) ที่ประกอบด้วย intrinsic coordinate ξ ซึ่งการประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 1 มิติแสดงได้ดังนี้

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi = \sum_{g=1}^{G} f(\xi_g)w_g \qquad \text{(ก.1)}$$



รูปที่ ก.1 อีลีเมนต์อ้างอิงใน 1 มิติ

ตารางที่ ก.1 พิกัดของจุดอินทิเกรตและตัวถ่วงน้ำหนักในการประมาณอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 1 มิติ

G	$\pm\xi_g$	w_g
2	0.5773 5026 9189 6257 6451	1.0000 0000 0000 0000 0000
3	0.7745 9666 9241 4833 7704	0.5555 5555 5555 5555 5556
	0.0000 0000 0000 0000 0000	0.8888 8888 8888 8888 8889
4	0.8611 3631 1594 0525 7522	0.3478 5484 5137 4538 5737
	0.3399 8104 3584 8562 6480	0.6521 4515 4862 5461 4263
5	0.9061 7984 5938 6639 9280	0.2369 2688 5056 1890 8751
	0.5384 6931 0105 6830 9104	0.4786 2867 0499 3664 6804
	0.0000 0000 0000 0000 0000	0.5688 8888 8888 8888 8889
6	0.9324 6951 4203 1520 2781	0.1713 2449 2379 1703 4504
	0.6612 0938 6466 2645 1366	0.3607 6157 3048 1386 0757
	0.2386 1918 6083 1969 0863	0.4679 1393 4572 6910 4739
7	0.9491 0791 2342 7585 2453	0.1294 8496 6168 8696 9327
	0.7415 3118 5599 3944 3986	0.2797 0539 1489 2766 6790
	0.4058 4515 1377 3971 6691	0.3818 3005 0505 1189 4495
	0.0000 0000 0000 0000 0000	0.4179 5918 3673 4693 8776
8	0.9602 8985 6497 5362 3168	0.1012 2853 6290 3762 5915
	0.7966 6647 7413 6267 3959	0.2223 8103 4453 3744 7054
	0.5255 3240 9916 3289 8582	0.3137 0664 5877 8872 8734
	0.1834 3464 2495 6498 0494	0.3626 8378 3378 3619 8297
9	0.9681 6023 9507 6260 8984	0.0812 7438 8361 5744 1197
	0.8360 3110 7326 6357 9430	0.1806 4816 0694 8574 0406
	0.6133 7143 2700 5903 9731	0.2606 1069 6402 9354 6232
	0.3242 5342 3403 8089 2904	0.3123 4707 7040 0028 4007
	0.0000 0000 0000 0000 0000	0.3302 3935 5001 2597 6317
10	0.9739 0.652 8517 1717 2008	0.0666 7134 4308 6881 3759
	0.8650 6336 6688 9845 1073	0.1494 5134 9150 5805 9315
	0.6794 0956 8299 0244 0623	0.2190 8636 2515 9820 4400
	0.4333 9539 4129 2471 9080	0.2692 6671 6309 9963 5509
	0.1488 7433 8981 6312 1089	0.2955 2422 4714 7528 7017

ก.2 การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 2 มิติ

การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 2 มิติในส่วนนี้จะจำกัดอยู่ที่การประมาณการอินทิเกรตบนอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมซึ่งจะอยู่ในรูปของอีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ (ก.2) ที่ประกอบด้วย intrinsic coordinate η_1, η_2 และ η_3 ซึ่งการประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 2 มิติแสดงได้ดังนี้

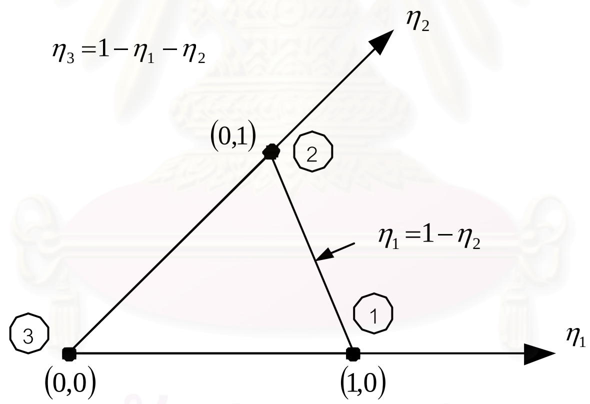
$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-\eta_1} f(\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1 d\eta_2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} WJ(j)WI(i)\cdot f(\eta_1,\eta_2) \qquad \text{(ก.2)}$$

โดยที่

$$WJ(j) = AJ(j)(1-SJ(j)) \qquad \text{(ก.3)}$$

$$\eta_1(j) = SJ(j) \qquad \text{(ก.4)}$$

$$\eta_2(i,j) = RI(i)(1-SJ(j)) \qquad \text{(ก.5)}$$



รูปที่ ก.2 อีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยม

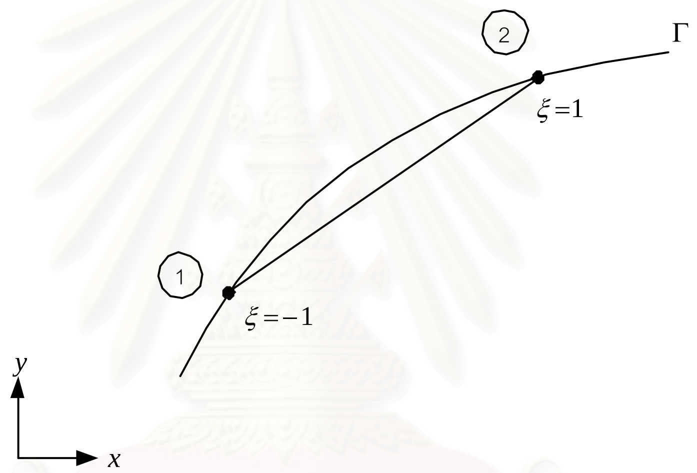
ตารางที่ ก.2 พิกัดของจุดอินทิเกรตและตัวถ่วงน้ำหนักในการประมาณอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 2 มิติ

Integration order	Number of points	*RI*	*WI*	*SJ*	*AJ*
1	1×1	0.5000000000	1.0000000000	0.3333333333	0.7500000000
3	2×2	0.2113248654	0.5000000000	0.1550510257	0.3764030627
		0.7886751346	0.5000000000	0.6449489743	0.5124858262
5	3×3	0.1127016654	0.2777777778	0.0885879595	0.2204622112
		0.5000000000	0.4444444444	0.4094668644	0.3881934688
		0.8872983346	0.2777777778	0.7876594618	0.3288443200
7	4×4	0.0694318442	0.1739274226	0.0571041961	0.1437135608
		0.3300094782	0.3260725774	0.2768430136	0.2813560151
		0.6699905218	0.3260725774	0.5835904324	0.3118265230
		0.9305681558	0.1739274226	0.8602401357	0.2231039011
9	5×5	0.0469100770	0.1184634425	0.0398098571	0.1007941926
		0.2307653449	0.2393143353	0.1980134179	0.2084506672
		0.5000000000	0.2844444444	0.4379748102	0.2604633916
		0.7692346551	0.2393143353	0.6954642734	0.2426935942
		0.9530899230	0.1184634425	0.9014649142	0.1598203766

ภาคผนวก ข

อีลีเมนต์เชิงเส้น

ภาคผนวกนี้จะกล่าวถึงรูปแบบของอีลีเมนต์เชิงเส้นในปริภูมิ 2 มิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 2 มิติโดยวิธีเบาวน์ดาริอีลีเมนต์ และการแปลงระบบพิกัดของอีลีเมนต์เชิงเส้นในระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดของอีลีเมนต์อ้างอิงใน 1 มิติ เนื่องจากเมื่อผิวขอบเขตของวัตถุถูกแบ่งออกเป็นอีลีเมนต์เชิงเส้นแล้วในการอินทิเกรตเชิงเส้นในแต่ละอีลีเมนต์มักจะใช้การประมาณการอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยใช้ local intrinsic coordinate ξ มากกว่าที่จะใช้การอินทิเกรตเชิงเส้นโดยตรง



รูปที่ ข.1 อีลีเมนต์เชิงเส้นที่อยู่ในปริภูมิ 2 มิติ

กำหนดให้พิกัดที่ตำแหน่ง (x, y) ใดๆ ดังรูปที่ ข.1 เป็นดังนี้

$$x(\xi)=\sum_{c=1}^{2} N_c(\xi)x_c = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \qquad (ข.1)$$

$$y(\xi)=\sum_{c=1}^{2} N_c(\xi)y_c = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 \qquad (ข.2)$$

โดยที่

$N_c(\xi)$ เป็นฟังก์ชันฐานเชิงเส้นซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า $N_c(\xi)=1$ ที่โนด c และ $N_c(\xi)=0$ ที่โนดอื่นๆ

ดังนั้นฟังก์ชันฐาน $N_1(\xi)$ และ $N_2(\xi)$ จะอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นดังนี้

$$N_1(\xi)=a_1\xi+a_2 \tag{ข.3}$$

$$N_2(\xi)=a_3\xi+a_4 \tag{ข.4}$$

โดยที่ a_1, a_2, a_3 และ a_4 เป็นค่าคงที่

เมื่อพิจารณาในเงื่อนไขในการสร้างฟังก์ชันฐาน $N_c(\xi)$ ดังที่กล่าวมาแล้วจะได้ว่า

ที่โนด 1 : $\xi=-1$

$$N_1(-1)=1 \tag{ข.5}$$

$$N_2(-1)=0 \tag{ข.6}$$

และที่โนดที่ 2 : $\xi=1$

$$N_1(1)=0 \tag{ข.7}$$

$$N_2(1)=1 \tag{ข.8}$$

และจากสมการที่ (ข.5) - (ข.8) เมื่อแทนสมการที่ (ข.3) และ (ข.4) ลงไปเพื่อหาค่าคงที่ a_1, a_2, a_3 และ a_4 ได้ผลดังนี้

$$a_1=-\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{2} \text{ และ } a_4=\frac{1}{2} \tag{ข.9}$$

ดังนั้นฟังก์ชันฐาน $N_1(\xi)$ และ $N_2(\xi)$ จะเป็นดังนี้

$$N_1(\xi)=\frac{1}{2}(1-\xi) \tag{ข.10}$$

$$N_2(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi) \tag{ข.11}$$

และใช้การแปลงจาคอเบียน (Jacobian transformation) ในการแปลงตัวแปรจากตัวแปรของเส้นโค้ง Γ ในระบบพิกัดฉาก (x, y) ไปยังระบบพิกัดในอีกโดเมนหนึ่งที่ประกอบด้วย intrinsic coordinate ξ เพื่อให้ง่ายในการอ้างอิงถึงพจน์ที่อยู่ในเครื่องหมาย

อินทิกรัลและเพื่อใช้การแปลงตัวแปรจากเส้นโค้งของการอินทิเกรตจริงไปยังระบบที่ประกอบด้วย intrinsic coordinate ξ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอีลีเมนต์ใน 1 มิติ ดังรูปที่ ข.1

เมื่อพิจารณาส่วนย่อยของอีลีเมนต์เชิงเส้นจะได้ว่า

$$dl = J(\xi)d\xi = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2}\ d\xi \qquad (ข.12)$$

โดยที่

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{(x_2 - x_1)}{2} \qquad (ข.13)$$

$$\frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{(y_2 - y_1)}{2} \qquad (ข.14)$$

ดังนั้นจะได้การแปลงจาคอเบียนเป็นดังนี้

$$J(\xi) = \frac{1}{4}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{l}{4} \qquad (ข.15)$$

โดยที่

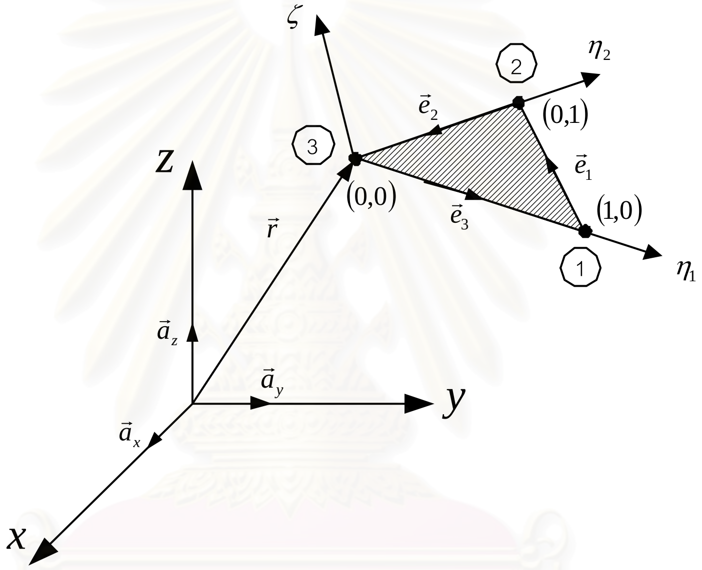
l เป็นความยาวของอีลีเมนต์เชิงเส้นซึ่งเท่ากับระยะทางจากโนดที่ 1 ไปยังโนดที่ 2 ในระบบพิกัดฉาก (x, y)

ซึ่งจะใช้การแปลงจาคอเบียนในการแปลงพจน์ของการอินทิเกรตจาก $\int [-]dl = \int [-]\ J(\xi)d\xi$

ภาคผนวก ค

อีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม

ภาคผนวกนี้จะกล่าวถึงรูปแบบของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมในปริภูมิ 3 มิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติโดยวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ และการแปลงระบบพิกัดของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมในระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดของอีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยมเนื่องจากเมื่อผิววัตถุถูกแบ่งออกเป็นอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมแล้วในการอินทิเกรตเชิงผิวในแต่ละอีลีเมนต์มักจะใช้การประมาณการอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยใช้ local intrinsic coordinate η_1, η_2 มากกว่าที่จะใช้การอินทิเกรตเชิงผิวโดยตรง



รูปที่ ค.1 อีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่อยู่ในปริภูมิ 3 มิติ

เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $(\vec{r})$ ที่ตำแหน่งใดๆ ดังรูปที่ ค.1 เป็นดังนี้

$$\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z \;= x_3\,\vec{a}_x + y_3\,\vec{a}_y + z_3\,\vec{a}_z + \eta_1\, l_3\,\vec{e}_3 + \eta_2\, l_2\left(-\vec{e}_2\right) \quad \text{(ค.1)}$$

โดยที่

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{l_1}\left[(x_2 - x_1)\vec{a}_x + (y_2 - y_1)\vec{a}_y + (z_2 - z_1)\vec{a}_z\,\right] \quad \text{(ค.2)}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{l_2}\left[(x_3 - x_2)\vec{a}_x + (y_3 - y_2)\vec{a}_y + (z_3 - z_2)\vec{a}_z\,\right] \quad \text{(ค.3)}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{l_3}\left[(x_1 - x_3)\vec{a}_x + (y_1 - y_3)\vec{a}_y + (z_1 - z_3)\vec{a}_z\right] \tag{ค.4}$$

เมื่อแทน $\vec{e}_2$ และ $\vec{e}_3$ ลงในสมการที่ (ค.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{r} \;=\; & x_3\,\vec{a}_x + y_3\,\vec{a}_y + z_3\,\vec{a}_z + \eta_1(x_1 - x_3)\vec{a}_x + \eta_1(y_1 - y_3)\vec{a}_y + \eta_1(z_1 - z_3)\vec{a}_z + \\ & \eta_2(x_2 - x_3)\vec{a}_x + \eta_2(y_2 - y_3)\vec{a}_y + \eta_2(z_2 - z_3)\vec{a}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(x_3 + \eta_1(x_1 - x_3) + \eta_2(x_2 - x_3)\right)\vec{a}_x + \left(y_3 + \eta_1(y_1 - y_3) + \eta_2(y_2 - y_3)\right)\vec{a}_y \\ &\quad + \left(z_3 + \eta_1(z_1 - z_3) + \eta_2(z_2 - z_3)\right)\vec{a}_z\end{aligned} \tag{ค.5}$$

และจากสมการที่ (ค.1) ซึ่ง $\vec{r} = x\,\vec{a}_x + y\,\vec{a}_y + z\,\vec{a}_z$ ดังนั้น

$$x = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + (1 - \eta_1 - \eta_2)x_3 \tag{ค.6}$$

$$y = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + (1 - \eta_1 - \eta_2)y_3 \tag{ค.7}$$

$$z = \eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + (1 - \eta_1 - \eta_2)z_3 \tag{ค.8}$$

และถ้ากำหนดให้ $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$ หรือก็คือ $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1$ (ค.9)

จากสมการที่ (ค.6)-(ค.8) ทั้งสามสมการจัดรูปให้อยู่ในรูปสมการเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \tag{ค.10}$$

เมื่อพิจารณา η_1, η_2 ในรูปของตัวแปร x, y, z โดยเริ่มจากสมการที่ (ค.6) และ (ค.7) จะได้ว่า

$$\eta_1 = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)} \tag{ค.11}$$

$$\eta_2 = \frac{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)} \tag{ค.12}$$

และ η_3 สามารถหาได้จาก η_1 และ η_2 จาก $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$

$$\eta_3 = \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)} \tag{ค.13}$$

และพบว่าพื้นที่ของภาพฉายของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมบนระนาบ xy

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left((x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right) \qquad (ค.14)$$

ดังนั้น η_1, η_2, η_3 แสดงในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\eta_i = \frac{1}{2A}\left(2A_i^0 + b_i x + a_i y\right) \qquad (ค.15)$$

โดยที่

$$a_i = x_k - x_j \qquad (ค.16)$$

$$b_i = y_j - y_k \qquad (ค.17)$$

$$2A_i^0 = x_j y_k - x_k y_j \qquad (ค.18)$$

และ $$A = \frac{1}{2}\left[a_2 b_1 - a_1 b_2\right] \qquad (ค.19)$$

ซึ่งมี $(i, j, k) = \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}$ เป็นรูปรหัสเวียน (cyclic code)

เมื่อพิจารณาพิกัดพื้นที่ (area coordinate) ของอีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ ค.2 พบว่า พิกัดพื้นที่ของอีลีเมนต์ (L_1, L_2, L_3) เป็นดังนี้

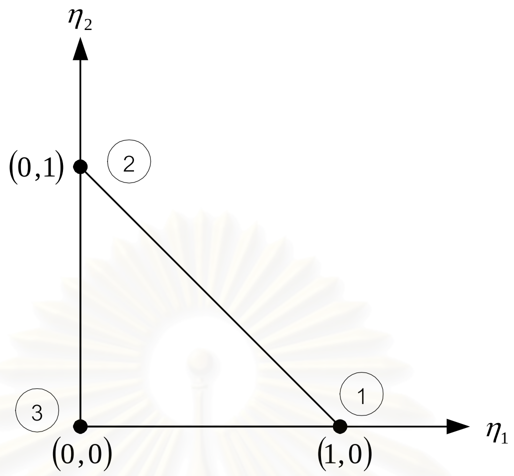
$$L_1 = \eta_1 \qquad (ค.20)$$

$$L_2 = \eta_2 \qquad (ค.21)$$

$$L_3 = \eta_3 \qquad (ค.22)$$

และใช้การแปลงจาคอเบียนในการแปลงอนุพันธ์ของฟังก์ชันใดๆ ในระบบพิกัดฉาก (x, y, z) ไปยังระบบพิกัดในอีกโดเมนหนึ่งที่ประกอบด้วย intrinsic coordinate (η_1, η_2, ξ) เพื่อให้ง่ายในการอ้างอิงถึงพจน์ที่อยู่ในเครื่องหมายอินทิกรัลและเพื่อใช้การแปลงตัวแปรจากพื้นผิวของการอินทิเกรตจริงไปยังระบบที่ประกอบด้วย intrinsic coordinate η_1 และ η_2 ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยมใน 2 มิติดังรูปที่ ค.1 และเนื่องจากพื้นผิวของการ

อินทิเกรตจริงๆ นั้นอยู่ในปริภูมิ 3 มิติทำให้มีการเปลี่ยนแปลงค่าของพิกัดในทั้ง 3 ตัวแปรคือ x, y และ z



รูปที่ ค.2 อีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยมในโดเมน (η_1, η_2)

สำหรับฟังก์ชัน u ใดๆ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \eta_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \eta_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta_1} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta_2} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta_2} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{ค.23}$$

หรือ $$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \eta_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$ และในทางกลับกันด้วย

เมื่อพิจารณาส่วนย่อยเชิงผิวของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม

$$d(area) = dS$$

$$= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_2} \right| d\eta_1 d\eta_2$$

$$= |G| d\eta_1 d\eta_2 \tag{ค.24}$$

โดยที่

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_1}, \frac{\partial y}{\partial \eta_1}, \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \right) \quad (ค.25)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_2}, \frac{\partial y}{\partial \eta_2}, \frac{\partial z}{\partial \eta_2} \right) \quad (ค.26)$$

และ $|G|$ มีค่าเท่ากับขนาดของเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากกับอีลีเมนต์ $\vec{n}_0$

และเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากกับอีลีเมนต์ $\vec{n}_0$ แสดงได้ดังนี้

$$\vec{n}_0 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) = (g_1, g_2, g_3) \quad (ค.27)$$

โดยที่

$$g_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta_1} \frac{\partial z}{\partial \eta_2} - \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial y}{\partial \eta_2} \right) \quad (ค.28)$$

$$g_2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial x}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x}{\partial \eta_1} \frac{\partial z}{\partial \eta_2} \right) \quad (ค.29)$$

$$g_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta_1} \frac{\partial y}{\partial \eta_2} - \frac{\partial y}{\partial \eta_1} \frac{\partial x}{\partial \eta_2} \right) \quad (ค.30)$$

และจากสมการที่ (ค.6)-(ค.8) ซึ่งแสดงพิกัด x, y และ z ในรูปของ η_1-และ η_2 จะได้ว่า

$$g_1 = (y_1 - y_3)(z_2 - z_3) - (z_1 - z_3)(y_2 - y_3) \quad (ค.31)$$

$$g_2 = (z_1 - z_3)(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3)(z_2 - z_3) \quad (ค.32)$$

$$g_3 = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3) \quad (ค.33)$$

ดังนั้นค่าของ $|G|$ แสดงได้ดังนี้

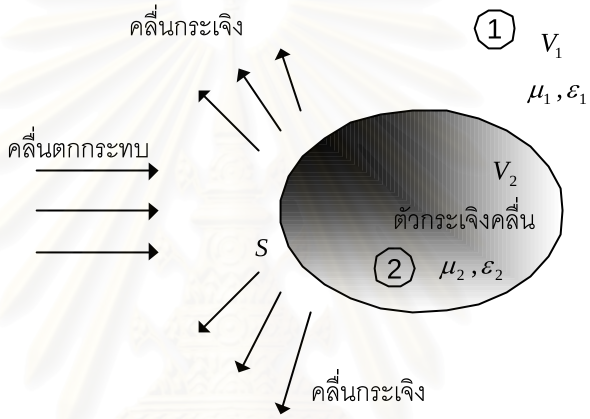
$$|G| = \left(g_1{}^2 + g_2{}^2 + g_3{}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (ค.34)$$

ซึ่งจะใช้การแปลงจาคอเบียนในการแปลงพจน์ของการอินทิเกรตจาก $\int[-]dS=\int[-]|G|d\eta_1 d\eta_2$

ภาคผนวก ง

การพิสูจน์สมการอินทิกรัลของปัญหาการกระเจิงคลื่นใน 3 มิติ

ภาคผนวกนี้กล่าวถึงการพิสูจน์สมการอินทิกรัลในปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาในกรณีของสมการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้าเท่านั้น และในกรณีของสมการอินทิกรัลของสนามแม่เหล็กนั้นสามารถหาได้โดยใช้วิธีเดียวกันนี้ ในการพิสูจน์สมการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้านี้จะเริ่มพิจารณาจากสมการคลื่นแบบเวกเตอร์ของปัญหาดังรูปที่ ง.1



รูปที่ ง.1 ปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากตัวกระเจิงคลื่น

เมื่อพิจารณาในบริเวณที่ 1 ซึ่งสมการคลื่นแบบเวกเตอร์เป็นดังนี้

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E}_1(\vec{p}) + \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 \vec{E}_1(\vec{p}) = j\omega\mu_1 \vec{J}_1(\vec{p}) \qquad (ง.1)$$

และในบริเวณที่ 2 มีสมการคลื่นแบบเวกเตอร์เป็นดังนี้

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E}_2(\vec{p}) + \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \vec{E}_2(\vec{p}) = 0 \qquad (ง.2)$$

และเมื่อพิจารณา dyadic Green 's function ในบริเวณที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$$-\nabla \times \nabla \times \overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q}) + \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 \overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q}) = \bar{\bar{I}}\,\delta(\vec{p}-\vec{q}) \qquad (ง.3)$$

$$-\nabla \times \nabla \times \overline{\overline{G}}_2(\vec{p},\vec{q}) + \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \overline{\overline{G}}_2(\vec{p},\vec{q}) = \bar{\bar{I}}\,\delta(\vec{p}-\vec{q}) \qquad (ง.4)$$

และในที่นี้บริเวณที่ 1 จะกำหนดให้เป็นอวกาศว่าง ดังนั้น $\mu_1 = \mu_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ และ dyadic Green 's function ในบริเวณที่ 1 คือ

$$\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q}) = \overline{\overline{G}}_0(\vec{p},\vec{q}) = \left(\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{{k_0}^2}\right) G_0(\vec{p},\vec{q}) \tag{ง.5}$$

โดยที่

$G_0(\vec{p},\vec{q}) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\exp\left(-jk_0 |\vec{p}-\vec{q}|\right)}{|\vec{p}-\vec{q}|}$ เป็นฟังก์ชันกรีนแบบสเกลาร์ของอวกาศว่างในปริภูมิ 3 มิติ

เมื่อพิจารณาปัญหาของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในบริเวณที่ 1 ซึ่งถือว่าเป็น ปัญหาภายนอก (exterior problem) ซึ่งสนามรวมในบริเวณที่ 1 นี้ประกอบด้วยสนามของคลื่นตกกระทบและสนามของคลื่นกระเจิง และใช้ทฤษฎีบทของกรีนแบบเวกเตอร์กับสมการที่ (ง.1) และ (ง.3) จะได้

$$-\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{E}_1(\vec{p}) + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\vec{E}_1(\vec{p}) = j\omega\mu_0\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\vec{J}_1(\vec{p}) \tag{ง.6}$$

$$-\vec{E}_1(\vec{p})\cdot\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q}) + \omega^2\mu_0\varepsilon_0\vec{E}_1(\vec{p})\cdot\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q}) = \delta(\vec{p}-\vec{q})\vec{E}_1(\vec{p})\cdot\overline{\overline{I}} \tag{ง.7}$$

และเมื่อนำสมการที่ (ง.6) และ (ง.7) ทั้งสองสมการนี้มาลบกันจะได้ว่า

$$\begin{aligned}&-\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{E}_1(\vec{p}) + \vec{E}_1(\vec{p})\cdot\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\\ &= j\omega\mu_0\overline{\overline{G}}(\vec{p},\vec{q})\cdot\vec{J}_1(\vec{p}) - \delta(\vec{p}-\vec{q})\vec{E}_1(\vec{p})\cdot\overline{\overline{I}}\end{aligned} \tag{ง.8}$$

และจากสมการที่ (ง.8) นี้อินทิเกรตบนปริมาตร V_1 ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\begin{aligned}&\int_{V_1}\left\{-\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{E}_1(\vec{p}) + \vec{E}_1(\vec{p})\cdot\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\right\}dV\\ &= \vec{E}^{inc}(\vec{p}) - \int_{V_1}\delta(\vec{p}-\vec{q})\vec{E}_1(\vec{q})dV\end{aligned} \tag{ง.9}$$

โดยที่

$$\vec{E}^{inc}(\vec{q}) = j\omega\mu_0\int_{V_1}\left\{\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\vec{J}_1(\vec{p})\right\}dV \tag{ง.10}$$

และให้เมื่อพิจารณาพจน์ที่ 2 ของสมการที่ (ง.9) ดังนี้

$$\int_{V_1}\left\{\delta(\bar{p}-\vec{q})\vec{E}_1(\bar{p})\cdot\bar{\bar{I}}\right\}dV=\int_{V_1}\left\{\delta(\bar{p}-\vec{q})\vec{E}_1(\bar{p})\right\}dV=\begin{cases}\vec{E}_1(\vec{q}),\ \vec{q}\in V_1\\ \ \ 0\quad\ ,\ \vec{q}\notin V_1\end{cases} \quad (ง.11)$$

และจาก

$$-\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{E}_1(\bar{p})+\vec{E}_1(\bar{p})\cdot\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})$$
$$=\nabla\cdot\left\{\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})\times\vec{E}_1(\bar{p})-\nabla\times\vec{E}_1(\bar{p})\times\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})\right\} \quad (ง.12)$$

เมื่อแทนสมการที่ (ง.12) ลงในสมการที่ (ง.9) และใช้ทฤษฎีบทของไดเวอร์เจนซ์ (divergence ‘s theorem) กับพจน์ทางซ้ายมือของสมการที่ (ง.9) ผลที่ได้คือ

$$\int_{V_1}\left[\nabla\cdot\left\{\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})\times\vec{E}_1(\bar{p})-\nabla\times\vec{E}_1(\bar{p})\times\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})\right\}\right]dV$$
$$=\int_{S+S_{\inf}}\left\{\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})\times\vec{E}_1(\bar{p})-\nabla\times\vec{E}_1(\bar{p})\times\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})\right\}\cdot\vec{n}_{out\,V_1}\,dS$$
$$=-\int_{S+S_{\inf}}\left\{\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\times\vec{E}_1(\vec{p},\vec{q})-\nabla\times\vec{E}_1(\vec{p})\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\right\}\cdot\vec{n}_{inV_1}\,dS \quad (ง.13)$$

จาก $\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})=\overline{\overline{G}}_0(\bar{p},\vec{q})$ โดยที่ $\overline{\overline{G}}_0(\bar{p},\vec{q})$ เป็น dyadic Green ‘s function ของอวกาศว่างซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของการแผ่กระจายคลื่น (radiation boundary condition) ทำให้พจน์ของอินทิกรัลที่ผิว $S_{\inf}$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

$$\left.\begin{array}{l}\vec{q}\in V_1,\vec{E}_1(\vec{q})\\ \vec{q}\notin V_1,\ \ 0\end{array}\right\}=\vec{E}^{inc}(\vec{q})+\oint_S\left\{\left(\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\right)\times\vec{E}_1(\vec{p})-\left(\nabla\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\right\}\cdot\vec{n}\,dS_q \quad (ง.14)$$

โดยที่

$\vec{n}=\vec{n}_{inV1}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิว S และมีทิศทางพุ่งเข้าสู่บริเวณ V_1

และเมื่อพิจารณาพจน์ที่หนึ่งภายในอินทิกรัลและใช้สมการที่ (ง.5) และใช้สมบัติที่ว่า $\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\bar{p},\vec{q})=\nabla\times\bar{\bar{I}}\,G_0(\vec{p},\vec{q})=-\bar{\bar{I}}\times\nabla G_0(\vec{p},\vec{q})$ จะได้ว่า

$$\vec{n}\cdot\left(\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\right)\times\vec{E}_1(\vec{p}) = -\nabla\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\left(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)$$

$$= \bar{\bar{I}}\times\nabla G_0(\vec{p},\vec{q})\cdot\left(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)$$

$$= \left(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)\cdot\,\bar{\bar{I}}\times\nabla G_0(\vec{p},\vec{q})$$

$$= \bar{\bar{I}}\cdot\nabla G_0(\vec{p},\vec{q})\times\left(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)$$

$$= \nabla G_0(\vec{p},\vec{q})\times\left(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)$$

$$= -\left(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)\times\nabla G_0(\vec{p},\vec{q}) \qquad (ง.15)$$

และเมื่อพิจารณาพจน์ที่สองภายในอินทิกรัลและใช้สมการที่ (ง.5) จะได้

$$\vec{n}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q}) = \overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\vec{n}\times\left(\nabla\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)$$

$$= \overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\vec{n}\times\left(-j\omega\mu_0\vec{H}_1(\vec{p})\right)$$

$$= -j\omega\mu_0\,\overline{\overline{G}}_1(\vec{p},\vec{q})\cdot\left(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{p})\right)$$

$$= -j\omega\mu_0\left(\bar{\bar{I}}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)G_0(\vec{p},\vec{q})\cdot\left(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{p})\right)$$

$$= -j\omega\mu_0\left(\bar{\bar{I}}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{p})\right)\right)G_0(\vec{p},\vec{q}) +$$

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{p})\right)\cdot\nabla\nabla G_0(\vec{p},\vec{q})$$

$$= -j\omega\mu_0\left(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{p})\right)G_0(\vec{p},\vec{q}) +$$

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{p})\right)\cdot\nabla\nabla G_0(\vec{p},\vec{q}) \qquad (ง.16)$$

เมื่อแทนสมการที่ (ง.15) และ (ง.16) ทั้งสองนี้ลงในสมการอินทิกรัลที่ (ง.14) จะได้ว่า

$$\left.\begin{array}{l}\vec{q}\in V_1,\vec{E}_1(\vec{q})\\ \vec{q}\notin V_1,\quad 0\end{array}\right\} = \vec{E}^{inc}(\vec{q}) - \oint_S\left\{-j\omega\mu_0\left(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{p})\right)G_0(\vec{p},\vec{q})\right.$$

$$\left. + \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{p})\right)\cdot\nabla\nabla G_0(\vec{p},\vec{q}) + \left(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{p})\right)\times\nabla G_0(\vec{p},\vec{q})\right\}dS \qquad (ง.17)$$

จากนั้นสลับตัวแปรระหว่าง $\vec{p}$ กับ $\vec{q}$ และใช้สมบัติความสมมาตรของฟังก์ชันกรีนจะได้ว่า

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p}\in V_1\,,\vec{E}_1(\vec{p})\\ \vec{p}\notin V_1\,,\quad 0\end{array}\right\}=\vec{E}^{inc}(\vec{p})-\oint_S\left\{-j\omega\mu_0\left(\vec{n}_q\times\vec{H}_1(\vec{q})\right)G_0(\vec{p},\vec{q})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\vec{n}_q\times\vec{H}_1(\vec{q})\right)\cdot\nabla_q\nabla_q G_0(\vec{p},\vec{q})+\left(\vec{n}_q\times\vec{E}_1(\vec{q})\right)\times\nabla_q G_0(\vec{p},\vec{q})\right\}dS_q$$

(ง.18)

โดยที่

$\vec{E}^{inc}(\vec{p})$ เป็นสนามไฟฟ้าของคลื่นตกกระทบ

และ $\vec{E}^{inc}(\vec{p})=\int_{V_1}\left\{-j\omega\mu_0\,\overline{\overline{G}}_0(\vec{p},\vec{q})\cdot\vec{J}(\vec{q})\right\}dV_q$ (ง.19)

เมื่อจัดรูปสมการที่ (ง.18) ใหม่จะได้ว่า

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p}\in V_1\,,\vec{E}_1(\vec{p})\\ \vec{p}\notin V_1\,,\quad 0\end{array}\right\}=\vec{E}^{inc}(\vec{p})-\oint_S\left\{-j\omega\mu_0\left(\vec{n}_q\times\vec{H}_1(\vec{q})\right)G_0(\vec{p},\vec{q})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\left(\vec{n}_q\times\vec{H}_1(\vec{q})\right)\cdot\nabla_q\right)\nabla_q G_0(\vec{p},\vec{q})+\left(\vec{n}_q\times\vec{E}_1(\vec{q})\right)\times\nabla_q G_0(\vec{p},\vec{q})\right\}dS_q$$

(ง.20)

ซึ่งสมการที่ (ง.20) นี้เป็นสมการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้าในปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติ

- กรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์

กำหนดให้ตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ซึ่งจะทำให้เงื่อนไขขอบเขตระหว่างผิวรอยต่อของบริเวณที่ 1 และ บริเวณที่ 2 เป็นดังนี้

เงื่อนไขขอบเขต $\vec{n}\times\vec{E}=0$ ที่ผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (ง.21)

โดยที่

$\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์

เมื่อแทนเงื่อนไขขอบเขตนี้ลงในสมการอินทิกรัลจะได้สมการอินทิกรัลใหม่ เป็นดังนี้

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p}\in V_1,\vec{E}_1(\vec{p})\\ \vec{p}\notin V_1,\quad 0\end{array}\right\}=\vec{E}^{inc}(\vec{p})-\oint_S\left\{-j\omega\mu_0\left(\vec{n}_q\times\vec{H}_1(\vec{q})\right)G_0(\vec{p},\vec{q})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\left(\vec{n}_q\times\vec{H}_1(\vec{q})\right)\cdot\nabla_q\right)\nabla_q G_0(\vec{p},\vec{q})\right\}dS_q \qquad \text{(ง.22)}$$

สมการที่ (ง.22) นี้เป็นสมการอินทิกรัลของสนามไฟฟ้าในปัญหาการกระเจิงของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าใน 3 มิติในกรณีที่ตัวกระเจิงคลื่นเป็นวัตถุตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์

ภาคผนวก จ

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเป็นฟังก์ชันรูปร่างซึ่งมีลักษณะที่สำคัญคือมีการกำหนดให้ตัวแปรไม่ทราบค่าของสนามอยู่ที่ตำแหน่งขอบบนแต่ละด้านของอีลีเมนต์และเป็นเวกเตอร์ที่หมุนวนและมีทิศทางที่สัมผัสกับแต่ละด้านของอีลีเมนต์ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาฟังก์ชันรูปร่างแบบที่เป็นฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ดังในรูปที่ 3.3 ซึ่งมีสมการเป็นดังนี้

$$\vec{N}_i^e = \left(L_i^e \nabla L_j^e - L_i^e \nabla L_j^e\right) l_i^e \qquad \text{(จ.1)}$$

โดยที่

L_i^e เป็นพิกัดพื้นที่ของอีลีเมนต์ที่ e

l_i^e เป็นความยาวด้านที่ i ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมอีลีเมนต์ที่ e และเป็นค่าที่กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ให้อยู่ในทิศทางที่เสริมกัน

และ $(i, j) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

สำหรับอีลีเมนต์สามเหลี่ยมใดๆในปริภูมิ 3 มิตินั้นความยาวด้านที่ i ของอีลีเมนต์ที่ e จะมีสูตรการคำนวณเป็นดังนี้

$$l_i^e = \begin{cases} \sqrt{\left(c_k^2 + b_k^2 + a_k^2\right)} & for\, b_k < 0 \;or\, b_k = 0, c_k > 0 \;or\, b_k = 0, c_k = 0, a_k < 0 \\ -\sqrt{\left(c_k^2 + b_k^2 + a_k^2\right)} & for\, b_k > 0 \;or\, b_k = 0, c_k < 0 \;or\, b_k = 0, c_k = 0, a_k > 0 \end{cases} \qquad \text{(จ.2)}$$

และ

$$c_k = x_j^e - x_i^e \qquad \text{(จ.3)}$$

$$b_k = y_i^e - y_j^e \qquad \text{(จ.4)}$$

$$a_k = z_i^e - z_j^e \qquad \text{(จ.5)}$$

โดยที่ x_i^e, y_i^e และ z_i^e เป็นพิกัด x, y และ z ของโนดที่ i ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมอีลีเมนต์ที่ e

เมื่อใช้การแปลงระบบพิกัดของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมในระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดของอีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยมแล้ว และจากสมการที่ (ค.20)-(ค.22) และใช้สมการที่ (ค.9) ร่วมด้วย จะได้ว่า

$$\vec{N}_1^e = \left(\eta_1 \nabla \eta_2 - \eta_2 \nabla \eta_1\right) l_1^e = \left(-\eta_2 \nabla \eta_1 + \eta_1 \nabla \eta_2\right) l_1^e \qquad (จ.6)$$

$$\vec{N}_2^e = \left(\eta_2 \nabla \eta_3 - \eta_3 \nabla \eta_2\right) l_2^e = \left(-\eta_2 \nabla \eta_1 + \left(\eta_1 - 1\right) \nabla \eta_2\right) l_2^e \qquad (จ.7)$$

$$\vec{N}_3^e = \left(\eta_3 \nabla \eta_1 - \eta_3 \nabla \eta_1\right) l_3^e = \left(\left(1 - \eta_2\right) \nabla \eta_1 + \eta_1 \nabla \eta_2\right) l_3^e \qquad (จ.8)$$

และแทนพจน์ของเกรเดียน ∇ ด้วย ∇_s เนื่องจากในอีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยมนั้น local intrinsic coordinate η_1, η_2 จะมีการเปลี่ยนแปลงค่าเฉพาะบนผิวของอีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น ดังนั้นจะได้ว่า

$$\nabla_s \eta_1 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_2} \times \vec{n}}{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_1} \cdot \left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_2} \times \vec{n}\right)} \qquad (จ.9)$$

$$\nabla_s \eta_2 = \frac{\vec{n} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_1}}{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_1} \cdot \left(\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_2} \times \vec{n}\right)} \qquad (จ.10)$$

โดยที่

$\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งดังในสมการที่ (ค.1)

$\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมและมีทิศพุ่งออก

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย ณัฐวุฒิ พุทธประสิทธิ์ เกิดวันที่ 21 กรกฎาคม พ.ศ. 2519 ที่อำเภอเมือง จังหวัดอุบลราชธานี สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ในปีการศึกษา 2541 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2541