การทำให้เสถียรด้วยการป้อนกลับสำหรับแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว : แนวทางระบบมิติอนันต์

นางสาวจิตโกมุท ส่งศิริ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-1008-9

FEEDBACK STABILIZATION OF ONE-LINK FLEXIBLE ROBOT ARMS :
AN INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEM APPROACH

Miss Jitkomut Songsiri

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2002
ISBN 974-17-1008-9

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การทำให้เสถียรด้วยการป้อนกลับสำหรับแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว : แนวทางระบบมิติอนันต์
โดย	นางสาวจิตโกมุท ส่งศิริ
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร. สุชิน อรุณสวัสดิวงศ์)

จิตโกมุท ส่งศิริ: การทำให้เสถียรด้วยการป้อนกลับสำหรับแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว : แนวทางระบบมิติอนันต์ (FEEDBACK STABILIZATION OF ONE-LINK FLEXIBLE ROBOT ARMS: AN INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEM APPROACH) อ. ที่ปรึกษา: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ, 46 หน้า, ISBN 974-17-1008-9

งานวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาวิธีการออกแบบตัวควบคุม สำหรับระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ซึ่งสามารถจำลองแบบได้ด้วยคานแบบอ่อนตัว ที่มีปลายข้างหนึ่งยึดติดกับมอเตอร์ และปลายอีกข้างหนึ่งเป็นอิสระ โดยมีมวลจุดติดอยู่ ระบบนี้สามารถบรรยายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยออยเลอร์-แบร์นูลลีกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบระบบควบคุมมิติอนันต์ได้ เป้าหมายในการควบคุมคือ การหาตัวควบคุมที่ส่งสัญญาณผ่านทางความเร่งเชิงมุมของมอเตอร์ แล้วสามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ เพื่อลดการแกว่งของมวลที่ปลายแขน โดยกฎการควบคุมดังกล่าวอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของการเบี่ยงเบนที่ตำแหน่งปลาย กับฟังก์ชันนัลเชิงเส้นของการเบี่ยงเบนของแขน ผลการพิสูจน์แสดงให้เห็นว่า ตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของระบบวงวนปิดได้ก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มแบบหดตัว การวิเคราะห์เสถียรภาพที่วิเคราะห์เชิงสเปกตรัมค่อนข้างจะทำได้ยาก เนื่องจากเซตสเปกตรัมของตัวดำเนินการปิดใดๆ ไม่จำเป็นต้องมีแต่ค่าเฉพาะ แต่จากการอาศัยทฤษฎีบทการฝังในของโซโบเลฟ และทฤษฎีบทของอาร์เซลา ทำให้เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าสเปกตรัมของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง ประกอบไปด้วยค่าเฉพาะที่เป็นเอกเทศและมีภาวะรากซ้ำจำกัดเท่านั้น และพิสูจน์ต่อมาว่าค่าเฉพาะทั้งหมดอยู่ทางซ้ายของระนาบเปิดเชิงซ้อน ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ระบบวงวนปิดมีเสถียรภาพแบบเชิงเส้นกำกับตามที่ต้องการ

ภาควิชา	**ลายมือชื่อนิสิต** ....
สาขาวิชา	**ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา** ....
ปีการศึกษา	**ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม** ....

##4270246921: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: FLEXIBLE ROBOT ARM / INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEM / SEMIGROUP

JITKOMUT SONGSIRI: FEEDBACK STABILIZATION OF ONE-LINK FLEXIBLE ROBOT ARMS : AN INFINITE-DIMENSIONAL SYSTEM APPROACH. THESIS ADVISOR: WATCHARAPONG KHOVIDHUNGIJ, Ph.D. 46 pp., ISBN 974-17-1008-9

This thesis concerns the design of an infinite dimensional control system for a flexible robot arm. In this work, we consider this system as a flexible beam that is clamped to a motor at the one end and free at the other end. A mass is also attached to the free end of the beam. The mathematical model can be described by an Euler-Bernoulli partial differential equation, with initial and boundary conditions. To reduce the vibration of the tip mass, we apply a feedback through the angular acceleration of motor. The control law is a linear combination of the tip deflection and a linear functional of the beam deflection. We show that the infinitesimal generator of the closed-loop system generates a contraction semigroup. Since the spectrum of a closed operator need not have only the eigenvalues, it is rather difficult to analyze the stability of the system using the spectral analysis approach. However, by using the Sobolev Imbedding theorem and Arzela's theorem, we can prove that the spectrum consists only of isolated eigenvalues with finite multiplicity. Besides, those eigenvalues lie in the open left half of the complex plane. We then prove that the closed loop system is asymptotically stable.

Department	**Student's signature** ....
Field of study	**Advisor's signature** ....
Academic year	**Co-advisor's signature** ....

กิตติกรรมประกาศ

งานวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ด้วยความช่วยเหลือของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้สละเวลาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ทำให้นิสิตมีกำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ และสำหรับแรงจูงใจที่ทำให้ผู้วิจัยตัดสินใจศึกษาต่อในระดับปริญญาโท ผู้วิจัยจึงใคร่ขอกราบขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์และอาจารย์ ดร.สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์ ที่ท่านได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านในสาขาระบบควบคุมที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้พื้นฐานในวิชาทางระบบควบคุม อันเป็นฐานในการศึกษาและทำวิทยานิพนธ์นี้

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร. วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ ที่ได้อนุญาตให้เข้าฟังการบรรยายวิชาคณิตศาสตร์ และได้สละเวลาให้คำปรึกษาและข้อคิดเห็นต่างๆ อันเป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการทำวิทยานิพนธ์

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา น้องๆ และญาติทุกคน ที่เป็นกำลังใจและกำลังทรัพย์ตลอดเวลา และให้โอกาสผู้วิจัยได้เรียนต่อในระดับปริญญาโท

ขอขอบคุณเพื่อนๆ รุ่นพี่ รุ่นน้องในห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม เพื่อนสนิททุกคน และรุ่นพี่ที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้ให้กำลังใจและคำปรึกษา จนผู้วิจัยได้ทำวิทยานิพนธ์นี้ได้สำเร็จลุล่วง

ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ และจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับทรัพยากรต่างๆ ในการศึกษา ค้นคว้าและวิจัย และการพักผ่อน

สารบัญ

สารบัญภาพ

คำอธิบายสัญลักษณ์

$H^m(0,l)$	=	$\{u \in L_2(0,l) \mid D^\alpha u \in L_2(0,l),\ 0 \le \|\alpha\| \le m\}$
$H_0^2(0,l)$	=	$\{u \in H^2(0,l) \mid u(0) = u'(0) = 0\}$
H	=	$L_2(0,l)$
$C^m(\Omega)$	=	$\left\{\phi \in C(\Omega) \mid D^\alpha\phi\right.$ ต่อเนื่องบน $\left.\Omega,\ 0 \le \|\alpha\| \le m\right\}$
$C^\infty(\Omega)$	=	$\bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$
$C_c^\infty(\Omega)$	=	$\left\{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \phi\right.$ มีเซตค้ำจุนกระชับบน $\left.\Omega\right\}$
$C_B^m(\Omega)$	=	$\left\{\phi \in C^m(\Omega) \mid D^\alpha\phi\right.$ มีขอบเขตบน $\left.\Omega,\ 0 \le \|\alpha\| \le m\right\}$
$C^m(\overline{\Omega})$	=	$\left\{\phi \in C^m(\Omega) \mid D^\alpha\phi\right.$ มีขอบเขตและต่อเนื่องเอกรูปบน $\left.\Omega,\ 0 \le \|\alpha\| \le m\right\}$
$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$	=	$\{\phi \in C^m(\overline{\Omega}) \mid \|D^\alpha\phi(x) - D^\alpha\phi(y)\| \le K\|x-y\|^\lambda,\ \ 0 < \lambda \le 1 \quad x,y \in \Omega,\ 0 \le \|\alpha\| \le m\}$
$\rho(A)$		เซตแก้ปัญหาของตัวดำเนินการ A
$\sigma(A)$		สเปกตรัมของตัวดำเนินการ A
$\mathcal{L}(X,Y)$		เซตของตัวดำเนินการมีขอบเขตจาก X ไปยัง Y

บทที่ 1

บทนำ

แขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ได้รับความสนใจในการนำมาใช้แทนแขนหุ่นยนต์แบบแข็งเกร็งมากขึ้น เนื่องจากมีน้ำหนักเบา ทำให้มีความคล่องตัวสูงและใช้พลังงานในการขับเคลื่อนต่ำ แต่อย่างไรก็ตาม ผลจากความอ่อนตัว ทำให้ความแม่นยำของตำแหน่งปลายแขนลดลง จึงต้องมีตัวควบคุมที่สามารถขจัดหรือลดการสั่นของปลายแขนได้ แขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวนั้นสามารถบรรยายพฤติกรรมการเคลื่อนที่ได้ด้วยสมการอนุพันธ์ย่อย ซึ่งเมื่อจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการปริภูมิสถานะแล้ว จะพบว่าเป็นระบบมิติอนันต์ แนวทางหนึ่งในการออกแบบตัวควบคุมคือ ออกแบบโดยใช้แบบจำลองที่ประมาณลงมาเป็นมิติจำกัด ซึ่งในบางครั้งอาจทำให้เกิดปัญหาที่ว่า เมื่อเราออกแบบตัวควบคุมบนแบบจำลองมิติจำกัดแล้ว เมื่อนำไปใช้ในกับระบบเดิม อาจไม่สามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้ หรือที่เรียกว่า "spillover effect" ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการออกแบบตัวควบคุมบนแบบจำลองมิติจำกัดที่ถูกประมาณนั้น ไม่สามารถรับประกันเสถียรภาพบนระบบเดิมเสมอไป โดยมีบทความที่แสดงตัวอย่างคือ Bontsema และ Curtain [1] ซึ่งได้แสดงให้เห็นว่า spillover effect นั้นจะเกิดขึ้นเมื่อการประมาณนั้นเกินส่วนเผื่อความคงทนของตัวควบคุม การออกแบบตัวควบคุมสำหรับใช้กับระบบมิติอนันต์โดยตรงจึงเป็นอีกแนวทางหนึ่งที่น่าจะพิจารณา แม้ว่าจะมีความยุ่งยากซับซ้อนมากกว่าก็ตาม

1.1 งานวิจัยที่ผ่านมา

ปัจจุบันงานวิจัยเกี่ยวกับแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ได้ถูกตีพิมพ์อยู่อย่างแพร่หลาย ทั้งการออกแบบตัวควบคุมที่อาศัยแบบจำลองมิติจำกัดและแบบจำลองมิติอนันต์ ตัวอย่างของแบบจำลอง ที่ได้จากวิธีแบบแผนสมมติ (assumed mode method) ได้แก่ Wang และ Vidyasagar [2] หรือ Bellezza และคณะ [3] เป็นต้น สำหรับตัวอย่างของแบบจำลองวิธีชิ้นประกอบจำกัด (finite element method) ได้แก่ Pota [4] เป็นต้น นอกจากนี้แบบจำลองที่พิจารณาสมการแสดงพลวัตของระบบ ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยนั้น ได้แก่ Luo และคณะ [5], Cannon และ Schmitz [6] และ Sakawa และคณะ [7] เป็นต้น

สำหรับงานวิจัยทางด้านทฤษฎีระบบมิติอนันต์ ที่นำไปประยุกต์กับระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวนั้นมีหลายบทความ เช่น Chen และคณะ [8] ซึ่งทำการพิจารณาคานออกเป็นชิ้นเล็กๆเรียงกัน โดยที่แต่ละชิ้นจะแสดงได้ด้วยสมการอนุพันธ์ย่อย และมีสมการขอบเขตที่เกี่ยวเนื่องกันกับชิ้นย่อยที่ติดกัน สำหรับตัวควบคุม ใช้การควบคุมที่ขอบที่ป้อนกลับความเร็วของการเบี่ยงเบนของคาน และมีการพิสูจน์เสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังโดยใช้วิธีตัวคูณพลังงาน (energy multiplier method) ต่อมา Sakawa และ Luo [9] ได้พิจารณาการบิดของคานด้วย แทนที่จะพิจารณาการเบี่ยงเบนของคานเพียงอย่างเดียวดังเช่นในบทความอื่นๆ ในส่วนการวิเคราะห์ระบบได้อาศัยทฤษฎีระบบมิติอนันต์ แต่ในการออกแบบตัวควบคุมได้ประมาณระบบเป็นแบบจำลองมิติจำกัด โดยได้ให้เหตุผลในการประมาณว่าผลตอบในโหมดสูงๆ จะมีขนาดเล็กลง

แล้วใช้ตัวควบคุมแบบเหมาะที่สุด Morgül [10] ได้มองปัญหาการควบคุมแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวออกเป็นสองแบบคือ ปัญหาตามรอยกับปัญหาเสถียรภาพ ซึ่งต่างกันตรงที่ปัญหาแรกพิจารณาการตามรอยของมุมมอเตอร์ด้วย ตัวควบคุมใน [10] แบ่งได้ออกเป็นสองส่วน คือส่วนที่เป็นตัวควบคุมที่ขอบ กับตัวควบคุมที่กระทำกับส่วนแข็งเกร็ง และกฎการควบคุมของตัวควบคุมที่กระทำบนส่วนแข็งเกร็งสามารถแบ่งได้ออกเป็นสองส่วนเช่นกันคือ กฎที่ตั้งมาเพื่อให้ส่วนแข็งเกร็งและส่วนอ่อนตัวนั้นไม่มีผลต่อกัน กับอีกกฎที่มีสมบัติตรงข้ามกับกฎแรก เพื่อทำให้สัญญาณควบคุมสามารถส่งผลถึงส่วนอ่อนตัวด้วย สำหรับกฎแรกได้พิสูจน์ว่าสัญญาณออกมีค่าลู่เข้าสู่ศูนย์แบบเลขชี้กำลัง ส่วนกฎหลังนั้นใช้วิธีตัวคูณพลังงานในการพิสูจน์เสถียรภาพ อย่างไรก็ดีแบบจำลองที่ใช้ในบทความนี้ต่างจากแบบจำลองที่ใช้ใน [6, 7] ซึ่งใน Xu และ Bailleul [11] ก็ได้ใช้แบบจำลองเช่นเดียวกับ [10] โดยใช้แรงบิดเป็นตัวควบคุมระบบให้ไปอยู่ที่จุดสมดุลซึ่งไม่มีการเบี่ยงเบนของคาน และค่าความเร็วของมุมมีค่าคงที่ นอกจากนั้นแสดงให้เห็นว่าจะมีค่าความเร็วของมอเตอร์ค่าหนึ่งที่ไม่สามารถหาแรงบิดที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้

Luo [12] ได้เสนอการควบคุมที่ใช้การป้อนกลับความเครียด (strain feedback) และแสดงถึงประสิทธิภาพในการลดการแกว่ง เนื่องจากส่วนป้อนกลับจะเพิ่มพจน์การหน่วงเข้าไปในระบบ อย่างไรก็ตามในบทความนี้ได้เสนอตัวดำเนินการที่ขึ้นกับ A (A-dependent operator) ซึ่งจะช่วยในการพิสูจน์การมีจริง ความเป็นได้อย่างเดียว และเสถียรภาพของผลเฉลย สัญญาณควบคุมนั้นพิจารณาทั้งจากแรงบิดและจากแรงดันมอเตอร์ โดยในแต่ละกรณีจะต้องการปริมาณที่ใช้ในการป้อนกลับที่ต่างกัน ในการใช้แรงบิดเป็นสัญญาณควบคุม จะต้องสามารถวัดปริมาณการเปลี่ยนแปลงของค่าความเครียดได้ ในขณะที่ถ้าใช้แรงดันเป็นสัญญาณควบคุม การวัดสัญญาณความเครียดเท่านั้นก็พอเพียง ซึ่งในกรณีหลังนี้จะทำได้ง่ายกว่าในทางปฏิบัติ จุดที่น่าสนใจของบทความนี้ก็คือ การป้อนกลับด้วยตัวดำเนินการไม่มีขอบเขตซึ่งเพิ่มเทอมหน่วงให้กับระบบนั้น ทำให้ลดการแกว่งได้จริง โดยการวิเคราะห์ค่าเฉพาะของระบบวงปิด ซึ่งได้ทำการวิเคราะห์ในรายละเอียดต่อมาใน Luo และคณะ [5]

Luo และคณะ [5] ได้กล่าวถึงทฤษฎีควบคุมระบบมิติอนันต์ โดยเน้นการประยุกต์ใช้กับระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว สิ่งที่เพิ่มเติมจาก Luo [12] ก็คือรายละเอียดในการวิเคราะห์ทั้งส่วนของสเปกตรัมและเสถียรภาพ การพิจารณาการควบคุมแขนหุ่นยนต์ในแนวระนาบ (translating beam) และเพิ่มเติมการควบคุมระบบผสม (hybrid system) ซึ่งครอบคลุมกรณีที่จะควบคุมมุมของมอเตอร์ด้วย นอกจากนั้นยังเสนอการใช้อัตราขยายแบบปรับตัวในการป้อนกลับความเครียด อย่างไรก็ตามใน [5] ยังไม่ได้รวมมวลติดที่ตำแหน่งปลายในสมการระบบ

Morgül [13] ได้พิจารณาระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวที่มีมวลติดที่ตำแหน่งปลาย แต่ไม่ได้คำนึงการควบคุมมุมมอเตอร์ดังเช่นในงานอื่นๆที่กล่าวมา การควบคุมจะใช้ตัวควบคุมที่ขอบซึ่งป้อนกลับปริมาณแรงเค้น และพิสูจน์เสถียรภาพโดยใช้วิธีตัวคูณพลังงาน

ใน Guo [14] ได้ให้แนวทางในการตรวจสอบเงื่อนไขการเป็นตัวดำเนินการริสซ (Riesz Operator) สำหรับตัวดำเนินการเต็มหน่วย และประยุกต์ใช้กับระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว โดยการใช้ตัวควบคุมที่ขอบ และแสดงให้เห็นว่าเวกเตอร์เฉพาะของตัวก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มในรูปวงปิดนั้นก่อเป็นมูลฐานริสซ และได้ให้รูปแบบเชิงเส้นกำกับของค่าเฉพาะ ซึ่งทุกตัวมีส่วนจริงเป็นค่าลบ ทำให้เมื่อใช้เงื่อนไขกำหนดขอบเขต

การเจริญเติบโต (spectral growth determined condition) แล้วแสดงได้ว่าระบบมีเสถียรภาพจริง

จากบทความเกี่ยวกับระบบมิติอนันต์ ที่นำมาประยุกต์กับระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวนั้น เราสามารถสรุปแนวทางการพิสูจน์เสถียรภาพได้ดังต่อไปนี้

1. การใช้เงื่อนไขกำหนดขอบเขตการเจริญเติบโต (spectral growth determined condition) ซึ่งจะทำการวิเคราะห์สเปกตรัมของระบบโดยจุดสำคัญก็คือการพิสูจน์ว่าระบบนั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขนี้จริง ซึ่งถ้าสอดคล้องจริงแล้ว เราจะสามารถสรุปค่าขอบเขตการเจริญเติบโตจากค่าส่วนจริงที่มากที่สุดของสเปกตรัม โดยถ้าค่าดังกล่าวมีค่าน้อยกว่าศูนย์ก็จะทำให้สรุปเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังได้ (Guo [14])

2. วิธีตัวคูณพลังงาน (Energy Multiplier method) ซึ่งวิธีนี้มีหลักการคร่าวๆ ว่า เป็นการเลือกฟังก์ชัน $V(t)$ ซึ่งเท่ากับฟังก์ชันพลังงาน $E(t)$ บวกกับผลคูณระหว่างค่าสเกลาร์กับฟังก์ชันตัวคูณ $\rho(t)$ โดยระบบทั่วไปนั้นฟังก์ชันพลังงานมักจะอยู่ในรูปฟังก์ชันของตัวแปรสถานะ ซึ่งมีความหมายทางกายภาพ ส่วนฟังก์ชันตัวคูณนั้น จะต้องเลือกขึ้นเพื่อให้พิสูจน์ได้ว่า $E(t)$ ลดลงแบบเลขชี้กำลังจากค่าเริ่มต้น ซึ่งจะทำให้สรุปได้ว่าตัวแปรสถานะกำลังลดลงแบบเลขชี้กำลังจริง วิธีนี้อาจจะมีข้อจำกัดทางด้านการเลือกฟังก์ชัน $\rho(t)$ ซึ่งขึ้นอยู่กับหลายๆอย่าง ทั้งทางรูปแบบของระบบและเงื่อนไขขอบเขต (Chen และคณะ [8], Morgül [10], Morgül [13], Luo และคณะ [5])

3. การใช้เงื่อนไขบนโดเมนความถี่ นั่นคือการพิสูจน์ว่าแกนจินตภาพเป็นส่วนหนึ่งของเซตแก้ปัญหา และนอร์มของตัวดำเนินการแก้ปัญหาที่ทุกๆค่า λ ใดๆ บนแกนจินตภาพนั้น มีค่าขอบเขตจำกัดแบบเอกรูป ซึ่งจะได้ว่าระบบมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (Luo และคณะ [5])

อย่างไรก็ดีในงานวิจัยที่ผ่านมา สิ่งที่ยังขาดไปก็คือการพิจารณาแบบจำลอง โดยรวมพิกัดมุมของมอเตอร์ และการรวมมวลที่ตำแหน่งปลายไว้ในแบบจำลองด้วยพร้อมๆกัน ดังนั้นในการงานวิจัยนี้จะศึกษาการควบคุมระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวโดยคำนึงถึงเงื่อนไขดังกล่าว ซึ่งจะศึกษาบนพื้นฐานของทฤษฎีระบบมิติอนันต์ และเสนอกฎการควบคุมสำหรับปัญหาที่ตั้งขึ้น

1.2 ขอบเขตวิทยานิพนธ์

1. จัดรูปแบบปัญหาการควบคุมระบบแขนกลแบบอ่อนตัวข้อต่อเดียว ให้อยู่ในรูปของระบบควบคุมมิติอนันต์

2. เสนอการควบคุมป้อนกลับ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของการเบี่ยงเบนที่ตำแหน่งปลายกับฟังก์ชันนัลเชิงเส้นของการเบี่ยงเบนของแขนหุ่นยนต์ ซึ่งป้อนกลับผ่านความเร่งของมอเตอร์ ที่ประกันเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบวงวนปิดที่ได้

1.3 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาทฤษฎีระบบควบคุมมิติอนันต์

2. สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว

3. พิจารณาระบบวงวนปิดเมื่อป้อนกลับด้วยตัวควบคุมที่เสนอขึ้น แล้วจัดรูปแบบปัญหาให้อยู่ในรูประบบควบคุมมิติอนันต์
4. วิเคราะห์สมบัติทางคณิตศาสตร์ (mathematical property) ของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของระบบวงปิดดังกล่าว เช่น การเป็นตัวดำเนินการปิด สเปกตรัม ตำแหน่งของค่าเฉพาะ
5. วิเคราะห์เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบวงปิด โดยการวิเคราะห์เชิงสเปกตรัม
6. สรุปงานวิจัยที่ทำ และข้อดีข้อเสียของตัวควบคุมที่เสนอขึ้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สร้างความเข้าใจสมบัติของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว
2. ได้ตัวควบคุมที่สามารถรับประกันเสถียรภาพของระบบแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว โดยพิสูจน์บนแบบจำลองมิติอนันต์

1.5 โครงสร้างวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้แบ่งออกเป็น 6 บทด้วยกัน และเพื่อความเข้าใจง่าย ได้แบ่งเนื้อหาบางส่วนไว้ที่ภาคผนวก โดยแต่ละบทมีเนื้อหา ดังนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงบทนำ ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา ขอบเขตวิทยานิพนธ์ ขั้นตอนการดำเนินงาน และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

บทที่ 2 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียว แบบอ่อนตัว

บทที่ 3 อธิบายถึงทฤษฎีระบบควบคุมมิติอนันต์

บทที่ 4 อธิบายถึงการจัดรูปแบบปัญหาให้อยู่ในรูปแบบระบบควบคุมมิติอนันต์ สำหรับการป้อนกลับด้วยกฎการควบคุมที่เสนอขึ้น และพิสูจน์การก่อกำเนิดกึ่งกลุ่ม

บทที่ 5 กล่าวถึงการวิเคราะห์เชิงสเปกตรัมของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของระบบวงวนปิด และแสดงการพิสูจน์เสถียรภาพที่ได้

บทที่ 6 สรุปและข้อเสนอแนะ

ภาคผนวก ก. กล่าวถึงนิยามและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ที่ใช้ในงานวิทยานิพนธ์นี้

บทที่ 2

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว

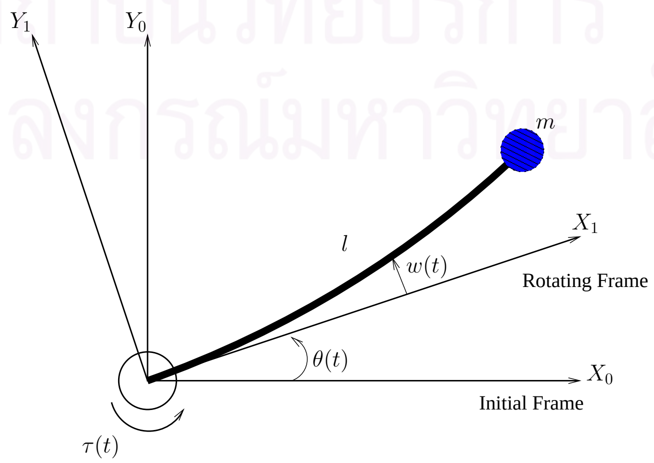
ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ในที่นี้จะพิจารณาว่าแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัวประกอบด้วยคานของออยเลอร์-เบอร์นูลี ที่มีปลายหนึ่งติดกับมอเตอร์ และอีกปลายหนึ่งมีมวลติดอยู่ แล้วใช้หลักการของแฮมิลตัน ในการหาสมการพลวัตของระบบ

2.1 แบบจำลองของแขนหุ่นยนต์

พิจารณาคานแบบอ่อนตัวที่มีปลายหนึ่งติดแบบยึดแน่น (clamped) กับแกนส่งกำลังซึ่งขับให้หมุนโดยมอเตอร์ดังรูป 2.1 และมีมวลติดที่ปลายอีกข้างหนึ่ง สมมติว่าคานนี้สอดคล้องกับสมมติฐานของออยเลอร์-เบอร์นูลี ดังนี้

- ไม่คิดผลของการเปลี่ยนรูปเนื่องจากแรงเฉือน
- คานมีหน้าตัดคงที่ตลอดแนวความยาว
- ความหนาแน่นมวลต่อความยาวและค่าความยืดหยุ่นมีค่าคงตัว
- มวลที่ปลายคานถือว่าเป็นมวลจุด

ให้เฟรม X_0Y_0 เป็นเฟรมเริ่มต้น (initial frame) และ X_1Y_1 เป็นเฟรมหมุน (rotating fram) โดยที่แกน X_1 จะต้องสัมผัสคานที่ตำแหน่ง $x = 0$ เสมอ เพื่อให้สอดคล้องเงื่อนไขแบบยึดแน่น โดยที่ x เป็นพิกัดบนแกน X_1 มีค่าระหว่าง $0 < x < l$ ให้ $w(x,t)$ เป็นพิกัดในแนวแกน Y_1 ซึ่งวัดบนเฟรม X_1Y_1 หรือเฟรมหมุนและ θ เป็นพิกัดเชิงมุมของเฟรมหมุนเทียบกับเฟรมอ้างอิง



รูปที่ 2.1: คานแบบอ่อนตัวที่มีมวลติดที่ตำแหน่งปลาย

กำหนดให้ค่าคงตัวทางกายภาพของระบบเป็นดังนี้

l	คือ	ความยาวของคาน
E	คือ	ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของยัง (Young's elastic modulus)
I	คือ	ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดของคาน
ρ	คือ	ความหนาแน่นมวลต่อหน่วยความยาวของคาน
m	คือ	มวลที่ปลายคาน
I_H	คือ	โมมนต์ความเฉื่อยของแกนมอเตอร์

ให้

$$y(x,t) = w(x,t) + x\theta(t) \tag{2.1}$$

เราจะหาสมการพลวัตของคานแบบอ่อนตัว โดยใช้หลักการของแฮมิลตัน ซึ่งมีใจความว่า "การเปลี่ยนแปลงของลากรางเจียนของระบบในช่วงเวลาที่สนใจ t_1 ถึง t_2 จะมีค่าเท่ากับศูนย์" กล่าวคือ

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{2.2}$$

โดยที่ L เป็นลากรางเจียนของระบบ ดังนั้น เราจะพิจารณาพลังงานต่าง ๆ ของระบบ ดังนี้

1. พลังงานจลน์ ซึ่งประกอบไปด้วยพลังงานจากการหมุนที่แกนส่งกำลัง การสั่นของคาน และมวลที่ตำแหน่งปลายตามลำดับ

$$T = I_{\mathrm{H}}\dot{\theta}^2(t) + \rho\int_0^L \dot{y}^2(x,t)dx + m\dot{y}^2(l,t)$$

2. พลังงานศักย์ ซึ่งเกิดจากการบิดของคาน

$$V = \int_0^L EIy''^2(x,t)dx$$

3. งานที่ทำเนื่องจากแรงบิด

$$W = \tau\theta$$

ให้ $L = T - V + W$ เป็นลากรางเจียนของระบบ จะได้ว่า

$$L = I_{\mathrm{H}}\dot{\theta}^2(t) + \rho\int_0^L \dot{y}^2(x,t)dx + m\dot{y}^2(l,t) - \int_0^L EIy''^2(x,t)dx + \tau\theta \tag{2.3}$$

จากหลักการของแฮมิลตัน เราจำเป็นต้องหาการแปรผันของลากรางเจียน δL เนื่องจาก L เป็นฟังก์ชันของ $\theta, \dot{\theta}, \dot{y}$ และ y'' เราสามารถเขียน δL ในรูป

$$\delta L = I_{\mathrm{H}}\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + \rho\int_0^L \dot{y}\delta\dot{y}dx + m\dot{y}(l)\delta\dot{y}(l) - EI\int_0^L y''\delta y''dx + \tau\delta\theta \tag{2.4}$$

เนื่องจากตัวดำเนินการแปรผันและเครื่องหมายปริพันธ์สามารถสลับที่กันได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt &= \int_{t_1}^{t_2}\delta L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{I_{\mathrm{H}}\dot{\theta}\delta\dot{\theta} + \rho\int_0^L \dot{y}\delta\dot{y}dx + m\dot{y}(l)\delta\dot{y}(l) - EI\int_0^L y''\delta y''dx + \tau\delta\theta\right\}dt \end{aligned} \tag{2.5}$$

เนื่องจากในสมการ (2.5) มีพจน์ของ $\delta\dot{\theta}$, $\delta\dot{y}$ และ $\delta\dot{y}(l)$ อยู่ ดังนั้นเราจะใช้การหาปริพันธ์แบบแยกส่วน เพื่อไม่ให้มีพจน์การเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์เทียบกับเวลาอยู่ในสมการ เช่นเดียวกับพจน์ $\delta y''$ เราจะเขียนให้อยู่ในรูปที่ไม่มีพจน์การเปลี่ยนแปลงของอนุพันธ์เทียบกับพิกัด x และเนื่องจากการแปรผันที่ t_1 และ t_2 ต้องเท่ากับศูนย์ จาก (2.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt &= I_{\mathrm{H}}\dot{\theta}\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} I_{\mathrm{H}}\ddot{\theta}\delta\theta dt + \rho\int_0^L \dot{y}\delta y dx\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\rho\left(\int_0^L \ddot{y}\delta y dx\right)dt \\
&\quad + m\dot{y}(l)\delta y(l)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(l)\delta y(l)dt \\
&\quad - EI\int_{t_1}^{t_2} y''\delta y'\Big|_{x=0}^{x=l} dt + EI\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^L y'''\delta y' dx\right)dt + \int_{t_1}^{t_2}\tau\delta\theta dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} I_{\mathrm{H}}\ddot{\theta}\delta\theta dt - \int_{t_1}^{t_2}\left(\rho\int_0^L \ddot{y}\delta y dx\right)dt - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(l)\delta y(l)dt + \int_{t_1}^{t_2}\tau\delta\theta dt \\
&\quad + EI\int_{t_1}^{t_2}\left[-y''(l)\delta y'(l) + y''(0)\delta y'(0)\right]dt \\
&\quad - EI\int_{t_1}^{t_2} y'''\delta y\Big|_{x=0}^{x=l} dt - EI\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^L y''''\delta y dx\right)dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} I_{\mathrm{H}}\ddot{\theta}\delta\theta dt - \int_{t_1}^{t_2}\left(\rho\int_0^L \ddot{y}\delta y dx\right)dt - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(l)\delta y(l)dt + \int_{t_1}^{t_2}\tau\delta\theta dt \\
&\quad + EI\int_{t_1}^{t_2}\left\{-y''(l)\delta y'(l) + y''(0)\delta y'(0) - y'''(l)\delta y(l) + y'''(0)\delta y(0)\right\}dt \\
&\quad - EI\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^L y''''\delta y dx\right)dt
\end{aligned}$$

จากสมการ (2.1) จะได้ $y'(x,t) = w'(x,t) + \theta(t)$ และ $\delta y'(0) = \delta w'(0) + \delta\theta$ จากเงื่อนไขการติดแบบยึดแน่น จะได้ว่า $w'(0) = 0, \delta w'(0) = 0$ ดังนั้น $\delta y'(0) = \delta\theta$

เมื่อจัดพจน์ต่างๆเสียใหม่ จะได้

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt = -\int_{t_1}^{t_2}\Bigg(&\delta\theta\left[I_{\mathrm{H}}\ddot{\theta} - \tau - EIy''(0)\right] + \int_0^L\left(\rho\ddot{y} + EIy''''\right)\delta y dx \\
&+\delta y(l)\left[m\ddot{y}(l) - EIy'''(l)\right] + EIy''(l)\delta y'(l) + EIy'''(0)\delta y(0)\Bigg)dt
\end{aligned} \tag{2.6}$$

ถ้าในเครื่องหมายปริพันธ์ของพจน์ทางขวามือของสมการ (2.6) เท่ากับศูนย์ ก็จะทำให้สมการ (2.6) เป็นจริง และเนื่องจากแต่ละพจน์ในเครื่องหมายปริพันธ์เป็นอิสระต่อกันทั้งหมด ดังนั้นเราจึงสามารถกำหนดให้แต่ละพจน์นั้นเท่ากับศูนย์ตามลำดับดังนี้

- เนื่องจากเราสามารถเลือก $\delta\theta$ ได้อย่างอิสระ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\tau + EIy''(0) - I_{\mathrm{H}}\ddot{\theta} = 0$$

- เนื่องจากเราสามารถเลือก δy ได้อย่างอิสระ จะได้ว่า

$$\rho\ddot{y} + EIy'''' = 0$$

- เนื่องจากเราสามารถเลือก $\delta y(l)$ ได้อย่างอิสระ จะได้ว่า

$$m\ddot{y}(l) = EIy'''(l)$$

- เนื่องจากเราสามารถเลือก $\delta y'(l)$ ได้อย่างอิสระ จะได้ว่า

$$y''(l) = 0$$

- เนื่องจาก $y(0) = 0$ จะได้ว่า $\delta y(0) = 0$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ $y = w + x\theta$ เราสามารถแปลงสมการทั้งสี่ข้างต้นให้อยู่ในรูปของตัวแปร w และ θ ดังนี้

$$\ddot{w}(x,t) + EIw''''(x,t) + x\ddot{\theta}(t) = 0 \tag{2.7}$$

$$\tau + EIw''(0,t) - I_{\mathrm{H}}\ddot{\theta} = 0 \tag{2.8}$$

$$m\left[\ddot{w}(l,t) + l\ddot{\theta}(t)\right] = EIw'''(l,t) \tag{2.9}$$

$$EIw''(l) = 0 \tag{2.10}$$

$$w(0) = w'(0) = 0 \tag{2.11}$$

2.2 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการหาสมการแสดงลักษณะทางกายภาพ ของระบบแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว โดยใช้หลักการของแฮมิลตัน ซึ่งพบว่าสามารถบรรยายพฤติกรรมของระบบ ได้ด้วยสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่ พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขตสี่เงื่อนไข โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดกับการเบี่ยงเบนของแขนผ่านทางความเร่งของมุมมอเตอร์ จะเห็นว่าระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว เป็นตัวอย่างหนึ่งของระบบมิติอนันต์ ดังนั้นในบทต่อไป จะกล่าวถึงทฤษฎีระบบควบคุมมิติอนันต์ ที่จะนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

บทที่ 3

ทฤษฎีควบคุมระบบมิติอนันต์

ระบบมิติอนันต์คือระบบที่เมื่อเขียนในรูปปริภูมิสถานะแล้ว มีมิติของปริภูมิสถานะเป็นอนันต์ การศึกษาหรือการวิเคราะห์สมบัติต่างๆของระบบมิติอนันต์นั้น มีความยุ่งยากกว่าระบบที่มีมิติจำกัดยิ่งนัก ระบบมิติอนันต์ มักจะมาจากระบบที่สามารถบรรยายได้ด้วยสมการอนุพันธ์ย่อย ตัวอย่างเช่น สมการของอุณหภูมิบนแท่งโลหะ สมการการสั่นของเส้นลวด หรือระบบแขนกลแบบอ่อนตัว ที่บรรยายได้ด้วยสมการของออยเลอร์-เบอร์นูลี และสมการระบบที่มีการประวิงเวลา เป็นต้น

โดยทั่วไปเราสามารถจัดรูปแบบของ *ระบบเชิงเส้นมิติอนันต์* ให้อยู่ในรูปของ *ปัญหาโคชีนามธรรม (abstract Cauchy problem)* บนปริภูมิบานาค (หรือปริภูมิฮิลแบร์ต) Z ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \\ z(0) &= z_0 \in D(A) \end{aligned} \tag{3.1}$$

เมื่อ A เป็นตัวดำเนินการปิด (closed operator) ที่มีโดเมน $D(A)$ หนาแน่นใน Z และจะพบว่าผลเฉลยของปัญหานี้คือ

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)u(s)ds \tag{3.2}$$

โดย $T(t)$ เป็น *กึ่งกลุ่ม* C_0 *(C_0-semigroup)* ของตัวดำเนินการมีขอบเขตบน Z (ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของเมทริกซ์ e^{At} ในกรณีของ *ระบบเชิงเส้นมิติจำกัด*) ดังนั้นจึงมีการศึกษาสมบัติของระบบในกลุ่มดังกล่าวให้เป็นรูปแบบ และนำเอาทฤษฎีกึ่งกลุ่มมาใช้ ซึ่งจะช่วยให้มีการวิเคราะห์ที่เป็นขั้นเป็นตอน และพยายามจะวิเคราะห์ให้คล้ายคลึงกับการวิเคราะห์ในระบบมิติจำกัด

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับระบบมิติอนันต์ โดยหัวข้อแรกจะกล่าวถึงนิยามต่างๆที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกลุ่ม หลังจากนั้นจะให้เงื่อนไขในการก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มสำหรับระบบที่ตั้งขึ้น และสมบัติของกึ่งกลุ่ม ดังหัวข้อ 3.1-3.2 ซึ่งเป็นความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีกึ่งกลุ่ม รายละเอียดเรื่องนี้สามารถดูได้ใน [5, 15, 16, 17] และสุดท้ายในหัวข้อ 5.4 จะกล่าวถึงเสถียรภาพของกึ่งกลุ่ม ซึ่งจะให้นิยามและเงื่อนไขในการตรวจสอบ

3.1 ทฤษฎีกึ่งกลุ่ม

นิยาม 3.1 ให้ Z เป็นปริภูมิฮิลแบร์ต กึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้มของตัวดำเนินการ (C_0 semigroup of operator) บนปริภูมิ Z คือวงศ์ (family) ของตัวดำเนินการมีขอบเขต $\{T(t), t \geq 0\}$ บน Z ซึ่ง

1. $T(t+s) = T(t)T(s)$

2. $T(0) = I$

3. $\|T(t)z_0 - z_0\| \to 0$ เมื่อ $t \to 0^+ \quad \forall z_0 \in Z$

โดย $\|\cdot\|$ ในที่นี้เป็นนอร์มใน Z

เมื่อเรามองกึ่งกลุ่มว่าเป็นลำดับของตัวดำเนินการ $T(\cdot)$ เราจะเห็นว่าเงื่อนไขสองข้อแรกเป็นเงื่อนไขของกึ่งกลุ่มที่เรารู้จักกันดี นั่นคือต้องมีเอกลักษณ์ มีสมบัติปิดและมีสมบัติการสลับที่ ส่วนเงื่อนไขสุดท้ายนั้นคือความต่อเนื่องอย่างเข้ม (strongly continuous) ที่จุด $t = 0$ นั่นเอง

ทฤษฎีบท 3.2 กึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้มบนปริภูมิฮิลแบร์ต Z นั้นจะมีสมบัติดังนี้

1. $T(t)$ ต่อเนื่องทุกๆ $t \in [0, \infty)$
2. $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)zds \to z$ เมื่อ $t \to 0^+$ $\forall z \in Z$
3. ให้
$$w_0 = \inf\left(\frac{1}{t}\log\|T(t)\|\right) \tag{3.3}$$
โดย $\|\cdot\|$ คือนอร์มของตัวดำเนินการ

จะได้ว่า
$$w_0 = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\log\|T(t)\|\right)$$
4. $\forall w > w_0$ จะมีค่าคงที่ $M > 0, w > 0$ ที่ทำให้ $\|T(t)\| \le Me^{wt} \quad \forall t$ เราจะเรียก w_0 ว่าเป็นค่าขอบเขตการเจริญเติบโต (growth bound) ของกึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้ม

ต่อมาเราจะเชื่อมโยงให้เห็นว่ากึ่งกลุ่มนั้นเกี่ยวข้องอย่างไรกับคำตอบของสมการระบบ (3.1) ที่เราตั้งขึ้นซึ่งต้องนิยามตัวดำเนินการตัวหนึ่งคือ

นิยาม 3.3 ตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง (infinitesimal generator) A ของกึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้ม $T(t)$ บนปริภูมิฮิลแบร์ต Z นิยามโดย
$$Az = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(T(t) - I\right)z \tag{3.4}$$

โดยที่ $D(A)$ คือโดเมนของตัวดำเนินการ A ก็คือเซตของ z ที่ทำให้ลิมิตดังข้างต้นมีจริง

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $T(t)$ เป็นกึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้มบนปริภูมิฮิลแบร์ต Z ที่มีตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งเป็น A จะได้ว่า

1. ถ้า $z_0 \in D(A)$ แล้ว จะได้ว่า $T(t)z_0 \in D(A), \quad \forall t \ge 0$
2. $\frac{d}{dt}\left(T(t)z_0\right) = AT(t)z_0$ ทุกค่า $z_0 \in D(A)$, $t > 0$
3. $\frac{d^n}{dt^n}\left(T(t)z_0\right) = A^nT(t)z_0 = T(t)A^nz_0$ ทุกค่า $z_0 \in D(A)$, $t > 0$
4. $T(t)z_0 - z_0 = \int_0^t T(s)Az_0ds$ ทุกค่า $z_0 \in D(A)$
5. ถ้า $z \in Z$ จะได้ว่า $\int_0^t T(s)zds \in D(A)$ และ $A\int_0^t T(s)zds = T(t)z - z$

6. A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นปิด
7. $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ หนาแน่นใน Z

นิยาม 3.5 เราจะกล่าวว่า $T(t)$ เป็นกึ่งกลุ่มหดตัว (contraction semigroup) ถ้า $\|T(t)\| < 1\,, \forall t \geq 0$

ต่อไปจะนิยาม *ตัวดำเนินการแก้ปัญหา* (resolvent operator)

นิยาม 3.6 ให้ $T(t)$ เป็นกึ่งกลุ่มอย่างเข้มที่มี A เป็นตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง และมีขอบเขตการเจริญเติบโตเป็น ω_0 ถ้า $\text{Re}\lambda > \omega > \omega_0$ แล้ว จะได้ว่า $\lambda \in \rho(A)$ และ

$$R(\lambda, A)z = (\lambda I - A)^{-1}z = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)z\,dt \quad \forall z \in Z \quad \text{และ}$$
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\nu - \omega} \quad \text{โดยที่} \quad \nu = \text{Re}\lambda$$

3.2 การก่อกำเนิดกึ่งกลุ่ม

เนื่องจากเมื่อมีระบบที่เราตั้งขึ้นมาระบบหนึ่งนั้น ส่วนใหญ่เราจะไม่ทราบก่อนว่ากึ่งกลุ่มคืออะไร เพราะสิ่งนั้นได้มาจากการแก้สมการระบบที่เราตั้งขึ้น ซึ่งย่อมจะมีความยุ่งยาก ดังนั้นในส่วนนี้จะเป็นการกล่าวถึงเงื่อนไขก่อกำเนิดกึ่งกลุ่ม เป็นสิ่งที่บอกว่าระบบที่เราตั้งขึ้นนั้นมีคำตอบหรือไม่

ทฤษฎีบท 3.7 (Hille-Yosida) เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่ตัวดำเนินการเชิงเส้นปิด A ที่มีโดเมน $D(A)$ หนาแน่นใน Z จะเป็นตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของกึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้ม $T(t)$ คือ ถ้ามีจำนวนจริงบวก M, w ที่ทำให้ทุกๆค่าจริง $\alpha > w$ แล้วจะได้ว่า $\alpha \in \rho(A)$ และ

$$\|R(\alpha, A)^r\| \leq \frac{M}{(\alpha - w)^r} \quad \text{ทุกๆ } r \geq 1 \tag{3.5}$$

โดย $R(\alpha, A) = (\alpha I - A)^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการแก้ปัญหา นอกจากนี้จะได้ว่า $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$

ในกรณีของกึ่งกลุ่มหดตัว ยังมีเงื่อนไขการก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มอีกเงื่อนไขหนึ่งคือ

นิยาม 3.8 ตัวดำเนินการเชิงเส้น A มีสมบัติแบบกระจาย (dissipative) ในปริภูมิฮิลแบร์ต Z ถ้า $\text{Re}\,\langle Ax, x\rangle \leq 0\,, \forall x \in D(A)$

ทฤษฎีบท 3.9 (Lumer-Philips) ให้ A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีโดเมน $D(A)$ หนาแน่นใน Z ถ้า A มีสมบัติแบบกระจาย และมี $\lambda_0 > 0$ ที่ทำให้ $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = Z$ แล้ว จะได้ว่า A เป็นตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของกึ่งกลุ่มหดตัวใน Z

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ A เป็นตัวดำเนินการปิดที่มีโดเมน $D(A)$ หนาแน่นใน Z ถ้า

$$\text{Re}\,\langle Az, z\rangle \leq \omega\|z\|^2 \qquad \forall z \in D(A) \tag{3.6}$$
$$\text{Re}\,\langle A^*z, z\rangle \leq \omega\|z\|^2 \qquad \forall z \in D(A^*) \tag{3.7}$$

จะได้ว่า A เป็นตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของกึ่งกลุ่ม $T(t)$ ที่สอดคล้องกับ $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$

3.3 เสถียรภาพ

สิ่งที่สำคัญที่สุดในการควบคุมระบบหนึ่งๆ คือเสถียรภาพของระบบ และเนื่องจากในปริภูมิมิติอนันต์ เราสามารถเลือกใช้นิยามการลู่เข้าได้หลายแบบ เราจึงสามารถนิยามเสถียรภาพได้หลายแบบ ดังนี้

นิยาม 3.11 ให้ $T(t)$ เป็นกึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้ม บนปริภูมิฮิลแบร์ต Z เราจะกล่าวว่า

1. $T(t)$ มี*เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ* ถ้า

$$\|T(t)z\| \to 0 \text{ เมื่อ } t \to \infty \ , \ \forall z \in Z$$

2. $T(t)$ มี*เสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง* ถ้ามี $M \geq 1$ และ $\omega > 0$ ที่ทำให้

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}$$

3. $T(t)$ มี*เสถียรภาพอย่างอ่อน* ถ้าสำหรับ $\forall x\ \forall y \in Z$

$$\langle T(t)x, y\rangle \to 0 \ , \quad t \to \infty$$

ต่อไปจะกล่าวถึงวิธีการตรวจสอบเสถียรภาพ ซึ่งมีหลายแนวทางด้วยกัน ทั้งการตรวจสอบจากลักษณะของกึ่งกลุ่ม จากตัวแก้ปัญหา และจากสเปกตรัมของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง ซึ่งสามารถดูรายละเอียดได้ใน [5, 15, 16, 17, 18] โดยในส่วนแรกจะกล่าวถึงเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับก่อนดังนี้

ทฤษฎีบท 3.12 ให้ $T(t)$ กึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้มที่มีเสถียรภาพอย่างอ่อน ถ้าตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง A มีตัวดำเนินการแก้ปัญหาที่กระชับแล้วจะได้ว่า $T(t)$ มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับด้วย

ทฤษฎีบท 3.13 [5] ให้ $T(t)$ เป็นกึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้มที่มีขอบเขตแบบเอกรูปบนปริภูมิบานาค X และมีตัวก่อกำเนิด A แล้ว จะได้ว่า

1. ถ้า $T(t)$ มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับแล้ว จะได้ว่า $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(A)$

2. ถ้า $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(A)$ และ $\sigma_c(A)$ เป็นเซตนับได้ จะได้ว่า $T(t)$ มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

3. ถ้า $R(\lambda, A)$ เป็นตัวดำเนินการกระชับ แล้ว $T(t)$ จะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ *ก็ต่อเมื่อ* $\mathrm{Re}\lambda < 0$ สำหรับทุกๆ $\lambda \in \sigma(A)$

ทฤษฎีบท 3.14 [16, 18] ให้ $T(t)$ เป็นกึ่งกลุ่มที่มีขอบเขตแบบเอกรูปบนปริภูมิบานาค X ที่มีตัวก่อกำเนิดเป็น A และ

1. $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ เป็นเซตนับได้

2. $\sigma_P(A^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$

จะได้ว่า $T(t)$ มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

ต่อไปจะกล่าวถึงการตรวจสอบเสถียรภาพที่เข้มกว่าเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ นั่นคือเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง

บทตั้ง 3.15 กึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้ม $T(t)$ บนปริภูมิบานาค Z จะมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง *ก็ต่อเมื่อ*

$$\int_0^\infty \|T(t)z\|^p dt < \infty \quad , \quad \forall z \in Z \quad p \in [1, \infty)$$

บทตั้งนี้เป็นเงื่อนไขทางโดเมนเวลา ซึ่งเป็นการตรวจสอบบนลักษณะของกึ่งกลุ่ม จากบทตั้ง 3.15 ในกรณีที่ $p = 2$ นำไปสู่ทฤษฎีต่อไป ซึ่งเป็นสมการเลียปูนอฟในระบบมิติอนันต์

ทฤษฎีบท 3.16 กึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้ม $T(t)$ บนปริภูมิฮิลแบร์ต Z จะมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง *ก็ต่อเมื่อ* $\exists P \in \mathcal{L}(Z)$ เป็นตัวดำเนินการบวกแน่นอนที่ทำให้

$$\langle Az, Pz \rangle + \langle Pz, Az \rangle = -\langle z, z \rangle$$

สำหรับทุกๆ $z \in D(A)$

จะพบว่าเงื่อนไขทางเวลานั้น เราสามารถตรวจสอบได้ในกรณีที่เราสามารถหากึ่งกลุ่มออกมาเป็นรูปแบบสมการได้ แต่ในทางปฏิบัติแล้วเราอาจจะไม่ทราบกึ่งกลุ่ม แต่เราจะทราบตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง ซึ่งเราสามารถที่จะประมาณขอบเขตของตัวดำเนินการแก้ปัญหาได้ดังนั้นเงื่อนไขต่อไปจะเป็นเงื่อนไขบนโดเมนความถี่ ซึ่งเป็นการตรวจสอบจากตัวแก้ปัญหานั่นเอง

ทฤษฎีบท 3.17 [5, 16, 18] ให้ $T(t)$ เป็นกึ่งกลุ่มต่อเนื่องอย่างเข้มบนปริภูมิฮิลแบร์ต Z ที่มีตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งเป็น A แล้วจะได้ว่า $T(t)$ จะมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง *ก็ต่อเมื่อ* $\{\lambda \mid \mathrm{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ และมี $M > 0$ ซึ่ง

$$M := \sup_{\mathrm{Re}\lambda > 0} \|R(\lambda, A)\| < \infty$$

ต่อไปแสดงให้เห็นเงื่อนไขหนึ่งที่สำคัญนั่นคือ *เงื่อนไขการเติบโตที่ถูกกำหนดด้วยสเปกตรัม (spectrum-determined growth condition)* ดังนี้ : นิยาม

$$S(A) = \sup \{\mathrm{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\} \tag{3.8}$$

เงื่อนไข spectral-determined growth condition เป็นจริงเมื่อ

$$\omega_0 = S(A) \tag{3.9}$$

โดยที่ ω_0 คือค่าขอบเขตการเจริญเติบโตของกึ่งกลุ่มตาม (3.3)

ความสำคัญของเงื่อนไขนี้ก็คือ ถ้าระบบสอดคล้องก็แสดงว่าถ้า $S(A)$ มีค่าเป็นลบ ขอบเขตการเติบโตของกึ่งกลุ่มก็จะมีค่าเป็นลบด้วย นั่นคือ กึ่งกลุ่ม $T(t)$ มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังนั่นเอง

จากทฤษฎีบทของ Hille-Yosida เราจะเห็นว่ากึ่งกลุ่มใดๆจะสอดคล้องกับเงื่อนไข $S(A) \leq \omega_0$ เสมอ แต่จะมีกึ่งกลุ่มบางตัวที่เงื่อนไข spectral-determined growth condition ไม่เป็นจริง อย่างไรก็ตาม [15] กล่าวว่ากึ่งกลุ่มส่วนใหญ่ที่ได้จากระบบทางกายภาพมักจะสอดคล้องกับเงื่อนไขนี้ ตัวอย่างของกึ่งกลุ่มที่สอดคล้องกับ spectral-determined growth condition คือ

- กึ่งกลุ่มกระชับ (compact semigroup)
- กึ่งกลุ่มหาอนุพันธ์ได้ (differentiable semigroup)
- กึ่งกลุ่มวิเคราะห์ (analytic semigroup)

3.4 สรุป

ในการศึกษาทฤษฎี*ระบบเชิงเส้นมิติอนันต์* นั้น จะพบว่ามีความแตกต่างกับในกรณีของ*ระบบมิติจำกัด*อยู่หลายด้านด้วยกัน ทฤษฎีบทเกี่ยวกับระบบควบคุมในระบบมิติจำกัดหลายทฤษฎีบท ไม่เป็นจริงอีกต่อไปเมื่อนำมาใช่กับระบบมิติอนันต์ โดยเฉพาะทางด้านเสถียรภาพ การศึกษาทฤษฎีกึ่งกลุ่ม จึงเป็นพื้นฐานที่จำเป็นในการวิเคราะห์ระบบ ในบทต่อไปจะกล่าวถึงการนำทฤษฎีระบบควบคุมมิติอนันต์ มาประยุกต์กับระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว กล่าวคือการจัดระบบวงปิดให้อยู่ในรูปของปัญหาโคชีนามธรรม พิสูจน์การก่อกำเนิดกึ่งกลุ่ม และพิสูจน์เสถียรภาพแบบเชิงเส้นกำกับ

บทที่ 4

การประยุกต์กับระบบแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว

ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำทฤษฎีระบบควบคุมมิติอนันต์ มาประยุกต์ใช้กับระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว โดยในหัวข้อ 4.1 จะกล่าวถึงกฎการควบคุมที่ใช้ในการป้อนกลับระบบ และแสดงการจัดระบบวงปิดที่ได้จากการป้อนกลับดังกล่าว ให้อยู่ในรูปแบบระบบเชิงเส้นมิติอนันต์ จากนั้นจะพิสูจน์การก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มหดตัว ซึ่งเป็นผลลัพธ์หลักในบทนี้ ในหัวข้อ 4.2 ดังทฤษฎีบท 4.8

จากบทที่ 2 สมการอนุพันธ์ย่อย เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต ที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของระบบแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว คือ

$$\ddot{w}(x,t) + \frac{EI}{\rho} w''''(x,t) = -x\ddot{\theta}(t) \qquad 0 < x < l\ ,\ t > 0 \tag{4.1}$$

$$w(0,t) = w'(0,t) = w''(l,t) = 0 \tag{4.2}$$

$$m\left[\ddot{w}(x,t) + l\ddot{\theta}(t)\right] = EIw'''(l,t) \tag{4.3}$$

$$I_{\mathrm{H}}\ddot{\theta}(t) = \tau(t) + EIw''(0,t) \tag{4.4}$$

เมื่อ $EI, \rho, m, l, I_{\mathrm{H}}$ เป็นค่าคงตัวทางกายภาพของระบบ

$w(x,t)$ เป็นการเบี่ยงเบนของแขนที่ตำแหน่ง x และเวลา t

$\ddot{\theta}(t)$ เป็นความเร่งเชิงมุมของมอเตอร์

$\tau(t)$ เป็นแรงบิดจากมอเตอร์

4.1 กฎการควบคุมและระบบวงปิด

ในที่นี้เราเสนอกฎการควบคุม

$$\tau(t) = -EIw''(0,t) + KI_{\mathrm{H}}\left[\rho\left\langle \dot{w}, x\right\rangle_H + ml\dot{w}(l,t)\right] \tag{4.5}$$

โดยที่ $K > 0$ (สังเกตว่า $\tau(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลาเท่านั้น)

กฎควบคุมดังกล่าว ได้มาจากการหักล้างพจน์ $EIw''(0,t)$ ในสมการ (4.4) และสำหรับพจน์ที่เหลือ เลือกมาจากการทำให้ตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของระบบวงปิดก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มหดตัว ซึ่งจะพิสูจน์ต่อไปในทฤษฎีบท 4.8 จากนั้นเมื่อแทน (4.5) ลงใน (4.4) และจัดรูปสมการ (4.1)-(4.3) จะได้

$$\ddot{w}(x,t) + \frac{EI}{\rho} w''''(x,t) = -xK\left[\rho\left\langle \dot{w}, x\right\rangle + ml\dot{w}(l,t)\right] \tag{4.6}$$

$$w(0,t) = w'(0,t) = w''(l,t) = 0 \tag{4.7}$$

$$m\ddot{w}(x,t) + mlK\left[\rho\left\langle \dot{w}, x\right\rangle + ml\dot{w}(l,t)\right] = EIw'''(l,t) \tag{4.8}$$

ให้ $H = L_2(0,l)$ และนิยาม $\mathcal{H} = H_0^2(0,l) \oplus L_2(0,l) \oplus \mathbb{C}$

จะได้ว่า $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลแบร์ตภายใต้ผลคูณภายใน

$$\langle u, v \rangle = EI \left\langle u_1'', v_1'' \right\rangle_H + \rho \left\langle u_2, v_2 \right\rangle_H + m \left\langle u_3, v_3 \right\rangle_{\mathbb{C}} \tag{4.9}$$

ในการพิสูจน์ว่า $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลแบร์ตนั้น จะอาศัยบทตั้ง 4.1 ทฤษฎีบท 4.2 บทตั้ง 4.3 และบทตั้ง 4.4 ตามลำดับ โดยก่อนอื่น การแสดงให้เห็นว่า $H_0^2(0,l)$ เป็นปริภูมิฮิลแบร์ต จะอาศัยบทตั้ง 4.1 ดังนี้

บทตั้ง 4.1 $H_0^2(0,l)$ เป็นปริภูมิย่อยปิดของ $H^2(0,l)$

พิสูจน์ ให้ $z_n \in H_0^2(0,l)$ และ $z_n \to z$

$$\|z_n - z\|_2^2 + \|z_n' - z'\|_2^2 + \|z_n'' - z''\|_2^2 \to 0 \ \ , \ n \to \infty$$

จะได้ว่าแต่ละเทอมจะต้องลู่เข้าสู่ศูนย์ด้วย จาก $z_n \to z$ ในนอร์มสอง ดังนั้นจะมีลำดับย่อย z_{n_k} ที่ลู่เข้าหา z เกือบทุกแห่ง จากทฤษฎีบทการฝังในของโซโบเลฟ ก.2 จะได้ว่า $H_0^2(0,l) \subset C_B^1(0,l)$ ดังข้อสังเกต 1. ดังนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า z_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ z_{n_k} จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเช่นกัน เพราะฉะนั้น z_{n_k} จะต้องลู่เข้าหา z ทุกแห่ง ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า

$$z_{n_k}(0) = 0 \Longrightarrow z(0) = 0$$

ในทำนองเดียวกัน ก็จะได้ว่า

$$z_{n_k}'(0) = 0 \Longrightarrow z'(0) = 0$$

นั่นคือ $z \in H_0^2(0,l)$ แสดงว่า $H_0^2(0,l)$ เป็นปริภูมิย่อยปิดใน $H^2(0,l)$ □

เนื่องจากทุกๆ ปริภูมิปิดของปริภูมิบริบูรณ์ จะเป็นปริภูมิบริบูรณ์ด้วย ดังนั้น $H_0^2(0,l)$ เป็นปริภูมิฮิลแบร์ต ภายใต้นอร์มแบบปกติของปริภูมิโซโบเลฟ ($\|u\|_{H^2}^2 = \|u\|^2 + \|u'\|^2 + \|u''\|^2$) ซึ่งเราจะแสดงให้เห็นต่อมาว่านอร์มที่นิยามขึ้นมาใหม่

$$\|u\|_{H_0^2}^2 = \|u''\|^2$$

จะสมมูลกับนอร์มอันเดิมดังบทตั้ง 4.4 โดยอาศัยทฤษฎีบท 4.2 และบทตั้ง 4.3 ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ Ω เป็นช่วงเปิดใน $\mathbb{R}$ และให้ $u \in H^1(\Omega)$ จะได้ว่า u เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสัมบูรณ์ (absolutely continuous)
พิสูจน์ ดูใน [19]

บทตั้ง 4.3

$$\|w\|^2 \leq l^4 \|w''\|^2, \ \ \forall w \in H_0^2(0,l) \tag{4.10}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 4.2 เราสามารถเขียนได้ว่า

$$w(x) = \int_0^x w'(x)dx + w(0)$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|w(x)| &\leq \int_0^x |w'(x)|dx \leq \int_0^l |w'(x)|dx \\
|w(x)|^2 &\leq \left[\int_0^l |w'(x)|dx\right]^2 \\
&\leq l\|w'\|^2
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
\|w\|^2 = \int_0^l |w(x)|^2 dx \leq l^2\|w'\|^2
$$

ในทำนองเดียวกัน จาก

$$
w'(x) = \int_0^x w''(x)dx + w'(0)
$$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|w'(x)| &\leq \int_0^x |w''(x)|dx \leq \int_0^l |w''(x)|dx \\
|w'(x)|^2 &\leq \left[\int_0^l |w''(x)|dx\right]^2 \leq l\|w''(x)\|^2 \\
\|w'\|^2 = \int_0^l |w'(x)|^2 dx &\leq l^2\|w''\|^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$
\|w\|^2 \leq l^4\|w''\|^2
$$

ตามต้องการ □

บทตั้ง 4.4 นิยาม $\|w\|^2_{H_0^2} = \|w''\|^2$ จะได้ว่า

$$
\|\cdot\|_{H_0^2} \sim \|\cdot\|_{H^2}
$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $w \in H_0^2(0,l)$ จากบทตั้ง 4.3 จะได้ว่า $\|w\|^2 \leq l^4\|w''\|^2$ และ $\|w'\|^2 \leq l^2\|w''\|^2$ ดังนั้น

$$
\|w\|^2 + \|w'\|^2 + \|w''\|^2 \leq (l^4 + l^2 + 1)\|w''\|^2
$$

และเนื่องจาก

$$
\|w''\|^2 \leq \|w\|^2 + \|w'\|^2 + \|w''\|^2
$$

จะได้ว่า

$$
\frac{(\|w\|^2 + \|w'\|^2 + \|w''\|^2)}{(l^4 + l^2 + 1)} \leq \|w''\|^2 \leq \|w\|^2 + \|w'\|^2 + \|w''\|^2
$$

ซึ่งก็คือ $\|\cdot\|_{H_0^2} \sim \|\cdot\|_{H^2}$ นั่นเอง □

ดังนั้น จากบทตั้ง 4.4 เราจะได้ว่า $H_0^2(0,l)$ ก็จะเป็นปริภูมิฮิลแบร์ตภายใต้นอร์มที่นิยามขึ้นใหม่ด้วย เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ว่า $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลแบร์ต ก็สามารถแสดงได้อย่างชัดเจน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.5 $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต

พิสูจน์ ให้ $z_n = (z_{1n}, z_{2n}, z_{3n})$ เป็นลำดับโคชีใน $\mathcal{H}$ จะได้ว่า

$$EI\|z''_{1n} - z''_{1m}\|^2 + \rho\|z_{2n} - z_{2m}\|^2 + m|z_{3n} - z_{3m}|^2 \to 0 \ \ n, m \to \infty$$

พิจารณาเทอมแรกทางซ้ายมือ เนื่องจากนอร์มดังกล่าวสมมูลกับนอร์มปกติของปริภูมิโซโบเลฟ และเนื่องจาก $H_0^2(0,l)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้น z_{1n} ก็จะต้องลู่เข้าหา z_1 ตัวหนึ่งใน $H_0^2(0,l)$ เช่นกัน และด้วยเหตุผลทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $L_2(0,l)$ และ $\mathbb{C}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้น z_{2n} ลู่เข้าหา z_2 ตัวหนึ่งใน $L_2(0,l)$ และ z_{3n} ลู่เข้าหา z_3 ตัวหนึ่งใน $\mathbb{C}$ นั่นเอง ดังนั้น $\|z_n - z\|_{\mathcal{H}}^2 \to 0$ โดยที่ $z \in \mathcal{H}$ นั่นก็คือทุกๆ ลำดับโคชีใน $\mathcal{H}$ ลู่เข้าหาสมาชิกหนึ่งๆ ใน $\mathcal{H}$ ดังนั้น $\mathcal{H}$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต $\square$

ต่อมา จะพบว่าเราสามารถจัดรูปแบบสมการ (4.6)-(4.8) ให้อยู่ในรูปแบบปัญหาโคชีนามธรรม (3.1) ได้ โดยที่

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -\frac{EI}{\rho}\frac{\partial^4}{\partial x^4} & -Kx\rho\langle\cdot, x\rangle & -Kxml \\ \frac{EI}{m}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ |_{x=l} & -Kl\rho\langle\cdot, x\rangle & -Klml \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in H^4(0,l) \oplus H_0^2(0,l) \oplus \mathbb{C} \mid z_1(0) = z_1'(0) = z_1''(l) = 0, z_2(l) = z_3\right\}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} w(\cdot,t) & \dot{w}(\cdot,t) & \dot{w}(l,t) \end{bmatrix}^T \in \mathcal{H}$$

จะเห็นว่า $\mathcal{A}$ ใน (4.11) เป็นตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต เมื่อเทียบกับนอร์มที่นิยามขึ้นบนปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้น $\mathcal{A}$ อาจจะไม่นิยามบนทั้งปริภูมิฮิลเบิร์ต แต่อย่างน้อย $D(\mathcal{A})$ ควรจะหนาแน่นใน $\mathcal{H}$ กล่าวคือ เราสามารถประมาณสมาชิกทุกตัวในปริภูมิฮิลเบิร์ตได้เสมอ ด้วยสมาชิกบางตัวใน $D(\mathcal{A})$ ซึ่งจะแสดงให้เห็นดังประพจน์ต่อไปนี้

ประพจน์ 4.6 $D(\mathcal{A})$ หนาแน่นใน $\mathcal{H}$

พิสูจน์ ให้ $A \subset B \subset C$ และ A หนาแน่นใน C จะได้ว่า A หนาแน่นใน B และ B หนาแน่นใน C เนื่องจาก $C_c^\infty(0,l)$ หนาแน่นใน $H^k(0,l)$ (จาก [20] หน้า 54) และการที่ฟังก์ชันอยู่ใน C_c^∞ หมายความว่าที่จุดปลายของโดเมนนั้น ค่าของฟังก์ชันและอนุพันธ์ ต้องลู่เข้าสู่ศูนย์ จะได้ว่า $C_c^\infty(0,l) \subset H_0^2(0,l) \subset H^2(0,l)$ ดังนั้น $C_c^\infty(0,l)$ จะหนาแน่นใน $H_0^2(0,l)$ และเนื่องจาก

$$C_c^\infty(0,l) \subset \left\{u \in H^4(0,l) \mid u(0) = u'(0) = u''(l) = 0\right\} \subset H_0^2(0,l)$$

ซึ่งหมายความว่า $\left\{u \in H^4(0,l) \mid u(0) = u'(0) = u''(l) = 0\right\}$ หนาแน่นใน $H_0^2(0,l)$ เพราะฉะนั้น จะมี $u_1 \in \left\{u \in H^4(0,l) \mid u(0) = u'(0) = u''(l) = 0\right\}$ สำหรับทุกค่า $\epsilon > 0$ จะได้ว่า

$$\|u_1'' - v_1''\| \le \frac{\epsilon}{\sqrt{3EI}}, \quad \forall v_1 \in H_0^2(0,l). \tag{4.12}$$

เนื่องจาก $C_c^\infty(0,l)$ หนาแน่นใน $L_2(0,l)$ (จาก [20] หน้า 31) จะได้ว่า $H_0^2(0,l)$ หนาแน่นใน $L_2(0,l)$ ดังนั้น จะมี $u_2 \in H_0^2(0,l)$ ซึ่งสำหรับทุกค่า $\epsilon > 0$ จะได้ว่า

$$\|u_2 - v_2\| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{3\rho}}, \quad \forall v_2 \in L_2(0,l). \tag{4.13}$$

เราสามารถเลือก $u_2 \in H_0^2(0,l)$ ไปพร้อมๆกัน ในลักษณะที่ว่า

$$|u_2(l) - v_3| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{3m}}, \quad \forall v_3 \in \mathbb{C}. \tag{4.14}$$

จาก (4.12)-(4.14) จะได้ว่า จะมี $u \in D(\mathcal{A})$ ซึ่งสำหรับทุกค่า $\epsilon > 0$ จะได้ว่า

$$\|u - v\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon, \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

ซึ่งแสดงว่า $D(\mathcal{A})$ หนาแน่นใน $\mathcal{H}$ นั่นเอง □

4.2 การพิสูจน์การก่อกำเนิดกึ่งกลุ่ม

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นว่า $\mathcal{A}$ ก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มหดตัวดังทฤษฎีบท 4.8 ซึ่งใช้ผลลัพธ์จากทฤษฎีบท 3.10 ดังนั้นจะเห็นว่า ก่อนอื่นเราจะต้องพิสูจน์ว่า $\mathcal{A}$ เป็นตัวดำเนินการปิด โดยอาศัยทฤษฎีบทกราฟปิด และบทตั้ง 4.7 ดังนี้

นิยาม $Q : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ โดย

$$Qv = \begin{bmatrix} \frac{K}{EI} q_2(x)[\rho \langle v_1, x \rangle + mlv_1(l)] - \frac{\rho}{EI} \int_0^x \int_0^{x_4} \int_{x_3}^l \int_{x_2}^l v_2(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 + \frac{m}{EI} q_1(x) v_3 \\ v_1(x) \\ v_1(l) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} q_1(x) &= \frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \\ q_2(x) &= \rho \left(\frac{l^2 x^3}{12} - \frac{l^3 x^2}{6} - \frac{x^5}{120} \right) + mlq_1(x) \end{aligned}$$

บทตั้ง 4.7

1. Q เป็นตัวดำเนินการผกผันของ $\mathcal{A}$
2. $\mathcal{A}^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการมีขอบเขต

พิสูจน์

1. ให้ $v \in \mathcal{H}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} AQv &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} & -Kx\rho \langle \cdot, x \rangle & -Kxml \\ \frac{EI}{m} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \big|_{x=l} & -Kl\rho \langle \cdot, x \rangle & -Klml \end{bmatrix} Qv \\ &= \begin{bmatrix} v_1(x) \\ -\frac{EIK}{\rho EI} [\rho \langle v_1, x \rangle + mlv_1(l)] q_2''''(x) + v_2(x) - Kx\rho \langle v_1, x \rangle - Kxmlv_1(l) \\ \frac{EIK}{mEI} [\rho \langle v_1, x \rangle + mlv_1(l)] q_2'''(l) - 0 + q_1'''(l) v_3 - Kl\rho \langle v_1, x \rangle - Klmlv_1(l) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.16}$$

จากการคำนวณ $q_2'''(l) = ml, \quad q_2''''(x) = -\rho x, \quad q_1'''(l) = 1$ นำไปแทนในสมการ (4.16) จะได้ว่า

$$AQv = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ v_3 \end{bmatrix} = v \tag{4.17}$$

ให้ $u \in D(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} QAu &= Q\begin{bmatrix} u_2(x) \\ -\frac{EI}{\rho}u_1''''(x) - Kx\rho\langle u_1, x\rangle - Kxmlu_3 \\ \frac{EI}{m}u_1'''(l) - Kl\rho\langle u_2, x\rangle - Klmlu_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_3(x) \\ u_2(x) \\ u_2(l) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.18}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} q_3(x) = \frac{Kq_2(x)}{EI}[\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_2(l)] + \int_0^x \int_0^{x_4} \int_{x_3}^l \int_{x_2}^l u_1''''(x_1)dx_1dx_2dx_3dx_4 \\ + \frac{\rho}{EI}(K\rho\langle u_2, x\rangle + Kmlu_3)\left(\frac{mlq_1(x) - q_2(x)}{\rho}\right) \\ + q_1(x)u_1'''(l) - \frac{mq_1(x)}{EI}(K\rho l\langle u_2, x\rangle + Klmlu_3) \end{aligned}$$

นำไปแทนใน (4.18) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} QAu &= \begin{bmatrix} \int_0^x \int_0^{x_4} \int_{x_3}^l \int_{x_2}^l u_1''''(x_1)dx_1dx_2dx_3dx_4 + q_1(x)u_1'''(l) \\ u_2(x) \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -q_1(x)u_1'''(l) + u_1(x) + q_1(x)u_1'''(l) \\ u_2(x) \\ u_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3 \end{bmatrix} = u \end{aligned} \tag{4.19}$$

ดังนั้นจากสมการ (4.17) และ (4.19) จะได้ว่า $AQ = I$, $QA = I$ และ $\mathcal{R}(Q) = D(\mathcal{A})$ ดังนั้น Q เป็นตัวดำเนินการผกผันของ $\mathcal{A}$ นอกจากนี้ จาก $D(Q) = \mathcal{H} = \mathcal{R}(\mathcal{A})$ จะได้ว่า $\mathcal{A}$ เป็นตัวดำเนินการทั่วถึง

2. พิจารณานอร์มของ $u = \mathcal{A}^{-1}v$ จาก (4.15)

$$u_1''(x) = \frac{K}{EI}\{\rho\langle v_1, x\rangle + mlv_1(l)\}q_2''(x) + \frac{m}{EI}q_1''(x)v_3 - \frac{\rho}{EI}\int_x^l \int_{x_2}^l v_2(x_1)dx_1dx_2$$

$$\begin{aligned}
\|u_1''\|^2 &\le 4\left\|\frac{K}{EI}\rho\,\langle v_1,x\rangle\, q_2''\right\|^2+4\left\|\frac{K}{EI}mlv_1(l)q_2''\right\|^2\\
&\quad +4\left\|\frac{mv_3}{EI}q_1''\right\|^2+4\left\|\frac{\rho}{EI}\int_x^l\int_{x_2}^l v_2(x_1)dx_1dx_2\right\|^2\\
&\le 4\left|\frac{K\rho}{EI}\right|^2\|q_2''\|^2|\,\langle v_1,x\rangle\,|^2+4\left|\frac{Kml}{EI}\right|^2\|q_2''\|^2|v_1(l)|^2\\
&\quad +4\left|\frac{m}{EI}\right|^2\|q_1''\|^2|v_3|^2+4\left|\frac{\rho}{EI}\right|^2\int_0^l\left|\int_x^l\int_{x_2}^l v_2(x_1)dx_1dx_2\right|^2dx
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $q_1'',q_2''\in L_2(0,l)$ นอร์มมีค่าจำกัด นิยามค่าคงตัว

$$\begin{aligned}
C_1&=4\left|\frac{K\rho}{EI}\right|^2\|q_2''\|^2\,, &\quad C_2&=4\left|\frac{Kml}{EI}\right|^2\|q_2''\|^2,\\
C_3&=4\left|\frac{m}{EI}\right|^2\|q_1''\|^2\,, &\quad C_4&=4\left|\frac{\rho}{EI}\right|^2
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|u_1''(x)\|^2 &\le C_1\|v_1\|^2\cdot\frac{l^3}{3}+C_2|v_1(l)|^2+C_3|v_3|^2+C_4l\sup_{x\in(0,l)}\left|\int_x^l\int_{x_2}^l v_2(x_1)dx_1dx_2\right|^2\\
&\le \frac{C_1l^3}{3}l^4\|v_1''\|^2+C_2'\|v_1''\|^2+C_3|v_3|^2+C_4l\sup_{x\in(0,l)}\int_x^l\left|\int_{x_2}^l v_2(x_1)dx_1\right|^2dx_2 \qquad (4.20)\\
&\le \frac{C_1l^7}{3}\|v_1''\|^2+C_2'\|v_1''\|^2+C_3|v_3|^2+C_4l\int_0^l\left|\int_{x_2}^l v_2(x_1)dx_1\right|^2dx_2\\
&\le \left(\frac{C_1l^7}{3}+C_2'\right)\|v_1''\|^2+C_3|v_3|^2+C_4l^2\sup_{x_2\in(0,l)}\left|\int_{x_2}^l v_2(x_1)dx_1\right|^2\\
&\le \left(\frac{C_1l^7}{3}+C_2'\right)\|v_1''\|^2+C_3|v_3|^2+C_4l^2\sup_{x_2\in(0,l)}\int_{x_2}^l|v_2(x_1)|^2dx_1\\
&\le \left(\frac{C_1l^7}{3}+C_2'\right)\|v_1''\|^2+C_3|v_3|^2+C_4l^2\|v_2\|^2 \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

โดยที่ (4.20) ได้จาก (4.10) และทฤษฎีบทการฝังใน ดัง (ก.4)

ต่อไปพิจารณา $u_2(x)=v_1(x)$ และใช้สมการ (4.10) จะได้ว่า

$$\|u_2\|^2=\|v_1\|^2\le l^4\|v_1''\|^2 \qquad (4.22)$$

และ $u_3=v_1(l)$ และทำนองเดียวกัน จาก (ก.4) จะได้ว่า

$$|u_3|^2=|v_1(l)|^2\le C_5\|v_1''\|^2 \qquad (4.23)$$

ดังนั้นจาก (4.21)-(4.23) จะได้

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{H}}^2 &= EI\|u_1''\|^2+\rho\|u_2\|^2+m|u_3|^2\\
&\le \left\{EI\left(\frac{C_1l^7}{3}+C_2'\right)+\rho l^4+mC_5\right\}\|v_1''\|^2+EIC_4l^2\|v_2\|^2+EIC_3|v_3|^2
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าเราสามารถหา $M>0$ ที่ทำให้ $\|\mathcal{A}^{-1}v\|^2_{\mathcal{H}} \leq M\|v\|^2_{\mathcal{H}}$ ได้เสมอ เพราะฉะนั้น $\mathcal{A}^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการมีขอบเขต

จากบทตั้ง 4.7 จะได้ว่า $\mathcal{A}^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการมีขอบเขตที่นิยามบนปริภูมิ $\mathcal{H}$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท ก.9 จะได้ว่า $\mathcal{A}^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการปิด ดังนั้น $\mathcal{A}$ จึงเป็นตัวดำเนินการปิดด้วยเช่นกัน และจากนิยาม ก.4 จะได้ว่า $0 \in \rho(\mathcal{A})$

เนื่องจากเราจะอาศัยทฤษฎีบท 3.10 ในการพิสูจน์ว่า $\mathcal{A}$ เป็นตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของกึ่งกลุ่ม จะเห็นว่าเราต้องหาตัวดำเนินการผูกพันของ $\mathcal{A}^*$ ของ $\mathcal{A}$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u, v\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{EI}{\rho}u_1'''' - Kx\left(\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right) \\ -Kl\left(\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right) + \frac{EI}{m}u_1'''(l) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= EI\left\langle u_2'', v_1''\right\rangle + \rho\left\langle -\frac{EI}{\rho}u_1'''', v_2\right\rangle - \rho\left\langle Kx(\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3), v_2\right\rangle \\
&\quad + m\left(-Kl(\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3) + \frac{EI}{m}u_1'''(l)\right)\overline{v_3} \\
&= EI\left\langle u_2'', v_1''\right\rangle - EI\left\langle u_1'''', v_2\right\rangle - \rho K(\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3)\left\langle x, v_2\right\rangle \\
&\quad - Kml(\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3)\overline{v_3} + EIu_1'''(l)\overline{v_3}
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

แต่เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
\left\langle u_2'', v_1''\right\rangle &= \int_0^l u_2''\overline{v_1''}dx \\
&= u_2'\overline{v_1''}\,|_0^l - \int_0^l u_2'\overline{v_1'''}dx \\
&= u_2'(l)\overline{v_1''(l)} - u_2\overline{v_1'''}\,|_0^l + \int_0^l u_2\overline{v_1''''}dx \\
&= u_2'(l)\overline{v_1''(l)} - u_2(l)\overline{v_1'''(l)} + \left\langle u_2, v_1''''\right\rangle
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle u_1'''', v_2\right\rangle &= \int_0^l u_1''''\overline{v_2}dx \\
&= u_1'''\overline{v_2}\,|_0^l - \int_0^l u_1'''\overline{v_2'}dx \\
&= u_1'''(l)\overline{v_2(l)} - u_1'''(0)\overline{v_2(0)} - u_1''\overline{v_2'}\,|_0^l + \int_0^l u_1''\overline{v_2''}dx \\
&= u_1'''(l)\overline{v_2(l)} - u_1'''(0)\overline{v_2(0)} + u_1''(0)\overline{v_2'(0)} + \left\langle u_1'', v_2''\right\rangle
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

นำ (4.25) และ (4.26) ไปแทนใน (4.24) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u, v\rangle &= EIu_2'(l)\overline{v_1''(l)} - EIu_2(l)\overline{v_1'''(l)} + EI\left\langle u_2, v_1''''\right\rangle - EIu_1'''(l)\overline{v_2(l)} \\
&\quad + EIu_1'''(0)\overline{v_2(0)} - EIu_1''(0)\overline{v_2'(0)} - EI\left\langle u_1'', v_2''\right\rangle + EIu_1'''(l)\overline{v_3} \\
&\quad - (\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3)(K\rho\left\langle x, v_2\right\rangle + Kml\overline{v_3})
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

ดังนั้นถ้าเราให้

$$
v_1''(l) = v_2(0) = v_2'(0) = 0, v_3 = v_2(l)
$$

นำไปแทนใน (4.27) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u, v\rangle &= -EIu_2(l)\overline{v_1'''(l)} + EI\langle u_2, v_1''''\rangle - EI\langle u_1'', v_2''\rangle - (\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3)(K\rho\langle x, v_2\rangle + Kml\overline{v_3}) \\
&= mu_3\left(-\frac{EI}{m}\overline{v_1'''(l)}\right) + \rho\left\langle u_2, \frac{EI}{\rho}v_1''''\right\rangle + EI\langle u_1'', -v_2''\rangle \\
&\quad +\rho\left\langle u_2, -Kx(\overline{\rho\langle x, v_2\rangle + ml\overline{v_3}})\right\rangle + mu_3\left[-Kl(\rho\langle x, v_2\rangle + ml\overline{v_3})\right] \\
&= EI\langle u_1'', -v_2''\rangle + \rho\left\langle u_2, \frac{EI}{\rho}v_1'''' - Kx(\rho\langle v_2, x\rangle + mlv_3)\right\rangle \\
&\quad +mu_3\left(-\frac{EI}{m}\overline{v_1'''(l)} - Kl(\overline{\rho\langle v_2, x\rangle + ml\overline{v_3}})\right) \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -v_2 \\ \frac{EI}{\rho}v_1'''' - Kx(\rho\langle v_2, x\rangle + mlv_3) \\ -\frac{EI}{m}v_1'''(l) - Kl(\rho\langle v_2, x\rangle + mlv_3) \end{bmatrix} \right\rangle
\end{aligned}
$$

จะได้ว่าตัวดำเนินการผูกพันของ $\mathcal{A}$ คือ

$$
\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ \frac{EI}{\rho}\frac{\partial^4}{\partial x^4} & -Kx\rho\langle\cdot, x\rangle & -Kxml \\ -\frac{EI}{m}\frac{\partial^3}{\partial x^3}|_{x=l} & -K\rho l\langle\cdot, x\rangle & -Klml \end{bmatrix} \tag{4.28}
$$

$$
D(\mathcal{A}^*) = \left\{(v_1, v_2, v_3) \in H^4(0,l) \oplus H_0^2(0,l) \oplus \mathbb{C} \mid v_2(0) = v_2'(0) = v_1''(l) = 0, v_3 = v_2(l)\right\}
$$

ทฤษฎีบท 4.8 $\mathcal{A}$ เป็นตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของกึ่งกลุ่มหดตัว

พิสูจน์ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u, u\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{EI}{\rho}u_1'''' - Kx(\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3) \\ -Kl(\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3) + \frac{EI}{m}u_1'''(l) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= EI\langle u_2'', u_1''\rangle + \rho\left\langle -\frac{EI}{\rho}u_1'''', u_2\right\rangle - \rho\langle Kx[\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3], u_2\rangle \\
&\quad +m\left\langle -Kl[\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3] + \frac{EI}{m}u_1'''(l), u_3\right\rangle_{\mathbb{C}} \\
&= EI\langle u_2'', u_1''\rangle - EI\langle u_1'''', u_2\rangle - K[\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3]\langle\rho x, u_2\rangle \\
&\quad -Kml[\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3]\overline{u_3} + EIu_1'''(l)\overline{u_3} \\
&= EI\overline{\langle u_1'', u_2''\rangle} - EI\langle u_1'', u_2''\rangle - EIu_1'''(l)\overline{u_2(l)} \\
&\quad -K[\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3]\left(\rho\overline{\langle u_2, x\rangle} + ml\overline{u_3}\right) + EIu_1'''(l)\overline{u_3} \\
&= EI\overline{\langle u_1'', u_2''\rangle} - EI\langle u_1'', u_2''\rangle - K\left|\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3\right|^2
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}u, u\rangle_{\mathcal{H}} = -K\left|\rho\langle u_2, x\rangle + mlu_3\right|^2 \le 0 \tag{4.29}
$$

ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}^* u, u\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{bmatrix} -u_2 \\ \frac{EI}{\rho}u_1'''' - Kx\left(\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right) \\ -Kl\left(\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right) - \frac{EI}{m}u_1'''(l) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= -EI\left\langle u_2'', u_1''\right\rangle + \rho\left\langle \frac{EI}{\rho}u_1'''', u_2\right\rangle - \rho\left\langle Kx\left[\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right], u_2\right\rangle \\
&\quad +m\left\langle -Kl\left[\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right] - \frac{EI}{m}u_1'''(l), u_3\right\rangle_{\mathbb{C}} \\
&= -EI\left\langle u_2'', u_1''\right\rangle + EI\left\langle u_1'''', u_2\right\rangle - K\left[\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right]\left\langle \rho x, u_2\right\rangle \\
&\quad -Kml\left[\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right]\overline{u_3} - EIu_1'''(l)\overline{u_3} \\
&= -EI\overline{\left\langle u_1'', u_2''\right\rangle} + EI\left\langle u_1'', u_2''\right\rangle + EIu_1'''(l)u_2(l) \\
&\quad -K\left[\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right]\left[\rho\overline{\left\langle u_2, x\right\rangle} + ml\overline{u_3}\right] - EIu_1'''(l)\overline{u_3} \\
&= -EI\overline{\left\langle u_1'', u_2''\right\rangle} + EI\left\langle u_1'', u_2''\right\rangle - K\left|\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right|^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\operatorname{Re}\left\langle \mathcal{A}^* u, u\right\rangle_{\mathcal{H}} = -K\left|\rho\left\langle u_2, x\right\rangle + mlu_3\right|^2 \leq 0 \tag{4.30}
$$

เนื่องจาก $\mathcal{A}$ เป็นตัวดำเนินการปิด โดยมี $D(\mathcal{A})$ หนาแน่นใน $\mathcal{H}$ และจากสมการ (4.29) และ (4.30) จะพบว่าสมการ (3.6)-(3.7) ในทฤษฎีบท 3.10 เป็นจริงในกรณีที่ $\omega = 0$ ซึ่งจะได้ว่า A ก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มหดตัว นั่นคือ $\|T(t)\| \leq 1$ □

4.3 สรุป

จากผลลัพธ์ที่ว่ากึ่งกลุ่มที่ได้จากระบบวงปิดเป็นกึ่งกลุ่มหดตัว จะได้ว่าการป้อนกลับที่เสนอขึ้นทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพตามนัยของเลียปูนอฟ แต่เนื่องจากเราสามารถนิยามทอพอโลยีที่แตกต่างกันได้หลายแบบในปริภูมิมิติอนันต์ ทำให้ระบบมิติอนันต์สามารถมีเสถียรภาพที่แตกต่างกัน เช่น เสถียรภาพแบบอ่อน เสถียรภาพแบบเข้ม และเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง เป็นต้น โดยในบทต่อไป เราจะวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ โดยใช้การวิเคราะห์เชิงสเปกตรัมของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของระบบวงปิด

บทที่ 5

การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบวงปิดเชิงสเปกตรัม

ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์สเปกตรัมของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของระบบแขนหุ่นยนต์แบบอ่อนตัว ที่มีการป้อนกลับด้วยกฎการควบคุมที่เสนอขึ้น โดยในหัวข้อ 5.1 จะแสดงให้เห็นว่า เซตสเปกตรัมดังกล่าวประกอบด้วยค่าเฉพาะที่เป็นเอกเทศ และมีภาวะรากซ้ำจำกัดเท่านั้น โดยไม่มีสเปกตรัมต่อเนื่อง และสเปกตรัมตกค้าง ซึ่งจะทำให้การวิเคราะห์เสถียรภาพวงปิดในเชิงทฤษฎีระบบมิติอนันต์ ลดความซับซ้อนยุ่งยากไปได้ระดับหนึ่ง และในหัวข้อ 5.2 จะพบว่าค่าเฉพาะนั้นเป็นคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการ $\mathcal{A}$ ที่ได้จากระบบวงปิด ดังสมการ (5.32) ต่อมาในหัวข้อ 5.3 จะวิเคราะห์ส่วนจริงของค่าเฉพาะ ว่ามีค่าเฉพาะที่อยู่ทางขวามือของระนาบเปิดเชิงซ้อนหรือไม่ ซึ่งจะนำไปใช้ในส่วนสุดท้าย ในหัวข้อ 5.4 คือการวิเคราะห์เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบวงปิด ซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่สำคัญของงานวิจัยนี้

5.1 สเปกตรัมของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของระบบวงปิด

ก่อนอื่นเราจะแสดงให้เห็นว่า เซตของสเปกตรัมดังกล่าว แท้ที่จริงแล้วประกอบด้วยค่าเฉพาะเท่านั้น โดยอาศัยจากทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1 ให้ A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นปิดที่มี $0 \in \rho(A)$ และ A^{-1} เป็นตัวดำเนินการกระชับแล้ว จะได้ว่าสเปกตรัมของ A จะประกอบไปด้วยค่าเฉพาะที่เป็นเอกเทศและมีภาวะรากซ้ำจำกัดเท่านั้น

เนื่องจากเราได้พิสูจน์แล้วว่า A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นปิดที่มี $0 \in \rho(A)$ ดังนั้น จึงเหลือแต่ส่วนการพิสูจน์ว่า A^{-1} เป็นตัวดำเนินการกระชับ ซึ่งแสดงได้จากบทตั้ง 5.2 ดังนี้

บทตั้ง 5.2 ตัวดำเนินการ $\mathcal{A}^{-1}$ ที่นิยามใน (4.15) เป็นตัวดำเนินการกระชับ
พิสูจน์ $\mathcal{A}^{-1}$ สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ I & 0 & 0 \\ T_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า ถ้าหากแต่ละ T_i และ I เป็นตัวดำเนินการกระชับทั้งหมดแล้ว $\mathcal{A}^{-1}$ ก็จะเป็นตัวดำเนินการกระชับด้วย ดังนั้นเราจะพิสูจน์จากแต่ละกรณี ดังนี้

1. พิจารณา $T_1 : H_0^2(0,l) \to H_0^2(0,l)$

$$T_1 v = \frac{K}{EI} q_2(x)(\rho \langle v, x \rangle + mlv(l))$$

ให้ S_N เป็นเซตมีขอบเขตของ $v \in H_0^2(0,l)$ ที่ $\|v\|_{H_0^2} \leq N$

$$\begin{aligned}
\|T_1 v\|_{H_0^2} &= \frac{K}{EI}\|q_2(x)\|_{H_0^2}|\rho\langle v,x\rangle + mlv(l)| \\
&\leq \frac{K}{EI}\|q_2(x)\|_{H_0^2}(\rho|\langle v,x\rangle| + ml|v(l)|) \\
&\leq \frac{K}{EI}\|q_2(x)\|_{H_0^2}\left\{\rho l\sqrt{\frac{l}{3}}\|v\|_{L_2} + mlM_1\|v\|_{H_0^2}\right\} \qquad (5.1) \\
&\leq \frac{K}{EI}\|q_2(x)\|_{H_0^2}\left\{\rho l\sqrt{\frac{l}{3}}N' + mlM_1 N\right\} \qquad (5.2) \\
&\leq M_2
\end{aligned}$$

โดยที่สมการ (5.1) ได้จาก (ก.4) และอสมการของโคชี-ชวาตซ์ และจากสมการ (4.10) จะได้เป็นดังสมการ (5.2)

ดังนั้น เราจะได้ว่า $T_1 v$ มีขอบเขตแบบเอกรูป

เนื่องจาก $q_2(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นั่นคือ

$$\forall x_0 \in (0,l), \forall \epsilon_1 > 0, \;\; \exists \delta_1 > 0 \text{ ที่ทำให้}$$

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \|q_2(x) - q_2(x_0)\| < \epsilon_1$$

เมื่อพิจารณา

$$\begin{aligned}
\|T_1 v(x) - T_1 v(x_0)\| &= \frac{K}{EI}|\rho\langle v,x\rangle + mlv(l)|\|q_2(x) - q_2(x_0)\| \\
&\leq \frac{K}{EI}\left\{\rho l\sqrt{\frac{l}{3}}N' + mlM_1 N\right\}\|q_2(x) - q_2(x_0)\|
\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าให้ $\epsilon = EI\epsilon_1/K(\rho l\sqrt{\frac{l}{3}}N' + mlM_1 N)$ จะได้ว่า

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \|T_1 v(x) - T_1 v(x_0)\| < \epsilon$$

โดยสังเกตว่าการเลือก δ_1 นั้น ไม่ได้ขึ้นอยู่กับสมาชิก $v \in S_N$ ซึ่งก็หมายความว่า $T_1 v$ ต่อเนื่องแบบเท่ากัน (equicontinuous) ดังนั้นจากทฤษฎีบทของอาร์เซลา ภาพของ $T_1 v$ เป็นเซตก่อนกระชับ (precompact set) ซึ่งก็คือ T_1 เป็นตัวดำเนินการกระชับ

2. พิจารณา $T_2 : L_2(0,l) \to H_0^2(0,l)$

$$T_2 v = -\frac{\rho}{EI}\int_0^x \int_0^{x_4} \int_{x_3}^l \int_{x_2}^l v(x_1)dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

ให้ $f \in L_2(0,l)$ และ χ_S เป็นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของเซต S เนื่องจาก

$$\int_{[0,l]}\int_{[0,l]} \chi_{(0,x)} dx dy = xl < \infty, \quad 0 \leq x \leq l$$

จะได้ว่า $\chi_{(0,x)} \in L_2[0,l] \times L_2[0,l]$ ดังนั้นตัวดำเนินการ

$$Af = \int_0^x f(\tau)d\tau = \int_0^l \chi_{(0,x)} f(\tau)d\tau$$

จะเป็นตัวดำเนินการกระชับจาก $L_2(0,l) \to L_2(0,l)$ (ทฤษฎีบท ก.12) เราสามารถพิจารณา T_2 ว่าเป็นฟังก์ชันประกอบของตัวดำเนินการ A ดังข้างต้นได้ และเนื่องจากฟังก์ชันประกอบของตัวดำเนินการกระชับ ก็จะเป็นตัวดำเนินการกระชับ เราจึงสามารถสรุปได้ว่า T_2 เป็นตัวดำเนินการกระชับ

3. พิจารณา $T_3 : \mathbb{C} \to H_0^2(0,l)$

$$T_3 v = \frac{m}{EI} q_1(x) v$$

การพิสูจน์ว่า T_3 เป็นตัวดำเนินการกระชับ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกับในกรณีของ T_1

4. $I : H_0^2(0,l) \to L_2(0,l)$ เป็นตัวดำเนินการกระชับ โดยดูในทฤษฎีบท ก.3 ข้อสังเกต 3.

5. $T_5 : H_0^2(0,l) \to \mathbb{C},\ T_5 v = v(l)$

จาก (ก.4) จะเห็นว่า T_5 เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขต และภาพการส่งมีมิติจำกัด เพราะฉะนั้น T_5 เป็นตัวดำเนินการกระชับ

จากทั้งหมดดังข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า $\mathcal{A}^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการกระชับ □

เนื่องจาก $0 \in \rho(\mathcal{A})$, บทตั้ง 5.2 และจากทฤษฎีบท 5.1 จะได้ว่าสเปกตรัมของ $\mathcal{A}$ จะประกอบไปด้วยค่าเฉพาะที่เป็นเอกเทศ และมีภาวะรากซ้ำเป็นจำนวนจำกัดเท่านั้น

5.2 การหาสมการลักษณะเฉพาะของระบบวงปิด

เมื่อเราทราบแล้วว่าเซตสเปกตรัมมีแต่ค่าเฉพาะเท่านั้น ต่อมาเราจะแสดงให้เห็นว่าค่าเฉพาะจะหามาได้อย่างไร โดยพิจารณาสมการ

$$\mathcal{A}\phi(x) = \lambda\phi(x) \tag{5.3}$$

โดย $\lambda, \phi(x) = \begin{bmatrix}\phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3\end{bmatrix}^T$ เป็นค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะของตัวดำเนินการ $\mathcal{A}$ ตามลำดับ จากสมการ (4.11) จะได้ว่า

$$\phi_2(x) = \lambda\phi_1(x) \tag{5.4}$$

$$-\frac{EI}{\rho}\phi_1''''(x) - Kx\left[\rho\langle\phi_2, x\rangle + ml\phi_3\right] = \lambda\phi_2(x) \tag{5.5}$$

$$\frac{EI}{m}\phi_1'''(l) - Kl\left[\rho\langle\phi_2, x\rangle + ml\phi_3\right] = \lambda\phi_3 \tag{5.6}$$

เนื่องจาก $\phi \in D(\mathcal{A})$ จะได้ว่า $\phi_3 = \phi_2(l)$ เมื่อแทน (5.4) ลงใน (5.5) จะได้

$$-\frac{EI}{\rho}\phi_1''''(x) - Kx\lambda\left[\rho\langle\phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l)\right] = \lambda^2\phi_1(x)$$

จะได้สมการของ $\phi_1(x)$ พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขต ดังนี้

$$\phi_1''''(x) + \frac{\rho\lambda^2}{EI}\phi_1(x) = -\frac{\rho K}{EI}\lambda\left[\rho\langle\phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l)\right]\cdot x \tag{5.7}$$

$$\phi_1(0) = \phi_1'(0) = \phi_1''(l) = 0 \tag{5.8}$$

$$\phi_1'''(l) = \frac{Kml}{EI}\lambda\left[\rho\langle\phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l)\right] + \frac{m}{EI}\lambda^2\phi_1(l) \tag{5.9}$$

ต่อไป เราจะแก้หาคำตอบของสมการ (5.7)-(5.9) โดยให้

$$\phi_1(x) = \phi_h(x) + \phi_p(x)$$

โดยที่ $\phi_h(x)$ สอดคล้องกับ

$$\phi_h''''(x) + \frac{\rho\lambda^2}{EI}\phi_h(x) = 0 \tag{5.10}$$

และ $\phi_p(x)$ สอดคล้องกับ

$$\phi_p''''(x) + \frac{\rho\lambda^2}{EI}\phi_p(x) = -\frac{\rho K}{EI}\lambda\left[\rho\left\langle\phi_1, x\right\rangle + ml\phi_1(l)\right] \cdot x \tag{5.11}$$

และนิยาม $F(\phi_1) \equiv \rho\left\langle\phi_1, x\right\rangle + ml\phi_1(l)$ เป็นค่าคงตัว (แต่ว่าขึ้นกับเวกเตอร์ ϕ_1)

ก่อนอื่นเราจะแก้สมการหา $\phi_p(x)$ จาก (5.11) โดยจะเห็นว่า $\phi_p(x)$ สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$\phi_p(x) = a_1 x + a_2$$

เมื่อแทนลงไปใน (5.11) แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$\frac{\rho\lambda^2}{EI}(a_1 x + a_2) = -\frac{\rho K}{EI}\lambda F(\phi_1)x$$

ดังนั้น $a_1 = -\frac{KF(\phi_1)}{\lambda}$ และ $a_2 = 0$ ซึ่งทำให้

$$\phi_p(x) = -\frac{KF(\phi_1)}{\lambda} \cdot x \tag{5.12}$$

$$\phi_p(0) = 0 \quad , \quad \phi_p'(0) = -\frac{KF(\phi_1)}{\lambda} \quad , \quad \phi_p''(l) = 0 \quad , \quad \phi_p'''(l) = 0 \tag{5.13}$$

พิจารณาหาคำตอบ $\phi_h(x)$ จาก (5.10) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสี่ ซึ่งมีสมการช่วยเป็น

$$m^4 + \frac{\rho\lambda^2}{EI} = 0$$

$$m = \pm\left(\frac{\rho}{EI}\right)^{1/4}\sqrt{\lambda i} \ , \ \pm\left(\frac{\rho}{EI}\right)^{1/4}\sqrt{-\lambda i}$$

แต่เนื่องจาก $\sqrt{-\lambda i} = i\sqrt{\lambda i}$ จะได้ว่า

$$m = \pm\left(\frac{\rho}{EI}\right)^{1/4}\sqrt{\lambda i} \ , \ \pm i\left(\frac{\rho}{EI}\right)^{1/4}\sqrt{\lambda i}$$

ถ้าให้ $\beta = (\rho/EI)^{1/4}\sqrt{\lambda i}$ จะได้ว่า

$$\beta^2 = i\sqrt{\frac{\rho}{EI}} \cdot \lambda \ \text{หรือ} \ \lambda = -i\beta^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \tag{5.14}$$

และ

$$m = \pm\beta \ , \ \pm i\beta$$

ดังนั้น $\phi_h(x)$ จะอยู่ในรูป

$$\phi_h(x) = c_1\cosh(\beta x) + c_2\cos(\beta x) + c_3\sinh(\beta x) + c_4\sin(\beta x)$$

เนื่องจาก $\phi_1(0) = \phi_h(x) + \phi_p(0) = 0$ จะได้ว่า $c_1 + c_2 = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\phi_h(x) &= c_1[\cosh(\beta x) - \cos(\beta x)] + c_3\sinh(\beta x) + c_4\sin(\beta x)\\
\phi_h'(x) &= \beta\left\{c_1[\sinh(\beta x) + \sin(\beta x)] + c_3\cosh(\beta x) + c_4\cos(\beta x)\right\}\\
\phi_h''(x) &= \beta^2\left\{c_1[\cosh(\beta x) + \cos(\beta x)] + c_3\sinh(\beta x) - c_4\sin(\beta x)\right\}\\
\phi_h'''(x) &= \beta^3\left\{c_1[\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)] + c_3\cosh(\beta x) - c_4\cos(\beta x)\right\}
\end{aligned}$$

ต่อไปเพื่อความกระชับ จะใช้สัญลักษณ์ดังนี้

$$\mathrm{s} \equiv \sin(\beta l) \quad \mathrm{c} \equiv \cos(\beta l) \quad \mathrm{sh} \equiv \sinh(\beta l) \quad \mathrm{ch} \equiv \cosh(\beta l)$$

จาก (5.8) $\phi_1'(0) = \phi_h'(0) + \phi_p'(0) = 0$ จะได้ว่า

$$\beta(c_3 + c_4) - \frac{K}{\lambda}F(\phi_1) = 0 \tag{5.15}$$

และจาก (5.8) $\phi_1''(l) = \phi_h''(l) + \phi_p''(l) = 0$ จะได้ว่า

$$\beta^2\left\{c_1(\mathrm{ch} + \mathrm{c}) + c_3\cdot\mathrm{sh} - c_4\cdot\mathrm{s}\right\} = 0 \tag{5.16}$$

และจาก (5.9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\beta^3\left\{c_1(\mathrm{sh} - \mathrm{s}) + c_3\cdot\mathrm{ch} - c_4\cdot\mathrm{c}\right\} &= \frac{Kml\lambda}{EI}F(\phi_1) + \frac{m\lambda^2}{EI}\phi_1(l)\\
&= \frac{Kml\lambda}{EI}F(\phi_1) + \frac{m\lambda^2}{EI}\left\{c_1(\mathrm{ch} - \mathrm{c}) + c_3\cdot\mathrm{sh} + c_4\cdot\mathrm{s} - \frac{Kl}{\lambda}F(\phi_1)\right\}\\
&= \frac{m\lambda^2}{EI}\left\{c_1(\mathrm{ch} - \mathrm{c}) + c_3\cdot\mathrm{sh} + c_4\cdot\mathrm{s}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1\left\{\beta^3(\mathrm{sh} - \mathrm{s}) - \frac{m\lambda^2}{EI}(\mathrm{ch} - \mathrm{c})\right\} + c_3\left\{\beta^3\cdot\mathrm{ch} - \frac{m\lambda^2}{EI}\mathrm{sh}\right\} + c_4\left\{-\beta^3\cdot\mathrm{c} - \frac{m\lambda^2}{EI}\mathrm{s}\right\} &= 0\\
c_1\left\{\beta^3(\mathrm{sh} - \mathrm{s}) + \frac{m\beta^4}{\rho}(\mathrm{ch} - \mathrm{c})\right\} + c_3\left\{\beta^3\cdot\mathrm{ch} + \frac{m\beta^4}{\rho}\mathrm{sh}\right\} + c_4\left\{-\beta^3\cdot\mathrm{c} + \frac{m\beta^4}{\rho}\mathrm{s}\right\} &= 0 \quad (5.17)
\end{aligned}$$

จาก (5.15) จะเห็นว่าเราต้องคำนวณ $F(\phi_1)$ เนื่องจากยังเป็นฟังก์ชันของ c_1, c_2, c_3 อยู่ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\langle\phi_1, x\rangle &= \langle\phi_h, x\rangle + \langle\phi_p, x\rangle\\
&= \int_0^l\left\{c_1(\cosh(\beta x) - \cos(\beta x)) + c_3\sinh(\beta x) + c_4\sin(\beta x) - \frac{K}{\lambda}F(\phi_1)\cdot x\right\}xdx\\
&= c_1\left\{\frac{x}{\beta}(\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)) - \frac{1}{\beta^2}(\cosh(\beta x) + \cos(\beta x))\right\}_0^l + c_3\left\{\frac{x\cosh(\beta x)}{\beta} - \frac{\sinh(\beta x)}{\beta^2}\right\}_0^l\\
&\quad + c_4\left\{-\frac{x\cos(\beta x)}{\beta} + \frac{\sin(\beta x)}{\beta^2}\right\}_0^l - \frac{KF(\phi_1)}{\lambda}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^l\\
&= c_1\left\{\frac{l(\mathrm{sh} - \mathrm{s})}{\beta} - \frac{(\mathrm{ch} + \mathrm{c})}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^2}\right\} + c_3\left\{\frac{l\cdot\mathrm{ch}}{\beta} - \frac{\mathrm{sh}}{\beta^2}\right\} + c_4\left\{-\frac{l\cdot\mathrm{c}}{\beta} + \frac{\mathrm{s}}{\beta^2}\right\} - \frac{KF(\phi_1)}{\lambda}\frac{l^3}{3}\\
&= \frac{c_1}{\beta^2}[\beta l(\mathrm{sh} - \mathrm{s}) - (\mathrm{ch} + \mathrm{c}) + 2] + \frac{c_3}{\beta^2}[\beta l\cdot\mathrm{ch} - \mathrm{sh}] + \frac{c_4}{\beta^2}[-\beta l\cdot\mathrm{c} + \mathrm{s}] - \frac{KF(\phi_1)}{\lambda}\frac{l^3}{3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
F(\phi_1) &= \rho\langle\phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l) \\
&= \frac{c_1}{\beta^2}[\rho\beta l(\mathrm{sh}-\mathrm{s}) - \rho(\mathrm{ch}+\mathrm{c}) + 2\rho] + \frac{c_3}{\beta^2}[\rho\beta l\cdot\mathrm{ch} - \rho\cdot\mathrm{sh}] + \frac{c_4}{\beta^2}[-\rho\beta l\cdot\mathrm{c} + \rho\cdot\mathrm{s}] - \frac{\rho K l^3}{3\lambda}F(\phi_1) \\
&\quad + c_1 ml(\mathrm{ch}-\mathrm{c}) + c_3 ml\cdot\mathrm{sh} + c_4 ml\cdot\mathrm{s} - \frac{Kml^2}{\lambda}F(\phi_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\phi_1)\left(1 + \frac{\rho K l^3}{3\lambda} + \frac{Kml^2}{\lambda}\right) &= \frac{c_1}{\beta^2}[\rho\beta l(\mathrm{sh}-\mathrm{s}) - \rho(\mathrm{ch}+\mathrm{c}) + 2\rho + ml\beta^2(\mathrm{ch}-\mathrm{c})] \\
&\quad + \frac{c_3}{\beta^2}[\rho\beta l\cdot\mathrm{ch} - \rho\cdot\mathrm{sh} + ml\beta^2\cdot\mathrm{sh}] + \frac{c_4}{\beta^2}[-\rho\beta l\cdot\mathrm{c} + \rho\cdot\mathrm{s} + ml\beta^2\cdot\mathrm{s}]
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$F(\phi_1) = \frac{\lambda[f_1(\lambda)c_1 + f_3(\lambda)c_3 + f_4(\lambda)c_4]}{g(\lambda)} \tag{5.18}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
f_1(\lambda) &= \rho\beta l(\mathrm{sh}-\mathrm{s}) - \rho(\mathrm{ch}+\mathrm{c}) + 2\rho + ml\beta^2(\mathrm{ch}-\mathrm{c}) && (5.19)\\
f_3(\lambda) &= \rho\beta l\cdot\mathrm{ch} - \rho\cdot\mathrm{sh} + ml\beta^2\cdot\mathrm{sh} && (5.20)\\
f_4(\lambda) &= -\rho\beta l\cdot\mathrm{c} + \rho\cdot\mathrm{s} + ml\beta^2\cdot\mathrm{s} && (5.21)\\
g(\lambda) &= \beta^2(\lambda + \frac{\rho K l^3}{3} + Kml^2) && (5.22)
\end{aligned}$$

เมื่อแทน (5.18) ลงใน (5.15) จะได้ว่า

$$\beta(c_3 + c_4) - \frac{K}{g(\lambda)}(f_1(\lambda)c_1 + f_3(\lambda)c_3 + f_4(\lambda)c_4) = 0 \tag{5.23}$$

เนื่องจาก $\lambda = 0 \notin \sigma_p(\mathcal{A})$ ดังนั้นจาก (5.16)-(5.17) จะได้ว่า

$$c_1(\mathrm{ch}+\mathrm{c}) + c_3\cdot\mathrm{sh} - c_4\cdot\mathrm{s} = 0 \tag{5.24}$$

$$c_1\left\{(\mathrm{sh}-\mathrm{s}) + \frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{ch}-\mathrm{c})\right\} + c_3\left\{\mathrm{ch} + \frac{m\beta}{\rho}\mathrm{sh}\right\} + c_4\left\{-\mathrm{c} + \frac{m\beta}{\rho}\mathrm{s}\right\} = 0 \tag{5.25}$$

$\phi(x) \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ c_1, c_3, c_4 ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกันทั้งหมด ดังนั้นจาก (5.23)-(5.25) จะได้

$$\begin{vmatrix}
\frac{Kf_1(\lambda)}{g(\lambda)} & \frac{Kf_3(\lambda)}{g(\lambda)} - \beta & \frac{Kf_4(\lambda)}{g(\lambda)} - \beta \\
\mathrm{ch}+\mathrm{c} & \mathrm{sh} & -\mathrm{s} \\
(\mathrm{sh}-\mathrm{s}) + \frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{ch}-\mathrm{c}) & \mathrm{ch} + \frac{m\beta}{\rho}\mathrm{sh} & -\mathrm{c} + \frac{m\beta}{\rho}\mathrm{s}
\end{vmatrix} = 0$$

หรือ

$$\begin{aligned}
&\frac{Kf_1(\lambda)}{g(\lambda)}\left\{\mathrm{sh}\left(-\mathrm{c} + \frac{m\beta}{\rho}\cdot\mathrm{s}\right) + \mathrm{s}\left(\mathrm{ch} + \frac{m\beta}{\rho}\cdot\mathrm{sh}\right)\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{Kf_3(\lambda)}{g(\lambda)} - \beta\right\}\left\{-\mathrm{s}\left(\mathrm{sh}-\mathrm{s} + \frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{ch}-\mathrm{c})\right) - (\mathrm{ch}+\mathrm{c})\left(-\mathrm{c} + \frac{m\beta}{\rho}\cdot\mathrm{s}\right)\right\} \\
&\qquad + \left\{\frac{Kf_4(\lambda)}{g(\lambda)} - \beta\right\}\left\{(\mathrm{ch}+\mathrm{c})\left(\mathrm{ch} + \frac{m\beta}{\rho}\cdot\mathrm{sh}\right) - \mathrm{sh}\left(\mathrm{sh}-\mathrm{s} + \frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{ch}-\mathrm{c})\right)\right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{Kf_1(\lambda)}{g(\lambda)}\left\{-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}+\frac{m\beta}{\rho}(2\mathrm{s}\cdot\mathrm{sh})\right\}+\left\{\frac{Kf_3(\lambda)}{g(\lambda)}-\beta\right\}\left\{1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}+\frac{m\beta}{\rho}(-2\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s})\right\}$$
$$+\left\{\frac{Kf_4(\lambda)}{g(\lambda)}-\beta\right\}\left\{1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}+\frac{m\beta}{\rho}(2\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})\right\}=0$$

$$\frac{Kf_1(\lambda)}{g(\lambda)}\left\{\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}+\frac{m\beta}{\rho}(2\mathrm{s}\cdot\mathrm{sh})\right\}+\frac{Kf_3(\lambda)}{g(\lambda)}\left\{1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}-\frac{m\beta}{\rho}(2\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s})\right\}$$
$$+\frac{Kf_4(\lambda)}{g(\lambda)}\left\{1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}+\frac{m\beta}{\rho}(2\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})\right\}-\beta\left\{2+2\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\frac{2m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s})\right\}=0$$

$$\frac{K}{g(\lambda)}\left\{f_1(\lambda)(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})+f_3(\lambda)(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})+f_4(\lambda)(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})\right\}$$
$$+\frac{2Km\beta}{\rho g(\lambda)}\left\{f_1(\lambda)\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}-f_3(\lambda)\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}+f_4(\lambda)\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}\right\}-2\beta\left\{1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s})\right\}=0 \tag{5.26}$$

ให้

$$S_1(\lambda) = f_1(\lambda)(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})+f_3(\lambda)(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})+f_4(\lambda)(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}) \tag{5.27}$$
$$S_2(\lambda) = f_1(\lambda)\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}-f_3(\lambda)\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}+f_4(\lambda)\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c} \tag{5.28}$$

จาก (5.26) จะได้ว่า

$$\frac{1}{g(\lambda)}\left\{KS_1(\lambda)+\frac{2Km\beta S_2(\lambda)}{\rho}\right\}-2\beta\left\{1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s})\right\}=0 \tag{5.29}$$

จาก (5.19)-(5.21) จะคำนวณ S_1, S_2 ดังนี้

$$\begin{aligned}
S_1(\lambda) &= \rho l\beta\left\{(\mathrm{sh}-\mathrm{s})(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})+\mathrm{ch}(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})-\mathrm{c}(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})\right\}\\
&\quad+\rho\left\{-(\mathrm{ch}+\mathrm{c})(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})-\mathrm{sh}(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})+\mathrm{s}(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})\right\}\\
&\quad+2\rho(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})\\
&\quad+ml\beta^2\left\{(\mathrm{ch}-\mathrm{c})(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})+\mathrm{sh}(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})+\mathrm{s}(1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})\right\}\\
&= \rho l\beta\left\{\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}^2\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}^2+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{ch}+\mathrm{ch}^2\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}^2-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}\right\}\\
&\quad+\rho\left\{-\mathrm{ch}^2\cdot\mathrm{s}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}^2-\mathrm{sh}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}^2\cdot\mathrm{s}+\mathrm{s}+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}^2\right\}\\
&\quad+2\rho(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})\\
&\quad+ml\beta^2\left\{\mathrm{ch}^2\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}^2+\mathrm{sh}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{sh}^2\cdot\mathrm{s}+\mathrm{s}+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}^2\right\}\\
&= 2\rho(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})+2ml\beta^2(\mathrm{sh}+\mathrm{s})
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$
\begin{aligned}
S_2(\lambda) &= \rho l\beta\left\{\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}\cdot(\mathrm{sh}-\mathrm{s})-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{ch}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}^2\right\}+\rho\left\{-(\mathrm{ch}+\mathrm{c})\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}\right\}\\
&\quad +2\rho\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}+ml\beta^2\left\{(\mathrm{ch}-\mathrm{c})\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}\right\}\\
&= \rho l\beta\left\{\mathrm{sh}^2\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}^2-\mathrm{ch}^2\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}^2\right\}\\
&\quad +\rho\left\{-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}+\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{c}\right\}+2\rho\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}\\
&= -\rho l\beta(\mathrm{sh}+\mathrm{s})+2\rho\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s} \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

นำ (5.30)-(5.31) ไปแทนใน (5.29) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{g(\lambda)}\left\{2\rho K(\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s}-\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c})+2Kml\beta^2(\mathrm{sh}+\mathrm{s})+\frac{2Km\beta}{\rho}(-\rho l\beta(\mathrm{sh}+\mathrm{s})+2\rho\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s})\right\}\\
&\qquad\qquad -2\beta\left\{1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s})\right\}=0
\end{aligned}
$$

เมื่อแทนค่า $g(\lambda)$ จาก (5.22) จะได้ว่าสมการลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการ $\mathcal{A}$ ที่ได้จากระบบวงปิด คือ

$$
\frac{\rho K(\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s})-2Kml\beta\cdot\mathrm{sh}\cdot\mathrm{s}}{\beta^2(\lambda+\frac{\rho K l^3}{3}+Kml^2)}+\beta\left\{1+\mathrm{ch}\cdot\mathrm{c}+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{ch}\cdot\mathrm{s})\right\}=0 \qquad (5.32)
$$

5.3 การวิเคราะห์ตำแหน่งของค่าเฉพาะ

จากหัวข้อ 5.2 ถึงแม้เราจะหาค่าเฉพาะได้จากการแก้สมการ (5.32) แต่เราก็ไม่สามารถหาคำตอบทั้งหมดด้วยคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีเป็นจำนวนอนันต์ได้ ดังนั้น ในหัวข้อนี้เราจะแสดงให้เห็นว่า ส่วนจริงของค่าเฉพาะทั้งหมดมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ซึ่งจะอาศัยบทตั้ง 5.3 ดังนี้

บทตั้ง 5.3 ถ้าให้ λ และ $\phi(x)=\begin{bmatrix}\phi_1(x) & \lambda\phi_1(x) & \lambda^2\phi_1(l)\end{bmatrix}^T$ เป็นค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะของ $\mathcal{A}$ ตามลำดับแล้ว จะได้ว่า

$$
\rho\langle\phi_1,x\rangle+ml\phi_1(l)\neq 0
$$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยใช้วิธีการข้อขัดแย้ง โดยให้ $F(\phi_1)\equiv\rho\langle\phi_1,x\rangle+ml\phi_1(l)=0$ จาก (5.15) จะได้ว่า $c_4=-c_3$ เมื่อนำไปแทนใน (5.18),(5.24) และ (5.25) จะได้ว่า

$$
c_1(\mathrm{ch}+\mathrm{c})+c_3(\mathrm{sh}+\mathrm{s})=0 \qquad (5.33)
$$

$$
c_1\left\{(\mathrm{sh}-\mathrm{s})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{ch}-\mathrm{c})\right\}+c_3\left\{(\mathrm{ch}+\mathrm{c})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}-\mathrm{s})\right\}=0 \qquad (5.34)
$$

$$
c_1\left\{\rho l\beta(\mathrm{sh}-\mathrm{s})-\rho(\mathrm{ch}+\mathrm{c})+2\rho+ml\beta^2(\mathrm{ch}-\mathrm{c})\right\}+c_3\left\{\rho l\beta(\mathrm{ch}+\mathrm{c})-\rho(\mathrm{sh}+\mathrm{s})+ml\beta^2(\mathrm{sh}-\mathrm{s})\right\}=0 \qquad (5.35)
$$

เราจะแสดงให้เห็นว่าทั้งสามสมการ จะมีเพียงคำตอบ $c_1=c_3=0$ เท่านั้น โดยเขียนในรูปดังต่อไปนี้

$$
\begin{bmatrix}
(\mathrm{ch}+\mathrm{c}) & (\mathrm{sh}+\mathrm{s})\\
(\mathrm{sh}-\mathrm{s})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{ch}-\mathrm{c}) & (\mathrm{ch}+\mathrm{c})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}-\mathrm{s})\\
\rho l\beta(\mathrm{sh}-\mathrm{s})-\rho(\mathrm{ch}+\mathrm{c})+2\rho+ml\beta^2(\mathrm{ch}-\mathrm{c}) & \rho l\beta(\mathrm{ch}+\mathrm{c})-\rho(\mathrm{sh}+\mathrm{s})+ml\beta^2(\mathrm{sh}-\mathrm{s})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}c_1\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}
$$

โดยทำการดำเนินการตามแถว

$$R_3 - \rho l\beta R_2 \to R_3 \qquad \begin{bmatrix} (\mathrm{ch}+\mathrm{c}) & (\mathrm{sh}+\mathrm{s}) \\ (\mathrm{sh}-\mathrm{s})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{ch}-\mathrm{c}) & (\mathrm{ch}+\mathrm{c})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}-\mathrm{s}) \\ -\rho(\mathrm{ch}+\mathrm{c})+2\rho & -\rho(\mathrm{sh}+\mathrm{s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 + \rho R_1 \to R_3 \qquad \begin{bmatrix} (\mathrm{ch}+\mathrm{c}) & (\mathrm{sh}+\mathrm{s}) \\ (\mathrm{sh}-\mathrm{s})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{ch}-\mathrm{c}) & (\mathrm{ch}+\mathrm{c})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}-\mathrm{s}) \\ 2\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $c_1 = 0$ และจากบทตั้ง ก.17 จะได้ว่า $\mathrm{sh}+\mathrm{s}$ และ $(\mathrm{ch}+\mathrm{c})+\frac{m\beta}{\rho}(\mathrm{sh}-\mathrm{s})$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ที่ค่า β เดียวกัน ดังนั้น $c_3 = 0$ ซึ่งทำให้ $\phi_1(x) = 0$ และ $\phi(x)$ จะไม่เป็นเวกเตอร์เฉพาะของ $\mathcal{A}$ ซึ่งเป็นการขัดแย้ง □

จากหัวข้อ 5.2 เราจะพบว่าค่าเฉพาะของ $\mathcal{A}$ ทุกๆ ค่า จะสอดคล้องตามสมการ (5.7)-(5.9) ซึ่งจะยกมาอีกครั้ง ดังนี้

$$\phi_1''''(x) + \frac{\rho\lambda^2}{EI}\phi_1(x) = -\frac{\rho K}{EI}\lambda\left[\rho\langle\phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l)\right]\cdot x \tag{5.36}$$

$$\phi_1(0) = \phi_1'(0) = \phi_1''(l) = 0 \tag{5.37}$$

$$\phi_1'''(l) = \frac{Kml}{EI}\lambda\left[\rho\langle\phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l)\right] + \frac{m}{EI}\lambda^2\phi_1(l) \tag{5.38}$$

จาก (5.36) เมื่อหาผลคูณภายในกับ ϕ_1 จะได้

$$\langle\phi_1'''', \phi_1\rangle + \frac{\rho\lambda^2}{EI}\langle\phi_1, \phi_1\rangle + \frac{\rho K\lambda}{EI}\left(\rho\langle\phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l)\right)\langle x, \phi_1\rangle = 0 \tag{5.39}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \langle\phi_1'''', \phi_1\rangle &= \int_0^l \phi_1''''\overline{\phi_1}dx \\ &= \phi_1'''\overline{\phi_1}\,|_0^l - \int_0^l \phi_1'''\overline{\phi_1'}dx \\ &= \phi_1'''(l)\overline{\phi_1(l)} - \phi_1''\overline{\phi_1'}\,|_0^l + \int_0^l \phi_1''\overline{\phi_1''}dx \quad = \quad \phi_1'''(l)\overline{\phi_1(l)} + \|\phi''\|^2 \\ &= \left\{\frac{Kml}{EI}\lambda\left[\rho\langle\phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l)\right] + \frac{m}{EI}\lambda^2\phi_1(l)\right\}\overline{\phi_1(l)} + \|\phi''\|^2 \\ &= \lambda\frac{\rho Kml}{EI}\langle\phi_1, x\rangle\overline{\phi_1(l)} + \lambda\frac{Km^2l^2}{EI}|\phi_1(l)|^2 + \lambda^2\frac{m}{EI}|\phi_1(l)|^2 + \|\phi''\|^2 \end{aligned}$$

นำไปแทนใน (5.39) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\lambda\rho Kml\langle\phi_1, x\rangle\overline{\phi_1(l)} + \lambda Km^2l^2|\phi_1(l)|^2 + \lambda^2 m|\phi_1(l)|^2 + EI\|\phi''\|^2 \\ &\qquad + \rho\lambda^2\|\phi_1\|^2 + \lambda\rho^2K|\langle\phi_1, x\rangle|^2 + \lambda\rho Kml\phi_1(l)\langle x, \phi_1\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda^2\left\{m|\phi_1(l)|^2 + \rho\|\phi_1\|^2\right\} + EI\|\phi''\|^2 \\ &\qquad + \lambda\left\{\rho Kml\langle\phi_1, x\rangle\overline{\phi_1(l)} + Km^2l^2|\phi_1(l)|^2 + \rho^2K|\langle\phi_1, x\rangle|^2 + \rho Kml\phi_1(l)\langle x, \phi_1\rangle\right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 \left\{ m|\phi_1(l)|^2 + \rho\|\phi_1\|^2 \right\} + \lambda K \left\{ \rho^2 |\langle \phi_1, x\rangle|^2 + 2\rho ml \mathrm{Re}(\phi_1(l)\langle x, \phi_1\rangle) + m^2 l^2 |\phi_1(l)|^2 \right\} + EI\|\phi''\|^2 = 0$$

$$\lambda^2 \left\{ m|\phi_1(l)|^2 + \rho\|\phi_1\|^2 \right\} + \lambda K \left| \rho\langle \phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l) \right|^2 + EI\|\phi''\|^2 = 0 \tag{5.40}$$

ให้ $\lambda = a + ib$ สมการ (5.40) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$(a^2 - b^2 + i2ab) \left\{ m|\phi_1(l)|^2 + \rho\|\phi_1\|^2 \right\} + (a + ib)K \left| \rho\langle \phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l) \right|^2 + EI\|\phi''\|^2 = 0 \tag{5.41}$$

ซึ่งสามารถแยกออกเป็นสองสมการ คือ

$$(a^2 - b^2)(m|\phi_1(l)|^2 + \rho\|\phi_1\|^2) + a \cdot K \left| \rho\langle \phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l) \right|^2 + EI\|\phi''\|^2 = 0 \tag{5.42}$$

$$2ab(m|\phi_1(l)|^2 + \rho\|\phi_1\|^2) + b \cdot K \left| \rho\langle \phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l) \right|^2 = 0 \tag{5.43}$$

พิจารณาเมื่อ $b = 0$ จาก (5.42) จะได้ว่า

$$a^2(m|\phi_1(l)|^2 + \rho\|\phi_1\|^2) + a \cdot K \left| \rho\langle \phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l) \right|^2 + EI\|\phi''\|^2 = 0$$

ซึ่งสามารถพิจารณาได้ว่าเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสองของ a และจากบทตั้ง 5.3 จะได้ว่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดเป็นค่าจริงบวก ดังนั้นรากคำตอบ a ทั้งหมดต้องน้อยกว่าศูนย์

พิจารณาเมื่อ $b \neq 0$ จาก (5.43) จะได้ว่า

$$a = -\frac{K \left| \rho\langle \phi_1, x\rangle + ml\phi_1(l) \right|^2}{2(m|\phi_1(l)|^2 + \rho\|\phi_1\|^2)} < 0$$

กล่าวคือ $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ นั่นเอง

สมมติให้ ถ้า $a = 0$ จาก (5.43) จะได้ว่า $b = 0$ แต่เนื่องจากแทน $a = b = 0$ ลงใน (5.42) แล้วจะได้ว่า $\|\phi_1''\| = 0$ ซึ่งจากเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ได้ว่า $\phi_1 = 0$ ดังนั้น $\lambda = a + ib = 0$ จึงไม่ใช่ค่าเฉพาะของ $\mathcal{A}$

5.4 เสถียรภาพวงปิด

เนื่องจาก $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_P(\mathcal{A})$ และในกรณีค่า $K < \infty$ ค่าเฉพาะทั้งหมดมีส่วนจริงน้อยกว่าศูนย์ ซึ่งก็คือไม่มีค่าเฉพาะบนแกนจินตภาพ จะได้ว่า $\sigma(\mathcal{A}) \cup i\mathbb{R}$ เป็นเซตว่าง ซึ่งเป็นเซตนับได้ และเนื่องจาก $\sigma_P(\mathcal{A}^*) = \sigma_r(\mathcal{A}) = \emptyset$ นอกจากนี้ กึ่งกลุ่มของระบบวงปิดที่ได้ เป็นกึ่งกลุ่มแบบหดตัว ซึ่งก็คือเป็นกึ่งกลุ่มมีขอบเขตแบบเอกรูป ดังนั้น จากทฤษฎีบท 3.14 จะได้ว่ากึ่งกลุ่มของระบบวงปิดนั้น มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

5.5 สรุป

ในบทนี้ได้แสดงให้เห็นว่า การป้อนกลับที่เสนอขึ้นสามารถทำให้ระบบวงปิด มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับได้ ซึ่งพิสูจน์โดยอาศัยการพิจารณาเซตของสเปกตรัมของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่ง ที่ประกอบไปด้วยค่าเฉพาะเท่านั้น และแสดงให้เห็นว่า ไม่มีค่าเฉพาะใดเลยที่อยู่บนแกนจินตภาพ จากนั้นอาศัยทฤษฎีบทของ Arendt, Batty, Lyubich และ Vu (ทฤษฎีบท 3.14) ในการสรุปเสถียรภาพของระบบวงปิด

บทที่ 6

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

6.1 บทสรุป

ในวิทยานิพนธ์นี้ ได้พิจารณาปัญหาควบคุมระบบแขนหุ่นยนต์ข้อต่อเดียวแบบอ่อนตัว โดยพิจารณาในแนวทางระบบควบคุมมิติอนันต์ สิ่งที่นำเสนอใหม่ คือการพิจารณาแบบจำลองที่รวมพิกัดมุมของมอเตอร์ และมวลที่ตำแหน่งปลายไว้ในแบบจำลองพร้อมๆ กัน ในงานวิจัยนี้ได้เสนอการป้อนกลับผ่านทางความเร่งเชิงมุมของมอเตอร์ ซึ่งกฎการควบคุมเป็นผลรวมเชิงเส้นของการเบี่ยงเบนที่ตำแหน่งปลาย กับฟังก์ชันนัลเชิงเส้นของการเบี่ยงเบนของแขน ตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งของระบบวงวนปิดที่ได้ ก่อกำเนิดกึ่งกลุ่มแบบหดตัว ยิ่งไปกว่านั้น เซตสเปกตรัมของตัวก่อกำเนิดน้อยยิ่งดังกล่าว ประกอบไปด้วยค่าเฉพาะเท่านั้น และค่าเฉพาะทั้งหมดมีส่วนจริงน้อยกว่าศูนย์ ซึ่งสามารถพิสูจน์ต่อมาได้ว่า ระบบวงปิดมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ

สำหรับกฎการควบคุมที่ใช้นี้ จะเห็นว่ามีข้อดีคือ สามารถรับประกันเสถียรภาพวงปิดแบบเชิงเส้นกำกับ ได้ที่ทุกๆ ค่า $K > 0$ แต่ในขณะเดียวกัน ก็มีข้อเสียคือ เนื่องจากมีพจน์ที่อยู่ในรูปฟังก์ชันนัลเชิงเส้นของระยะเบี่ยงเบนของแขน ตัวควบคุมที่ได้จึงมีมิติอนันต์ ในการนำไปใช้งานจริง จึงต้องประมาณพจน์ดังกล่าวในตัวควบคุม และอาจจะส่งผลต่อเสถียรภาพได้ ซึ่งเป็นปัญหาเปิด (open problem) ที่ต้องศึกษาวิจัยต่อไป

6.2 ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้เสนอแนวทางการวิเคราะห์ในเชิงทฤษฎี คือการเสนอกฎการควบคุมและการพิสูจน์เสถียรภาพ ดังนั้นสำหรับงานวิจัยในแนวประยุกต์ ที่ควรจะทำต่อไปคือ การนำตัวควบคุมที่เสนอขึ้นไปใช้ในการควบคุมจริง แต่เนื่องจากตัวควบคุมที่ได้เป็นตัวควบคุมมิติอนันต์ จึงต้องมีการประมาณตัวควบคุมให้อยู่ในรูปมิติจำกัด ซึ่งอาจทำให้เกิดปัญหาด้านเสถียรภาพได้ ดังนั้นจึงมีหัวข้อทางทฤษฎีที่ต้องทำวิจัยต่อ คือ การทดลองหาตัวควบคุมมิติจำกัด ที่สามารถประกันเสถียรภาพของระบบได้ต่อไป

รายการอ้างอิง

1. J. Bontsema and R. F. Curtain, “A note on spillover and robustness for flexible systems,” *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 33, pp. 567–569, June 1988.

2. D. Wang and M. Vidyasagar, “Transfer Functions for a Single Flexible Link,” *IEEE Trans. on Education.*, vol. 35, pp. 83–89, Feb 1992.

3. F. Bellezza, L. Lanari, and G. Ulivi, “Exact modeling of the flexible slewing link,” *Proc IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, vol. 1, pp. 734–739, 1990.

4. H. R. Pota, “A Prototype Flexible Robot Arm-An Interdisciplinary Undergraduate Project,” *IEEE Trans. on Education.*, vol. 35, pp. 83–89, Feb. 1992.

5. Z. H. Luo, B. Z. Guo, and O. Morgul, *Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems with Applications*. Springer-Verlag, 1999.

6. R. H. Cannon and J. E. Schmitz, “Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot ,” *Int. J. Control*, vol. 3, no. 3, pp. 62–75, 1984.

7. Y. Sakawa, F. Matsuno, and S. Fukushima, “Modeling and Feedback Control a Flexible Arm ,” *Journal of Robotic Systems*, vol. 2, no. 4, pp. 453–472, 1985.

8. G. Chen, M. Delfour, A. M. Krall, and G. Payre, “Modeling Stabilization and Control of Serially Connected Beams,” *SIAM J. on Control Optimization*, vol. 25, pp. 526–546, May 1987.

9. Y. Sakawa and Z. H. Luo, “Modeling and Control of Coupled Bending and Torsional Vibrations of Flexible Beams ,” *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 34, pp. 970–977, Sep 1989.

10. O. Morgül, “Orientation and Stabilization of a Flexible Beam Attached to a Rigid Body:Planar motion,” *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 36, pp. 953–962, Aug. 1991.

11. C. Z. Xu and J. Baillieul, “Stabilizability and Stabilization of a Rotating Body-Beam System with Torque Control,” *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 38, pp. 1754–1765, Dec. 1993.

12. Z. H. Luo, “Direct Strain Feedback Control of Flexble Robot Arms:New Theoretical and Experimental Results,” *IEEE Trans. Aut. Control*, vol. 38, pp. 1610–1622, Nov. 1993.

13. F. Conrad and O. Morgül, “On the stabilization of a flexible beam with a tip mass,” *SIAM J. on Control Optimization*, vol. 36, pp. 1962–1986, Nov. 1998.

14. B. Guo, “The Basis Property of Discrete Operators and Application to an Euler-Bernoulli Beam Equation with Boundary Linear Feedback Control,” *IEEE Africon*, vol. 1, pp. 463 –468, 1999.

15. R. F. Curtain and H. Zwart, *An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag, 1995.

16. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer, 2000.

17. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1983.

18. J. V. Neervan, *The Asymptotic Bahaviour of Semigroups of Linear Operators*. Birkh´auser Springer, 1996.

19. S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*. Wiley, 1989.

20. R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.

21. J. Oden, *Applied Functional Analysis*. Prentice Hall, 1979.

22. M. Renardy and R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, 1993.

23. G. B. Folland, *Real Analysis*. John Wiley and Sons, 2 ed., 1999.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ภาคผนวก

ในภาคผนวกนี้ เราจะกล่าวถึงนิยามและผลลัพธ์ต่างๆ ที่จำเป็น ที่จะใช้ในวิทยานิพนธ์นี้

ก.1 นิยามและทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์วิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน

นิยาม ก.1 ให้ X และ Y เป็นปริภูมิบานาค เราจะกล่าวว่า X ถูกฝังใน Y (X is imbedded in Y) และเขียนแทนด้วย $X \to Y$ ถ้า

1. X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ย่อยของ Y
2. ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ $I : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการต่อเนื่อง กล่าวคือมี $M > 0$ ซึ่ง

$$\|Ix\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

ทฤษฎีบท ก.2 (ทฤษฎีบทการฝังในของโซโบเลฟ) [20] ให้ Ω เป็นโดเมนใน $\mathbb{R}$, $j, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $1 \leq p < \infty$ จะได้ว่า

$$H^{j+m}(\Omega) \;\to\; C_B^j(\Omega) \tag{ก.1}$$

$$H^{j+m}(\Omega) \;\to\; C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}) \quad ,0 < \lambda \leq m - \frac{1}{2} \tag{ก.2}$$

ทฤษฎีบท ก.3 (ทฤษฎีบทการฝังในของฮิลแบร์ต-ชมิดท์) ให้ Ω เป็นโดเมนใน $\mathbb{R}$ และ $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ โดยที่ $k > 1/2$ จะได้ว่า

$$I : H^{m+k}(\Omega) \to H^m(\Omega) \tag{ก.3}$$

เป็นตัวดำเนินการกระชับ

ข้อสังเกต

1. จาก (ก.1) ถ้าให้ $j = 3, m = 1$ จะได้ว่า $H^4(0,l) \to C_B^3(0,l)$ และเมื่อให้ $j = 1, m = 1$ จะได้ว่า $H^2(0,l) \to C_B^1(0,l)$ ซึ่งก็คือเราสามารถพิจารณาฟังก์ชันที่อยู่ในปริภูมิ H^4 หรือ H^2 ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องได้ โดยที่จะสังเกตเห็นว่า เมื่ออันดับของปริภูมิโซโบเลฟมากขึ้น ฟังก์ชันในปริภูมิก็จะสามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นได้
2. พิจารณา (ก.2) ในกรณี $j = 0, m = 2, 0 < \lambda \leq 3/2$ และ $\Omega = (0,l)$

$$H^2(0,l) \to C^{0,\lambda}[0,l]$$

   ดังนั้นจากนิยามการฝังใน จะได้ว่า

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}[0,l]} \leq M\|u\|_{H^2(0,l)} \quad \forall u \in H^2(0,l)$$

โดยที่นิยามนอร์ม ในปริภูมิ $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ โดย

$$\|u; C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})\| = \|u; C^{m}(\overline{\Omega})\| + \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{x,y\in\Omega \ x\neq y} \frac{|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)|}{|x-y|^{\lambda}}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C[0,l]} &\le M\|u\|_{H^2(0,l)} \\
\|u\|_{C[0,l]} &\le M_1\|u\|_{H_0^2(0,l)} \quad (\text{เนื่องจาก} \quad \|\cdot\|_{H_0^2} \sim \|\cdot\|_{H^2}) \\
\sup_{x\in[0,l]} |u(x)| &\le M_1\|u''\| \\
|u(l)| &\le M_1\|u''\| \ \forall u \in H_0^2(0,l)
\end{aligned} \tag{ก.4}$$

นั่นคือ เราสามารถหาขอบเขตของขนาดของฟังก์ชันใน $H_0^2(0,l)$ ได้ โดยจะถูกจำกัดด้วยนอร์มใน $H_0^2(0,l)$ นั่นเอง

3. จาก (ก.3) ในกรณีที่ $m = 0, k = 2$ จะได้ว่า $I : H^2(0,l) \to L_2(0,l)$ เป็นตัวดำเนินการกระชับ และเนื่องจาก $H_0^2(0,l) \subset H^2(0,l)$ จะได้ว่า $I : H_0^2(0,l) \to L_2(0,l)$ เป็นตัวดำเนินการกระชับด้วยเช่นกัน

นิยาม ก.4 พิจารณาตัวดำเนินการเชิงเส้นปิดบนปริภูมิบานาค X

$$A : D(A) \subset X \to X$$

เซตแก้ปัญหา (resolvent set) ของ A คือ

$$\rho(A) \quad = \quad \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A \text{ หาตัวผกผันได้และตัวผกผันมีขอบเขตและ } \mathcal{R}(\lambda - A) \text{ หนาแน่นใน } X \right\}$$

สเปกตรัมของ A คือ $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ ซึ่งประกอบไปด้วย 3 ส่วนคือ

1. สเปกตรัมจุด

$$\sigma_p(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A \quad \text{ไม่สามารถหาตัวผกผันได้}\right\}$$

2. สเปกตรัมต่อเนื่อง

$$\sigma_c(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A \quad \text{หาตัวผกผันได้แต่ตัวผกผันไม่มีขอบเขตและ } \mathcal{R}(\lambda - A) \text{ หนาแน่นใน} X\right\}$$

3. สเปกตรัมตกค้าง

$$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}(\lambda - A) \quad \text{ไม่หนาแน่นใน} \quad X\right\}$$

จะได้ว่า $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$

นิยาม ก.5 ปริภูมิย่อย M ของปริภูมินอร์มเชิงเส้น X จะหนาแน่นใน X ถ้า $\overline{M} = X$

นิยาม ก.6 ให้ M เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมินอร์มเชิงเส้น X เราจะกล่าวว่า M เป็นปริภูีมิย่อยปิดของ X ถ้าให้ $x_n \in M$ และ

$$x_n \to x \Longrightarrow x \in M$$

นิยาม ก.7 นอร์ม $\|\cdot\|$ บนปริภูมิเวกเตอร์ X จะสมมูลกับนอร์ม $\|\cdot\|_0$ บน X ถ้ามีค่าจริงบวก a, b สำหรับทุกๆ $x \in X$ ที่ทำให้

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

นิยาม ก.8 ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น ตัวดำเนินการเชิงเส้น $T : D(T) \subset X \to Y$ จะเป็นตัวดำเนินการปิด ก็ต่อเมื่อ ให้ $x_n \in D(T)$ และ $x_n \to x \in X$ และ $Tx_n \to y$ แล้วจะได้ว่า $x \in D(T)$ และ $Tx = v$

ทฤษฎีบท ก.9 (ทฤษฎีบทกราฟปิด) ให้ X และ Y เป็นปริภูมิบานาค ตัวดำเนินการเชิงเส้น $T : X \to Y$ จะเป็นตัวดำเนินการมีขอบเขต *ก็ต่อเมื่อ* เป็นตัวดำเนินการปิด

ทฤษฎีบท ก.10 (ทฤษฎีบทของอาร์เซลา) ให้ Ω เป็นโดเมนมีขอบเขตบน $\mathbb{R}$ เซตย่อย K ของ $C(\overline{\Omega})$ เป็นเซตก่อนกระชับใน $C(\overline{\Omega})$ ก็ต่อเมื่อ

1. K มีขอบเขตแบบเอกรูป นั่นคือ

$$\exists M \text{ s.t. } \forall \phi \in K, x \in \Omega, \quad |\phi(x)| \leq M$$

2. K ต่อเนื่องแบบเท่ากัน นั่นคือ $\forall \phi \in K \;\; \forall x, y \in \Omega$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - y| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$$

นิยาม ก.11 ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น เราจะกล่าวว่า $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ จะเป็นตัวดำเนินการกระชับ ถ้า T ส่งจากเซตมีขอบเขตบน X ไปยังเซตก่อนกระชับบน Y

ทฤษฎีบท ก.12 ให้ $k(t, s) \in L_2([a, b] \times L_2[a, b])$ จะได้ว่า $K : L_2(a, b) \to L_2(a, b)$ ที่นิยามโดย

$$(Ku)(t) = \int_a^b k(t, s)u(s)ds$$

เป็นตัวดำเนินการกระชับ

นิยาม ก.13 ฟังก์ชัน $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสัมบูรณ์ (absolutely continuous) ถ้า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\sum_1^N (b_j - a_j) < \delta \Longrightarrow \sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon$$

สำหรับเซตจำกัดใดๆ ของช่วงที่ไม่มีส่วนร่วม $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$

ทฤษฎีบท ก.14 (ทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสสำหรับปริพันธ์เลอเบก) ให้ $-\infty < a < b < \infty$ และ $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสัมบูรณ์บน $[a, b]$
2. $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ สำหรับบาง $f \in L^1[a, b]$
3. F สามารถหาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$, $F' \in L^1[a, b]$ และ $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$

ก.2 การพิสูจน์เรื่องสเปกตรัม

บทตั้ง ก.15 ให้

$$f_1(x) = \sinh^2 x - \sin^2 x \quad (ก.5)$$
$$f_2(x) = \sinh^2 x - \cos^2 x + kx(\sinh 2x + \sin 2x) \quad (ก.6)$$

โดยที่ $k > 0$ จะได้ว่า $f_i(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ และเป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเข้มงวด (strictly increasing) ในช่วง $\mathbb{R}^+$

พิสูจน์ เนื่องจาก $f_i(x) = f_i(-x)$ จะได้ว่า $f_i(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่

จาก

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots \quad \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

และ

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \sinh(2x) - \sin(2x) \\
&= 2\left(\frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^{11}}{11!} + \ldots\right) \\
f_2'(x) &= \sinh(2x) + \sin(2x) + k(\sinh(2x) + \sin(2x)) + kx(2\cosh(2x) + 2\cos(2x)) \\
&= (1+k)(\sinh(2x) + \sin(2x)) + 2kx(\cosh(2x) + \cos(2x)) \\
&= 2(1+k)\left(2x + \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^9}{9!} + \frac{(2x)^{13}}{13!} + \ldots\right) + 4kx\left(1 + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^8}{8!} + \frac{(2x)^{10}}{10!} + \ldots\right)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $f_i'(0) > 0 \ \forall x > 0$ เพราะฉะนั้น $f_i(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเข้มงวดใน $\mathbb{R}^+$ □

บทตั้ง ก.16 ให้ $\beta = a + ib$ เป็นคำตอบของแต่ละสมการดังต่อไปนี้

$$h_1(\beta) = \sinh(\beta l) + \sin(\beta l) = 0 \quad (ก.7)$$
$$h_2(\beta) = \cosh(\beta l) + \cos(\beta l) + k\beta(\sinh(\beta l) - \sin(\beta l)) = 0 \quad (ก.8)$$

เมื่อ $k > 0$ เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า คำตอบของแต่ละสมการ จะเกิดขึ้นเมื่อ $|a| = |b|$ เท่านั้น

พิสูจน์

1. พิจารณาสมการ (ก.7) สามารถแยกออกได้เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพดังนี้

$$\cos(bl)\sinh(al) + \sin(al)\cosh(bl) = 0 \quad \rightarrow \quad \cos(bl)\sinh(al) = -\sin(al)\cosh(bl) \quad (ก.9)$$
$$\sin(bl)\cosh(al) + \cos(al)\sinh(bl) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin(bl)\cosh(al) = -\cos(al)\sinh(bl) \quad (ก.10)$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของ (ก.9) และ (ก.10) แล้วนำมาบวกกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\cos^2(bl)\sinh^2(al)+\sin^2(bl)(1+\sinh^2(al)) &= \sin^2(al)(1+\sinh^2(bl))+\cos^2(al)\sinh^2(bl)\\ \sinh^2(al)+\sin^2(bl) &= \sinh^2(bl)+\sin^2(al)\\ \sinh^2(al)-\sin^2(al) &= \sinh^2(bl)-\sin^2(bl) \qquad (\text{ก}.11)\end{aligned}$$

ให้ $f(x)=\sinh^2(x)-\sin^2(x)$ และจากบทตั้ง ก.15 จะได้ว่าสมการ (ก.11) จะเป็นจริงได้ ก็ต่อเมื่อ $|a|=|b|$

2. ต่อมาพิจารณาสมการ (ก.8) และด้วยวิธีทำนองเดียวกัน

$$k\beta\sinh(\beta l)+\cosh(\beta l)=k\beta\sin(\beta l)-\cos(\beta l)$$

$$\begin{aligned}&k(a+ib)[\cos(bl)\sinh(al)+i\sin(bl)\cosh(al)]+[\cos(bl)\cosh(al)+i\sin(bl)\sinh(al)]=\\ &\qquad k(a+ib)[\sin(al)\cosh(bl)+i\cos(al)\sinh(bl)]-[\cos(al)\cosh(bl)-i\sin(al)\sinh(bl)]\end{aligned}$$

เมื่อแยกออกเป็นสมการส่วนจริงและส่วนจินตภาพ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}k[a\cos(bl)\sinh(al)-b\sin(bl)\cosh(al)]+\cos(bl)\cosh(al) &=\\ k[a\sin(al)\cosh(bl)-b\cos(al)\sinh(bl)]-\cos(al)\cosh(bl) & \qquad (\text{ก}.12)\\ k[a\sin(bl)\cosh(al)+b\cos(bl)\sinh(al)]+\sin(bl)\sinh(al) &=\\ k[a\cos(al)\sinh(bl)+b\sin(al)\cosh(bl)]+\sin(al)\sinh(bl) & \qquad (\text{ก}.13)\end{aligned}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของ (ก.12) และ (ก.13) แล้วนำมาบวกกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&k^2\left[a^2(\sin^2(bl)+\sinh^2(al))+b^2(\sin^2(bl)+\sinh^2(al))\right]+\cos^2(bl)+\sinh^2(al)+k[a\sinh(2al)-b\sin(2bl)] =\\ &k^2\left[a^2(\sin^2(al)+\sinh^2(bl))+b^2(\sin^2(al)+\sinh^2(bl))\right]+\cos^2(al)+\sinh^2(bl)+k[-a\sin(2al)+b\sinh(2bl)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k^2(a^2+b^2)[\sin^2(bl)+\sinh^2(al)]+\cos^2(bl)+\sinh^2(al)+k[a\sinh(2al)-b\sin(2bl)] &=\\ k^2(a^2+b^2)[\sin^2(al)+\sinh^2(bl)]+\cos^2(al)+\sinh^2(bl)+k[-a\sin(2al)+b\sinh(2bl)]&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k^2(a^2+b^2)[\sinh^2(al)-\sin^2(al)]+\sinh^2(al)-\cos^2(al)+ka[\sinh(2al)+\sin(2al)] &=\\ k^2(a^2+b^2)[\sinh^2(bl)-\sin^2(bl)]+\sinh^2(bl)-\cos^2(bl)+kb[\sinh(2bl)+\sin(2bl)] & \qquad (\text{ก}.14)\end{aligned}$$

ให้

$$g_1(x)=\sinh^2(xl)-\sin^2(xl), \qquad g_2(x)=\sinh^2(xl)-\cos^2(xl)+kx[\sinh(2xl)+\sin(2xl)]$$

โดยที่ จากบทตั้ง ก.15 g_1, g_2 เป็นฟังก์ชั่นคู่และเป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงค่าจริงบวก จะได้ว่า (ก.14) จะกลายเป็น

$$k^2(a^2+b^2)g_1(a)+g_2(a)=k^2(a^2+b^2)g_1(b)+g_2(b)$$

ดังนั้นในกรณีที่ $|a|>|b|$ จะได้ว่า

$$k^2(a^2+b^2)g_1(a)+g_2(a)>k^2(a^2+b^2)g_1(b)+g_2(b)$$

และทำนองเดียวกัน ถ้า $|a|<|b|$ จะได้ว่า

$$k^2(a^2+b^2)g_1(a)+g_2(a)<k^2(a^2+b^2)g_1(b)+g_2(b)$$

ดังนั้นสมการดังกล่าวจะเป็นจริงได้ ก็เหลือเพียงแค่กรณีเดียวให้ทดสอบ นั่นคือ กรณีที่ $|a|=|b|$ ซึ่งเมื่อแทนค่าแล้วจะพบว่าสมการเป็นจริง เพราะฉะนั้นคำตอบจึงเกิดขึ้นได้เมื่อ $|a|=|b|$ เท่านั้น □

บทตั้ง ก.17 ให้ $k>0$ เป็นค่าคงตัว และ $\beta=a+ib$ เป็นคำตอบของแต่ละสมการดังต่อไปนี้

$$\sinh(\beta l)+\sin(\beta l)=0 \qquad (ก.15)$$

$$\cosh(\beta l)+\cos(\beta l)+k\beta(\sinh(\beta l)-\sin(\beta l))=0 \qquad (ก.16)$$

จะได้ว่า รากที่ไม่เท่ากับศูนย์ของทั้งสองสมการไม่ซ้ำกัน

พิสูจน์ จากบทตั้ง ก.16 เราจะได้ว่า คำตอบของแต่ละสมการ จะเกิดขึ้นกรณีเมื่อ $|a|=|b|$ เท่านั้น ซึ่งทำให้สมการ (ก.9)-(ก.10) และสมการ (ก.12)-(ก.13) ต่างลดมาเหลือแค่สมการเดียว ดังนี้

$$h_1(\beta)=0 \Longleftrightarrow h_{1a}(a)=\cos(al)\sinh(al)+\sin(al)\cosh(al)=0 \qquad (ก.17)$$

$$h_2(\beta)=0 \Longleftrightarrow h_{2a}(a)=\cos(al)\cosh(al)+ka(\cos(al)\sinh(al)-\sin(al)\cosh(al))=0 \qquad (ก.18)$$

ให้ a_0 เป็นคำตอบของสมการ (ก.17) จะได้ว่า

$$\sin(a_0l)\cosh(a_0l)=-\cos(a_0l)\sinh(a_0l)$$

นำไปแทนใน (ก.18) จะได้ว่า

$$h_{2a}(a_0)=\cos(a_0l)\cosh(a_0l)+2k\cos(a_0l)\sinh(a_0l) \qquad (ก.19)$$

$$h_{2a}(a_0)=\cos(a_0l)[\cosh(a_0l)+2k\sinh(a_0l)] \qquad (ก.20)$$

เนื่องจาก $\cos(a_0l)\neq 0$ (เพราะว่า ถ้าเป็นเช่นนั้น $\sin(a_0l)=1$ และ $\cosh(a_0l)\neq 0\ \forall a_0\in\mathbb{R}$ จะทำให้สมการ (ก.17) ไม่เป็นจริง)

ดังนั้น พิจารณาเฉพาะเทอม $\cosh(a_0l)+2ka_0\sinh(a_0l)$

เนื่องจาก ถ้า

$$a_0>0 \Rightarrow \sinh(a_0l)>0 \quad\Rightarrow\quad a_0\sinh(a_0l)>0$$

$$a_0<0 \Rightarrow \sinh(a_0l)<0 \quad\Rightarrow\quad a_0\sinh(a_0l)>0$$

เพราะฉะนั้น

$$\cosh(a_0 l) + 2ka_0 \sinh(a_0 l) > 0 \quad \forall a_0 \in \mathbb{R}$$

จะได้ว่า ถ้า a_0 เป็นคำตอบของ $h_1(a) = 0$ แล้ว $h_2(a_0) \neq 0$ ซึ่งก็คือทั้งสองสมการ ไม่มีรากซ้ำกันนั่นเอง $\square$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวจิตโกมุท ส่งศิริ เกิดเมื่อวันศุกร์ที่ 7 กรกฎาคม พ.ศ. 2521 จังหวัดนครสวรรค์ เป็นบุตรของ นายกอบกิจ ส่งศิริ และนางละเมียด ส่งศิริ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2541 และศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม เมื่อ พ.ศ. 2542