

การควบคุมการโค้งตัวของคานโดยใช้วัสดุเฟียโซอิเล็กทริก



นาย ธวัชชัย ศิริโคจรสมบัติ

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

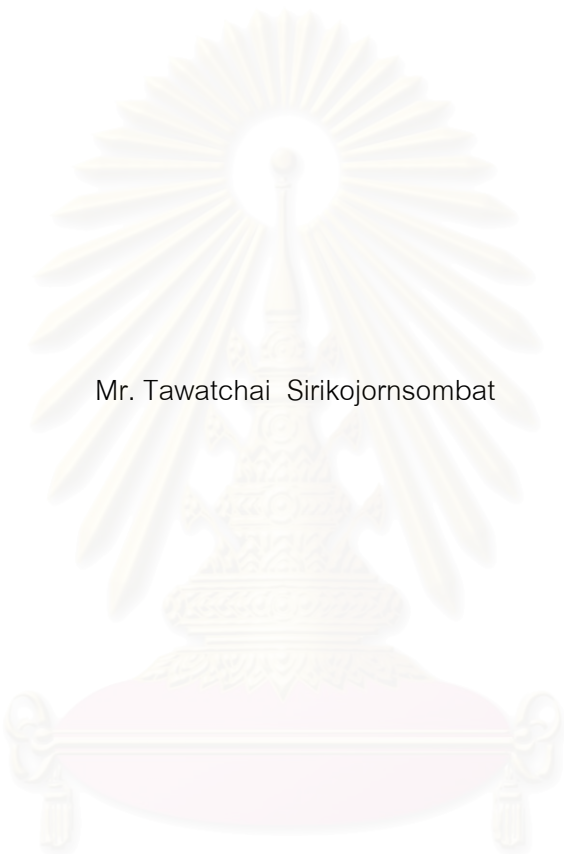
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-17-6258-5

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# DEFLECTION CONTROL OF BEAMS USING PIEZOELECTRIC MATERIALS



Mr. Tawatchai Sirikojornsombat

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2004

ISBN 974-17-6258-5

หัวข้อวิทยานิพนธ์                      การควบคุมการโก่งตัวของคานโดยใช้วัสดุเฟียโซอิเล็กทริก  
โดย    นาย ธวัชชัย ศิริโคจรสมบัติ  
สาขาวิชา                                      วิศวกรรมโยธา  
อาจารย์ที่ปรึกษา                              อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิตถากร

---

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร. ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ  
(ศาสตราจารย์ ดร. ทักษิณ เทพชาตรี)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิตถากร)

..... กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร. อีรพงศ์ เสนจินทร์ชัย)

..... กรรมการ  
(อาจารย์ ดร. ฉัตรพันธ์ จินตนาภักดี)

ธวัชชัย ศิริโคจรสมบัติ : การควบคุมการโก่งตัวของคานโดยใช้วัสดุเพียโซอิเล็กทริก  
(DEFLECTION CONTROL OF BEAMS USING PIEZOELECTRIC MATERIALS)

อ. ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิตถากร, 130 หน้า, ISBN 974-17-6258-5

งานวิจัยนี้ศึกษาการควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานโดยใช้วัสดุเพียโซอิเล็กทริก โครงสร้างคานที่พิจารณาประกอบด้วยชั้นของโครงสร้างหลัก และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ยึดติดกันอย่างสมบูรณ์ในรูปแบบของคานประกอบเป็นชั้นๆ โดยมีสภาพขอบสองลักษณะ คือ แบบคานยื่น และคานจูดรองรับธรรมชาติ การควบคุมการโก่งตัวของคานให้มีรูปร่างเป็นไปตามต้องการ อาศัยการให้ศักย์ไฟฟ้าแบบคงที่เป็นช่วงๆ ตลอดความยาวคาน แก่ชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริก อนึ่งในการศึกษานี้ได้นำทฤษฎีเลเยอร์ไวส์มาเป็นแบบจำลองสำหรับการวิเคราะห์พฤติกรรมของคาน เพื่อหาค่าการกระจัดและศักย์ไฟฟ้า โดยพิจารณาแบ่งโดเมนในทิศทางตามความหนาออกเป็นชั้นๆ สำหรับฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวคานจะแทนด้วยฟังก์ชันฟูเรียร์ซีรีส์ ในขณะที่ฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความหนาจะแทนด้วยฟังก์ชันลากรางจ์เชิงเส้น การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองที่พัฒนาขึ้น อาศัยการเปรียบเทียบกับผลการศึกษาในอดีต ซึ่งพบว่าจะให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำกว่าทฤษฎีคลาสสิก ลามิเนต และทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน

ในการควบคุมการโก่งตัวของคานให้มีรูปร่างตามต้องการนั้น ค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม สำหรับวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในแต่ละช่วง คำนวณโดยอาศัยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ร่วมกับการวิเคราะห์การโก่งตัวด้วยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ดังกล่าวในช่วงต้น และจากการทดสอบการควบคุม โดยสมมติฟังก์ชันการโก่งตัวที่ต้องการเป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังต่างๆ พบว่าการแบ่งจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตลอดความยาวคานที่เพิ่มขึ้น จะช่วยให้สามารถควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานให้ใกล้เคียงกับการโก่งตัวที่ต้องการได้มากขึ้น จากการศึกษาพบว่าในกรณีที่ต้องการค่าการโก่งตัวแบบยกกำลังสอง ค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่ใช้จะมีค่าเกือบจะคงที่โดยตลอดความยาวของคาน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา.....วิศวกรรมโยธา.....

ลายมือชื่อนิสิต.....

สาขาวิชา.....วิศวกรรมโยธา.....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

ปีการศึกษา.....2547.....

# # 4570352021 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD: PIEZOELECTRICITY/LAYERWISE THEORY/COMPOSITE BEAM/DEFLECTION CONTROL

MR. TAWATCHAI SIRIKOJORN SOMBAT : DEFLECTION CONTROL OF BEAMS USING  
PIEZOELECTRIC MATERIALS : THESIS ADVISOR : DR. WATANACHAI SMITTAKORN, 130 pp,  
ISBN 974-17-6258-5

This research studies the deflection control of beams by using piezoelectric materials. The laminated composite beams, composed of layers of substrate and piezoelectric material which are perfectly bonded together, are considered. Two types of boundary conditions are investigated: cantilever and simple support. The deflection control of the composite beams to the desired shape is achieved by applying piecewise constant voltages along the length of the beam to the piezoelectric layer. To analyze for the behavior of the composite beams, a layerwise theory is employed with displacement and electric potential taken as primary unknowns. The domain in the direction through the thickness is divided into several sublayers, yielding a more accurate result than those by the classical beam theory and the shear deformation theories. Shape function in the longitudinal direction is represented by Fourier series, whereas the shape function in the direction through the thickness is used as piecewise linear Lagrange interpolation functions. The correctness of the developed model is verified by comparing the results with earlier researches.

In controlling the deflection of the beam to a desired configuration, appropriate voltage for each portion of the piezoelectric material is sought by using the method of weighted residuals along with the analysis of beam by the layerwise theory. Various case studies of deflection control are examined with the desired shapes given as polynomials to the different orders. Results are found such that increasing the number of portions along the length yields a deflection better fitted with the desired one. However, for the desired shape with quadratic order, the deflection may be controlled by a constant voltage along the length of the beam.

Department..... CIVIL ENGINEERING .....

Student's signature .....

Concentration..... CIVIL ENGINEERING .....

Advisor's signature .....

Academic year..... 2004 .....

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลือสนับสนุนอย่างดียิ่งจากท่านเหล่านี้ ได้แก่ อาจารย์ ดร. วัฒนชัย สมิตถากร อาจารย์ที่ปรึกษาที่ได้ให้คำปรึกษาและแนะนำการจัดทำวิทยานิพนธ์นี้ให้มีความสมบูรณ์มากที่สุด ศาสตราจารย์ ดร. ทักษิณ เทพชาตรี ที่ได้ให้ความกรุณารับเป็นประธานของคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งได้ให้ความกรุณาตรวจแก้และให้คำปรึกษาในการทำวิทยานิพนธ์นี้ รองศาสตราจารย์ ดร. ธีรพงศ์ เสนจันทร์มิไชย และอาจารย์ ดร. ชัตรพันธ์ จินตนาภักดี ที่ได้ให้ความกรุณารับเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งได้ให้ความกรุณาตรวจแก้และให้คำปรึกษาในการทำวิทยานิพนธ์นี้

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา พี่น้อง และ เพื่อนๆ ที่ได้ให้การสนับสนุนในทุกๆ ด้าน รวมทั้งได้ให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยในการศึกษาเป็นอย่างดี



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ญ
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	ฎ
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ความเป็นมา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	1
1.3 ขอบเขตของการศึกษา.....	2
1.4 ประโยชน์ที่จะได้รับ.....	2
บทที่ 2 งานวิจัยที่ผ่านมา	
2.1 ทฤษฎีเสมือนชั้นเดียว.....	3
2.2 ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์.....	4
2.3 แบบจำลองผสม.....	5
บทที่ 3 ปัญหา	
3.1 ปัญหา.....	6
3.2 สมการควบคุม.....	7
3.2.1 สมการควบคุมใน 3 มิติ.....	7
3.2.2 สมการควบคุมใน 2 มิติ.....	11
3.3 เงื่อนไขขอบเขต.....	13
3.4 สมการรูปแบบอ่อน.....	14
3.5 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	16
3.6 ตัวอย่างและฟังก์ชันรูปร่าง.....	21
3.6.1 คานยี่น.....	21
3.6.2 คานจูดรองรับธรรมชาติ.....	22
3.6.3 ฟังก์ชันรูปร่างศักย์ไฟฟ้า.....	23
บทที่ 4 กรณีศึกษาเปรียบเทียบ	
4.1 การประมาณค่าศักย์ไฟฟ้า.....	26
4.2 คานยี่น.....	29

## สารบัญ (ต่อ)

๗

	หน้า
4.2.1 คานยี่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF).....	29
4.2.2 คานยี่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) .....	32
4.2.2.1 คานยี่น 3 ชั้น ภายใต้อายุไฟฟ้ากระทำ .....	33
4.2.2.2 คานยี่น 3 ชั้น ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ.....	36
4.3 คานจุดรองรับธรรมดา.....	40
4.3.1 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4).....	40
4.3.1.1 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้อายุไฟฟ้ากระทำ.....	41
4.3.1.2 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ	43
4.3.2 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4).....	44
4.3.2.1 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้อายุไฟฟ้า กระทำ.....	45
4.3.2.2 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุก กระทำ.....	47
บทที่ 5 การควบคุมการโก่งตัว	
5.1 วิธีการควบคุม .....	49
5.2 คานยี่น .....	50
5.2.1 การโก่งตัวแบบเส้นตรง .....	53
5.2.2 การโก่งตัวแบบยกกำลังสอง.....	63
5.2.3 การโก่งตัวแบบยกกำลังสาม .....	73
5.3 คานจุดรองรับธรรมดา.....	83
5.3.1 การโก่งตัวแบบยกกำลังสอง.....	84
5.3.2 การดก่งตัวแบบยกกำลังสาม .....	94
5.3.3 การโก่งตัวแบบยกกำลังสี่.....	104
บทที่ 6 บทสรุป	
รายการอ้างอิง .....	116
ภาคผนวก .....	118
ภาคผนวก ก .....	119
ภาคผนวก ข .....	126
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....	130



## สารบัญตาราง

ตาราง	หน้า
ตารางที่ 4.1	คุณสมบัติของวัสดุ PVDF ..... 29
ตารางที่ 4.2	ค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF) ภายใต้ ศักย์ไฟฟ้ากระทำ..... 30
ตารางที่ 4.3	ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ของคานยื่น (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้า กระทำ..... 31
ตารางที่ 4.4	คุณสมบัติของอลูมิเนียม แกรไฟต์-อีพอกซี วัสดุยึดติด และวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 ..... 32
ตารางที่ 4.5	ค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ..... 33
ตารางที่ 4.6	ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม หรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ..... 34
ตารางที่ 4.7	ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม หรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ..... 37
ตารางที่ 4.8	คุณสมบัติของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 ..... 41
ตารางที่ 4.9	ค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ ศักย์ไฟฟ้ากระทำ..... 42
ตารางที่ 4.10	ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ..... 42
ตารางที่ 4.11	ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ..... 44
ตารางที่ 4.12	คุณสมบัติของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 และแกรไฟต์-อีพอกซี..... 45
ตารางที่ 4.13	ค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับแบบธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอก ซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ..... 46
ตารางที่ 4.14	ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ..... 46
ตารางที่ 4.15	ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ..... 47

## สารบัญภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
รูปที่ 3.1 โครงสร้างคานซึ่งประกอบไปด้วยชั้นของโครงสร้างหลัก (substrate) และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก.....	6
รูปที่ 3.2 แสดงสัญลักษณ์ต่างๆของฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์เชิงเส้นในทิศทางตามความหนา.....	18
รูปที่ 3.3 ลักษณะคานยื่นที่ใช้ในงานวิจัยนี้ .....	21
รูปที่ 3.4 ลักษณะคานจตุรกรวยรับธรรมดาที่ใช้ในงานวิจัยนี้.....	22
รูปที่ 3.5 ศักย์ไฟฟ้าที่มีค่าคงที่ 1 หน่วยในช่วง a ถึง b .....	24
รูปที่ 4.1 การประมาณค่าศักย์ไฟฟ้าคงที่ 1 โวลต์ด้วยฟังก์ชันฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ที่มีจำนวนเทอมต่างๆกัน.....	27
รูปที่ 4.2 ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณศักย์ไฟฟ้าโดยใช้ฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ที่มีจำนวนเทอมต่างๆกัน.....	28
รูปที่ 4.3 คานยื่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ .....	29
รูปที่ 4.4 คานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยืดติด/PZT-4) .....	32
รูปที่ 4.5 คานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยืดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ..	33
รูปที่ 4.6 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม/วัสดุยืดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ .....	35
รูปที่ 4.7 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยืดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ.....	35
รูปที่ 4.8 คานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยืดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ.....	36
รูปที่ 4.9 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม/วัสดุยืดติด/PZT-4) ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกกระทำ.....	38
รูปที่ 4.10 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยืดติด/PZT-4) ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกกระทำ .....	38
รูปที่ 4.11 ผลการเปรียบเทียบค่าศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม/วัสดุยืดติด/PZT-4) ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกกระทำ.....	39
รูปที่ 4.12 ผลการเปรียบเทียบค่าศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกของคานยื่น 3 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยืดติด/PZT-4) ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกกระทำ.....	39
รูปที่ 4.13 คานจตุรกรวยรับธรรมดา 2 ชั้นประกบติดกัน (PZT-4/PZT-4) .....	40
รูปที่ 4.14 คานจตุรกรวยรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ.....	41
รูปที่ 4.15 คานจตุรกรวยรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกกระทำ .....	43
รูปที่ 4.16 คานจตุรกรวยรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) .....	44
รูปที่ 4.17 คานจตุรกรวยรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ.....	45
รูปที่ 4.18 คานจตุรกรวยรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกกระทำ .....	47
รูปที่ 5.1 โครงสร้างคานที่ใช้สำหรับควบคุมการโก่งตัวเพื่อให้ได้รูปร่างตามที่ต้องการ.....	49





ภาพประกอบ

หน้า

รูปที่ 5.58 ค่าตลาดเคลื่อนของการโก่งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเลคทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง ..... 113



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## คำอธิบายสัญลักษณ์

$\sigma_{ij}$	คือ หน่วยแรง (stress)
$D_i$	คือ การกระจัดไฟฟ้า (electric displacement)
$C_{ijkl}$	คือ สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่น (elastic coefficient)
$S_{kl}$	คือ ความเครียด (strain)
$e_{lij}$	คือ สัมประสิทธิ์เพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric coefficient)
$E_t$	คือ สนามไฟฟ้า (electric field)
$\epsilon_{il}$	คือ อัตราความจุกระแสไฟฟ้า (dielectric constant or permittivities)
$\phi$	คือ ศักย์ไฟฟ้า (electric potential)
$d$	คือ piezoelectric strain constant
$u_i, u_j$	คือ การกระจัดในทิศทาง $i$ และ $j$ ตามลำดับ
$u, w$	คือ การกระจัดในทิศทาง $x$ และ $z$ ตามลำดับ
$\hat{u}, \hat{w}$	คือ ค่าของการกระจัดของ $u$ และ $w$ ที่กำหนดบนขอบเขต $\Gamma_1^u, \Gamma_1^w$ ตามลำดับ
$\hat{\phi}$	คือ ค่าของศักย์ไฟฟ้าที่กำหนดบนขอบเขต $\Gamma_1^\phi$
$\hat{t}_x, \hat{t}_z$	คือ ค่าของหน่วยแรงที่ผิวที่กำหนดบนขอบเขต $\Gamma_2^u, \Gamma_2^w$ ตามลำดับ
$\hat{D}_n$	คือ ค่าของการกระจัดไฟฟ้าที่มีทิศทางตั้งฉากและพุ่งออกจากขอบที่ผิวที่กำหนดบน
ขอบเขต $\Gamma_2^\phi$	
$n_x, n_z$	คือ โคไซน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากและพุ่งออกจากขอบที่ผิวใน
ทิศทาง $x$ และ $z$ ตามลำดับ	
$\delta u, \delta w, \delta \phi, W_i$	คือ ฟังก์ชันน้ำหนัก
$N_{ij}^u(x, z)$	คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด $u$
$N_i^w(x)$	คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด $w$
$N_{ij}^\phi(x, z)$	คือ ฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า $\phi$
$R_i^u(x)$	คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด $u$ ในทิศทาง $x$
$R_i^w(x)$	คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด $w$ ในทิศทาง $x$
$R_i^\phi(x)$	คือ ฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า $\phi$ ในทิศทาง $x$
$\psi_j(z)$	คือ ฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์ในทิศทาง $z$
$U_{ij}, W_i, \Phi_{ij}$	คือ ตัวไม่ทราบค่าของการกระจัด $u, w$ และศักย์ไฟฟ้า $\phi$ ตามลำดับ
$N$	คือ จำนวนชั้นทั้งหมด
$h_j$	คือ ความหนาของชั้นต่างๆ
$V$	คือ ค่าศักย์ไฟฟ้าที่ต้องการ
$w(x)$	คือ ฟังก์ชันรูปร่างที่ต้องการ
$f_j$	คือ การโค้งตัวของคาน เมื่อให้ $\phi_j = 1$ โวลต์

$n$  คือ จำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก  
 $E_{11}, E_{22}, E_{33}$  คือ โมดูลัสยืดหยุ่นในทิศทาง 1, 2 และ 3 ตามลำดับ  
 $\nu_{ij}$  คือ อัตราส่วนปัวซอง  
 $G_{23}, G_{13}, G_{12}$  คือ โมดูลัสแรงเฉือนในระนาบ 2-3, 1-3 และ 1-2 ตามลำดับ



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมา

วัสดุเพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric material) มีคุณสมบัติที่สำคัญ คือ เมื่อถูกแรงกระทำจะเกิดศักย์ไฟฟ้า (electric potential) ขึ้น คุณสมบัติดังกล่าวสามารถนำมาใช้เป็นตัวรับรู้ (sensor) ได้ ในทางกลับกัน หากป้อนศักย์ไฟฟ้าให้แก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะทำให้เกิดหน่วยแรงและความเครียดขึ้นในชั้นของวัสดุ ซึ่งคุณสมบัตินี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นตัวให้แรง (actuator) ได้

วัสดุเพียโซอิเล็กทริกสามารถนำไปใช้ในงานต่างๆทางวิศวกรรมโครงสร้าง เช่น การลดการสั่นไหวของโครงสร้างเครื่องบิน (vibration suppression of aircraft structures) การควบคุมเสียงของใบพัดเฮลิคอปเตอร์ (noise control of helicopter rotors) (Lee, 2001) การควบคุมการสั่นไหว (vibration control) การควบคุมรูปร่าง (shape control) (chandrashekhara, 1996) เป็นต้น โดยในอดีตที่ผ่านมาได้มีการนำวัสดุเพียโซอิเล็กทริกไปประยุกต์ใช้ร่วมกับวัสดุต่างๆหลายชนิด เช่น อลูมิเนียม แกรไฟต์-อีพอกซี และไม้ เป็นต้น

งานวิจัยนี้จะศึกษาวิธีการควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานประกอบหลายชั้น (laminated composite beam) โดยอาศัยคุณสมบัติการให้แรงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ซึ่งกระทำโดยพิจารณาหาศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่สุดที่ให้แก่ชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพื่อให้การเปลี่ยนรูปร่างเป็นไปตามที่ต้องการ ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าการกระจัด (displacement) และศักย์ไฟฟ้า (electric potential) จะอาศัยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ (layerwise theory) ทั้งนี้เนื่องจากจะให้ผลลัพธ์ที่ละเอียดและมีความถูกต้องแม่นยำกว่าการใช้ทฤษฎีคลาสสิก ลามิเนต (classical laminate theory ; CLT) และทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน (shear deformation theory)

### 1.2 วัตถุประสงค์

1. ศึกษาและวิเคราะห์การเปลี่ยนรูปร่างของโครงสร้างคานประกอบหลายชั้นที่มีชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักกระทำแบบต่างๆตลอดความยาวคาน โดยอาศัยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ (layerwise theory)

2. หาศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่สุดสำหรับชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพื่อใช้ควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานให้ได้รูปร่างตามที่กำหนด



### 1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1. โครงสร้างคานที่พิจารณาสามารถประกอบด้วยชั้นของวัสดุได้หลายชั้น (รวมทั้งชั้นของวัสดุเฟียโซอิเล็กทริก) โดยสมมติให้แต่ละชั้นยึดติดกันอย่างสมบูรณ์ และพิจารณาโครงสร้างคานใน 2 ลักษณะ คือ คานยื่นและคานจุดรองรับธรรมดา

2. โครงสร้างคานมีพฤติกรรมแบบ 2 มิติ โดยจะพิจารณาทั้งแบบความเค้นระนาบ (plane stress) และความเครียดระนาบ (plane strain) แกนหลักของโครงสร้างคานอยู่ในแกน  $x$  (ทิศทางตามความยาวคาน) และแกน  $z$  (ทิศทางตามความหนาคาน) วัสดุที่พิจารณามีคุณสมบัติแบบออร์โททรอปิก (orthotropic) และอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic)

3. พิจารณาพฤติกรรมของวัสดุในสภาวะคงที่ (steady state) เท่านั้น นั่นคือ ค่าต่างๆไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา

4. การวิเคราะห์พฤติกรรมของโครงสร้างคานจะใช้ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ (layerwise theory) โดยจะใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์ซีรีส์ (Fourier series) แทนฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวของคาน และฟังก์ชันประมาณของลากรางจ์เชิงเส้น (linear Lagrange interpolation) แทนฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความหนาของคาน

5. การควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานจะกำหนดให้ศักย์ไฟฟ้าที่กระทำต่อชั้นของวัสดุเฟียโซอิเล็กทริกมีค่าคงที่เป็นช่วงๆตลอดความยาวคาน

### 1.4 ประโยชน์ที่จะได้รับ

จากงานวิจัยนี้จะทำให้ทราบถึงพฤติกรรมการเสียรูปที่เกิดขึ้นกับโครงสร้างคานที่ประกอบด้วยวัสดุเฟียโซอิเล็กทริกภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักระทำแบบต่างๆตลอดความยาวคาน และสามารถนำแบบจำลองที่ได้พัฒนาขึ้นไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานได้โดยการหาศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่สุดที่ให้แก่ชั้นของวัสดุเฟียโซอิเล็กทริกเพื่อให้โครงสร้างคานเกิดการเปลี่ยนรูปร่างเป็นไปตามที่ต้องการ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 2

### งานวิจัยที่ผ่านมา

ปรากฏการณ์เพียโซอิเล็กทริกในของแข็งถูกค้นพบเป็นครั้งแรกในปี ค.ศ.1880 โดย Pierre Curie และ Jacques Curie ทั้งสองได้ทำการทดลองวัดค่าศักย์ไฟฟ้า (electric potential) ที่เกิดขึ้น เมื่อมีการให้แรงกระทำต่อผลึกควอตซ์ (quartz) ปีต่อมา Lippman ได้ศึกษาหาความเครียดในเนื้อวัสดุที่เกิดขึ้นเนื่องจากการบ่อนคัยไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริก หลังจากนั้น Voight (1894) ได้ประยุกต์ความรู้ทางด้านกลศาสตร์ของแข็งและความรู้ทางด้านไฟฟ้าสถิตย์ ในการสร้างสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้อธิบายพฤติกรรมของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกขึ้น ซึ่งเป็นที่ยอมรับและใช้อ้างอิงกันอย่างแพร่หลายรวมทั้งได้มีการนำไปประยุกต์ใช้ในงานต่างๆ เช่น การควบคุมการสั่นไหว การควบคุมรูปร่าง เป็นต้น สำหรับทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์พฤติกรรมของโครงสร้างคานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมีหลายทฤษฎีด้วยกัน ได้แก่ ทฤษฎีเสมือนชั้นเดียว (equivalent single-layer theory ; ESL) ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ (layerwise theory) และทฤษฎีผสมระหว่างทฤษฎีทั้งสอง ซึ่งจะกล่าวแยกในรายละเอียดดังต่อไปนี้

#### 2.1 ทฤษฎีเสมือนชั้นเดียว (equivalent single-layer theory ; ESL)

ทฤษฎีเสมือนชั้นเดียวที่นิยมใช้สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างคานประกอบด้วยชั้นนั้นๆมีหลายทฤษฎีซึ่งได้แก่ ทฤษฎีคลาสสิกคลลามิเนต (classical laminate theory ; CLT) และทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน (shear deformation theory) ซึ่งจะกล่าวตามลำดับดังนี้

ทฤษฎีคลาสสิกคลลามิเนตมีสมมติฐานว่าระนาบการเปลี่ยนรูปร่างยังคงเป็นระนาบเส้นตรง ซึ่งความเป็นจริงระนาบการเปลี่ยนรูปร่างจะไม่คงระนาบเดิมเนื่องจากมีผลของแรงเฉือนด้วย ดังนั้นผลลัพธ์จะมีความคลาดเคลื่อนได้เมื่อโครงสร้างมีความหนาหลายๆ Crawley และ Anderson (1990) ใช้ทฤษฎีนี้ในการศึกษาคานที่มีวัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดอยู่เป็นตัวให้แรง ผลการศึกษาสรุปได้ว่าทฤษฎีนี้เหมาะสำหรับโครงสร้างที่ความหนาน้อยๆเท่านั้น ทั้งนี้ปัญหาดังกล่าวจะสามารถแก้ไขให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีขึ้นได้โดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน ซึ่งจะกล่าวต่อไป

ในการวิเคราะห์โครงสร้างคานประกอบด้วยชั้นโดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนนั้นจะพิจารณาการเปลี่ยนรูปร่างโดยคิดผลเนื่องจากแรงเฉือนด้วย ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จะดีกว่าการวิเคราะห์โดยอาศัยทฤษฎีคลาสสิกคลลามิเนต ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนมีหลายวิธีแต่ที่นิยมใช้มี 2 วิธี คือ การวิเคราะห์โดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่หนึ่ง (first-order shear deformation theory ; FSĐT) และการวิเคราะห์โดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่สาม (third-order shear deformation theory ; TSĐT) ซึ่งมีผู้ทำการศึกษาดังนี้ Shen (1995) ศึกษาคานยื่นที่มีวัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดอยู่โดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่หนึ่ง การวิเคราะห์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  และมุมเนื่องจากแรงเฉือน (shear angle) ใช้ฟังก์ชันเส้นตรงฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ใช้ฟังก์ชันเฮอร์ไมท์ (Hermite) ค่าการโก่งตัวที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับผล

การศึกษาโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติของ Tzou และ Tseng (1991) พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน Eisenberger และ Abramovich (1997) ได้เสนอแนวคิดในการหาผลเฉลยของการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริก โดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่หนึ่ง และใช้ค่าปรับแก้แรงเฉือนเท่ากับ  $5/6$  ส่วนฟังก์ชันรูปร่างตามความยาวคาน (แกน  $x$ ) ใช้อนุกรมไม่จำกัด (infinite series) ทำให้ค่าที่ได้มีความละเอียดและถูกต้อง จากนั้นจึงนำแนวคิดนี้มาใช้ในการควบคุมรูปร่างของคานประกอบ Liew และคณะ (2002) วิเคราะห์คานและแผ่นเรียบประกอบที่มีวัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดอยู่ โดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่หนึ่ง และนำวิธีการนี้ไปศึกษาการควบคุมรูปร่างของคานและแผ่นเรียบประกอบเมื่อให้ค่าศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักกระทำต่างๆกัน Aldraihem และ Khdeir (2003) ศึกษาหาผลเฉลยของคานที่มีแผ่นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดที่ผิวบนและที่ผิวล่างของคานเป็นคู่ๆตลอดความยาวคาน โดยใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่หนึ่งและทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่สาม การศึกษานี้คำนึงถึงผลของความยาวของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ระยะห่างของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก และตำแหน่งของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกด้วย ผลที่ได้พบว่าทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่สามให้ผลที่ดีกว่าทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่หนึ่ง อย่างไรก็ตามทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนเหล่านี้ก็ยังไม่เหมาะกับโครงสร้างที่มีความหนาหลายๆ

## 2.2 ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ (layerwise theory)

การวิเคราะห์โครงสร้างคานประกอบหลายชั้นโดยอาศัยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์จะพิจารณารแบ่งโครงสร้างคานประกอบออกเป็นชั้นๆ ความละเอียดของผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นอยู่กับจำนวนของชั้นที่แบ่ง ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีนี้พบว่าดีกว่าทฤษฎีคลาสสิกคลาสิกและทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อโครงสร้างมีความหนาหลายๆ Robbin และ Reddy (1991) พัฒนาแบบจำลองคานที่มีวัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดอยู่เป็นตัวให้แรง โดยใช้ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ในคำนวณหาค่าการกระจัด โครงสร้างที่ศึกษาเป็นคานยื่นประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น คือ ชั้นของอลูมิเนียม ชั้นของวัสดุยึดติด และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ฟังก์ชันรูปร่างตามความยาวและตามความหนาของคานใช้ฟังก์ชันเส้นตรง สำหรับการศึกษานี้ไม่ได้ใช้คุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกโดยตรง แต่สมมติค่าความเครียดที่เกิดจากการให้ศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกแทน โดยสมมติให้ความเครียดตามแนวแกน  $x$  เท่ากับ  $0.1\%$  ผลที่ได้พบว่ามีความถูกต้องมากกว่าการใช้ทฤษฎีคลาสสิกคลาสิกและทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่หนึ่ง Saravanos และ Heyliger (1995) ทำการศึกษาคานประกอบลักษณะเดียวกับ Robbin และ Reddy แต่ Saravanos และ Heyliger พิจารณาทั้งการกระจัดและศักย์ไฟฟ้าเป็นตัวแปรโดยอาศัยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ นั่นคือคำนึงถึงคุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกโดยตรง ซึ่งผลของการให้ค่าศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ  $12.5$  kV จะทำให้เกิดค่าความเครียดตามแนวแกน  $x$  เท่ากับ  $0.1\%$  ฟังก์ชันรูปร่างทั้งในทิศทางตามความยาวและตามความหนาของคานใช้ฟังก์ชันเส้นตรง ผลลัพธ์ที่ได้เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Robbin และ Reddy พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน

### 2.3 แบบจำลองผสม (mixed model)

ทฤษฎีแบบจำลองผสม คือ การวิเคราะห์โครงสร้างคานประกอบหลายชั้นโดยอาศัยทฤษฎีผสมระหว่างทฤษฎีเลเยอร์ไวส์กับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน ทฤษฎีนี้มีข้อดีคือตัวไม่ทราบค่าจะมีจำนวนน้อยกว่าเมื่อเทียบกับการใช้ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์เพียงอย่างเดียว แต่ถ้าโครงสร้างคานประกอบมีความหนามากขึ้นผลที่ได้ก็จะคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้น ซึ่งมีผู้ทำการศึกษา ดังนี้ Chee, Tong และ Steven (1999) ศึกษาคานประกอบที่มีวัสดุเพียงโซลิตเรคเป็นตัวให้แรงและตัวรับรู้ โดยอาศัยทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่สามในการคำนวณหาค่าการกระจัด และใช้ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ในการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้า โดยฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวคานของทั้งค่าการกระจัดและศักย์ไฟฟ้าใช้เป็นเอลิเมนต์แบบเฮอริทมิทเซียนสำหรับคาน 1 มิติ (one-dimensional Hermitian beam element) ส่วนฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความหนาของค่าศักย์ไฟฟ้าใช้ฟังก์ชันเส้นตรงในแต่ละชั้น ผลที่ได้จากการศึกษานี้เมื่อเปรียบเทียบกับการศึกษาของ Hwang และ Park (1993), Tseng (1988), Saravanos และ Heyliger (1995) พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน Fernandes และ Pouget (2002) ศึกษาแผ่นเรียบจุดรองรับธรรมดาที่มีพฤติกรรมการดัดแบบผิวทรงกระบอก (cylindrical bending) ที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงโซลิตเรค ค่าการกระจัดคำนวณโดยใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน และค่าศักย์ไฟฟ้าคำนวณโดยใช้ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ ผลการศึกษาที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ ของ Heyliger และ Brooks (1996) พบว่าถ้าความหนามีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความยาวของแผ่นเรียบผลที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกัน แต่ถ้าความหนามีค่ามากขึ้นค่าคลาดเคลื่อนก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย

จากการศึกษาต่างๆในอดีตดังกล่าวแล้วข้างต้นจะพบว่า ถึงแม้ว่าการวิเคราะห์โดยอาศัยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์จะมีความยุ่งยากในการคำนวณเนื่องจากจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจะขึ้นอยู่กับจำนวนชั้นที่แบ่ง แต่ผลลัพธ์ที่ได้นั้นจะมีความละเอียดและถูกต้องมากกว่าการวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีเสมือนชั้นเดียวและทฤษฎีผสมระหว่างทฤษฎีเลเยอร์ไวส์กับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงเลือกใช้ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ในการวิเคราะห์พฤติกรรมการโก่งตัวของคานและนำไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมรูปร่างของโครงสร้างคานต่อไป

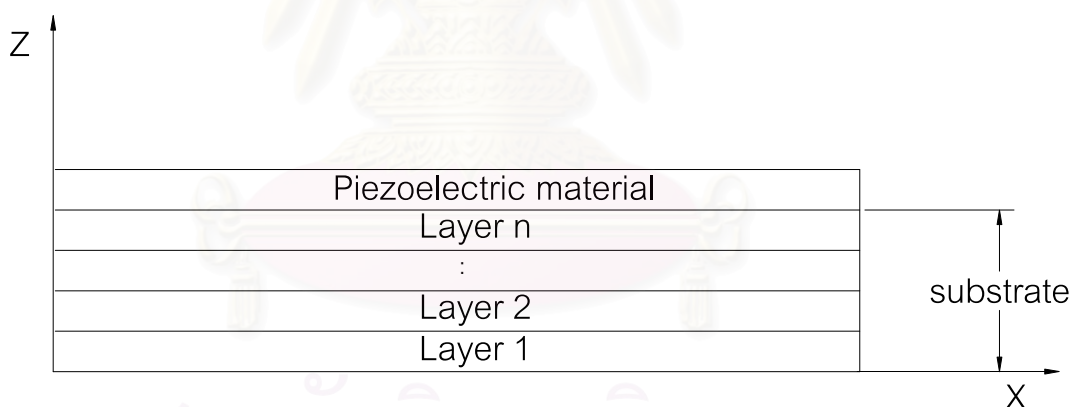
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### บทที่ 3

## ทฤษฎี

#### 3.1 ปัญหา

การควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างให้มีการเปลี่ยนรูปร่างเป็นไปตามที่ต้องการสามารถทำได้โดยอาศัยคุณสมบัติการให้แรง (actuation) ของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ซึ่งในงานวิจัยนี้จะศึกษาการควบคุมการเปลี่ยนรูปร่างของโครงสร้างคานประกอบเป็นชั้นๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.1 โครงสร้างคานที่พิจารณาจะประกอบด้วยชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก และชั้นของโครงสร้างหลัก (substrate) ซึ่งอาจประกอบขึ้นจากชั้นวัสดุหลายชั้น พฤติกรรมของโครงสร้างที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกนี้จะขึ้นอยู่กับผลที่เกิดขึ้นร่วมกันทั้งทางด้านกลศาสตร์และด้านไฟฟ้าสถิตย์ สำหรับการควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานจะกระทำโดยการกำหนดศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมให้กับชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพื่อให้การเปลี่ยนรูปร่างเป็นไปตามที่ต้องการ การวิเคราะห์หาค่าการกระจัดและศักย์ไฟฟ้าจะอาศัยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ (layerwise theory) โดยใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์ซีรีส์ (Fourier series) แทนฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวของคาน และใช้ฟังก์ชันประมาณของลากรางจ์เชิงเส้น (linear Lagrange interpolation) แทนฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความหนาของคาน



รูปที่ 3.1 โครงสร้างคานซึ่งประกอบไปด้วยชั้นของโครงสร้างหลัก (substrate) และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก

งานวิจัยนี้จะพิจารณาพฤติกรรมของโครงสร้างคานทั้งในแบบความเค้นระนาบ (plane stress) และความเครียดระนาบ (plane strain) ในระนาบ  $x-z$  โดยกำหนดให้แกน  $x$  เป็นทิศทางตามความยาวของคาน และแกน  $z$  เป็นทิศทางตามความหนาของคาน โครงสร้างคานที่พิจารณาซึ่งประกอบด้วยชั้นของวัสดุหลายชั้นนั้นจะสมมติว่าแต่ละชั้นของวัสดุยึดติดกันอย่างสมบูรณ์ ในบทนี้จะกล่าวถึงสมการควบคุม (governing equation) เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) วิธีการแก้ปัญหาและแบบจำลองที่ใช้ ตามลำดับ

### 3.2 สมการควบคุม

ทฤษฎีที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของโครงสร้างคานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงไอโซโทรปิกในงานวิจัยนี้อ้างอิงจากการศึกษาของ Tiersten (1969) ซึ่งแสดงถึงสมการสมดุล (equilibrium equation) และกฎของวัสดุ (material law or constitutive equation) ในที่นี้จะแสดงสมการควบคุมในระบบ 3 มิติก่อน จากนั้นจึงทำการลดรูปสมการให้เข้ากับปัญหาความเค้นระนาบ (plane stress) และความเครียดระนาบ (plane strain) ในระนาบ 2 มิติ (x-z)

#### 3.2.1 สมการควบคุมใน 3 มิติ

สมการสมดุลของแรงที่กระทำต่อวัตถุ โดยไม่คิดน้ำหนักของวัตถุ คือ

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3.1)$$

โดยที่

$\sigma_{ij}$  คือ หน่วยแรง (stress)

$i, j = 1, 2, 3$

หรือสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad (3.1ก)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad (3.1ข)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad (3.1ค)$$

สมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation) สำหรับไฟฟ้าสถิตย์ (electrostatics) ที่ไม่มีประจุอิสระ

คือ

$$D_{i,i} = 0 \quad (3.2)$$

โดยที่

$D_i$  คือ การกระจัดไฟฟ้า (electric displacement)

$$i = 1,2,3$$

หรือสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.2n)$$

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง (stress) ความเครียด (strain) และสนามไฟฟ้า (electric field) กับสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดไฟฟ้า (electric displacement) ความเครียด (strain) และสนามไฟฟ้า (electric field) ในช่วงเชิงเส้น คือ

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} - e_{ij} E_l \quad (3.3)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{il} E_l \quad (3.4)$$

โดยที่

$C_{ijkl}$  คือ สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่น (elastic coefficient)

$S_{kl}$  คือ ความเครียด (strain)

$e_{ij}$  คือ สัมประสิทธิ์เพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric coefficient)

$E_l$  คือ สนามไฟฟ้า (electric field)

$\varepsilon_{il}$  คือ อัตราค่าความจุกระแสไฟฟ้า (dielectric constant or permittivities)

$$i, j, k, l = 1,2,3$$

และเนื่องจากความสมมาตรของวัสดุ (material symmetry)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$S_{kl} = S_{lk}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$$

$$e_{ikl} = e_{ilk}$$

$$\varepsilon_{il} = \varepsilon_{li}$$

ทำให้สามารถเขียนหน่วยแรงและความเครียดได้ใหม่ คือ

$$\sigma_p = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$S_q = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix}$$

ดังนั้นสมการที่ (3.3) และ (3.4) จะสามารถเขียนได้ในรูป

$$\sigma_p = C_{pq} S_q - e_{lp} E_l \quad (3.5)$$

$$D_i = e_{iq} S_q + \varepsilon_{il} E_l \quad (3.6)$$

เมื่อ  $p, q = 1, 2, 3, \dots, 6$  และ  $i, l = 1, 2, 3$

สำหรับงานวิจัยนี้จะพิจารณาวัสดุที่มีคุณสมบัติออร์โททรอปิก (orthotropic) โดยที่สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่น (elastic coefficient) สัมประสิทธิ์เพียโซอิเล็กทริก (piezoelectric coefficient) และอัตราค่าความจุกระแสไฟฟ้า (dielectric constant or permittivities) เป็นดังนี้

$$C_{pq} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$e_{lp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\varepsilon_{il} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการที่ (3.5) และสมการที่ (3.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด สำหรับค่าการเปลี่ยนตำแหน่งน้อยๆ คือ

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.9)$$

โดยที่

$u_i$  คือ การกระจัดในทิศทาง  $i$   
 $i, j = 1, 2, 3$  หรือสามารถแสดงได้ดังนี้

$$S_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.9ก)$$

$$S_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (3.9ข)$$

$$S_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (3.9ค)$$

$$S_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (3.9ง)$$

$$S_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (3.9\text{จ})$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.9\text{ข})$$

ความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับศักย์ไฟฟ้า คือ

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (3.10)$$

โดยที่

$\phi$  คือ ศักย์ไฟฟ้า (electric potential)

$i = 1, 2, 3$  หรือสามารถแสดงได้ดังนี้

$$E_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad (3.10\text{ก})$$

$$E_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad (3.10\text{ข})$$

$$E_3 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_3} \quad (3.10\text{ค})$$

### 3.2.2 สมการควบคุมใน 2 มิติ

ในงานวิจัยนี้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งตัวของโครงสร้างคานใน 2 ลักษณะ คือ แบบความเค้นระนาบ (plane stress) และแบบความเครียดระนาบ (plane strain) ดังนั้นจะต้องทำการลดรูปสมการใน 3 มิติให้กลายเป็นปัญหาในระนาบ 2 มิติ ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้

สมการสมดุลของแรงใน 2 มิติ ในระนาบ x-z เมื่อไม่คิดน้ำหนักของวัตถุ คือ

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

สมการของแมกซ์เวลล์สำหรับไฟฟ้าสถิตใน 2 มิติ ในระนาบ x และ z เมื่อไม่มีประจุอิสระ คือ

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (3.13)$$

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง ความเครียด และสนามไฟฟ้าสำหรับคานาในระนาบ 2 มิติ (x-z) แสดงได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 2S_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดไฟฟ้า ความเครียด และสนามไฟฟ้าสำหรับคานาในระนาบ 2 มิติ (x-z) แสดงได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{15} \\ \bar{e}_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 2S_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

สำหรับกฎของวัสดุของคานาในระนาบ 2 มิติ ในงานวิจัยนี้จะพิจารณาใน 2 ลักษณะ คือ แบบความเค้นระนาบและความเครียดระนาบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของแต่ละปัญหาว่าจะเหมาะกับปัญหาแบบใด ซึ่งรายละเอียดของค่าต่างๆและการพิสูจน์ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด สำหรับปัญหาในระนาบ 2 มิติ โดยมีแกนหลักอยู่บนแกน x และ z สามารถแสดงได้ดังนี้

$$S_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.16)$$

$$S_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.17)$$

$$S_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.18)$$

โดยที่

$u$  คือ การกระจัดในทิศทาง x

$w$  คือ การกระจัดในทิศทาง z

ความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับศักย์ไฟฟ้า สำหรับปัญหาในระนาบ 2 มิติ ซึ่งมีแกนหลักอยู่บนแกน x และ z สามารถแสดงได้ดังนี้

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.19)$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.20)$$

โดยที่

$\phi$  คือ ศักย์ไฟฟ้า (electric potential)

### 3.3 เงื่อนไขขอบเขต

การแก้สมการเพื่อให้ได้คำตอบที่เฉพาะเจาะจงกับแต่ละปัญหาจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับโครงสร้างในระนาบ 2 มิติในงานวิจัยนี้กำหนดให้มีเงื่อนไขขอบเขต ดังต่อไปนี้

$$u = \hat{u}(x, z) \quad \text{บน } \Gamma_1^u \quad (3.21)$$

$$w = \hat{w}(x, z) \quad \text{บน } \Gamma_1^w \quad (3.22)$$

$$\phi = \hat{\phi}(x, z) \quad \text{บน } \Gamma_1^\phi \quad (3.23)$$

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xz}n_z = \hat{t}_x(x, z) \quad \text{บน } \Gamma_2^u \quad (3.24)$$

$$\sigma_{xz}n_x + \sigma_{zz}n_z = \hat{t}_z(x, z) \quad \text{บน } \Gamma_2^w \quad (3.25)$$

$$D_x n_x + D_z n_z = \hat{D}_n(x, z) \quad \text{บน } \Gamma_2^\phi \quad (3.26)$$

โดยที่

$\hat{u}, \hat{w}$  คือ ค่าของการกระจัดของ  $u$  และ  $w$  ที่กำหนดบนขอบเขต  $\Gamma_1^u, \Gamma_1^w$

ตามลำดับ

$\hat{\phi}$  คือ ค่าของศักย์ไฟฟ้าที่กำหนดบนขอบเขต  $\Gamma_1^\phi$

$\hat{t}_x, \hat{t}_z$  คือ ค่าของหน่วยแรงที่ผิวที่กำหนดบนขอบเขต  $\Gamma_2^u, \Gamma_2^w$  ตามลำดับ

$\hat{D}_n$  คือ ค่าของการกระจัดไฟฟ้าในทิศทางตั้งฉากและพุ่งออกจากขอบที่ผิวที่

กำหนดบนขอบเขต  $\Gamma_2^\phi$

$n_x, n_z$  คือ โคไซน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากและพุ่งออกจากขอบที่

ผิวในทิศทาง  $x$  และ  $z$  ตามลำดับ

### 3.4 สมการรูปแบบอ่อน

การวิเคราะห์พฤติกรรมการเสียรูปของโครงสร้างคานาที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในงานวิจัยนี้ จะใช้วิธีการหาคำตอบโดยประมาณ (approximate solution) ซึ่งวิธีการแก้ปัญหาจะกระทำโดยการแปลงสมการสมดุลสมการที่ (3.11) ถึง (3.13) ให้เป็นสมการรูปแบบอ่อนโดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) ของสมการสมดุลดังกล่าวแล้วอินทิเกรตตลอดพื้นที่ ( $\Omega$ ) ในระนาบ x-z ดังนี้

$$\int_{\Omega} \left[ \delta u \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + \delta w \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \delta \phi \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

โดยที่

$\delta u, \delta w, \delta \phi$  คือ ฟังก์ชันน้ำหนัก

ทำการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) สมการที่ (3.27) ซึ่งแต่ละพจน์จะเป็นดังนี้

$$\int_{\Omega} \delta u \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u \sigma_{xx})}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \sigma_{xx} d\Omega \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega} \delta u \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u \sigma_{xz})}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u}{\partial z} \sigma_{xz} d\Omega \quad (3.29)$$

$$\int_{\Omega} \delta w \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta w \sigma_{xz})}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \sigma_{xz} d\Omega \quad (3.30)$$

$$\int_{\Omega} \delta w \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta w \sigma_{zz})}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta w}{\partial z} \sigma_{zz} d\Omega \quad (3.31)$$

$$\int_{\Omega} \delta \phi \frac{\partial D_x}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \phi D_x)}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} D_x d\Omega \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega} \delta \phi \frac{\partial D_z}{\partial z} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \phi D_z)}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} D_z d\Omega \quad (3.33)$$

และเมื่อนำสมการที่ (3.28) ถึง (3.33) ไปแทนในสมการที่ (3.27) จะได้

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \sigma_{xx} + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u}{\partial z} \sigma_{xz} + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \sigma_{xz} + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta w}{\partial z} \sigma_{zz} + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} D_x + \int_{\Omega} \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} D_z \right) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(\delta u \sigma_{xx})}{\partial x} + \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u \sigma_{xz})}{\partial z} + \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta w \sigma_{xz})}{\partial x} + \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta w \sigma_{zz})}{\partial z} + \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \phi D_x)}{\partial x} + \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \phi D_z)}{\partial z} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.34)$$

จากนั้นประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) กับพจน์ทางขวามือของสมการที่ (3.34) ซึ่งแต่ละพจน์เขียนได้ดังนี้

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u \sigma_{xx})}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} \delta u \sigma_{xx} n_x d\Gamma \quad (3.35)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta u \sigma_{xz})}{\partial z} d\Omega = \oint_{\Gamma} \delta u \sigma_{xz} n_z d\Gamma \quad (3.36)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta w \sigma_{xz})}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} \delta w \sigma_{xz} n_x d\Gamma \quad (3.37)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta w \sigma_{zz})}{\partial z} d\Omega = \oint_{\Gamma} \delta w \sigma_{zz} n_z d\Gamma \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \phi D_x)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} \delta \phi D_x n_x d\Gamma \quad (3.39)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta \phi D_z)}{\partial z} d\Omega = \oint_{\Gamma} \delta \phi D_z n_z d\Gamma \quad (3.40)$$

เมื่อนำสมการที่ (3.35) ถึง (3.40) ไปแทนในสมการที่ (3.34) จะได้

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \sigma_{xz} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial \delta w}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} D_x + \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} D_z \right) d\Omega \\ &= \oint_{\Gamma} \left( \delta u (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xz} n_z) + \delta w (\sigma_{xz} n_x + \sigma_{zz} n_z) + \delta \phi (D_x n_x + D_z n_z) \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.41)$$

สำหรับบริเวณขอบเขตจะมี  $t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xz} n_z$ ,  $t_z = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{zz} n_z$  และ  $D_n = D_x n_x + D_z n_z$  ดังนั้นสมการที่ (3.41) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \sigma_{xz} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial \delta w}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} D_x + \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} D_z \right) d\Omega \\ &= \oint_{\Gamma} (\delta u t_x + \delta w t_z + \delta \phi D_n) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.42)$$

สมการที่ (3.42) จะเป็นสมการรูปแบบอ่อนที่จะนำไปใช้หาคำตอบโดยประมาณของปัญหาคานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงไอโซทรอปิก การแก้ปัญหาจะทำโดยสมมติคำตอบของการกระจัด  $u, w$  และศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันต่างๆ แล้วทำการแก้สมการหาตัวไม่ทราบค่า (unknowns) ซึ่งรายละเอียดต่างๆจะแสดงในหัวข้อถัดไป

### 3.5 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การหาคำตอบของปัญหาโครงสร้างคานาที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงชนิดเดียวในงานวิจัยนี้ จะสมมติฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัดและศักย์ไฟฟ้าขึ้นแล้วนำไปแทนในสมการรูปแบบอ่อนตามที่แสดงไว้ในหัวข้อที่แล้ว โดยกำหนดให้การกระจัด  $u$  และศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $z$  ส่วนการกระจัด  $w$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  อย่างเดียว เนื่องจากมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากในทิศทางตามความหนา ดังนี้

$$u(x, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_i^u(x) \psi_j(z) U_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{ij}^u(x, z) U_{ij} = [N^u] \{U\} \quad (3.43)$$

$$w(x, z) = \sum_{i=1}^m R_i^w(x) W_i = \sum_{i=1}^m N_i^w(x) W_i = [N^w] \{W\} \quad (3.44)$$

$$\phi(x, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_i^\phi(x) \psi_j(z) \Phi_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{ij}^\phi(x, z) \Phi_{ij} = [N^\phi] \{\Phi\} \quad (3.45)$$

เมื่อ

$$N_{ij}^u(x, z) = R_i^u(x) \psi_j(z)$$

$$N_i^w(x) = R_i^w(x)$$

$$N_{ij}^\phi(x, z) = R_i^\phi(x) \psi_j(z)$$

$$[N^u] = [N_{11}^u \quad \dots \quad N_{ij}^u \quad \dots \quad N_{mn}^u]$$

$$[N^w] = [N_1^w \quad \dots \quad N_i^w \quad \dots \quad N_m^w]$$

$$[N^\phi] = [N_{11}^\phi \quad \dots \quad N_{ij}^\phi \quad \dots \quad N_{mn}^\phi]$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_{11} \\ \vdots \\ U_{ij} \\ \vdots \\ U_{mn} \end{Bmatrix}, \{W\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_i \\ \vdots \\ W_m \end{Bmatrix}, \{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \vdots \\ \Phi_{ij} \\ \vdots \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix}$$

โดยที่

$N_{ij}^u(x, z)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$

$N_i^w(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$

$N_{ij}^\phi(x, z)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$

$R_i^u(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ในทิศทาง  $x$

$R_i^u(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ในทิศทาง  $x$

$R_i^\phi(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ในทิศทาง  $x$

$\psi_j(z)$  คือ ฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์เชิงเส้นในทิศทาง  $z$

$U_{ij}, W_i, \Phi_{ij}$  คือ ตัวไม่ทราบค่าของการกระจัด  $u, w$  และศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ตามลำดับ

ในงานวิจัยนี้ใช้วิธีกาลเออรกิน (Galerkin) ซึ่งฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักใช้ค่าเดียวกันกับฟังก์ชันโดยประมาณของการกระจัดและศักย์ไฟฟ้า นั่นคือ  $\delta u = [N^u]^T, \delta w = [N^w]^T, \delta \phi = [N^\phi]^T$

อนุพันธ์ต่างๆของการกระจัด ศักย์ไฟฟ้า และฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักจะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= [N_{,x}^u] \{U\}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = [N_{,z}^u] \{U\} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= [N_{,x}^w] \{W\}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= [N_{,x}^\phi] \{\Phi\}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = [N_{,z}^\phi] \{\Phi\} \\ \frac{\partial \delta u}{\partial x} &= [N_{,x}^u]^T, \quad \frac{\partial \delta u}{\partial z} = [N_{,z}^u]^T \\ \frac{\partial \delta w}{\partial x} &= [N_{,x}^w]^T, \quad \frac{\partial \delta w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} &= [N_{,x}^\phi]^T, \quad \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} = [N_{,z}^\phi]^T\end{aligned}$$

เมื่อ

$$[N_{,x}^u] = [N_{11,x}^u \quad \dots \quad N_{ij,x}^u \quad \dots \quad N_{mn,x}^u]$$

$$[N_{,z}^u] = [N_{11,z}^u \quad \dots \quad N_{ij,z}^u \quad \dots \quad N_{mn,z}^u]$$

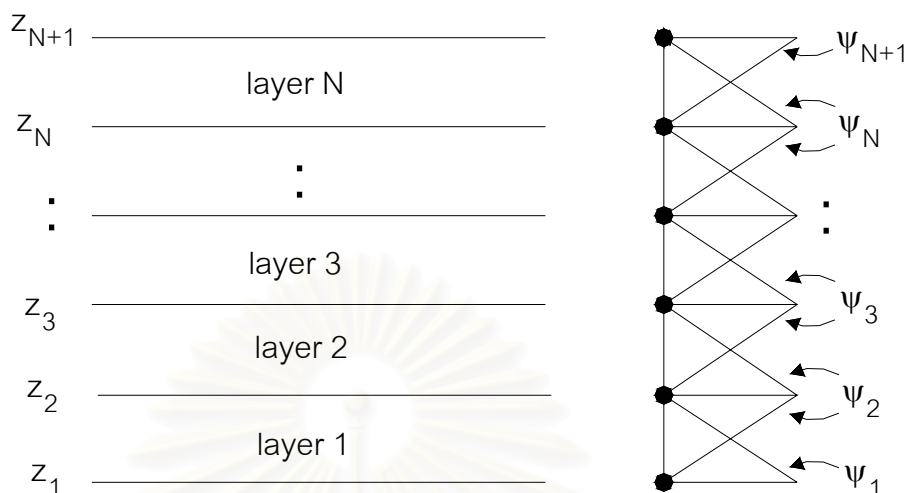
$$[N_{,x}^w] = [N_{1,x}^w \quad \dots \quad N_{i,x}^w \quad \dots \quad N_{m,x}^w]$$

$$[N_{,x}^\phi] = [N_{11,x}^\phi \quad \dots \quad N_{ij,x}^\phi \quad \dots \quad N_{mn,x}^\phi]$$

$$[N_{,z}^\phi] = [N_{11,z}^\phi \quad \dots \quad N_{ij,z}^\phi \quad \dots \quad N_{mn,z}^\phi]$$



ฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์เชิงเส้น (linear Lagrange interpolation) ในทิศทาง  $z$  สามารถแสดง ดังรูปที่ (3.2)



รูปที่ 3.2 แสดงสัญลักษณ์ต่างๆของฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์เชิงเส้นในทิศทางตามความหนา

โดยที่ฟังก์ชันการประมาณลากรางจ์เชิงเส้นของชั้น  $j$  มีค่าดังนี้

$$\psi_j(z) = \frac{z_{j+1} - z}{h_j} \quad (3.46)$$

$$\psi_{j+1}(z) = \frac{z - z_j}{h_j} \quad (3.47)$$

โดยที่

$N$  คือ จำนวนชั้นทั้งหมด

$h_j = z_{j+1} - z_j$  คือ ความหนาของชั้น  $j$

$j = 1, 2, \dots, N$

แทนค่าความสัมพันธ์ของกฎของวัสดุสมการที่ (3.14) และ (3.15) ลงในสมการที่ (2.42) ซึ่งแต่ละพจน์ จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \sigma_{xx} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} \left( \bar{C}_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{e}_{31} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \left[ N_{,x}^u \right]^T \left( \bar{C}_{11} \left[ N_{,x}^u \right] \{U\} + \bar{e}_{31} \left[ N_{,z}^\phi \right] \{\Phi\} \right) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial z} \sigma_{xz} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial z} (\bar{C}_{55} 2S_{xz} - \bar{e}_{15} E_x) \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial z} \left( \bar{C}_{55} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \bar{e}_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left( \left[ N_{,z}^u \right]^T (\bar{C}_{55} [N_{,z}^u] \{U\} + \bar{C}_{55} [N_{,x}^w] \{W\} \right. \\
&\quad \left. + \bar{e}_{15} [N_{,x}^{\phi}] \{\Phi\}) \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \sigma_{xz} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} (\bar{C}_{55} 2S_{xz} - \bar{e}_{15} E_x) \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \left( \bar{C}_{55} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \bar{e}_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left( \left[ N_{,x}^w \right]^T (\bar{C}_{55} [N_{,z}^u] \{U\} + \bar{C}_{55} [N_{,x}^w] \{W\} \right. \\
&\quad \left. + \bar{e}_{15} [N_{,x}^{\phi}] \{\Phi\}) \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial z} \sigma_{zz} \right) d\Omega = 0 \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} D_x \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \left( \bar{e}_{15} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \bar{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left( \left[ N_{,x}^{\phi} \right]^T (\bar{e}_{15} ([N_{,z}^u] \{U\} + [N_{,x}^w] \{W\}) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\varepsilon}_{11} [N_{,x}^{\phi}] \{\Phi\}) \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left( \left[ N_{,x}^{\phi} \right]^T (\bar{e}_{15} [N_{,z}^u] \{U\} + \bar{e}_{15} [N_{,x}^w] \{W\} \right. \\
&\quad \left. - \bar{\varepsilon}_{11} [N_{,x}^{\phi}] \{\Phi\}) \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} D_z \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \delta \phi}{\partial z} \left( \bar{e}_{31} \frac{\partial u}{\partial x} - \bar{\varepsilon}_{33} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left( \left[ N_{,z}^{\phi} \right]^T (\bar{e}_{31} [N_{,x}^u] \{U\} - \bar{\varepsilon}_{33} [N_{,z}^{\phi}] \{\Phi\}) \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\oint_{\Gamma} (\delta u t_x) d\Gamma = \oint_{\Gamma} \left( [N^u]^T t_x \right) d\Gamma \tag{3.54}$$

$$\oint_{\Gamma} (\delta w t_z) d\Gamma = \oint_{\Gamma} \left( [N^w]^T t_z \right) d\Gamma \quad (3.55)$$

$$\oint_{\Gamma} (\delta \phi D_n) d\Gamma = \oint_{\Gamma} \left( [N^\phi]^T D_n \right) d\Gamma \quad (3.56)$$

ทำการแทนค่าลงในสมการที่ (2.48) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{u\phi} \\ K_{wu} & K_{ww} & K_{w\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi w} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ W \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^u \\ F^w \\ F^\phi \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

โดยที่

$$K_{uu} = \int_{\Omega} \left( [N_{,x}^u]^T \bar{C}_{11} [N_{,x}^u] + [N_{,z}^u]^T \bar{C}_{55} [N_{,z}^u] \right) d\Omega$$

$$K_{uw} = \int_{\Omega} [N_{,z}^u]^T \bar{C}_{55} [N_{,x}^w] d\Omega$$

$$K_{u\phi} = \int_{\Omega} \left( [N_{,x}^u]^T \bar{e}_{31} [N_{,z}^\phi] + [N_{,z}^u]^T \bar{e}_{15} [N_{,x}^\phi] \right) d\Omega$$

$$K_{wu} = \int_{\Omega} [N_{,x}^w]^T \bar{C}_{55} [N_{,z}^u] d\Omega$$

$$K_{ww} = \int_{\Omega} [N_{,x}^w]^T \bar{C}_{55} [N_{,x}^w] d\Omega$$

$$K_{w\phi} = \int_{\Omega} [N_{,x}^w]^T \bar{e}_{15} [N_{,x}^\phi] d\Omega$$

$$K_{\phi u} = \int_{\Omega} \left( [N_{,x}^\phi]^T \bar{e}_{15} [N_{,z}^u] + [N_{,z}^\phi]^T \bar{e}_{31} [N_{,x}^u] \right) d\Omega$$

$$K_{\phi w} = \int_{\Omega} [N_{,x}^\phi]^T \bar{e}_{15} [N_{,x}^w] d\Omega$$

$$K_{\phi\phi} = - \int_{\Omega} \left( [N_{,x}^\phi]^T \bar{\varepsilon}_{11} [N_{,x}^\phi] + [N_{,z}^\phi]^T \bar{\varepsilon}_{33} [N_{,z}^\phi] \right) d\Omega$$

$$F^u = \oint_{\Gamma} \left( [N^u]^T t_x \right) d\Gamma$$

$$F^w = \oint_{\Gamma} \left( [N^w]^T t_z \right) d\Gamma$$

$$F^\phi = \oint_{\Gamma} \left( [N^\phi]^T D_n \right) d\Gamma$$

จากสมการที่ (3.57) ซึ่งอยู่ในรูปเมตริกสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ โดยการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของตัวไม่ทราบค่า  $\{U\}$ ,  $\{W\}$  และ  $\{\Phi\}$  จะอาศัยการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการแก้ปัญหา

ดังกล่าว ทั้งนี้ฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้จะต้องเลือกให้เหมาะสมกับเงื่อนไขขอบเขตของแต่ละปัญหา เพื่อวิเคราะห์หา ศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดที่เกิดขึ้น ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

### 3.6 โครงสร้างตัวอย่างและฟังก์ชันรูปร่าง

โครงสร้างตัวอย่างคานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่สนใจในการศึกษานี้ ได้แก่ คานยื่นและ คานจุดรองรับธรรมดา ฟังก์ชันรูปร่างที่ใช้จะต้องเลือกให้เหมาะสมกับสภาพขอบเขตของโครงสร้างแต่ละแบบ สำหรับหัวข้อนี้จะแสดงฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ในทิศทางตามความยาวคาน (แกน  $x$ ) ซึ่งในที่นี้ได้เลือกใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์ซีรีส์ ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  สำหรับคานยื่นและคานจุดรองรับธรรมดาจะเลือกใช้ฟังก์ชันรูปร่างที่แตกต่างกันซึ่งจะได้แสดงต่อไปในแต่ละกรณี ในขณะที่ฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ในที่นี้จะเลือกใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเดียวกันทั้งสองกรณี ซึ่งจะกล่าวตามลำดับดังนี้

#### 3.6.1 คานยื่น

โครงสร้างตัวอย่างของคานยื่นที่ใช้ในงานวิจัยนี้มีลักษณะ คือ มีจุดยึดแน่น (fixed) อยู่ที่ปลายด้านซ้ายมือของคาน และปล่อยอิสระ (free) ที่ปลายด้านขวามือของคาน แสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ลักษณะคานยื่นที่ใช้ในงานวิจัยนี้

ในที่นี้จะกำหนดให้ฟังก์ชันการกระจัด  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $z$  ส่วนฟังก์ชันการกระจัด  $w$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  อย่างเดียวเนื่องจากมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากตามทิศทางตามความหนา (Kapuria, 2001) ซึ่งการกำหนดฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  และ  $w$  ของโครงสร้างคานยื่นจะต้องให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต โดยที่เงื่อนไขขอบเขตแบบดีริคเลต (Dirichlet) คือ

$$u(x=0, z) = 0 \quad (3.58)$$

$$w(x=0) = 0 \quad (3.59)$$

ในที่นี้ฟังก์ชันรูปร่างตามความหนาคน (แกน  $z$ ) ของการกระจัด  $u(\psi_j)$  กำหนดให้ใช้ฟังก์ชันประมาณของลากรางจ์เชิงเส้น ดังแสดงในหัวข้อที่ 3.5 ส่วนฟังก์ชันรูปร่างตามความยาวคน (แกน  $x$ ) ของการกระจัด  $u(R_i^u)$  และ  $w(R_i^w)$  จะเลือกใช้ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตข้างบน ซึ่งฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ได้แก่ ฟังก์ชันไซน์ (sine) และฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ได้แก่ ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) ดังนี้

$$R_i^u = \sin\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) \quad (3.60)$$

$$R_i^w = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) - 1 \quad (3.61)$$

ลักษณะรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  ตามความยาวคนยื่นแสดงไว้ในภาคผนวก ข

ดังนั้นคำตอบโดยประมาณของการกระจัด  $u$  และ  $w$  คือ

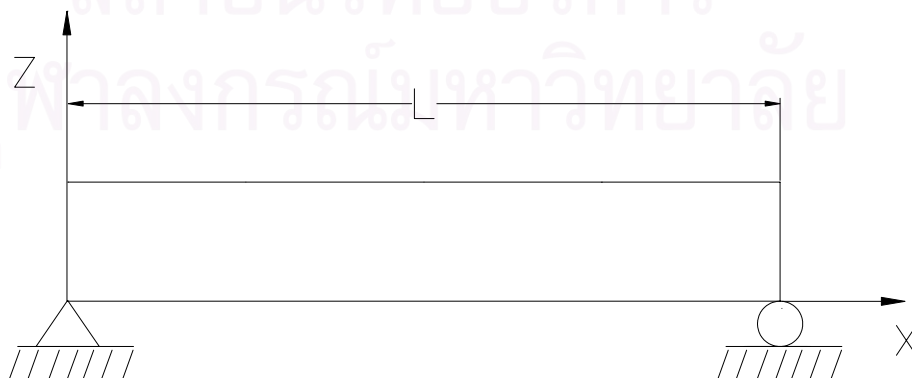
$$u(x, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_i^u(x) \psi_j(z) U_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sin\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) \psi_j(z) U_{ij} \quad (3.62)$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^m R_i^w(x) W_i = \sum_{i=1}^m \left(\cos\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) - 1\right) W_i \quad (3.63)$$

สำหรับเงื่อนไขแบบนอยมันน์ (Neumann) จะกล่าวถึงในแต่ละปัญหาในบทที่ 4

### 3.6.2 คานจุดรองรับธรรมดา

โครงสร้างตัวอย่างของคานจุดรองรับธรรมดาที่ใช้ในงานวิจัยนี้มีลักษณะ คือ มีจุดรองรับแบบยึดหมุน (hinge) อยู่ปลายด้านซ้ายมือของคาน และจุดรองรับแบบล้อเลื่อน (roller) อยู่ปลายด้านขวามือของคาน แสดงดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ลักษณะคานจุดรองรับธรรมดาที่ใช้ในงานวิจัยนี้

ในที่นี้จะกำหนดให้ฟังก์ชันการกระจัด  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $z$  ส่วนฟังก์ชันการกระจัด  $w$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  อย่างเดียวเนื่องจากมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากตามทิศทางตามความหนา (Kapuria, 2001) ซึ่งการกำหนดฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  และ  $w$  ของโครงสร้างคานจูดรองรับธรรมชาติจะต้องให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต โดยที่เงื่อนไขขอบเขตแบบดีลิคเลต (Dirichlet) คือ

$$u(x=0, z=0) = 0 \quad (3.64)$$

$$w(x=0) = 0 \quad (3.65)$$

$$w(x=L) = 0 \quad (3.66)$$

ในที่นี้ฟังก์ชันรูปร่างตามความหนาคาน (แกน  $z$ ) ของการกระจัด  $u$  ( $\psi_j$ ) กำหนดให้ใช้ฟังก์ชันประมาณของลากรางจ์เชิงเส้นดังแสดงในหัวข้อที่ 3.5 ส่วนฟังก์ชันรูปร่างตามความยาวคาน (แกน  $x$ ) ของการกระจัด  $u$  ( $R_i^u$ ) และ  $w$  ( $R_i^w$ ) จะเลือกใช้ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตข้างบนซึ่งฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ได้แก่ ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) และฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ได้แก่ ฟังก์ชันไซน์ (sine) ดังนี้

$$R_i^u = \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (3.67)$$

$$R_i^w = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (3.68)$$

ลักษณะรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  ตามความยาวคานจูดรองรับธรรมชาติแสดงไว้ในภาคผนวก ข

ดังนั้นคำตอบโดยประมาณของการกระจัด  $u$  และ  $w$  คือ

$$u(x, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_i^u(x) \psi_j(z) U_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \psi_j(z) U_{ij} \quad (3.69)$$

$$w(x) = \sum_{i=1}^m R_i^w(x) W_i = \sum_{i=1}^m \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) W_i \quad (3.70)$$

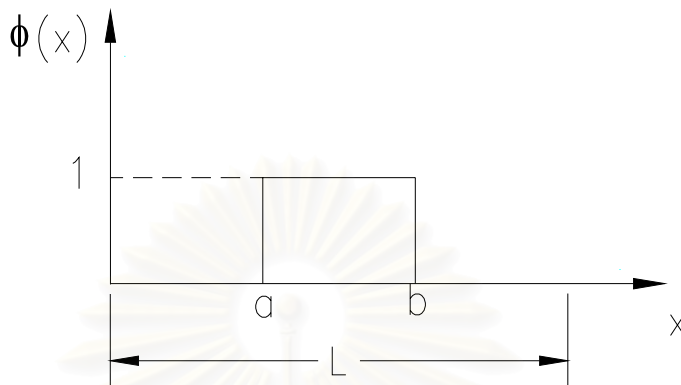
สำหรับเงื่อนไขแบบนอยมันน์ (Neumann) จะกล่าวถึงในแต่ละปัญหาในบทที่ 4

### 3.6.3 ฟังก์ชันรูปร่างของค้ำยกไฟฟ้า

โครงสร้างคานทุกตัวอย่างในงานวิจัยนี้จะมีเงื่อนไขแบบดีลิคเลต (Dirichlet) คือ ค่าค้ำยกไฟฟ้า  $\phi$  จะกำหนดที่เฉพาะผิวบนและผิวล่างของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ส่วนขอบเขตที่เหลือทั้งหมดจะมีเงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์ (Neumann) คือ  $D_n = 0$  ฟังก์ชันรูปร่างของค้ำยกไฟฟ้าในงานวิจัยได้เลือกให้ฟังก์ชันรูปร่างเดียวกันทั้งกรณีคานยื่นและคานจูดรองรับธรรมชาติ ซึ่งในที่นี้ได้เลือกใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์แทนฟังก์ชันรูปร่าง

ของศักย์ไฟฟ้าตามความยาวคาน (แกน  $x$ ) และใช้ฟังก์ชันการประมาณของลากรางจ์เชิงเส้นแทนฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้าตามความหนาคาน (แกน  $z$ ) ดังแสดงในหัวข้อที่ 3.5

เมื่อพิจารณาศักย์ไฟฟ้าในแนวแกน  $x$  ที่มีค่า 1 หน่วยคงที่ในช่วง  $a$  ถึง  $b$  พิจารณาได้ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ศักย์ไฟฟ้าที่มีค่าคงที่ 1 หน่วยในช่วง  $a$  ถึง  $b$

หรือสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ 1, & a < x < b \\ 0, & b < x < L \end{cases} \quad (3.71)$$

ศักย์ไฟฟ้าตามแกน  $x$  ตามรูปที่ 3.4 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟูเรียร์ซีรีส์ ได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^m R_i^\phi \phi_{ij} = a_0 + \sum_{i=1}^m \left( a_n \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \right) \quad (3.72)$$

งานวิจัยนี้ใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ (Fourier sine series) นั่นคือ  $a_0 = a_n = 0$  และ

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \phi(x) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left[ \int_0^a (0) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx + \int_a^b (1) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx + \int_b^L (0) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{2}{L} \int_a^b \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{L} \left( \frac{L}{i\pi} \right) \left[ -\cos \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \right]_a^b \\
&= \frac{2}{i\pi} \left[ \cos \left( \frac{i\pi a}{L} \right) - \cos \left( \frac{i\pi b}{L} \right) \right]
\end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบโดยประมาณของศักย์ไฟฟ้าของทั้งคานยี่น และคานจุดรองรับธรรมดาในระนาบ  $x-z$  จะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}
\phi(x, z) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_i^\phi(x) \psi_j(z) \Phi_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sin \left( \frac{i\pi x}{L} \right) \psi_j(z) \left( \frac{2}{i\pi} \left[ \cos \left( \frac{i\pi a}{L} \right) - \cos \left( \frac{i\pi b}{L} \right) \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

จากฟังก์ชันรูปร่างต่างๆที่กำหนดขึ้นนี้สามารถนำไปหาคำตอบโดยประมาณของแต่ละปัญหาได้โดยนำฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละแบบจำลองไปแทนในสมการที่ (3.57) เพื่อหาการโก่งตัวของคาน จากนั้นก็สามารถนำวิธีการที่ได้จากงานวิจัยนี้ไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานได้

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 4

### กรณีศึกษาเปรียบเทียบ

หลังจากการพัฒนาแบบจำลองสำหรับวิเคราะห์โครงสร้างคานประกอบหลายชั้น โดยอาศัยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ (layerwise theory) ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 แล้วนั้น เพื่อตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองที่ได้พัฒนาขึ้นนี้ จะต้องมีกรณีวิเคราะห์โครงสร้างตัวอย่างและเปรียบเทียบผลการวิจัยในอดีต ซึ่งในการศึกษานี้จะทำการวิเคราะห์และเปรียบเทียบโครงสร้างคานตัวอย่าง 2 ลักษณะ คือ คานยื่น (cantilevered beam) และคานจุดรองรับธรรมดา (simply supported beam) ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาจำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้าซึ่งในที่นี้เลือกใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์ไซน์ จากนั้นจะวิเคราะห์และเปรียบเทียบผลที่ได้จากงานวิจัยนี้กับผลการศึกษาในอดีตทั้งคานยื่นและคานจุดรองรับธรรมดา ตามลำดับ

#### 4.1 การประมาณค่าศักย์ไฟฟ้า

งานวิจัยนี้เลือกใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ (Fourier sine series) เป็นฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เกิดขึ้นตามความยาวคาน (แกน  $x$ ) ดังแสดงในสมการที่ (3.73) จำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้านั้นจะพิจารณาจากแนวโน้มของค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นระหว่างค่าศักย์ไฟฟ้าที่ต้องการกับค่าศักย์ไฟฟ้าที่ประมาณโดยใช้ฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ การหาค่าคลาดเคลื่อนจะใช้วิธีการดังแสดงในสมการที่ 4.1 โดยทำการอินทิเกรตผลต่างยกกำลังสองของค่าศักย์ไฟฟ้าที่ต้องการกับค่าศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากการประมาณโดยใช้ฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ตลอดความยาวคาน ซึ่งถ้าค่าศักย์ไฟฟ้าทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันค่าคลาดเคลื่อนก็จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

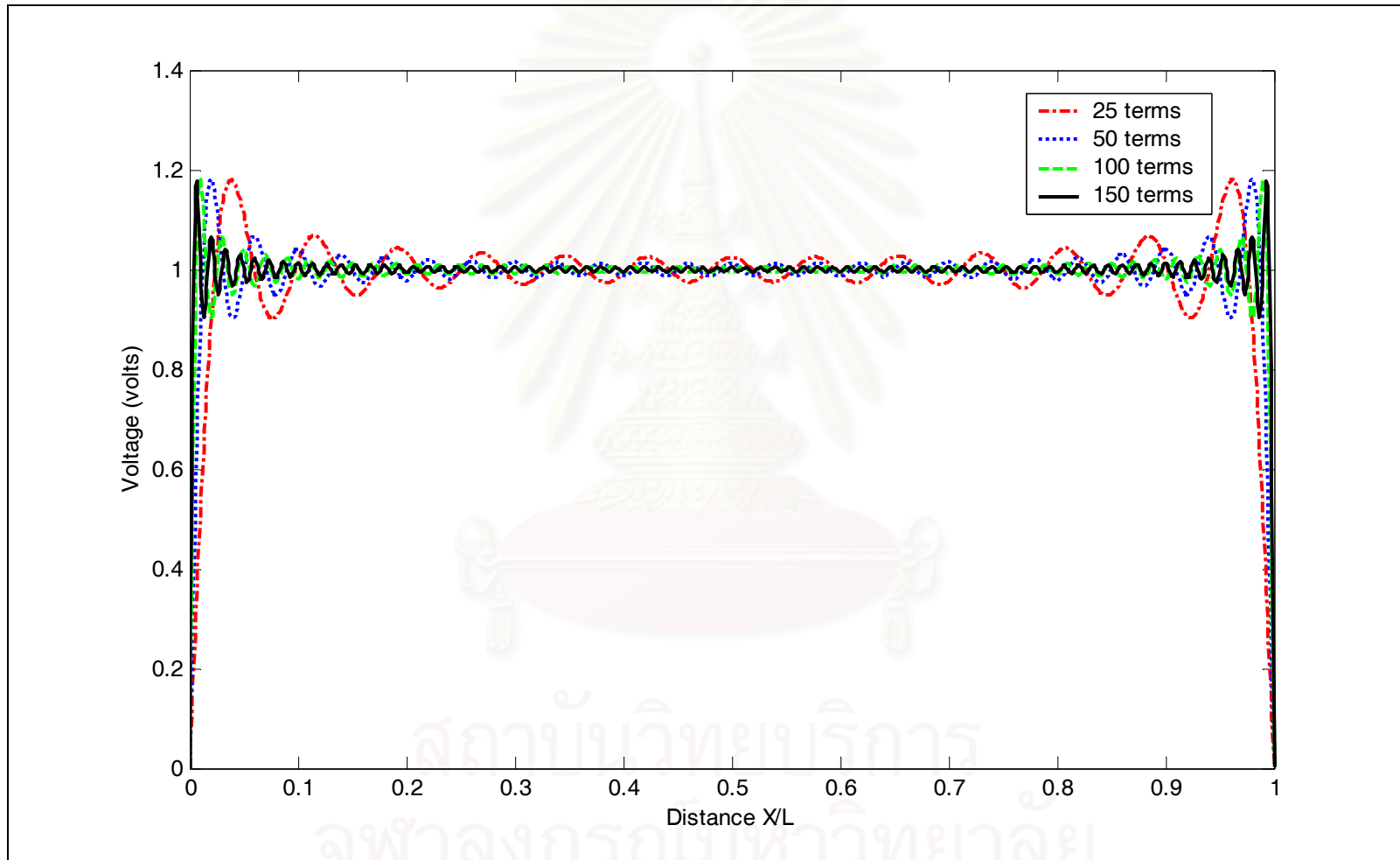
$$Error = \int_L (V - \phi(x))^2 dx \quad (4.1)$$

โดยที่

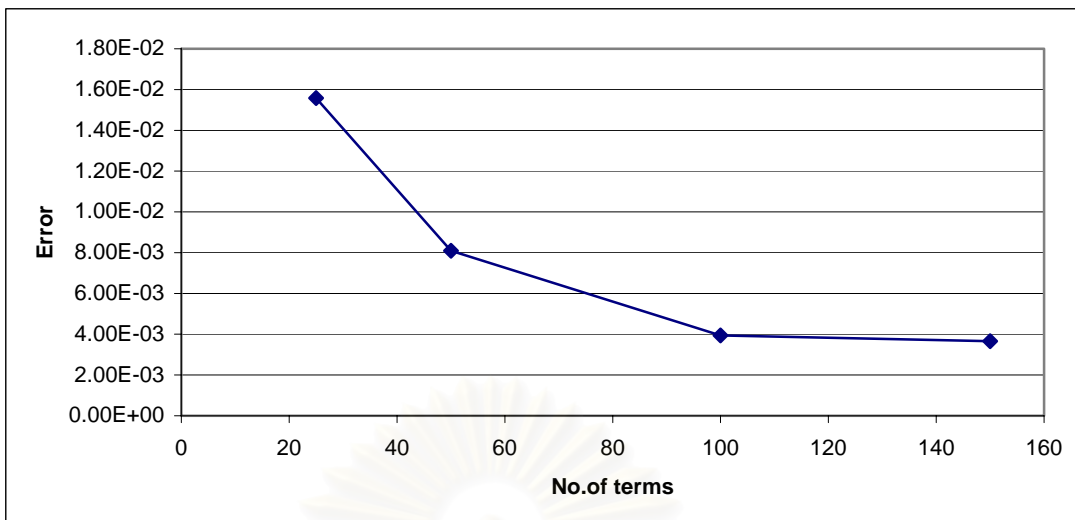
$V$  คือ ค่าศักย์ไฟฟ้าที่ต้องการ

$\phi(x)$  คือ ค่าศักย์ไฟฟ้าที่ประมาณโดยใช้ฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ตามความยาวคาน

จากการตรวจสอบจำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  โดยการกำหนดให้ศักย์ไฟฟ้าที่ต้องการมีค่าคงที่ 1 โวลต์ตลอดความยาวคาน จากนั้นพิจารณาเปรียบเทียบกับทั้งลักษณะรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า 1 โวลต์ตลอดความยาวคานและค่าคลาดเคลื่อนที่ประมาณโดยใช้ฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ที่มีจำนวนเทอมต่างๆกัน ดังแสดงในรูปที่ (4.1) และ (4.2) พบว่าเมื่อเพิ่มจำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้ามากขึ้น ค่าคลาดเคลื่อนก็จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์เรื่อยๆ และเมื่อใช้จำนวนเทอมประมาณ 150 เทอม ค่าคลาดเคลื่อนจะมีการลู่ออกที่ช้า ดังนั้นในการศึกษาจึงเลือกใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้าเท่ากับ 150 เทอม



รูปที่ 4.1 การประมาณค่าศักย์ไฟฟ้าคงที่ 1 โวลต์ด้วยฟังก์ชันฟูเรียร์ไซน์ซีรีส์ที่มีจำนวนเทอมต่างกัน



รูปที่ 4.2 ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณศักย์ไฟฟ้าโดยใช้ฟูเรียร์ซีรีส์ที่มีจำนวนเทอมต่างๆกัน

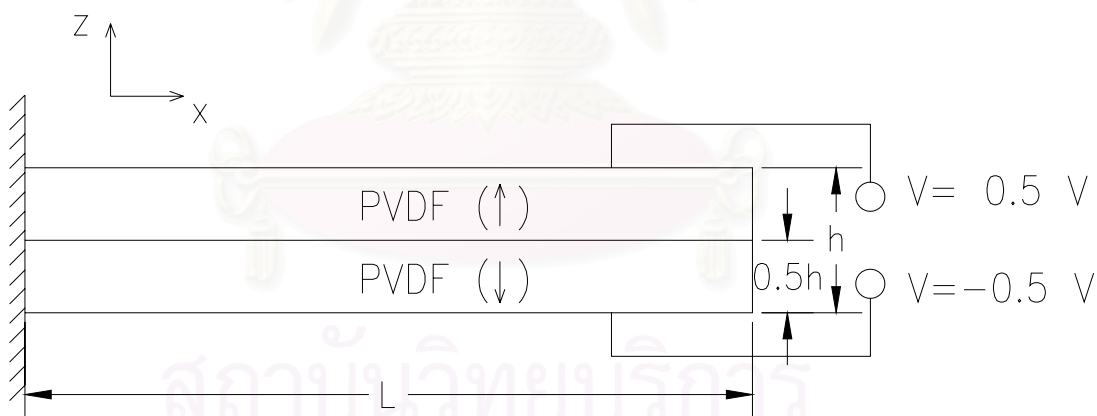
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## 4.2 คานยื่น

ตัวอย่างโครงสร้างคานยื่นที่นำมาศึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้มี 2 ลักษณะ คือ คานยื่นที่ประกอบด้วยวัสดุ PVDF (polyvinylidene fluoride) จำนวน 2 ชั้นประกบติดกัน (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ และคานยื่นที่ประกอบด้วยวัสดุ 3 ชั้น คือ ชั้นของวัสดุหลัก ชั้นของวัสดุยึดติด และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้แรงกระทำทั้งจากศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักบรรทุก พฤติกรรมของโครงสร้างคานยื่นนี้จะสมมติเป็นแบบความเค้นระนาบ (plane stress) ตามแบบการศึกษาในอดีต (คานมีความกว้างน้อยกว่าเมื่อเทียบกับความหนา) ซึ่งจะกล่าวตามลำดับดังนี้

### 4.2.1 คานยื่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF)

โครงสร้างตัวอย่างแรกนำมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ผู้ทำการศึกษาค่อนข้างมาก ซึ่งเป็นคานยื่นที่ประกอบด้วยวัสดุ PVDF จำนวน 2 ชั้นประกบติดกัน ขั้วไฟฟ้าของวัสดุ PVDF ชั้นบนมีทิศทาง  $+z$  ส่วนขั้วไฟฟ้าของวัสดุ PVDF ชั้นล่างมีทิศทาง  $-z$  โดยมีศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PVDF ชั้นบนเท่ากับ 0.5 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PVDF ชั้นล่างเท่ากับ -0.5 โวลต์ ดังแสดงในรูปที่ 4.3 คุณสมบัติของวัสดุ PVDF แสดงดังตารางที่ 4.1



รูปที่ 4.3 คานยื่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

หมายเหตุ: ลูกศรในวงเล็บ (↑) แสดงทิศทางของขั้วไฟฟ้าของวัสดุ PVDF

ตารางที่ 4.1 คุณสมบัติของวัสดุ PVDF (Fukunaga, Hu and Ren; 2001)

PVDF	
$E_1=E_2=E_3$ (Pa)	$2.00 \times 10^9$
$G_{12}=G_{13}=G_{23}$ (Pa)	$1.00 \times 10^9$
$\nu_{12}=\nu_{23}=\nu_{13}$	0.0
$e_{31}=e_{32}$ (C.m <sup>-2</sup> )	0.046
$e_{33}$ (C.m <sup>-2</sup> )	0.0
$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=\epsilon_{33}$ (F.m <sup>-1</sup> )	$1.062 \times 10^{-10}$
L (m.)	0.1
h (m.)	0.001
b (m.)	0.005

การเปรียบเทียบผลการศึกษาในงานวิจัยนี้จะต้องทำการหาจำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และจำนวนการแบ่งชั้นของวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่า โดยที่ใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม ดังกล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 4.1 ซึ่งค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PVDF ชั้นบนเท่ากับ 0.5 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PVDF ชั้นล่างเท่ากับ -0.5 โวลต์ เมื่อเพิ่มจำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และจำนวนการแบ่งชั้นของวัสดุ (PVDF/PVDF) แสดงดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 ค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

การแบ่งจำนวนชั้น (PVDF/PVDF)	จำนวนเทอมของการกระจัด $u, w$			
	5	10	20	30
1/1	$3.4436 \times 10^{-7}$	$3.4415 \times 10^{-7}$	$3.4416 \times 10^{-7}$	$3.4416 \times 10^{-7}$
2/2	$3.4392 \times 10^{-7}$	$3.4372 \times 10^{-7}$	$3.4373 \times 10^{-7}$	$3.4373 \times 10^{-7}$
4/4	$3.4381 \times 10^{-7}$	$3.4361 \times 10^{-7}$	$3.4362 \times 10^{-7}$	$3.4362 \times 10^{-7}$
6/6	$3.4379 \times 10^{-7}$	$3.4358 \times 10^{-7}$	$3.4360 \times 10^{-7}$	$3.4360 \times 10^{-7}$
8/8	$3.4378 \times 10^{-7}$	$3.4358 \times 10^{-7}$	$3.4360 \times 10^{-7}$	$3.4360 \times 10^{-7}$

จากตารางที่ 4.2 จะเห็นว่าค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานยื่นจะมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากเมื่อใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 20 เทอมและแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ 6/6 (PVDF/PVDF) ดังนั้นการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของคานยื่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PVDF ชั้นบนเท่ากับ 0.5 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PVDF ชั้นล่างเท่ากับ -0.5 โวลต์ ของงานวิจัยนี้จะใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 20 เทอม จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม และแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ 6/6 (PVDF/PVDF) ซึ่งผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 2 ชั้น (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้างกล่าวแสดงดังตารางที่ 4.3

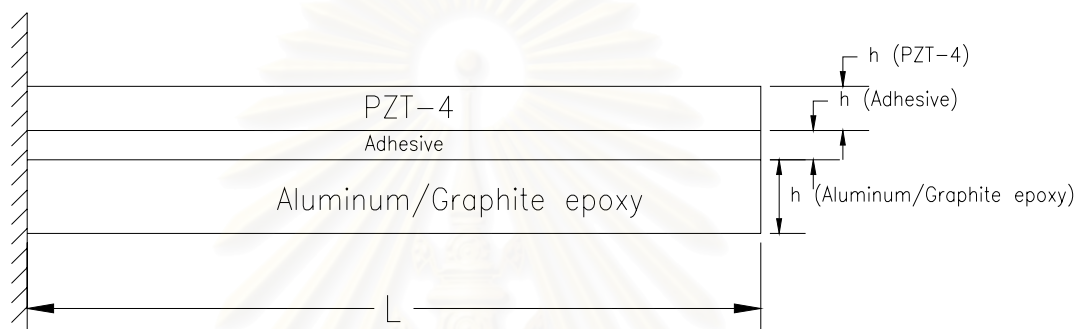
ตารางที่ 4.3 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ของคานยื่น (PVDF/PVDF) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

ผลการศึกษาโดย	ระยะตามความยาวคาน (ม.)				
	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
Fukunaka et al. (Plate FE)	$0.139 \times 10^{-7}$	$0.553 \times 10^{-7}$	$1.24 \times 10^{-7}$	$2.21 \times 10^{-7}$	$3.45 \times 10^{-7}$
Correia (2000) (Plate FE)	$0.138 \times 10^{-7}$	$0.552 \times 10^{-7}$	$1.24 \times 10^{-7}$	$2.21 \times 10^{-7}$	$3.45 \times 10^{-7}$
Tzou และ Ye (1996) (Shell FE)	$0.132 \times 10^{-7}$	$0.528 \times 10^{-7}$	$1.19 \times 10^{-7}$	$2.11 \times 10^{-7}$	$3.3 \times 10^{-7}$
Suleman (1995) (FSDT)	$0.14 \times 10^{-7}$	$0.55 \times 10^{-7}$	$1.24 \times 10^{-7}$	$2.21 \times 10^{-7}$	$3.45 \times 10^{-7}$
Suleman (1995) (Experiment)	-	-	-	-	$3.15 \times 10^{-7}$

จากตารางที่ 4.3 จะเห็นว่าเมื่อทำการเปรียบเทียบกับการวิเคราะห์หาคำตอบโดยวิธีประมาณอื่นๆ ดังแสดงในตารางดังกล่าวพบว่ามีค่าใกล้เคียงกันโดยที่ปลายด้านอิสระของคานยื่นจะมีค่าแตกต่างกันประมาณ 0.4 % และเมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Suleman (1995) พบว่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานยื่นมีค่าแตกต่างกันประมาณ 9.08 %

#### 4.2.2 คานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4)

ตัวอย่างที่สองที่นำมาเปรียบเทียบเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็น คานยื่นที่ศึกษาโดย Saravanos และ Heyliger (1995) และ Chee, Tong และ Steven (1999) ซึ่งประกอบด้วย วัสดุ 3 ชั้น คือ ชั้นของวัสดุหลัก (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี) ชั้นของวัสดุยึดติด และชั้นของวัสดุ Piezoelectric PZT-4 ดังแสดงในรูปที่ 4.4 โครงสร้างคานตัวอย่างนี้จะเปรียบเทียบทั้งแบบภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและ น้ำหนักบรรทุกกระทำ คุณสมบัติของอลูมิเนียม แกรไฟต์-อีพอกซี วัสดุยึดติด และวัสดุ Piezoelectric PZT-4 แสดงได้ดังตารางที่ 4.4



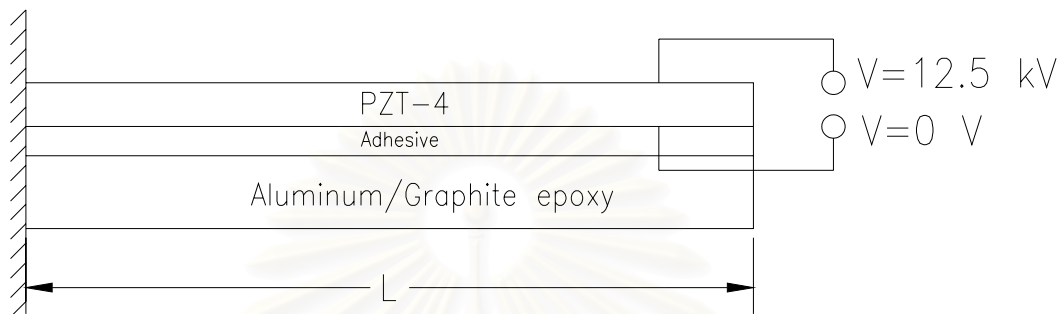
รูปที่ 4.4 คานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4)

ตารางที่ 4.4 คุณสมบัติของอลูมิเนียม แกรไฟต์-อีพอกซี วัสดุยึดติด และวัสดุ Piezoelectric PZT-4 (Chee และคณะ; 1999)

	Aluminum	T300/934	Adhesive	PZT-4
$E_{11}$ (Pa)	$6.8900 \times 10^{10}$	$1.3238 \times 10^{11}$	$6.9000 \times 10^9$	$8.1300 \times 10^{10}$
$E_{33}$ (Pa)	$6.8900 \times 10^{10}$	$1.0760 \times 10^{10}$	$6.9000 \times 10^9$	$6.4500 \times 10^{10}$
$G_{13}$ (Pa)	$2.7600 \times 10^{10}$	$5.6500 \times 10^9$	$2.4600 \times 10^9$	$2.5600 \times 10^{10}$
$\nu_{13}$	0.25	0.24	0.4	0.43
$d_{31}$ ( $\text{m.V}^{-1}$ )	-	-	-	$-1.22 \times 10^{-10}$
$\epsilon_{11}$ ( $\text{F.m}^{-1}$ )	-	$3.0989 \times 10^{-11}$	-	$1.305965 \times 10^{-8}$
$\epsilon_{33}$ ( $\text{F.m}^{-1}$ )	-	$2.6562 \times 10^{-11}$	-	$1.15102 \times 10^{-8}$
L (m.)	0.1524	0.1524	0.1524	0.1524
h (m.)	0.01524	0.01524	0.000254	0.001524
b (m.)	0.0254	0.0254	0.0254	0.0254

4.2.2.1 คานยื่น 3 ชั้น ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

คานยื่นในตัวอย่างนี้มีลักษณะและคุณสมบัติดังรูปที่ 4.4 ของหัวข้อที่ 4.2.2 ซึ่งเป็นคานยื่น 3 ชั้นที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุหลัก (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี) ชั้นของวัสดุยึดติด และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 โดยมีศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ 12.5 กิโลโวลต์ และที่ผิวล่างของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ 0 โวลต์ ดังแสดงในรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 คานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

การเปรียบเทียบผลการศึกษาในงานวิจัยนี้จะต้องทำการหาจำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และจำนวนการแบ่งชั้นของวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์ก่อน โดยที่ใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม ดังกล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 4.1 ซึ่งค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 3 ชั้น โดยที่ชั้นของวัสดุหลักจะทดสอบด้วยอลูมิเนียม (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PZT-4 เท่ากับ 12.5 กิโลโวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PZT-4 เท่ากับ 0 โวลต์ เมื่อเพิ่มจำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และจำนวนการแบ่งชั้นของวัสดุ (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) แสดงดังตารางที่ 4.5

ตารางที่ 4.5 ค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

การแบ่งจำนวนชั้น (Al/Adhesive/PZT-4)	จำนวนเทอมของการกระจัด $u, w$			
	5	10	20	30
1/1/1	$-3.8623 \times 10^{-4}$	$-3.8601 \times 10^{-4}$	$-3.8602 \times 10^{-4}$	$-3.8602 \times 10^{-4}$
2/1/1	$-3.8613 \times 10^{-4}$	$-3.8592 \times 10^{-4}$	$-3.8593 \times 10^{-4}$	$-3.8593 \times 10^{-4}$
3/1/1	$-3.8623 \times 10^{-4}$	$-3.8601 \times 10^{-4}$	$-3.8602 \times 10^{-4}$	$-3.8602 \times 10^{-4}$
6/1/1	$-3.8631 \times 10^{-4}$	$-3.8608 \times 10^{-4}$	$-3.8610 \times 10^{-4}$	$-3.8609 \times 10^{-4}$
6/1/2	$-3.8637 \times 10^{-4}$	$-3.8614 \times 10^{-4}$	$-3.8616 \times 10^{-4}$	$-3.8616 \times 10^{-4}$
9/1/1	$-3.8633 \times 10^{-4}$	$-3.8610 \times 10^{-4}$	$-3.8611 \times 10^{-4}$	$-3.8611 \times 10^{-4}$
9/1/2	$-3.8638 \times 10^{-4}$	$-3.8616 \times 10^{-4}$	$-3.8617 \times 10^{-4}$	$-3.8618 \times 10^{-4}$



จากตารางที่ 4.5 จะเห็นว่าค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานายื่นจะมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากเมื่อใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัดเท่ากับ 20 เทอมและแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ  $6/1/2$  (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) ดังนั้นการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของคานายื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ 12.5 กิโลโวลต์ และที่ผิวล่างของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ 0 โวลต์ ของงานวิจัยนี้จะใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 20 เทอม จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม และแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ  $6/1/2$  (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ซึ่งผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานายื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้างกล่าว แสดงดังตารางที่ 4.6

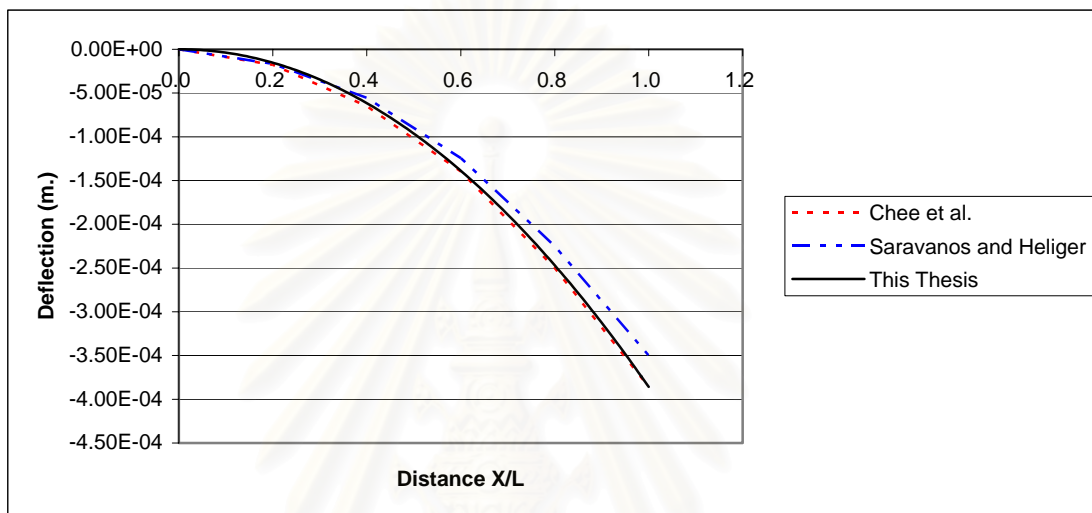
ตารางที่ 4.6 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่ปลายด้านอิสระของคานายื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

ผลการศึกษาโดย	อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4	แกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4
Saravanos และ Heyliger (1995)	$-3.5 \times 10^{-4}$	$-2.25 \times 10^{-4}$
Chee และคณะ (1999)	$-3.86 \times 10^{-4}$	$-2.48 \times 10^{-4}$
งานวิจัยนี้	$-3.8616 \times 10^{-4}$	$-2.4555 \times 10^{-4}$

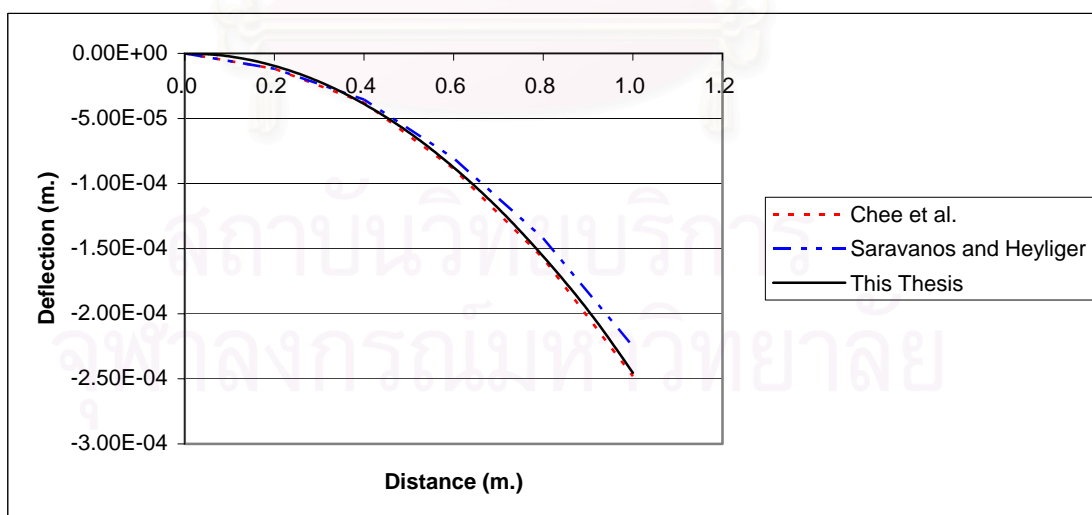
จากตารางที่ 4.6 จะเห็นว่าค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานายื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ 12.5 กิโลโวลต์ และที่ผิวล่างของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ 0 โวลต์ ที่ได้จากงานวิจัยนี้จะมีค่าแตกต่างจากผลการศึกษาของ Chee, Tong และ Steven (1999) เพียงเล็กน้อย คือ ประมาณ -0.04 % สำหรับวัสดุหลักที่เป็นอลูมิเนียม และ 1.01 % สำหรับวัสดุหลักที่เป็นแกรไฟต์-อีพอกซี แต่เมื่อเปรียบเทียบกับผลการศึกษาของ Saravanos และ Heyliger (1995) จะมีค่าแตกต่างกันค่อนข้างมาก คือ ประมาณ -10.33 % สำหรับวัสดุหลักที่เป็นอลูมิเนียม และ -9.13 % สำหรับวัสดุหลักที่เป็นแกรไฟต์-อีพอกซี ทั้งนี้อาจเป็นผลมาจากการใช้ทฤษฎีการวิเคราะห์และฟังก์ชันรูปร่างที่ต่างกัน โดยที่ Chee และคณะ (1999) ใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนระดับชั้นที่สามในการคำนวณหาค่าการกระจัดและใช้ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ในการคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้า ฟังก์ชันรูปร่างตามความยาวคานสำหรับค่าการกระจัดและศักย์ไฟฟ้าใช้เอลิเมนต์แบบเฮอร์มิทเขียนสำหรับคาน 1 มิติ โดยแบ่งเป็น 5 เอลิเมนต์ในทิศทางตามความยาวคานและแบ่งชั้นของวัสดุเป็น  $1/1/2$  ส่วน Saravanos และ Heyliger (1995) ใช้ทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ในการคำนวณหาค่าการกระจัดและสนามไฟฟ้าซึ่งเหมือนกับงานวิจัยนี้ แต่ฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวและความหนาของทั้งการกระจัดและศักย์ไฟฟ้าใช้ฟังก์ชันเส้นตรง โดยแบ่งเป็น 25 เอลิเมนต์ในทิศทางตามความยาวคานและแบ่งชั้นของวัสดุเป็น  $16/5/8$  ซึ่งจะเห็นว่าฟังก์ชัน

เส้นตรงที่ใช้เป็นฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัดอาจมีความละเอียดไม่มากนักเมื่อเทียบกับใช้ฟังก์ชันแบบเฮอริมีทเชียนหรือฟังก์ชันฟูเรียร์ซีรีส์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ จึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าแตกต่างกัน

สำหรับผลของค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุ PZT-4 เท่ากับ 12.5 กิโลโวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PZT-4 เท่ากับ 0 โวลต์ ที่ได้จากงานวิจัยนี้เปรียบเทียบกับการศึกษาในอดีต แสดงดังรูปที่ 4.6 สำหรับวัสดุหลักที่เป็นอลูมิเนียม และรูปที่ 4.7 สำหรับวัสดุหลักที่เป็นแกรไฟต์-อีพอกซี



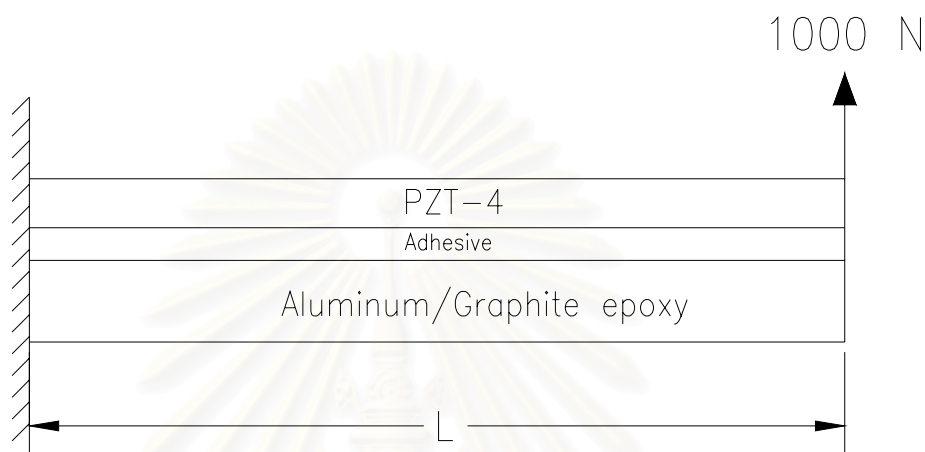
รูปที่ 4.6 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ



รูปที่ 4.7 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

#### 4.2.2.2 คานยื่น 3 ชั้น น้ำหนักบรรทุกกระทำ

คานยื่นในตัวอย่างนี้มีลักษณะและคุณสมบัติดังรูปที่ 4.4 ของหัวข้อที่ 4.2.2 ซึ่งเป็นคานยื่น 3 ชั้นที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุหลัก (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี) ชั้นของวัสดุยึดติด และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 โดยมีน้ำหนักบรรทุกกระทำที่ปลายด้านอิสระของคานยื่นเท่ากับ 1000 นิวตัน ดังแสดงในรูปที่ 4.8 สำหรับศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะปล่อยอิสระ ส่วนที่ผิวล่างจะกำหนดให้เท่ากับ 0 โวลต์



รูปที่ 4.8 คานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ

ในที่นี้จำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และการแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของโครงสร้างตัวอย่างนี้จะใช้เท่ากับเท่ากับโครงสร้างตัวอย่างในหัวข้อที่ 4.2.2.1 เนื่องจากมีลักษณะทางกายภาพเหมือนกัน คือ เป็นคานยื่นซึ่งประกอบด้วยชั้นของวัสดุหลัก (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี) ชั้นของวัสดุยึดติด และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 ดังนั้นการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำที่ปลายด้านอิสระของคานยื่นเท่ากับ 1000 นิวตัน ของงานวิจัยนี้จะใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 20 เทอม จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม และแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ 6/1/2 (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ซึ่งผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำดังกล่าวแสดงดังตารางที่ 4.7

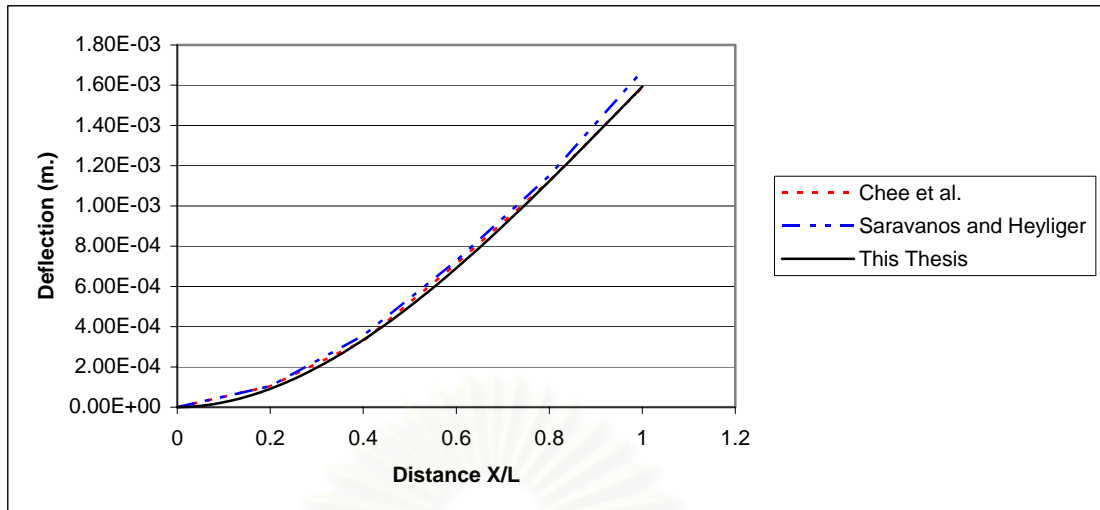
ตารางที่ 4.7 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ

ผลการศึกษาโดย	อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4	แกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4
Saravanos และ Heyliger (1995)	$1.67 \times 10^{-3}$	$1.096 \times 10^{-3}$
Chee และคณะ (1999)	$1.59 \times 10^{-3}$	$1.04 \times 10^{-3}$
งานวิจัยนี้	$1.5928 \times 10^{-3}$	$1.0276 \times 10^{-3}$

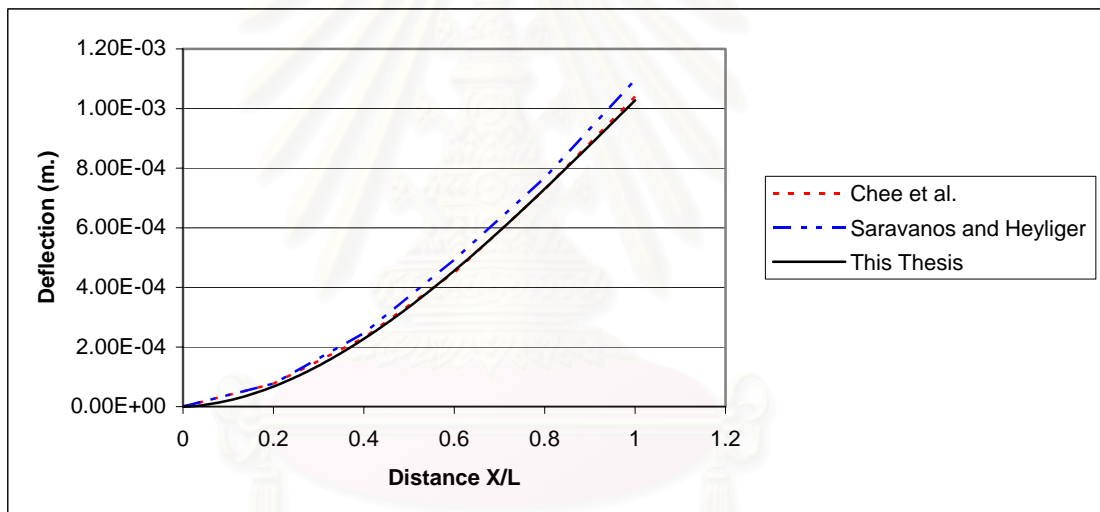
จากตารางที่ 4.7 จะเห็นว่าค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำที่ปลายด้านอิสระของคานยื่นเท่ากับ 1000 นิวตัน จะมีแนวโน้มเดียวกับแบบภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำในตัวอย่างที่แล้ว คือ ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้จะมีค่าใกล้เคียงกับการศึกษาของ Chee, Tong และ Steven (1999) คือ แตกต่างกันประมาณ -0.18 % สำหรับวัสดุหลักที่เป็นอลูมิเนียม และ -1.19 % สำหรับวัสดุหลักที่เป็นแกรไฟต์-อีพอกซี และจะแตกต่างจากผลการศึกษาของ Saravanos และ Heyliger (1995) ค่อนข้างมาก คือ ประมาณ -4.62 % สำหรับวัสดุหลักที่เป็นอลูมิเนียม และ -6.24 % สำหรับวัสดุหลักที่เป็นแกรไฟต์-อีพอกซี ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการใช้ทฤษฎีในการวิเคราะห์และฟังก์ชันรูปร่างที่แตกต่างกันดังที่ได้กล่าวมาแล้วในตัวอย่างที่แล้ว

สำหรับผลการเปรียบเทียบการโก่งตัวตลอดความยาวของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักกระทำที่ปลายด้านอิสระของคานยื่นเท่ากับ 1000 นิวตัน แสดงดังรูปที่ 4.9 สำหรับวัสดุหลักที่เป็นอลูมิเนียม และแสดงดังรูปที่ 4.10 สำหรับวัสดุหลักที่เป็นแกรไฟต์-อีพอกซี และผลการเปรียบเทียบค่าศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นที่ผิวบนตลอดความยาวคานของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ภายใต้น้ำหนักกระทำที่ปลายด้านอิสระของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) เท่ากับ 1000 นิวตัน แสดงดังรูปที่ 4.11 สำหรับวัสดุหลักที่เป็นอลูมิเนียม และแสดงดังรูปที่ 4.12 สำหรับวัสดุหลักที่เป็นแกรไฟต์-อีพอกซี

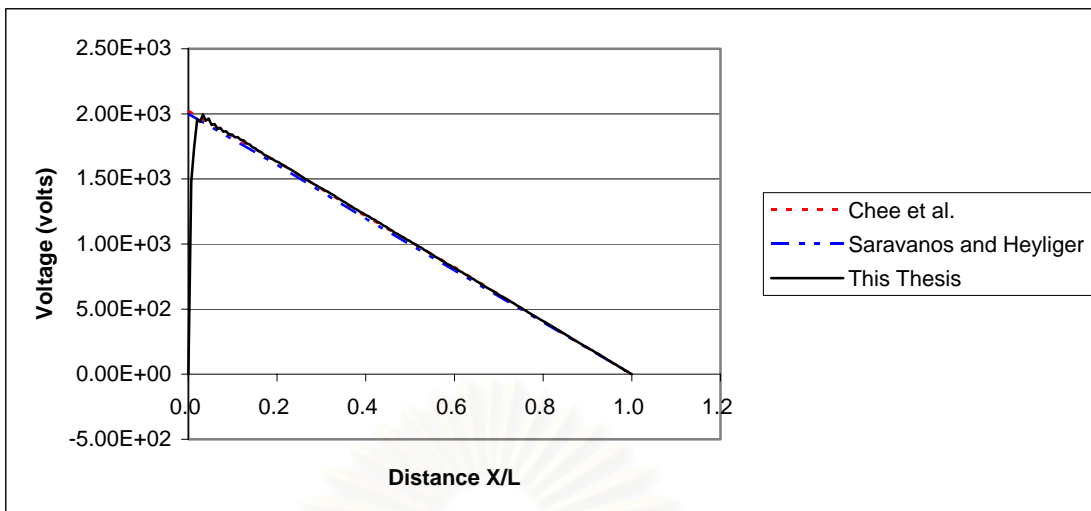
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



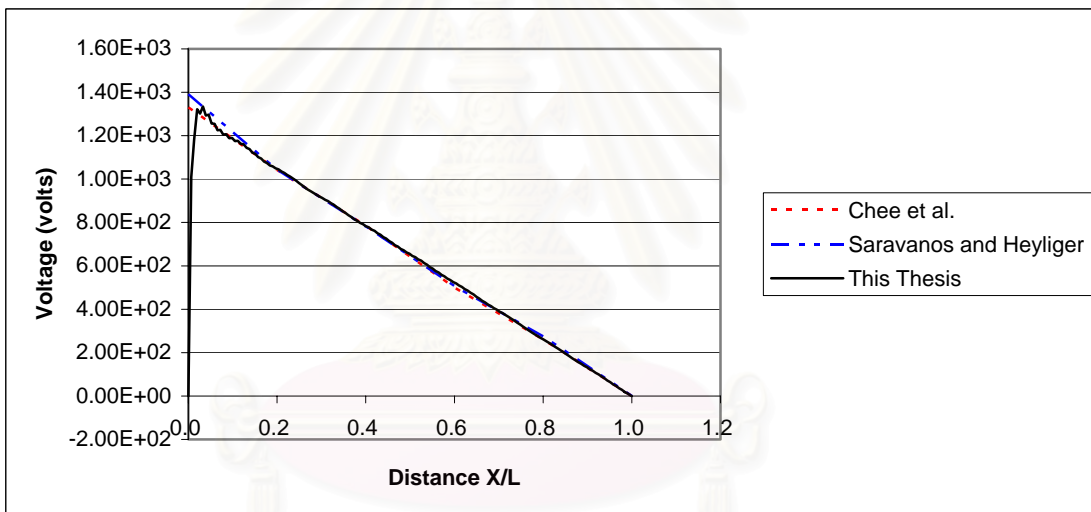
รูปที่ 4.9 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกทุกกระทำ



รูปที่ 4.10 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวของคานยื่น 3 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้ น้ำหนักบรรทุกทุกกระทำ



รูปที่ 4.11 ผลการเปรียบเทียบค่าศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกของคานยื่น 3 ชั้น (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกกระทำ



รูปที่ 4.12 ผลการเปรียบเทียบค่าศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกของคานยื่น 3 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/วัสดุยึดติด/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกทุกกระทำ

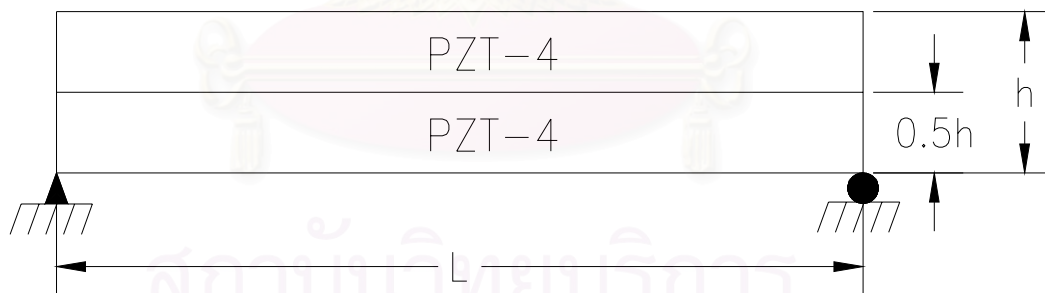
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

#### 4.3 คานจุดรองรับธรรมดา

ตัวอย่างโครงสร้างคานจุดรองรับธรรมดาที่นำมาศึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้มี 2 ลักษณะ คือ คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้นที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 จำนวน 2 ชั้นประกบติดกัน (PZT-4/PZT-4) และคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้นที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุหลัก (แกรไฟต์-อีพอกซี) และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) โดยโครงสร้างคานของทั้งสองลักษณะจะมีทั้งแบบภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักบรรทุกทุกกระทำ สำหรับในกรณีคานจุดรองรับธรรมดานี้ได้ทำการแก้ปัญหาแบบความเครียดระนาบ (ความกว้างมากเมื่อเทียบกับความหนา) เนื่องจากผลการศึกษาที่นำมาเปรียบเทียบเป็นผลที่ได้จากการศึกษาแผ่นเรียบจุดรองรับธรรมดาที่มีการดัดแบบผิวทรงกระบอก (cylindrical bending) โดยที่จุดรองรับทั้งสองข้างยาวตลอดตามความกว้างของแผ่นเรียบ ซึ่งจะกล่าวตามลำดับดังนี้

##### 4.3.1 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4)

ตัวอย่างที่สามที่นำมาเปรียบเทียบเพื่อตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นคานจุดรองรับธรรมดาที่ศึกษาโดย Fernandes และ Pougett (2002) ซึ่งประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 จำนวน 2 ชั้นประกบติดกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.13 โครงสร้างตัวอย่างนี้เปรียบเทียบทั้งแบบภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักบรรทุกทุกกระทำ คุณสมบัติของวัสดุ PZT-4 แสดงดังตารางที่ 4.8



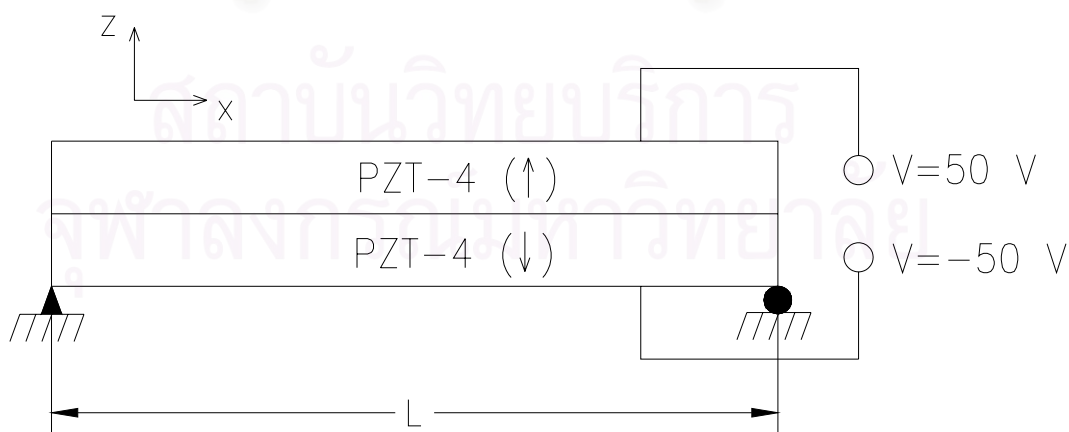
รูปที่ 4.13 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้นประกบติดกัน (PZT-4/PZT-4)

ตารางที่ 4.8 คุณสมบัติของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 (Fernandes และ Pougett; 2002)

PZT-4	
$C_{11}$ (Pa)	$139 \times 10^9$
$C_{12}$ (Pa)	$77.8 \times 10^9$
$C_{33}$ (Pa)	$115 \times 10^9$
$C_{13}$ (Pa)	$74.3 \times 10^9$
$C_{44}$ (Pa)	$25.6 \times 10^9$
$e_{31}$ (C.m <sup>-2</sup> )	-5.2
$e_{33}$ (C.m <sup>-2</sup> )	15.1
$e_{15}$ (C.m <sup>-2</sup> )	12.7
$\epsilon_{11}$ (F.m <sup>-1</sup> )	$13.06 \times 10^{-9}$
$\epsilon_{33}$ (F.m <sup>-1</sup> )	$11.51 \times 10^{-9}$
L (m.)	0.025
h (m.)	0.0025
b (m.)	0.0125

#### 4.3.1.1 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

คานจุดรองรับธรรมดาในตัวอย่างนี้มีลักษณะและคุณสมบัติดังรูปที่ 4.13 ของหัวข้อที่ 4.3.1 ซึ่งประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 จำนวน 2 ชั้นประกบติดกัน ขั้วไฟฟ้าของวัสดุ PZT-4 ชั้นบนมีทิศทาง +z ส่วนขั้วไฟฟ้าของวัสดุ PZT-4 ชั้นล่างมีทิศทาง -z โดยมีศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชั้นบนเท่ากับ 50 โวลต์ และที่ผิวล่างของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชั้นล่างเท่ากับ -50 โวลต์ ดังแสดงในรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

หมายเหตุ: ลูกศรในวงเล็บ (↑) แสดงทิศทางของขั้วไฟฟ้าของวัสดุ PZT-4



การเปรียบเทียบผลการศึกษาในงานวิจัยนี้จะต้องทำการหาจำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และจำนวนการแบ่งชั้นของวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์ก่อน โดยที่ใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม ดังกล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 4.1 ซึ่งค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานาจุดรองรับธรรมดา (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PZT-4 ชั้นบนเท่ากับ 50 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PZT-4 ชั้นล่างเท่ากับ -50 โวลต์ เมื่อเพิ่มจำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และจำนวนการแบ่งชั้นของวัสดุ แสดงดังตารางที่ 4.9

ตารางที่ 4.9 ค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางคานาจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

การแบ่งจำนวนชั้น (PZT-4/PZT-4)	จำนวนเทอมของการกระจัด $u, w$			
	10	20	40	60
1/1	$6.1664 \times 10^{-7}$	$6.163 \times 10^{-7}$	$6.1634 \times 10^{-7}$	$6.1634 \times 10^{-7}$
2/2	$5.9693 \times 10^{-7}$	$5.9656 \times 10^{-7}$	$5.9660 \times 10^{-7}$	$5.9660 \times 10^{-7}$
4/4	$5.9227 \times 10^{-7}$	$5.9188 \times 10^{-7}$	$5.9192 \times 10^{-7}$	$5.9193 \times 10^{-7}$
6/6	$5.9141 \times 10^{-7}$	$5.9102 \times 10^{-7}$	$5.9107 \times 10^{-7}$	$5.9104 \times 10^{-7}$
8/8	$5.9112 \times 10^{-7}$	$5.9072 \times 10^{-7}$	$5.9077 \times 10^{-7}$	$5.9078 \times 10^{-7}$
10/10	$5.9098 \times 10^{-7}$	$5.9058 \times 10^{-7}$	$5.9063 \times 10^{-7}$	$5.9064 \times 10^{-7}$

จากตารางที่ 4.9 จะเห็นว่าค่าการโก่งตัวของคานาจะมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากเมื่อใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 40 เทอมและแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเป็น 10/10 (PZT-4/PZT-4) ดังนั้นการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของคานาจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PZT-4 ชั้นบนเท่ากับ 50 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PZT-4 ชั้นล่างเท่ากับ -50 โวลต์ ของงานวิจัยนี้จะใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 40 เทอม จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม และแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ 10/10 (PZT-4/PZT-4) ซึ่งผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานาจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำดังกล่าวแสดงดังตารางที่ 4.10

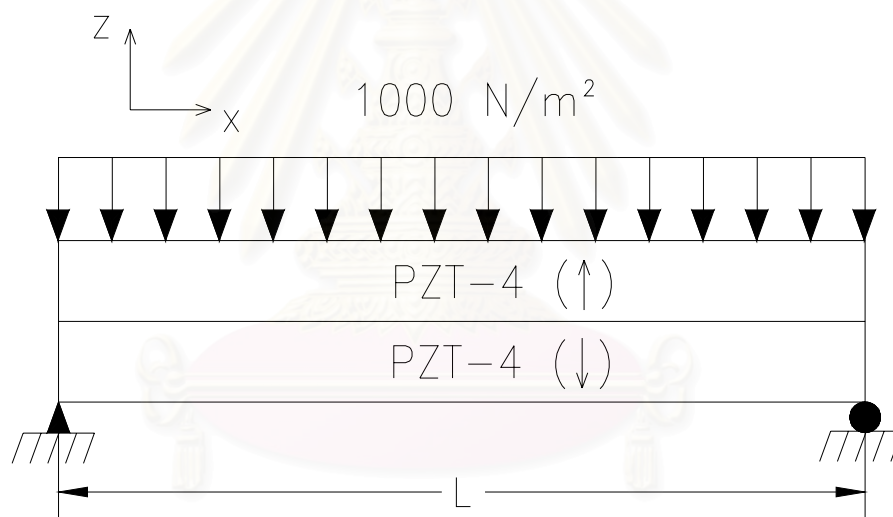
ตารางที่ 4.10 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานาจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

ผลการศึกษาโดย	PZT-4/PZT-4
Fernandes และ Pouget (2002)	$5.80 \times 10^{-7}$
งานวิจัยนี้	$5.9063 \times 10^{-7}$

จากตารางที่ 4.10 ซึ่งแสดงผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PZT-4 ชั้นบนเท่ากับ 50 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PZT-4 ชั้นล่างเท่ากับ -50 โวลต์ ที่ได้จากงานวิจัยนี้กับผลการศึกษาของ Fernandes และ Pouget (2002) ซึ่งทำการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองผสมระหว่างการใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนในการคำนวณหา ค่าการกระจัด และทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ในการคำนวณหาศักย์ไฟฟ้า พบว่ามีค่าการโก่งตัวใกล้เคียงกันโดยมีค่าแตกต่างกันประมาณ -1.83 %

#### 4.3.1.2 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ

คานจุดรองรับธรรมดาในตัวอย่างนี้มีลักษณะและคุณสมบัติดังรูปที่ 4.13 ของหัวข้อที่ 4.3.1 ซึ่งประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 จำนวน 2 ชั้นประกบติดกัน ขั้วไฟฟ้าของวัสดุ PZT-4 ชั้นบนมีทิศทาง +z ส่วนขั้วไฟฟ้าของวัสดุ PZT-4 ชั้นล่างมีทิศทาง -z โดยมีน้ำหนักแผ่นกระทำเท่ากับ 1000 นิวตัน/เมตร<sup>2</sup> ที่ผิวบนสุด ดังแสดงในรูปที่ 4.15 สำหรับศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนและผิวล่างของวัสดุ PZT-4 ในแต่ละชั้นจะกำหนดให้เท่ากับ 0 โวลต์



รูปที่ 4.15 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ  
หมายเหตุ: ลูกศรในวงเล็บ (↑) แสดงทิศทางของขั้วไฟฟ้า

ในที่นี้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และการแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุในโครงสร้างตัวอย่างนี้จะใช้เท่ากับโครงสร้างตัวอย่างในหัวข้อที่ 3.3.1.1 เนื่องจากมีลักษณะทางกายภาพเหมือนกัน คือ เป็นคานจุดรองรับธรรมดาที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 จำนวน 2 ชั้นประกบติดกัน ดังนั้นการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกแผ่นกระทำที่ผิวบนสุดเท่ากับ 1000 นิวตัน/เมตร<sup>2</sup> ของงานวิจัยนี้จะใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 40 เทอม จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม และแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ 10/10 (PZT-4/PZT-4) ซึ่งผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักกระทำดังกล่าวแสดงดังตารางที่ 4.11

ตารางที่ 4.11 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจตุรกรงรับธรรมชาติ 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ

ผลการศึกษาโดย	PZT-4/PZT-4
Fernandes และ Pouget (2002)	$-4.24 \times 10^{-8}$
งานวิจัยนี้	$-4.1605 \times 10^{-8}$

จากตารางที่ 4.11 ซึ่งแสดงผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานจตุรกรงรับธรรมชาติ 2 ชั้น (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักกระทำที่ผิวบนสุดของคานเท่ากับ 1000 นิวตัน/เมตร<sup>2</sup> ที่ได้จากงานวิจัยนี้กับผลการศึกษาของ Fernandes และ Pouget (2002) ซึ่งทำการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองผสมระหว่างการใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนในการคำนวณหาค่าการกระจัด และทฤษฎีโมเมนต์ไวน์ในการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้า พบว่ามีค่าการโก่งตัวใกล้เคียงกันโดยมีค่าแตกต่างกันประมาณ 1.87 %

#### 4.3.2 คานจตุรกรงรับธรรมชาติ 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4)

ตัวอย่างที่นำมาเปรียบเทียบเพื่อตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นคานจตุรกรงรับธรรมชาติ 2 ชั้นที่ศึกษาโดย Fernandes และ Pouget (2002) ซึ่งประกอบด้วยชั้นของแกรไฟต์-อีพอกซีและชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 ดังแสดงในรูปที่ 4.16 โครงสร้างตัวอย่างนี้จะเปรียบเทียบทั้งแบบภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักบรรทุกกระทำ โดยที่โครงสร้างประกอบทั้งหมดยาว (L) เท่ากับ 0.025 เมตร หนา (h) เท่ากับ 0.0025 เมตร กว้าง (b) เท่ากับ 0.0125 เมตร และคุณสมบัติของวัสดุ PZT-4 และแกรไฟต์-อีพอกซี แสดงดังตารางที่ 4.10



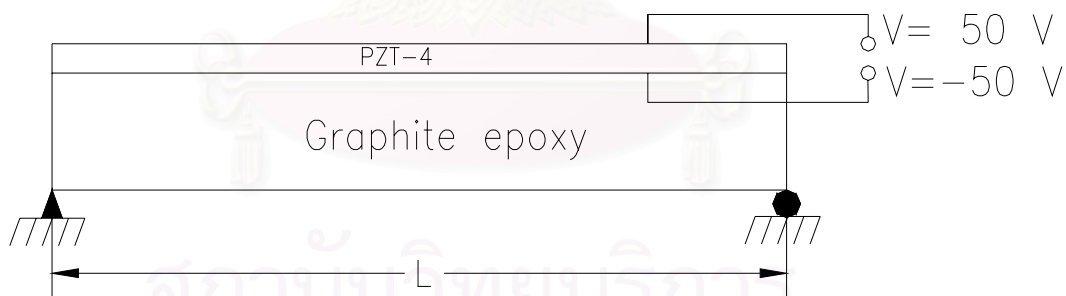
รูปที่ 4.16 คานจตุรกรงรับธรรมชาติ 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4)

ตารางที่ 4.12 คุณสมบัติของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 และแกรไฟต์-อีพอกซี (Fernandes และ Pougett; 2002)

	PZT-4	Graphite-epoxy
$C_{11}$ (Pa)	$139 \times 10^9$	$134.86 \times 10^9$
$C_{12}$ (Pa)	$77.8 \times 10^9$	$5.1563 \times 10^9$
$C_{33}$ (Pa)	$115 \times 10^9$	$14.1329 \times 10^9$
$C_{13}$ (Pa)	$74.3 \times 10^9$	$7.1329 \times 10^9$
$C_{44}$ (Pa)	$25.6 \times 10^9$	$5.654 \times 10^9$
$e_{31}$ (C.m <sup>-2</sup> )	-5.2	-
$e_{33}$ (C.m <sup>-2</sup> )	15.1	-
$e_{15}$ (C.m <sup>-2</sup> )	12.7	-
$\epsilon_{11}$ (F.m <sup>-1</sup> )	$13.06 \times 10^{-9}$	$0.031 \times 10^{-9}$

#### 4.3.2.1 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

คานจุดรองรับธรรมดาในตัวอย่างนี้มีลักษณะและคุณสมบัติดังรูปที่ 4.16 ของหัวข้อที่ 4.3.2 ซึ่งประกอบด้วยชั้นของแกรไฟต์-อีพอกซีและชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 โดยมีศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ 50 โวลต์ และที่ผิวล่างของชั้นเพียโซอิเล็กทริกเท่ากับ -50 โวลต์ ดังแสดงในรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

การเปรียบเทียบผลการศึกษาในงานวิจัยนี้จะต้องทำการหาจำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และจำนวนการแบ่งชั้นของวัสดุที่ใช้ในการวิเคราะห์ก่อน โดยที่ใช้จำนวนเทอมของฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม ดังกล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 4.1 ซึ่งค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางคานที่จุดรองรับแบบธรรมดา (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PZT-4 เท่ากับ 50 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PZT-4 เท่ากับ -50 โวลต์ เมื่อเพิ่มจำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และเพิ่มจำนวนการแบ่งชั้นของวัสดุ แสดงได้ดังตารางที่ 4.13

ตารางที่ 4.13 ค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจตุรรองรับแบบธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

การแบ่งจำนวนชั้น (Graphite/PZT-4)	จำนวนเทอมของการกระจัด $u, w$			
	10	20	40	60
1/1	$8.4484 \times 10^{-7}$	$8.4358 \times 10^{-7}$	$8.4377 \times 10^{-7}$	$8.4379 \times 10^{-7}$
4/1	$8.4475 \times 10^{-7}$	$8.4375 \times 10^{-7}$	$8.4388 \times 10^{-7}$	$8.4390 \times 10^{-7}$
6/2	$8.4529 \times 10^{-7}$	$8.4432 \times 10^{-7}$	$8.4444 \times 10^{-7}$	$8.4446 \times 10^{-7}$
8/2	$8.4576 \times 10^{-7}$	$8.4481 \times 10^{-7}$	$8.4493 \times 10^{-7}$	$8.4495 \times 10^{-7}$
12/3	$8.4597 \times 10^{-7}$	$8.4503 \times 10^{-7}$	$8.4514 \times 10^{-7}$	$8.4516 \times 10^{-7}$

จากตารางที่ 4.13 จะเห็นว่าค่าการโก่งตัวของคานจะมีค่าเปลี่ยนแปลงน้อยมากเมื่อใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัดเท่ากับ 40 เทอมและแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ 8/2 (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ดังนั้นการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของคานจตุรรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PZT-4 เท่ากับ 50 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PZT-4 เท่ากับ -50 โวลต์ ของงานวิจัยนี้จะใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 40 เทอม จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม และแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ 8/2 (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ซึ่งผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานจตุรรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำดังกล่าวแสดงดังตารางที่ 4.14

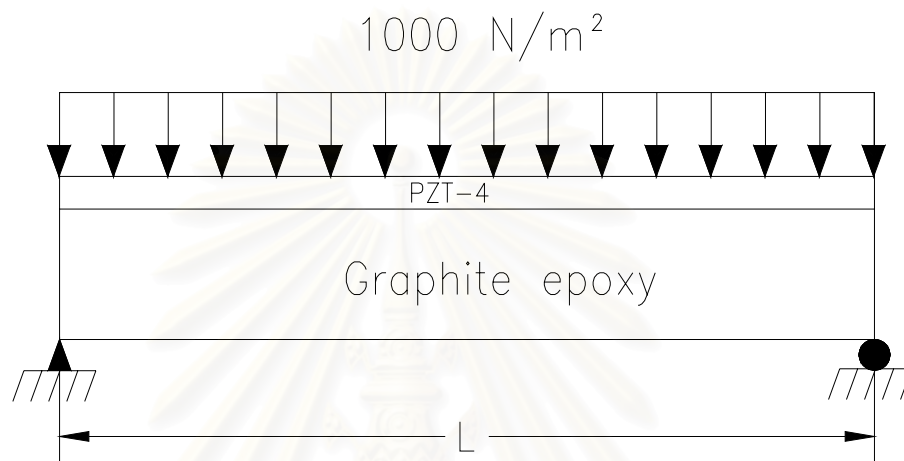
ตารางที่ 4.14 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจตุรรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำ

ผลการศึกษาโดย	แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4
Fernandes และ Pouget (2002)	$8.37 \times 10^{-7}$
งานวิจัยนี้	$8.4493 \times 10^{-7}$

จากตารางที่ 4.14 ซึ่งแสดงผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานจตุรรองรับธรรมดา (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้ศักย์ไฟฟ้ากระทำที่ผิวบนของวัสดุ PZT-4 ชั้นบนเท่ากับ 50 โวลต์ และที่ผิวล่างของวัสดุ PZT-4 ชั้นล่างเท่ากับ -50 โวลต์ ที่ได้จากงานวิจัยนี้กับผลการศึกษาของ Fernandes และ Pouget (2002) ซึ่งทำการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองผสมระหว่างการใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเค้นในการคำนวณหาค่าการกระจัด และทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ในการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้า พบว่ามีค่าการโก่งตัวใกล้เคียงกันโดยมีค่าแตกต่างกันประมาณ -0.95 %

#### 4.3.2.2 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ

คานจุดรองรับธรรมดาในตัวอย่างนี้มีลักษณะและคุณสมบัติดังรูปที่ 4.16 ของหัวข้อที่ 4.3.2 ซึ่งประกอบด้วยชั้นของแกรไฟต์-อีพอกซี และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 โดยมีน้ำหนักแผ่นกระทำเท่ากับ 1000 นิวตัน/เมตร<sup>2</sup> ที่ผิวบนสุด ดังแสดงในรูปที่ 4.18 สำหรับศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนและผิวล่างของวัสดุ PZT-4 จะกำหนดให้เท่ากับ 0 โวลต์



รูปที่ 4.18 คานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ

ในที่นี้จำนวนเทอมที่เหมาะสมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  และการแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของโครงสร้างตัวอย่างนี้จะใช้เท่ากับเท่ากับโครงสร้างตัวอย่างในหัวข้อที่ 4.3.2.1 เนื่องจากมีลักษณะทางกายภาพเหมือนกัน คือ เป็นคานจุดรองรับธรรมดาซึ่งประกอบด้วยชั้นของแกรไฟต์-อีพอกซี และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 ดังนั้นการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักแผ่นกระทำเท่ากับ 1000 นิวตัน/เมตร<sup>2</sup> ที่ผิวบนสุดของงานวิจัยนี้จะใช้จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  เท่ากับ 40 เทอม จำนวนเทอมสำหรับฟังก์ชันรูปร่างของศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 150 เทอม และแบ่งจำนวนชั้นของวัสดุเท่ากับ 8/2 (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ซึ่งค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักกระทำดังกล่าวแสดงดังตารางที่ 4.15

ตารางที่ 4.15 ผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัว (เมตร) ที่กึ่งกลางของคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้น (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำ

ผลการศึกษาโดย	แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4
Fernandes และ Pouget (2002)	$-3.95 \times 10^{-8}$
งานวิจัยนี้	$-4.0222 \times 10^{-8}$

จากตารางที่ 4.15 ซึ่งแสดงผลการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานจตุรกรงรับธรรมดา (PZT-4/PZT-4) ภายใต้น้ำหนักกระทำที่ผิวบนสุดของคานเท่ากับ 1000 นิวตัน/เมตร<sup>2</sup> ที่ได้จากงานวิจัยนี้กับผลการศึกษาของ Fernandes และ Pouget (2002) ซึ่งทำการวิเคราะห์โดยใช้แบบจำลองผสมระหว่างการใช้ทฤษฎีการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนในการคำนวณหาค่าการกระจัด และทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ในการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้า พบว่ามีค่าการโก่งตัวใกล้เคียงกันโดยมีค่าแตกต่างกันประมาณ -1.83 %

จากการเปรียบเทียบผลการศึกษาที่ได้จากงานวิจัยนี้กับการศึกษาในอดีตทั้งโครงสร้างคานยื่น และคานจตุรกรงรับธรรมดา พบว่ามีค่าใกล้เคียงกัน โดยค่าที่ต่างกันอาจเกิดจากการใช้ทฤษฎีการวิเคราะห์และฟังก์ชันรูปร่างที่ต่างกันแต่โดยรวมถือว่าไม่มากนัก ดังนั้นจึงสามารถนำแบบจำลองที่ใช้ในการศึกษาไปวิเคราะห์คานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียงไอโซทรอปิกได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้นำแบบจำลองดังกล่าวไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมการโก่งตัวของคาน โดยจะหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่สุดที่ให้แก่น้ำของวัสดุเพียงไอโซทรอปิกเพื่อใช้ในการควบคุมการโก่งตัวของคานเพื่อให้ได้รูปร่างใกล้เคียงกับการโก่งตัวที่ต้องการ ซึ่งจะแสดงในบทถัดไป



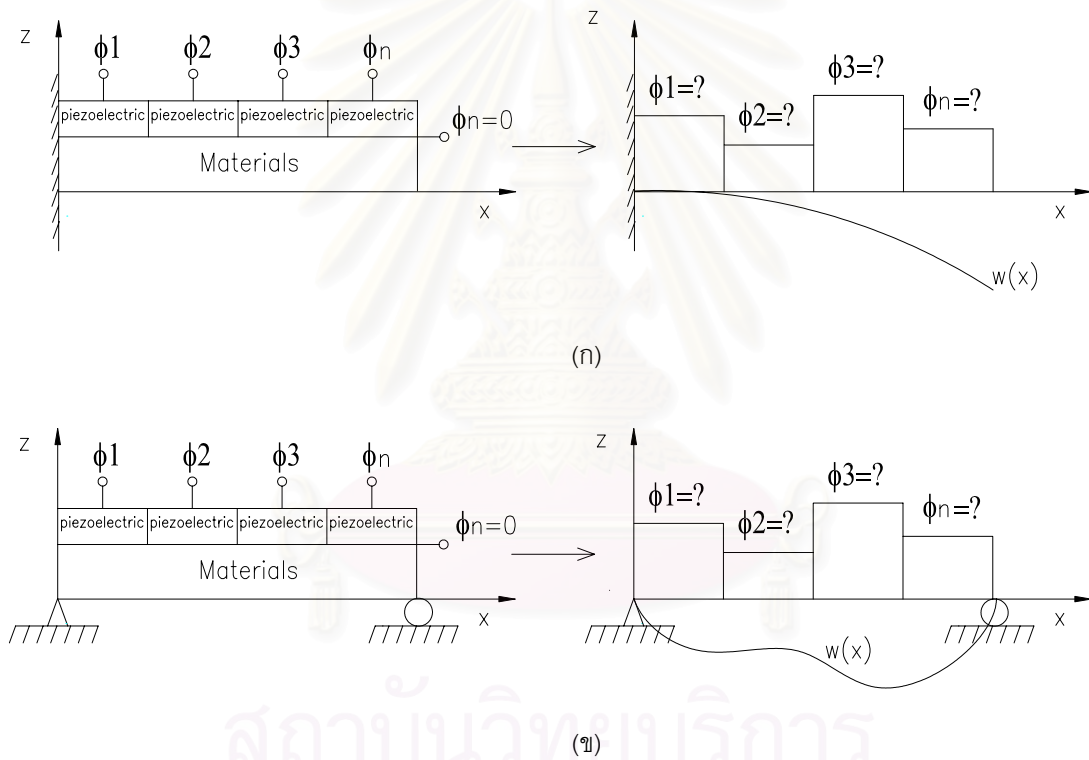
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 5

### การควบคุมการโก่งตัว

#### 5.1 วิธีการควบคุม

งานวิจัยนี้จะประยุกต์ใช้คุณสมบัติการให้แรง (actuation) ของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในการควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานยื่นและคานจุดรองรับธรรมดาโดยที่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกติดที่ผิวบนของคาน การควบคุมการโก่งตัวเพื่อให้ได้รูปร่างตามที่ต้องการ  $w(x)$  ในการศึกษานี้ จะกระทำโดยการป้อนค่าศักย์ไฟฟ้าแบบคงที่เป็นช่วงๆที่เหมาะสมให้กับชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก ดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 โครงสร้างคานที่ใช้สำหรับควบคุมการโก่งตัวเพื่อให้ได้รูปร่างตามที่ต้องการ  
(ก) คานยื่น (ข) คานจุดรองรับธรรมดา

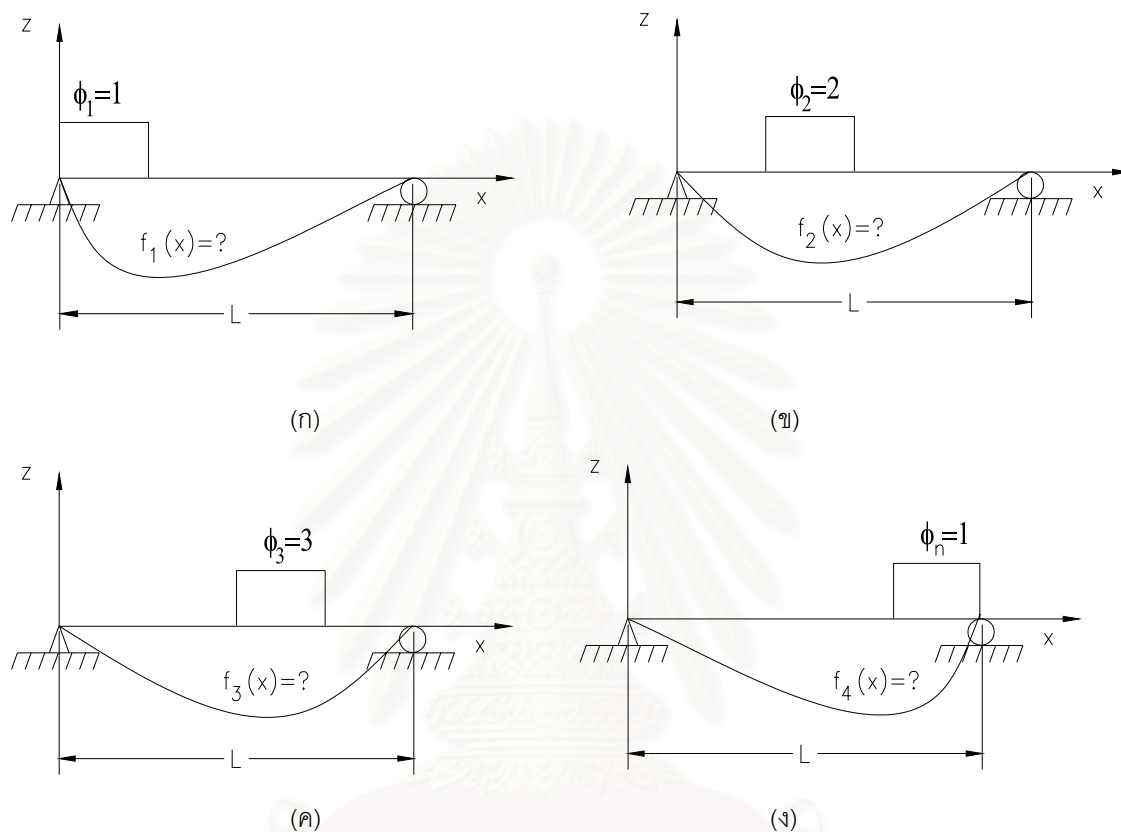
ดังนั้นผลลัพธ์ของการโก่งตัวเป็นดังนี้

$$w(x) \approx \phi_1 f_1(x) + \phi_2 f_2(x) + \phi_3 f_3(x) + \dots + \phi_n f_n(x)$$

$$w(x) \approx \sum_{j=1}^n \phi_j f_j(x)$$



เมื่อ  $f_j(x)$  คือ การโค้งตัวของคานเมื่อให้ศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียงโซลิตทริกที่ช่วง  $j$  เท่ากับ 1 โวลต์ ซึ่งสามารถหาได้โดยอาศัยวิธีการในหัวข้อที่ 3.5 และ 3.6 ของบทที่ 3 ดังแสดงในรูปที่ 5.2 (สำหรับวิธีการควบคุมการโค้งตัวของทั้งคานยื่นและคานจุดรองรับธรรมดาจะใช้วิธีการเดียวกัน ดังนั้นจึงเลือกแสดงรูปตัวอย่างประกอบเฉพาะที่เป็นแบบคานจุดรองรับธรรมดา)



รูปที่ 5.2 การโค้งตัวของคาน  $f(x)$  เมื่อให้ศักย์ไฟฟ้า 1 หน่วยที่ผิวบนของวัสดุเพียงโซลิตทริกในแต่ละช่วง (ก)  $\phi_1 = 1$  (ข)  $\phi_2 = 1$  (ค)  $\phi_3 = 1$  (ง)  $\phi_n = 1$

$\phi_j$  คือ ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่จะต้องป้อนให้กับชั้นของวัสดุเพียงโซลิตทริกที่ผิวบนในแต่ละช่วง ซึ่งค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมนี้สามารถหาได้โดยอาศัยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) ดังนี้

$$\int_x W_i \left[ w(x) - \sum_{j=1}^n \phi_j f_j \right] dx = 0 \tag{5.1}$$

โดยที่

- $W_i$  คือ ฟังก์ชันน้ำหนัก (weight function)
- $w(x)$  คือ ฟังก์ชันรูปร่างที่ต้องการ

- $\phi_j$  คือ ศักย์ไฟฟ้าที่ต้องการหา  
 $f_j$  คือ การโก่งตัวของคาน เมื่อให้  $\phi_j = 1$  โวลต์  
 $n$  คือ จำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก

เมื่อ  $i, j = 1, 2, \dots, n$

การกำหนดฟังก์ชันน้ำหนักสามารถใช้ได้หลายแบบ เช่น ฟังก์ชันโพลิโนเมียล  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$  หรือฟังก์ชันของการกระจัดเนื่องจากศักย์ไฟฟ้า  $(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$  เป็นต้น สำหรับงานวิจัยนี้เลือกใช้ฟังก์ชันของการกระจัดเนื่องจากศักย์ไฟฟ้า การหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่สุดเพื่อให้ได้รูปร่างตามที่ต้องการจะอาศัยการแก้สมการที่ (5.1) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

หรือ  $[a_{ij}] \{\phi_j\} = \{b_i\}$  (5.2)

โดยที่

$$a_{ij} = \int_0^L f_i f_j dx$$

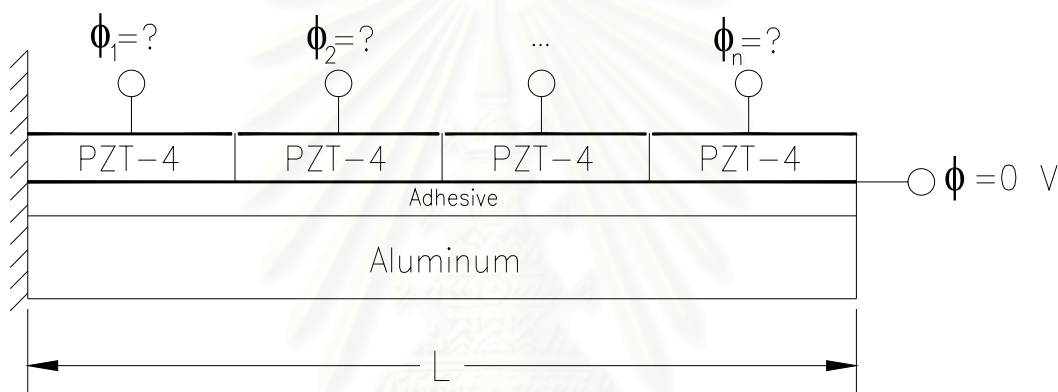
$$b_i = \int_0^L f_i w(x) dx$$

เมื่อ  $i, j = 1, 2, \dots, n$

ลำดับต่อไปจะอาศัยหลักการดังกล่าวข้างต้นนี้เพื่อหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่จะต้องป้อนให้กับชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่มีขนาดในแต่ละช่วง เพื่อใช้ในการควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานยื่นและคานจุดรองรับธรรมชาติ โดยในงานวิจัยนี้จะพิจารณาชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเป็นช่วงๆเท่าๆกันตลอดความยาวคาน เริ่มตั้งแต่ 1 ถึง 8 ช่วง เพื่อพิจารณาเปรียบเทียบผลการควบคุมว่าแตกต่างกันอย่างไร

## 5.2 คานยื่น

โครงสร้างตัวอย่างของคานยื่นที่จะทำการควบคุมการโก่งตัวในงานวิจัยนี้ จะมีลักษณะเช่นเดียวกับ โครงสร้างตัวอย่างที่ 4.2.2 ของบทที่ 4 ซึ่งเป็นโครงสร้างคานที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุ 3 ชั้น คือ ชั้นของอลูมิเนียมหนา 0.01524 เมตร ชั้นของวัสดุยึดติดหนา 0.000254 เมตร และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 หนา 0.001524 เมตร ทุกชั้นของวัสดุยาวเท่ากับ 0.1524 เมตร โดยที่คุณสมบัติของวัสดุแต่ละชนิดแสดงดังตารางที่ 4.4 ของบทที่ 4 พฤติกรรมของโครงสร้างคานยื่นนี้จะสมมติเป็นแบบความเค้นระนาบ (plane stress) ตามแบบการศึกษาในอดีต สำหรับการควบคุมการโก่งตัวในการศึกษานี้ชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะถูกแบ่งออกเป็นช่วงๆและกำหนดให้ผิวล่างของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกของทุกช่วงมีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์โวลต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.3 จากนั้นจึงทำการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในแต่ละช่วงที่ทำให้เกิดการโก่งตัวใกล้เคียงกับการโก่งตัวที่ต้องการโดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตักต่างตามที่ได้อกล่าวไว้ในหัวข้อ 5.1



รูปที่ 5.3 ลักษณะโครงสร้างคานยื่นที่จะทำการควบคุมการโก่งตัว

ในการคำนวณหาการโก่งตัวด้วยวิธีเลเยอร์ไวส์นี้จะพิจารณาแบ่งโครงสร้างออกเป็นชั้นๆ จำนวน  $6/2/1$  (อลูมิเนียม/วัสดุยึดติด/PZT-4) และเลือกใช้จำนวนเทอมของฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวคาน (แกน  $x$ ) สำหรับการกระจัด  $u, w$  และศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 20 เทอมและ 150 เทอมตามลำดับ ซึ่งการควบคุมการโก่งตัวของคานยื่นนี้จะกำหนดรูปแบบการโก่งตัวที่ต้องการขึ้น 3 แบบ คือ แบบเส้นตรง แบบกำลังสอง และแบบกำลังสาม จากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เหมาะสมสำหรับกรณีการแบ่งช่วงตั้งแต่ 1 จนถึง 8 ช่วง ผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงในลำดับต่อไป

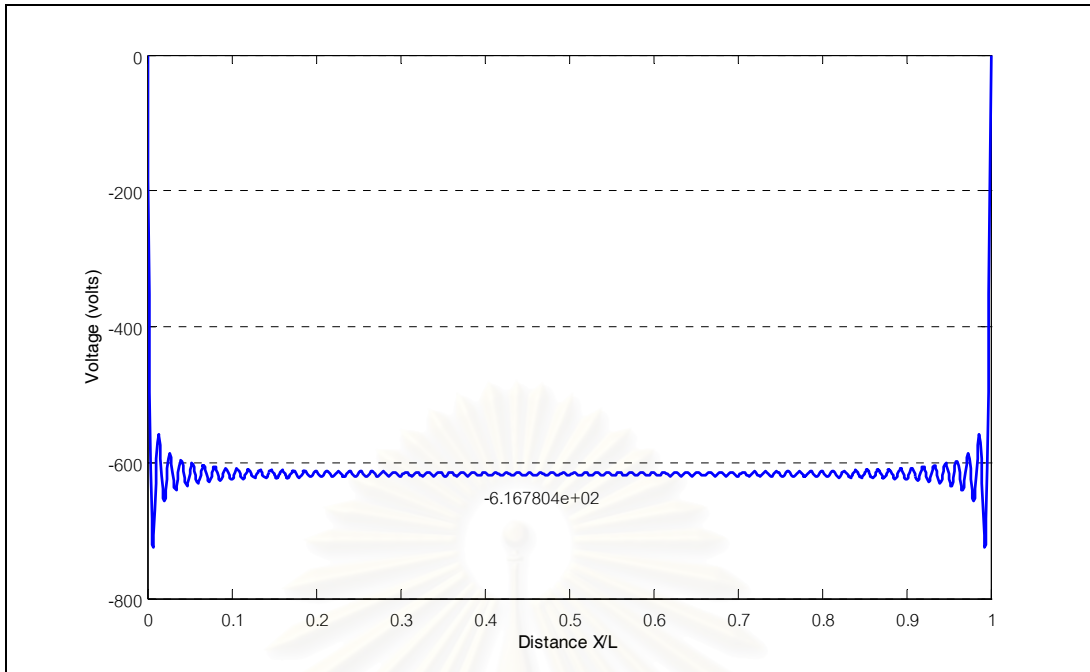
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### 5.2.1 การโค้งตัวแบบเป็นเส้นตรง

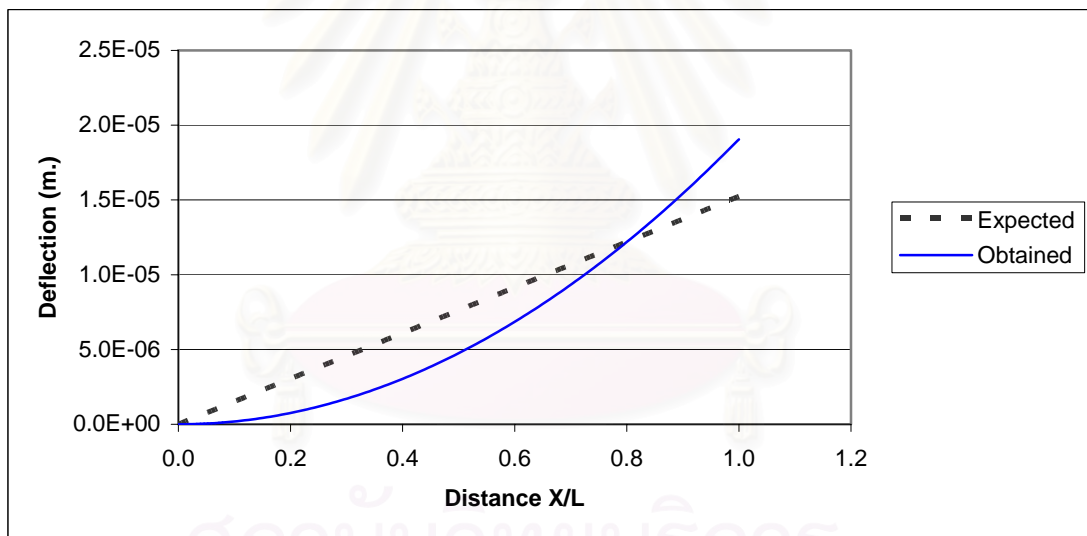
ตัวอย่างนี้กำหนดให้ฟังก์ชันการโค้งตัวของคานยี่นที่ต้องการ (Expected) เป็นแบบเส้นตรงและมีค่าเท่ากับ  $X/10000$  เมตร ซึ่งผลของการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เหมาะสมสำหรับการแบ่งจำนวนช่วงของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1 ถึง 8 ช่วง และรูปร่างการโค้งตัวที่ได้ (obtained) จากค่าศักย์ไฟฟ้างกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 5.4 ถึง 5.11 ส่วนผลของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างการโค้งตัวที่ต้องการกับการโค้งตัวที่เกิดจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง ซึ่งคำนวณจากการอินทิเกรตผลต่างของค่าการโค้งตัวทั้งสองยกกำลังสองตลอดความยาวคานแสดงไว้ในรูปที่ 5.12 จากผลที่ได้พบว่าการควบคุมการโค้งตัวแบบเป็นเส้นตรงของคานยี่นที่ปลายด้านยึดแน่นจะทำให้เพียงค่าที่ใกล้เคียงเท่านั้น เนื่อง จากความเป็นจริงของลักษณะการโค้งตัวของคานยี่นที่ปลายด้านยึดแน่นนั้นไม่เป็นเส้นตรง ทำให้ผลที่ได้มีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้าง ดังนั้นจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกที่เหมาะสมเพื่อควบคุมการโค้งตัวให้ใกล้เคียงกับที่ต้องการนั้น ควรจะแบ่งให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้เพื่อให้การโค้งตัวด้านที่ปลายยึดแน่นมีค่าใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการมากที่สุด ซึ่งงานวิจัยนี้ใช้เท่ากับ 8 ช่วง



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



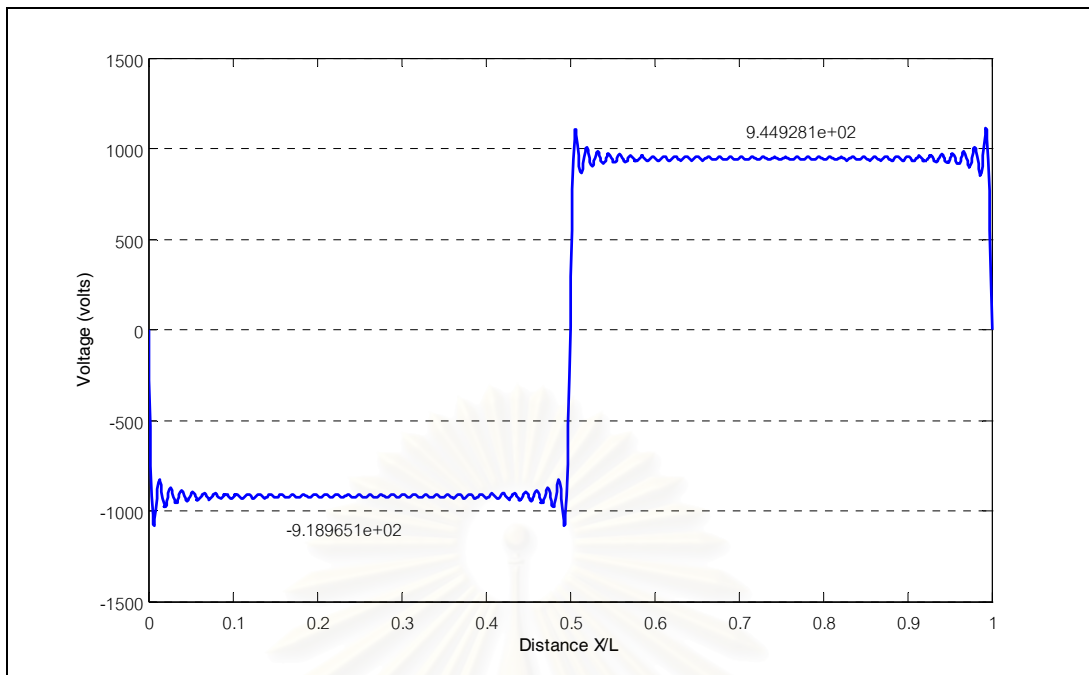
(ก)



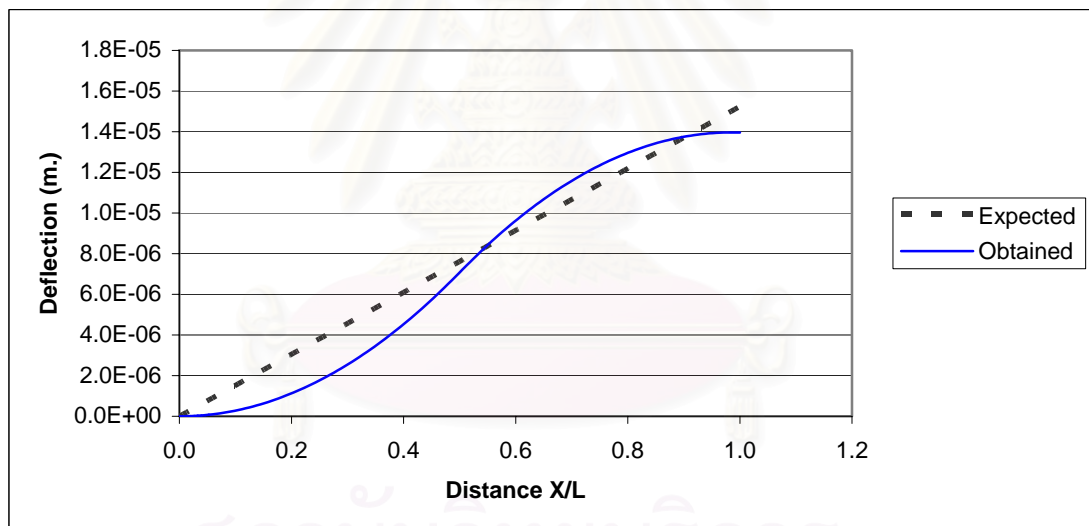
(ข)

รูปที่ 5.4 การควบคุมการโก่งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 1 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้

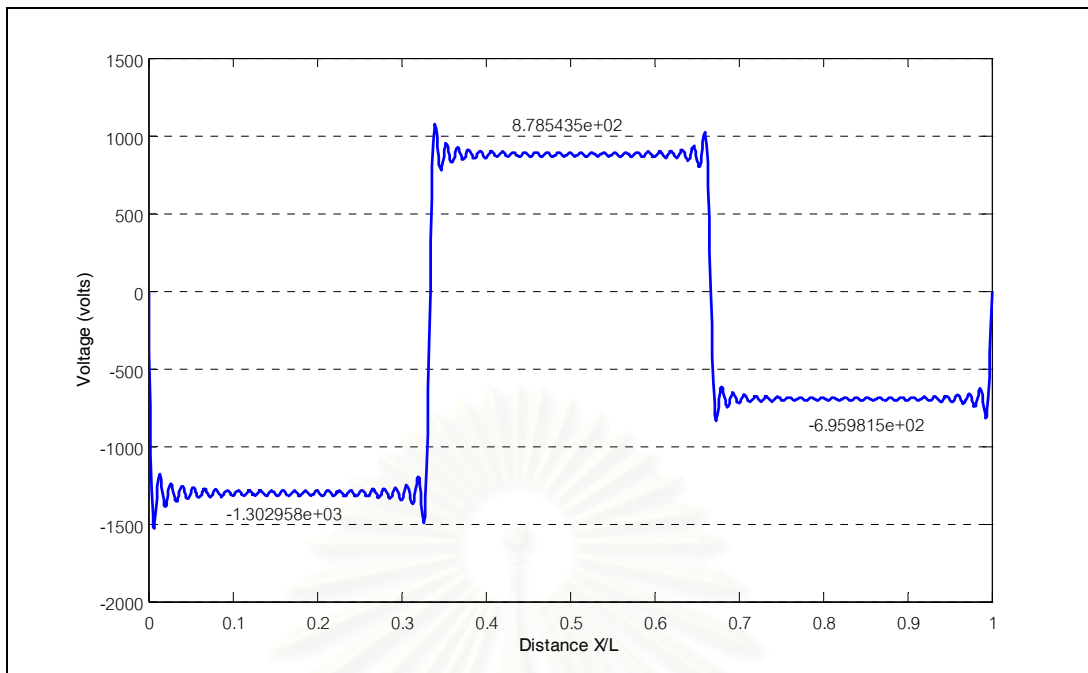


(ก)

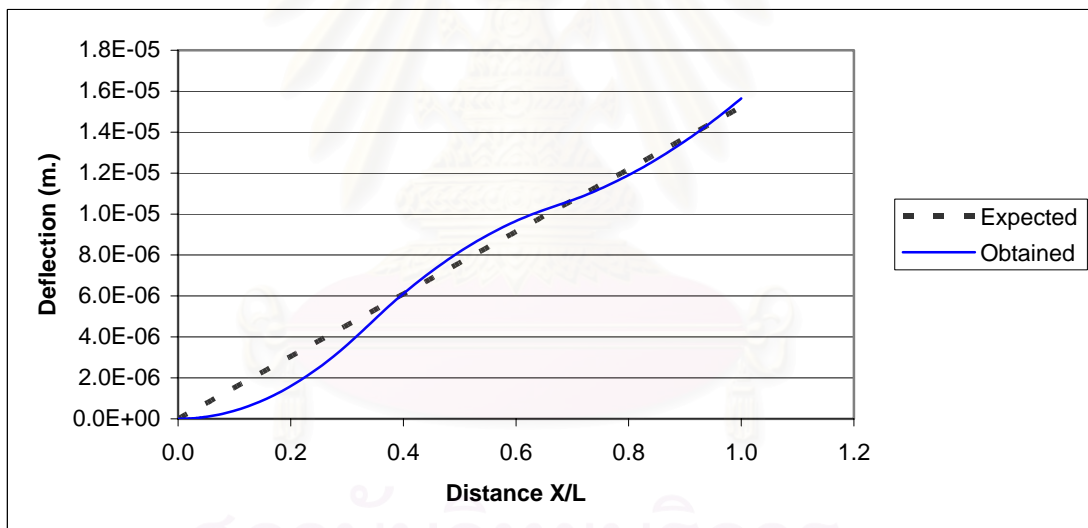


(ข)

รูปที่ 5.5 การควบคุมการโก่งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 2 ช่วง  
 (ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



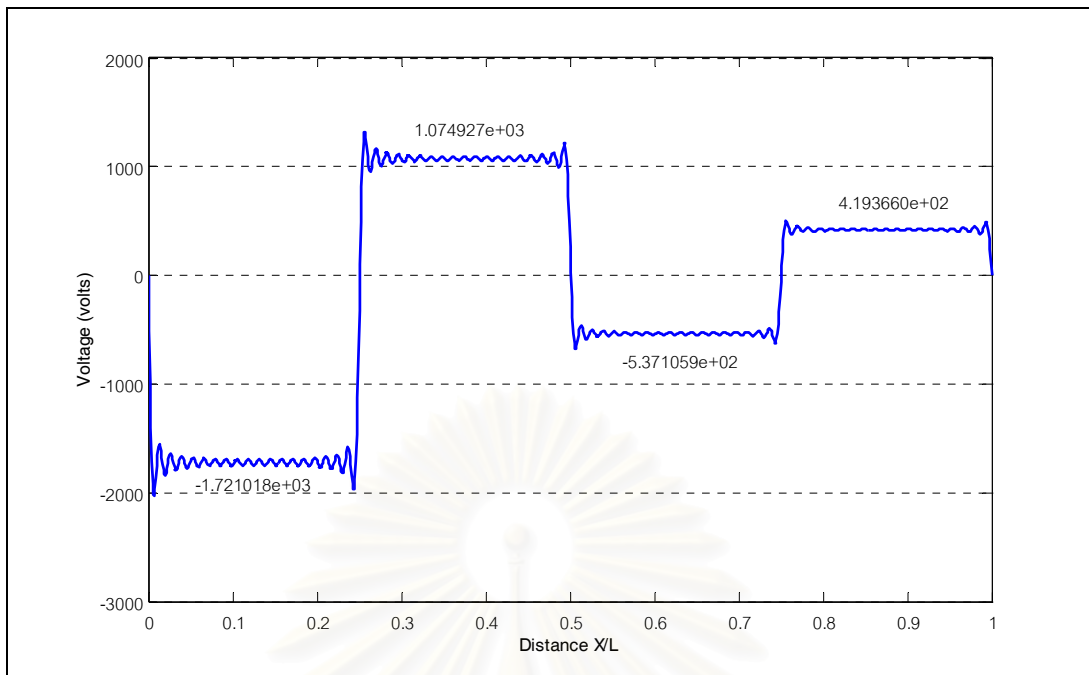
(ก)



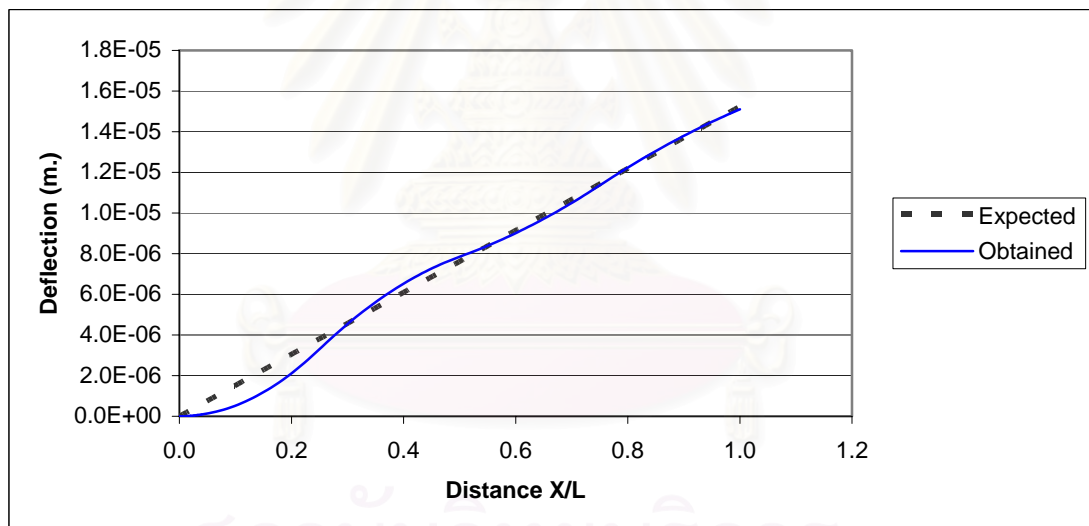
(ข)

รูปที่ 5.6 การควบคุมการโก่งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 3 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



(ก)

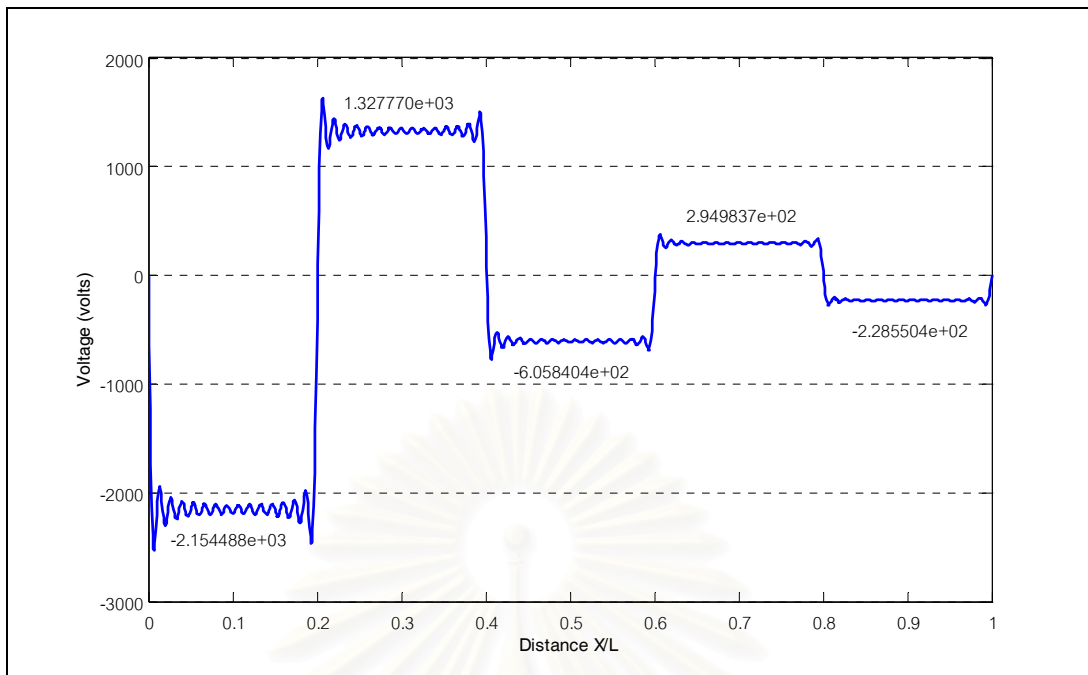


(ข)

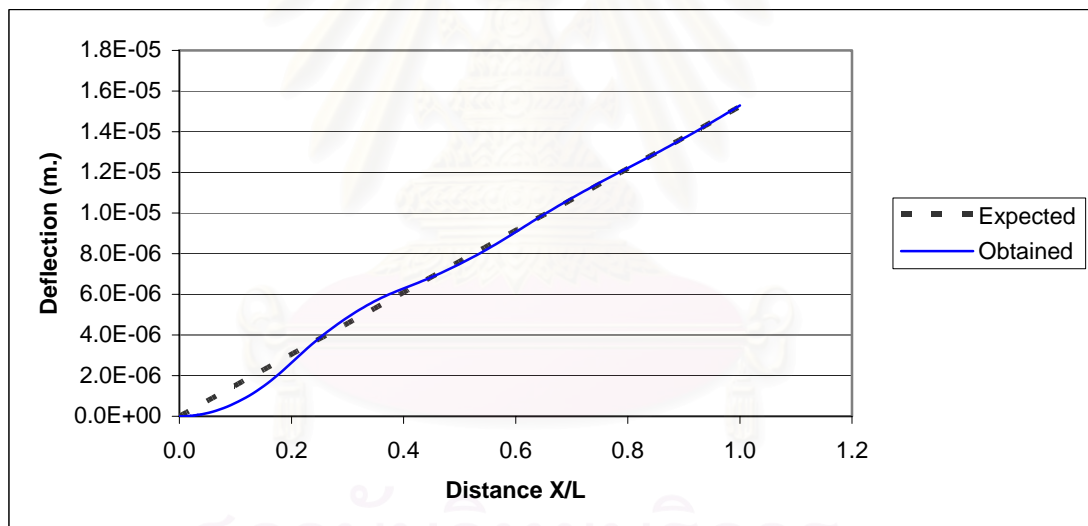
รูปที่ 5.7 การควบคุมการโก่งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 4 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



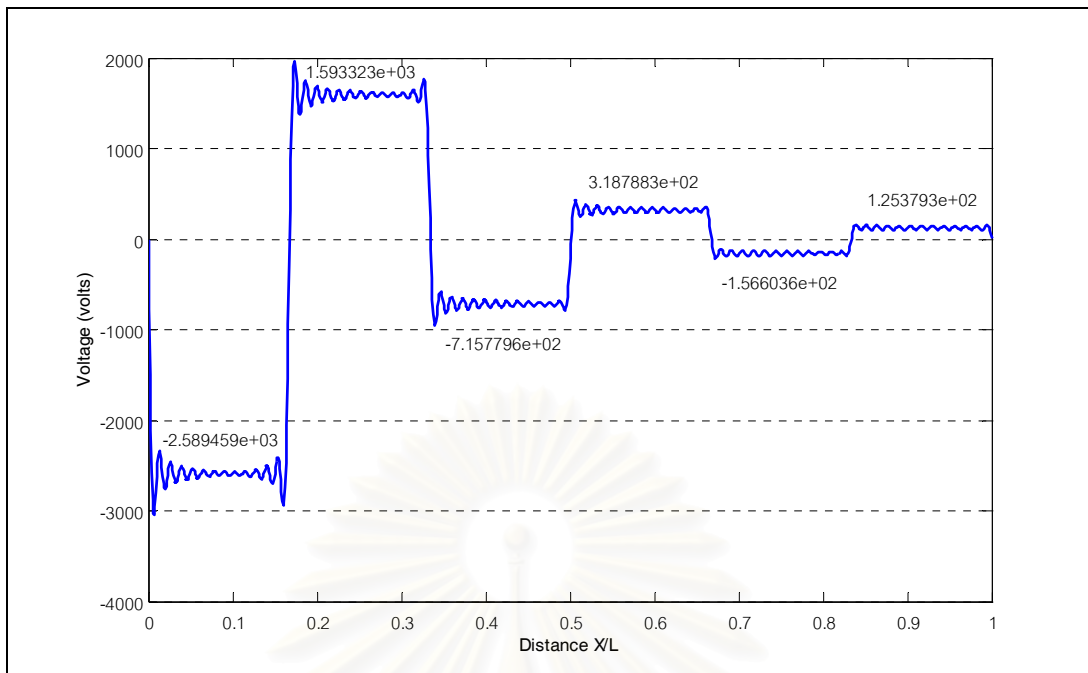


(ก)

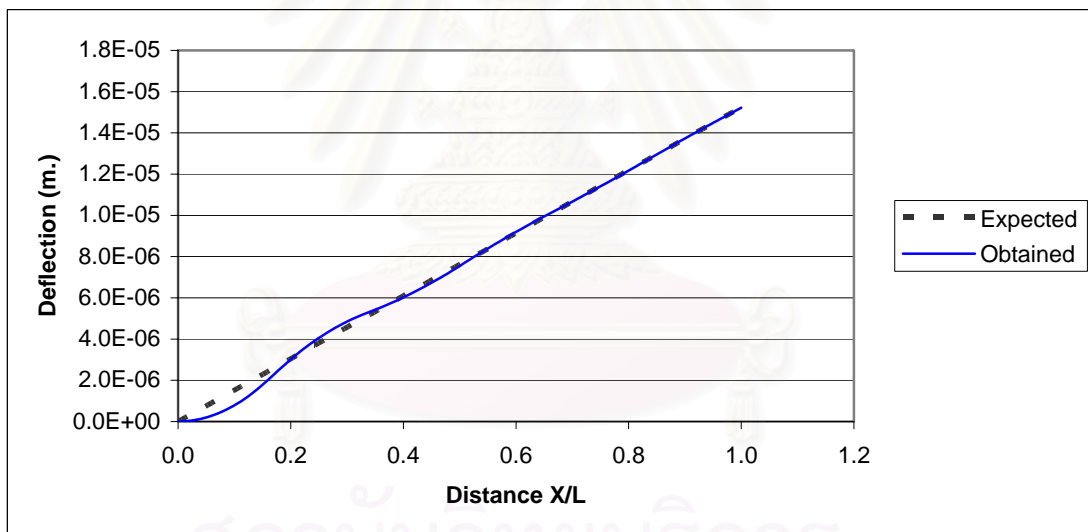


(ข)

รูปที่ 5.8 การควบคุมการโก่งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 5 ช่วง  
 (ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



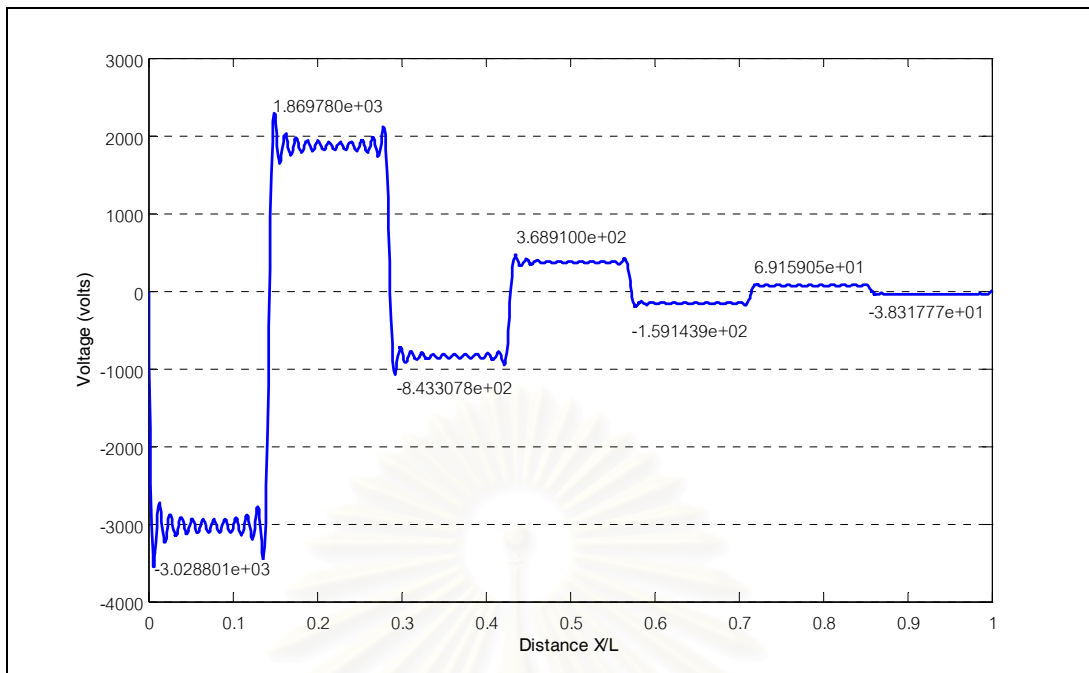
(ก)



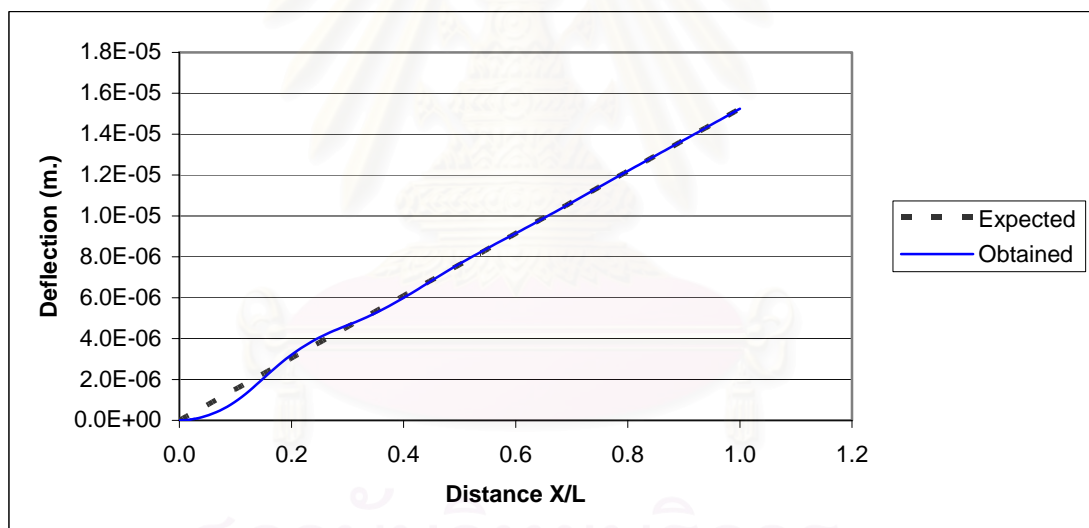
(ข)

รูปที่ 5.9 การควบคุมการโก่งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 6 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



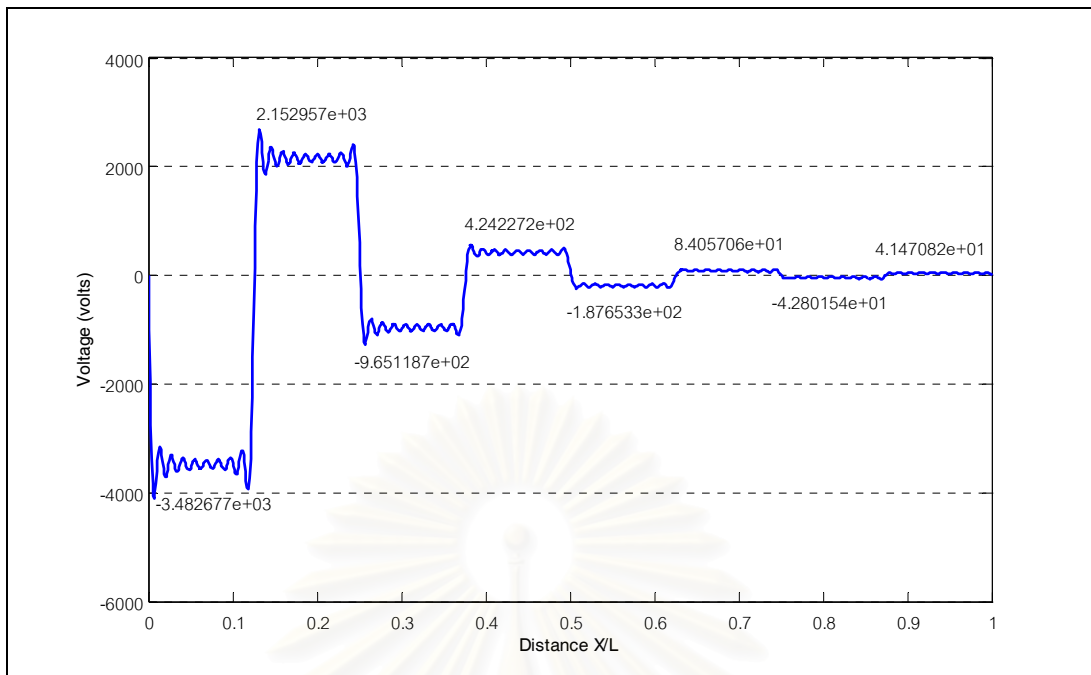
(ก)



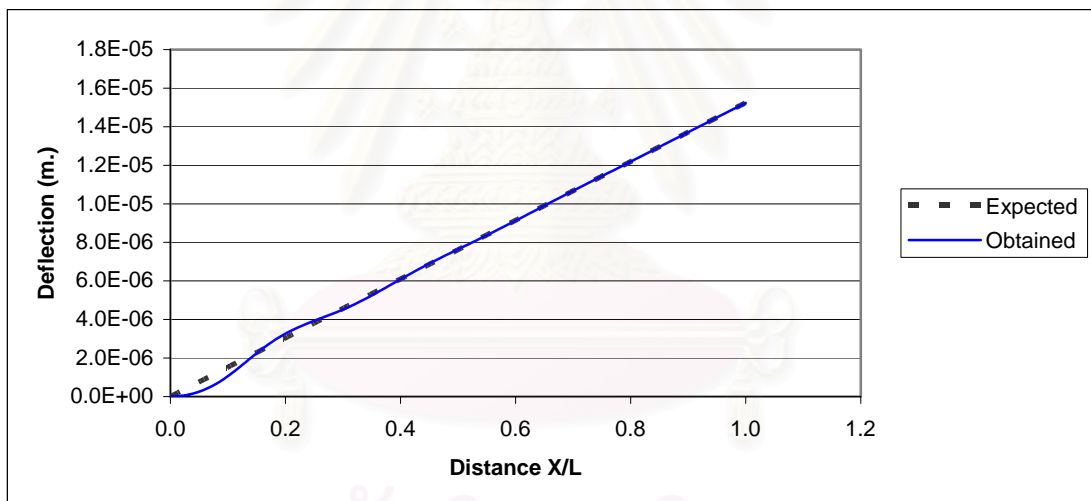
(ข)

รูปที่ 5.10 การควบคุมการโก่งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 7 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



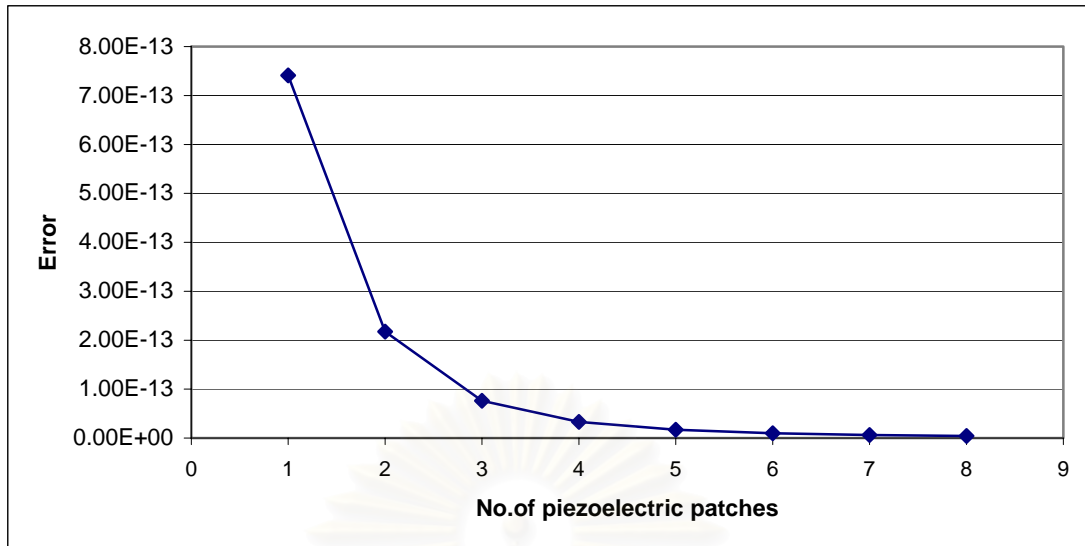
(ก)



(ข)

รูปที่ 5.11 การควบคุมการโก่งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 8 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



รูปที่ 5.12 ค่าคลาดเคลื่อนของการโค้งตัวแบบเส้นตรงของคานยื่นเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8

ช่วง

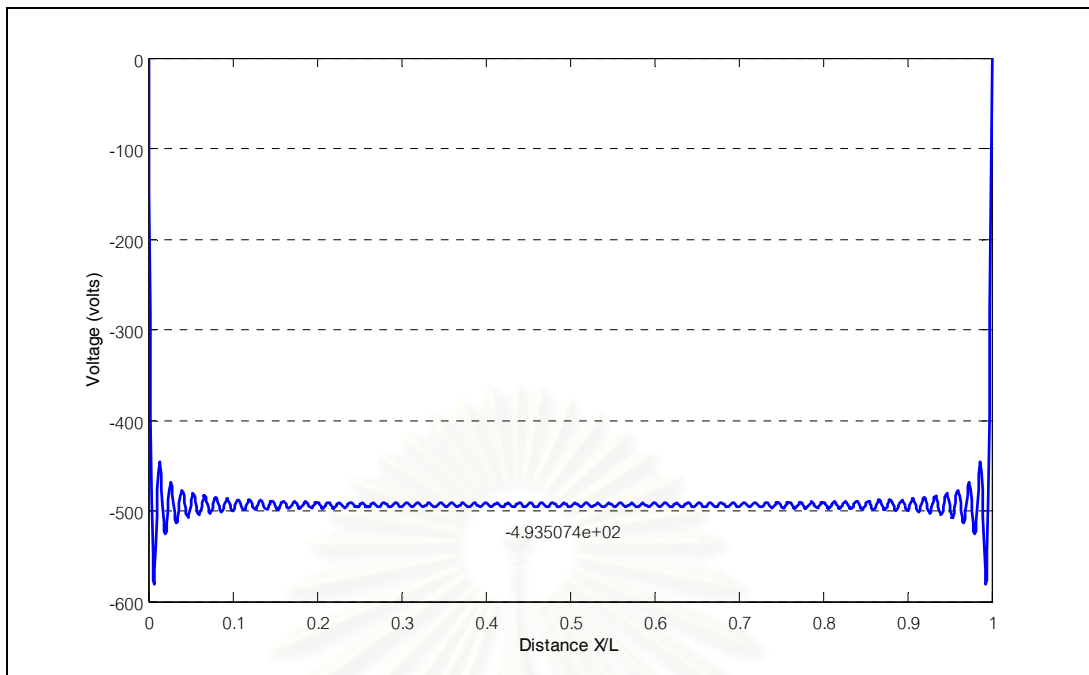
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### 5.2.2 การโค้งตัวแบบยกกำลังสอง

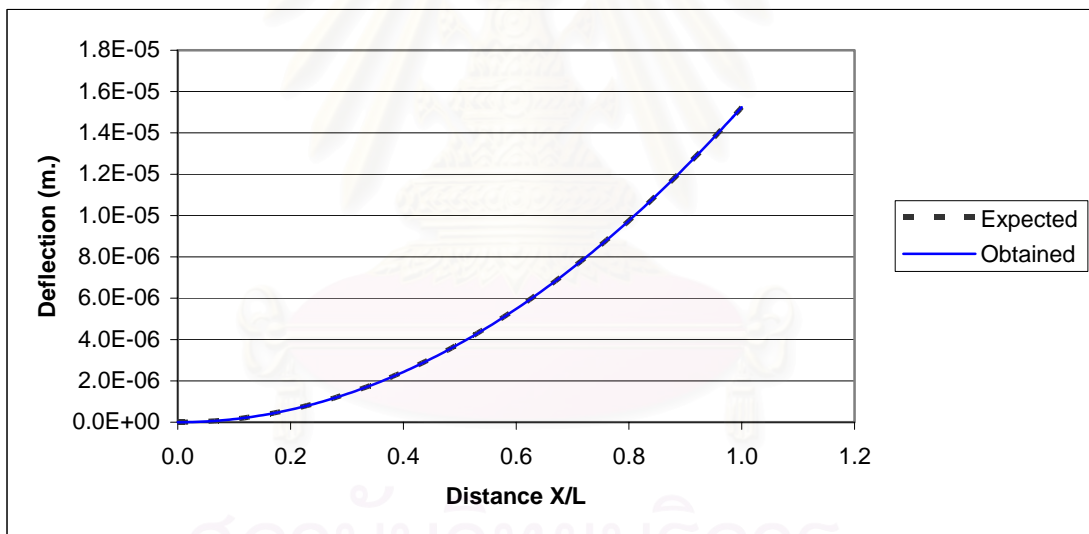
ตัวอย่างนี้กำหนดให้ฟังก์ชันการโค้งตัวของคานยี่นที่ต้องการ (Expected) แบบยกกำลังสองและมีค่าเท่ากับ  $X^2/(10000L)$  เมตร ซึ่งผลของการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เหมาะสมสำหรับการแบ่งจำนวนช่วงของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1 ถึง 8 ช่วง และรูปร่างการโค้งตัวที่ได้ (obtained) จากค่าศักย์ไฟฟ้างกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 5.13 ถึง 5.20 ส่วนผลของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างการโค้งตัวที่ต้องการกับการโค้งตัวที่เกิดจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง ซึ่งคำนวณจากการอินทิเกรตผลต่างของค่าการโค้งตัวทั้งสองยกกำลังสองตลอดความยาวคานแสดงไว้ในรูปที่ 5.21 จากผลที่ได้พบว่าสามารถป้อนค่าศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพียงช่วงเดียวก็จะมีค่าใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการ แต่ถ้ายังเพิ่มจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมากขึ้นการโค้งตัวที่เกิดขึ้นจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะมีค่าใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการมากขึ้น



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



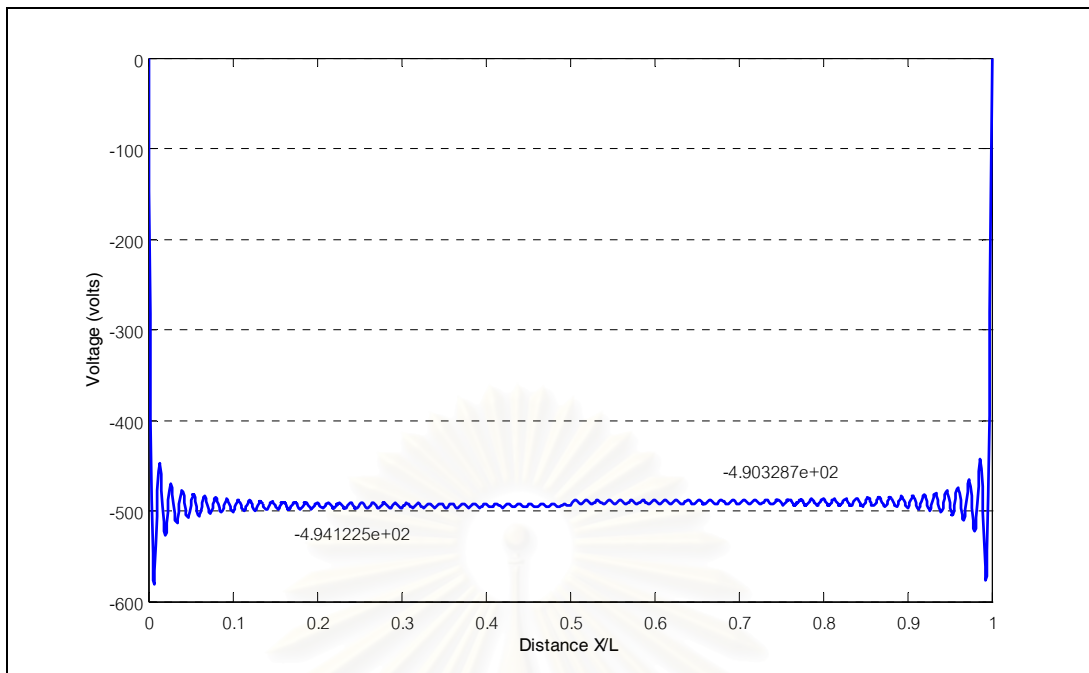
(ก)



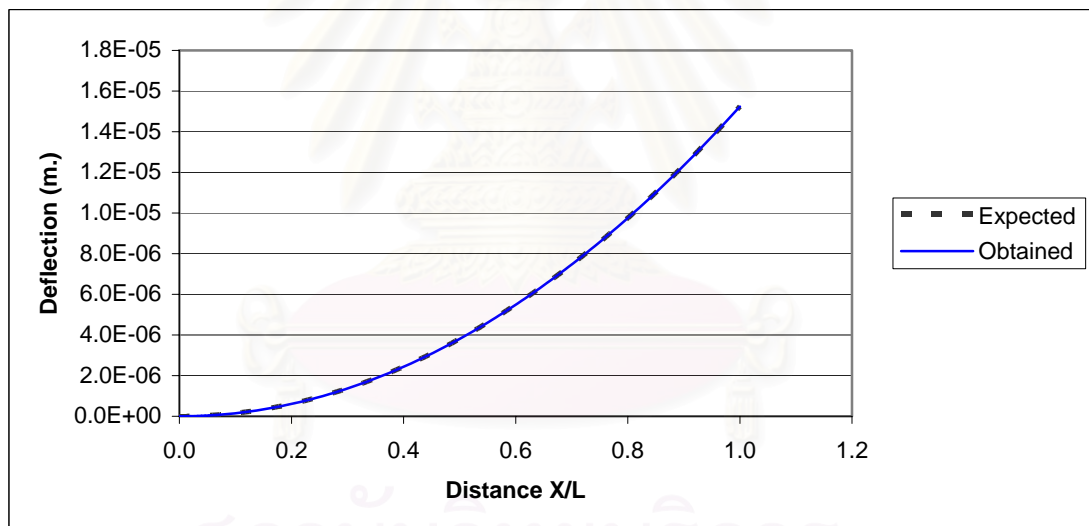
(ข)

รูปที่ 5.13 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 1 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



(ก)

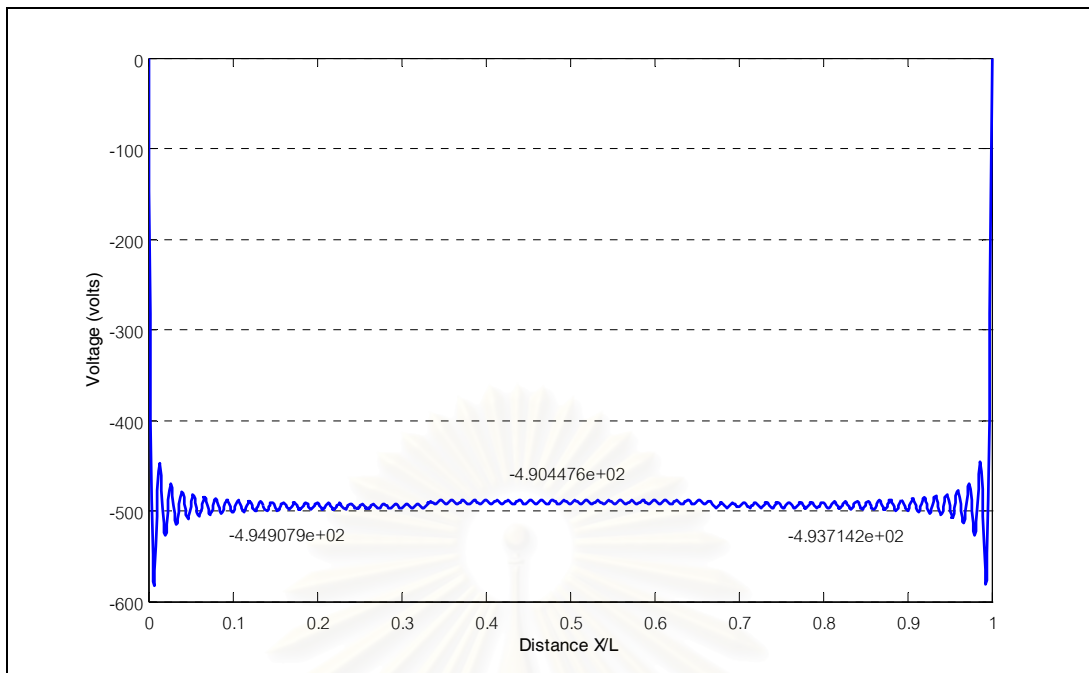


(ข)

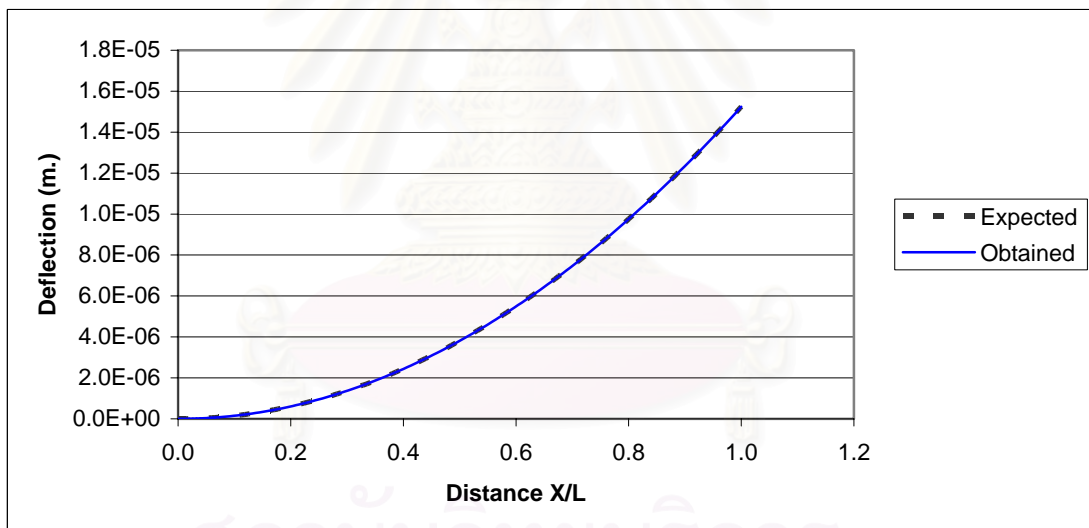
รูปที่ 5.14 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 2 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้





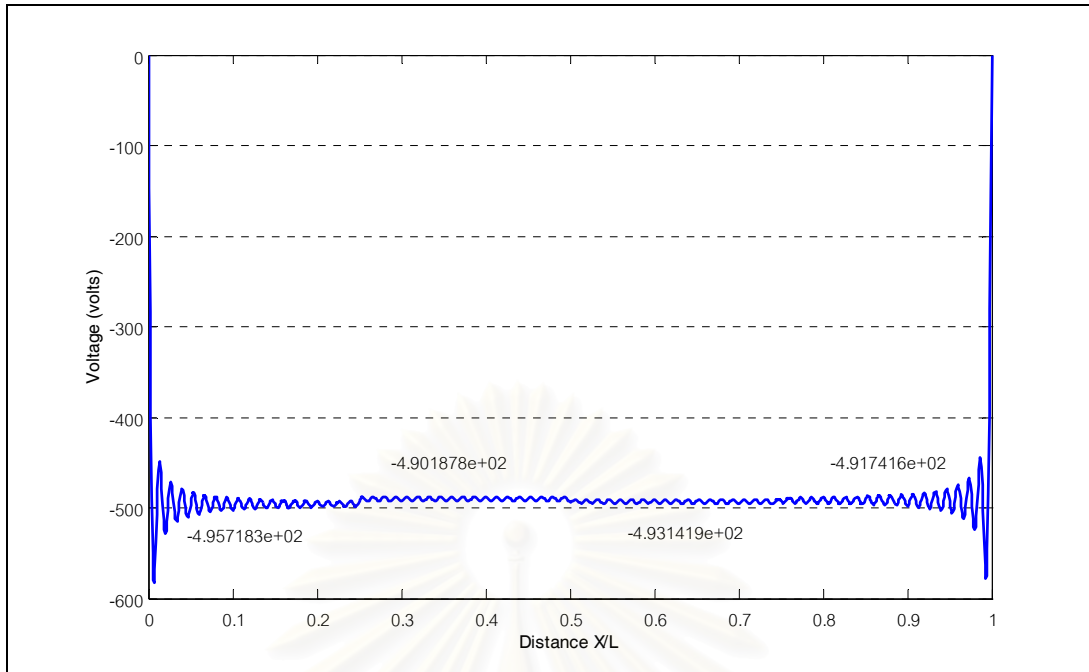
(ก)



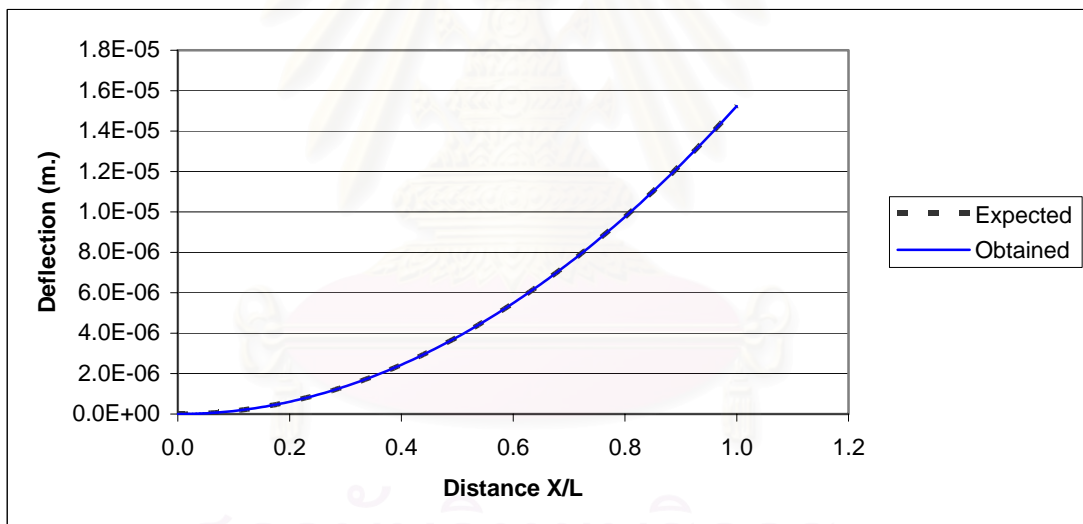
(ข)

รูปที่ 5.15 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 3 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



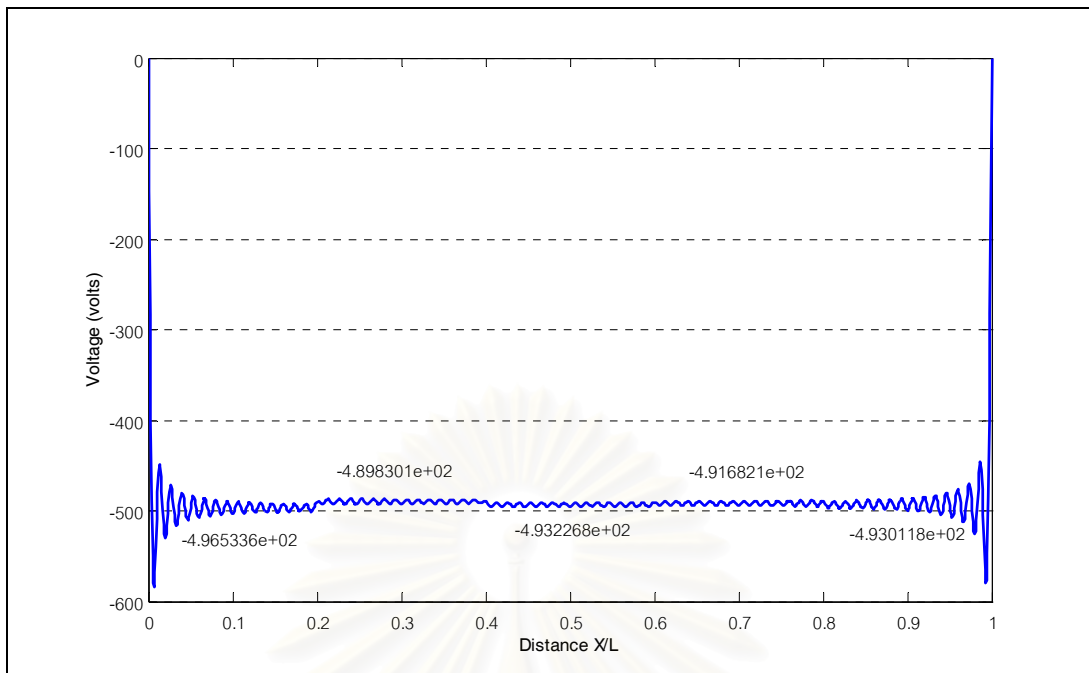
(ก)



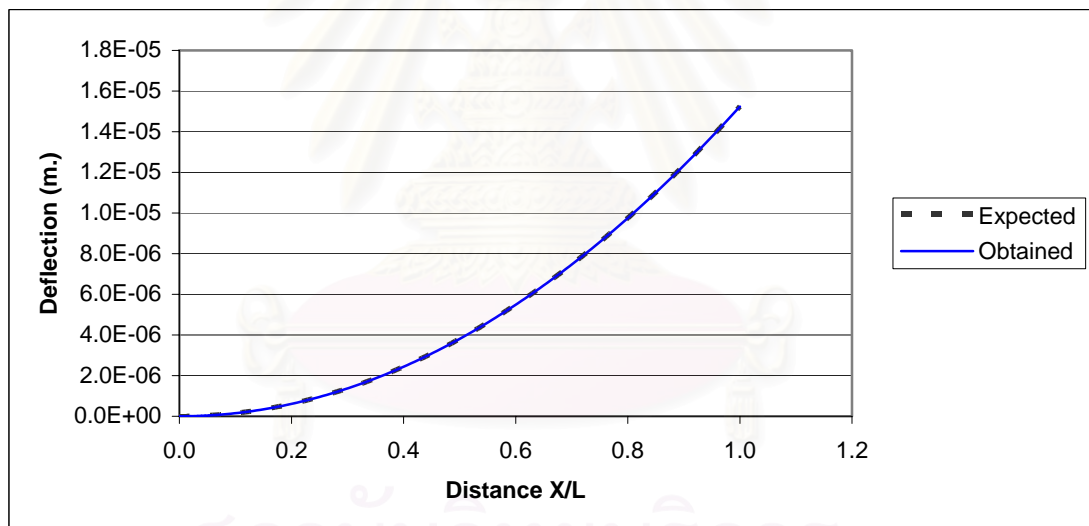
(ข)

รูปที่ 5.16 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 4 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



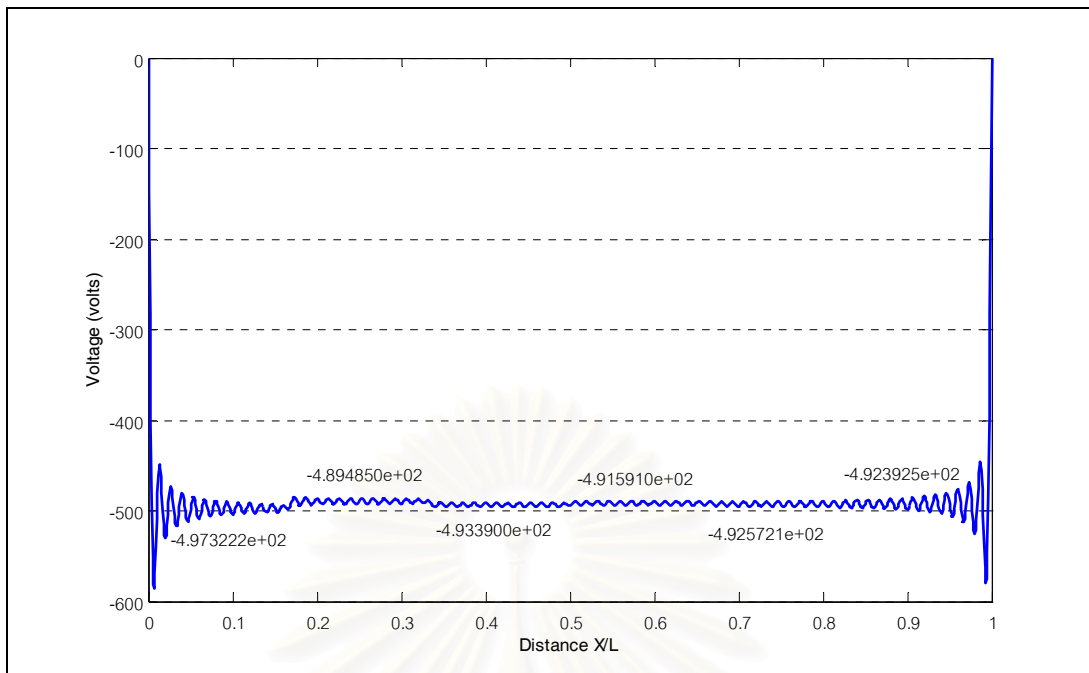
(ก)



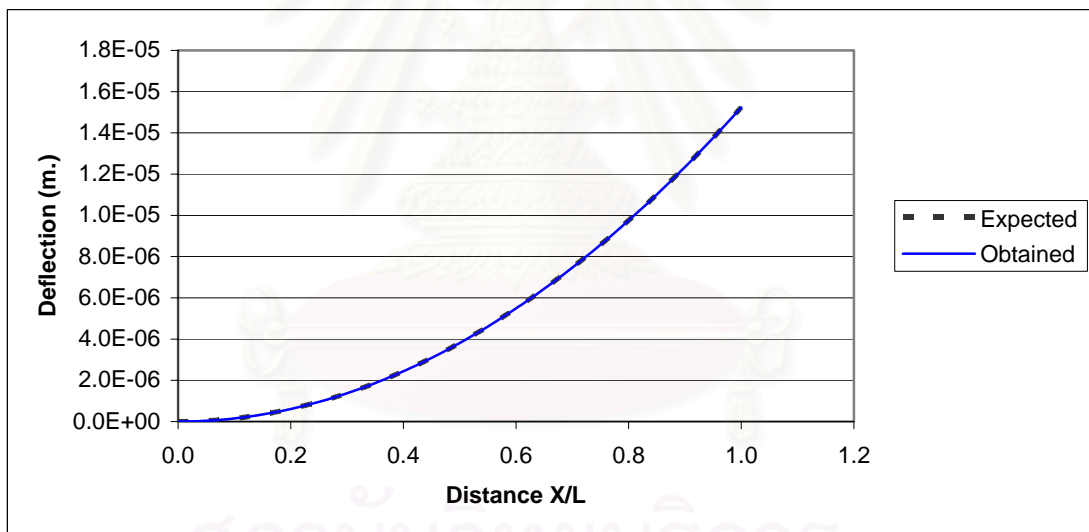
(ข)

รูปที่ 5.17 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 5 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



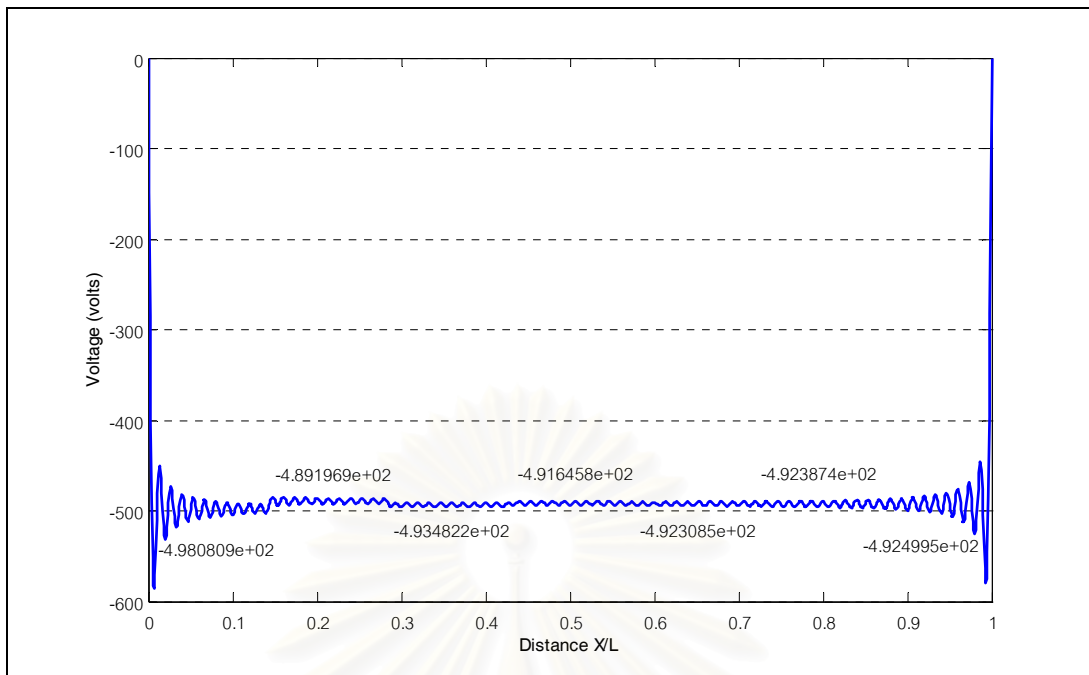
(ก)



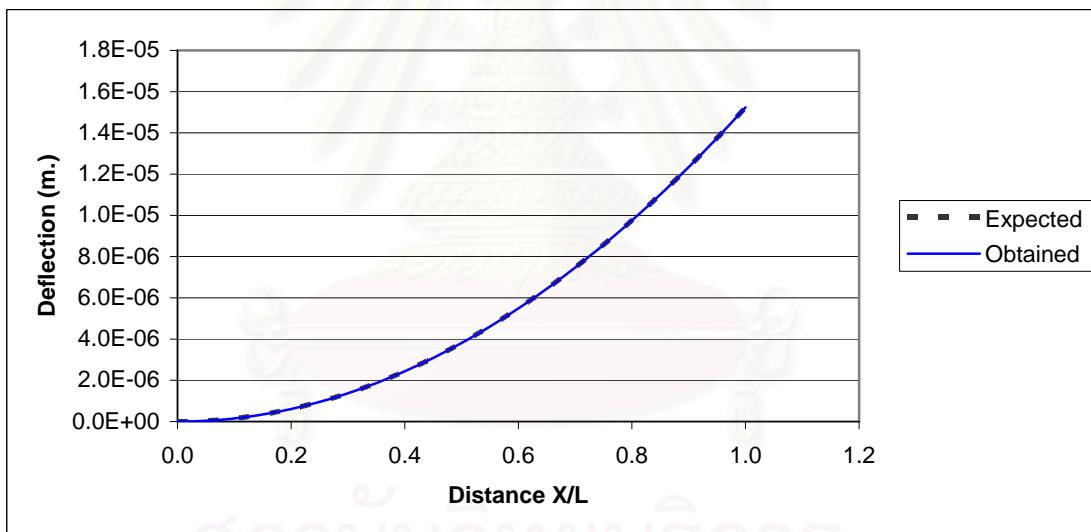
(ข)

รูปที่ 5.18 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 6 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



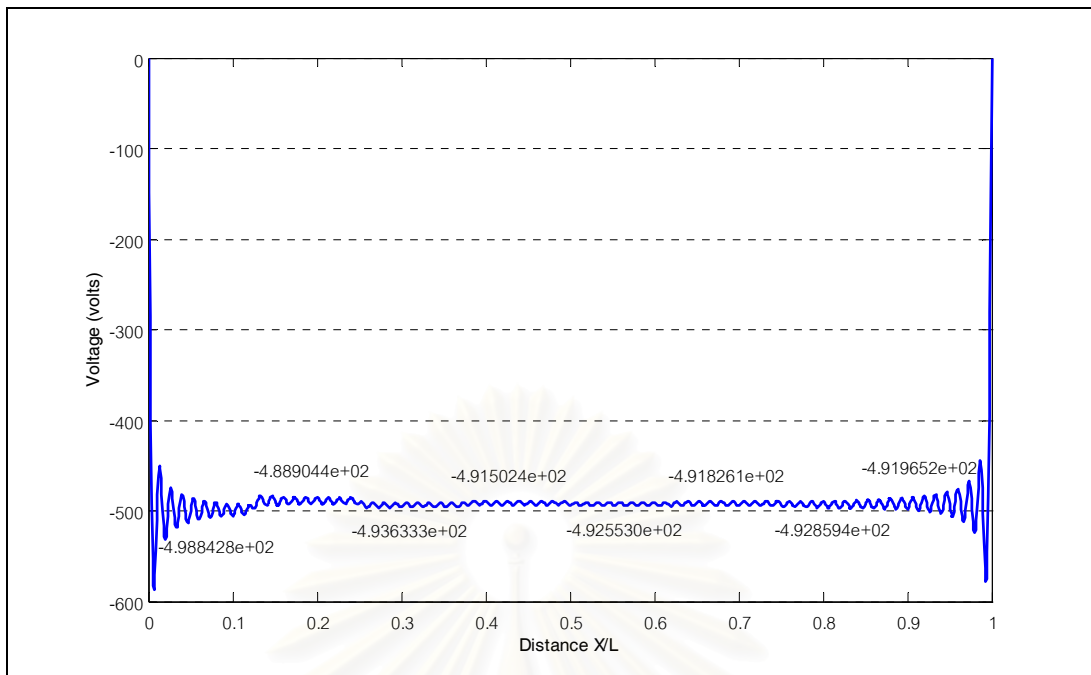
(ก)



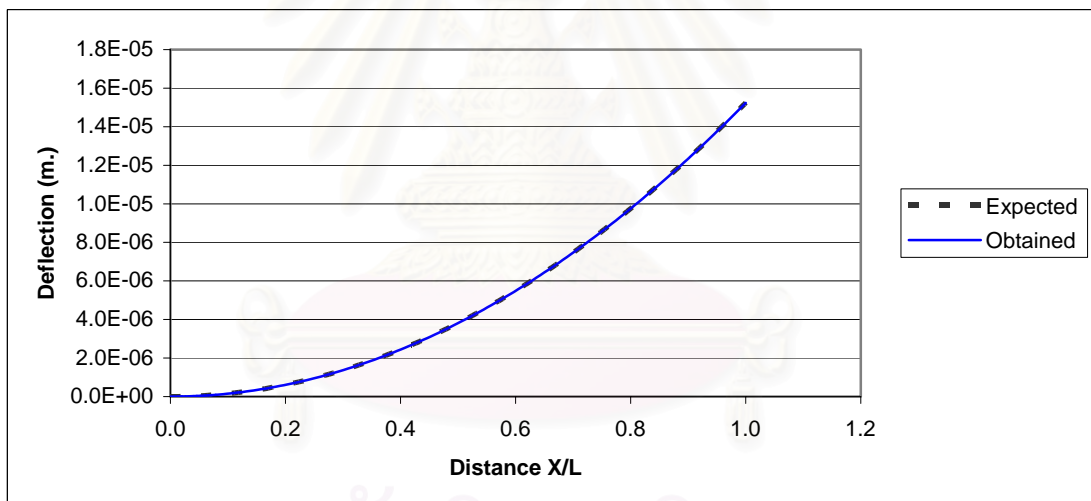
(ข)

รูปที่ 5.19 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 7 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



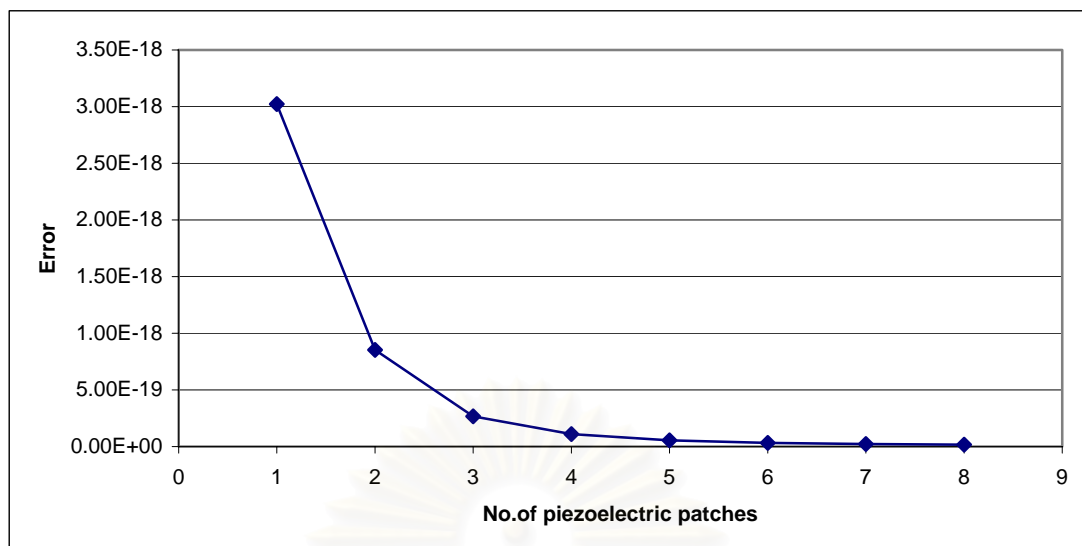
(ก)



(ข)

รูปที่ 5.20 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 8 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



รูปที่ 5.21 ค่าคลาดเคลื่อนของการโค้งตัวแบบยกกำลังสองของคานยื่นเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง

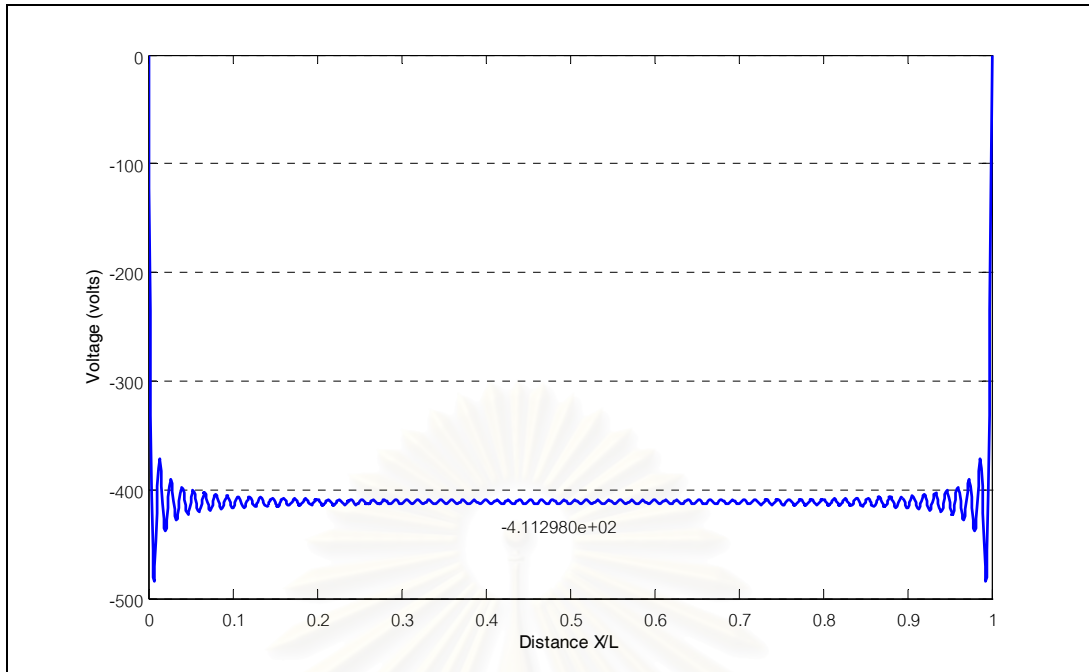
### 5.2.3 การโค้งตัวแบบยกกำลังสาม

ตัวอย่างนี้กำหนดฟังก์ชันการโค้งตัวของคานายื่นที่ต้องการ (Expected) เป็นแบบยกกำลังสามและมีค่าเท่ากับ  $X^3/(10000L^2)$  เมตร ซึ่งผลของการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เหมาะสมสำหรับการแบ่งจำนวนช่วงของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1 ถึง 8 ช่วง และรูปร่างการโค้งตัวที่ได้ (obtained) จากค่าศักย์ไฟฟ้างดกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 5.22 ถึง 5.29 ส่วนผลของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างการโค้งตัวที่ต้องการกับการโค้งตัวที่เกิดจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง ซึ่งคำนวณจากการอินทิเกรตผลต่างของค่าการโค้งตัวทั้งสองยกกำลังสองตลอดความยาวคานาแสดงไว้ในรูปที่ 5.30 จากผลที่ได้พบว่าเมื่อจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมีค่าตั้งแต่ 4 ช่วงขึ้นไปค่าการโค้งตัวก็ค่อนข้างที่จะใกล้เคียงกับที่ต้องการ และเมื่อเพิ่มจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมากขึ้นการโค้งตัวที่เกิดขึ้นจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะมีค่าใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการมากขึ้น

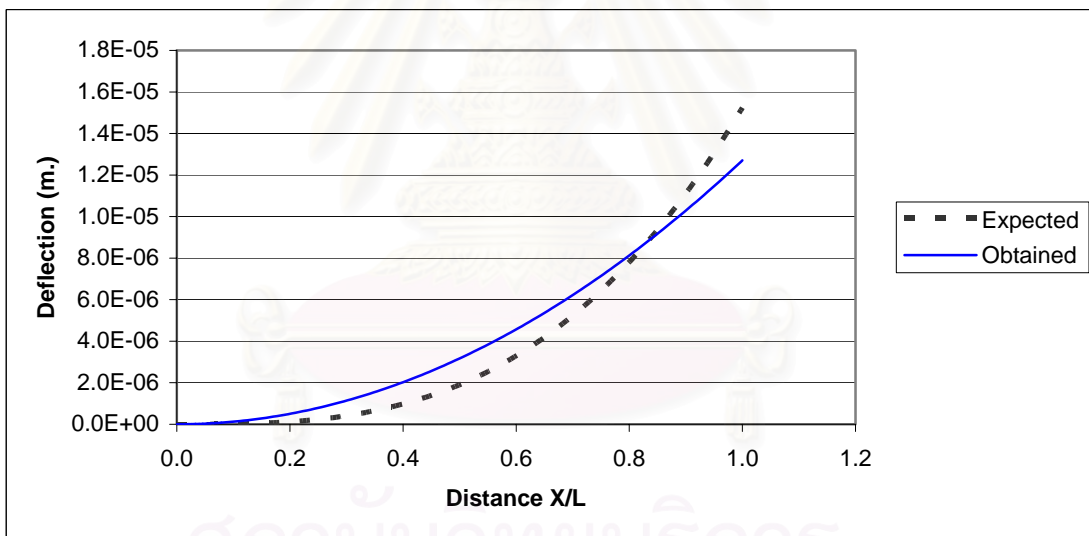


สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





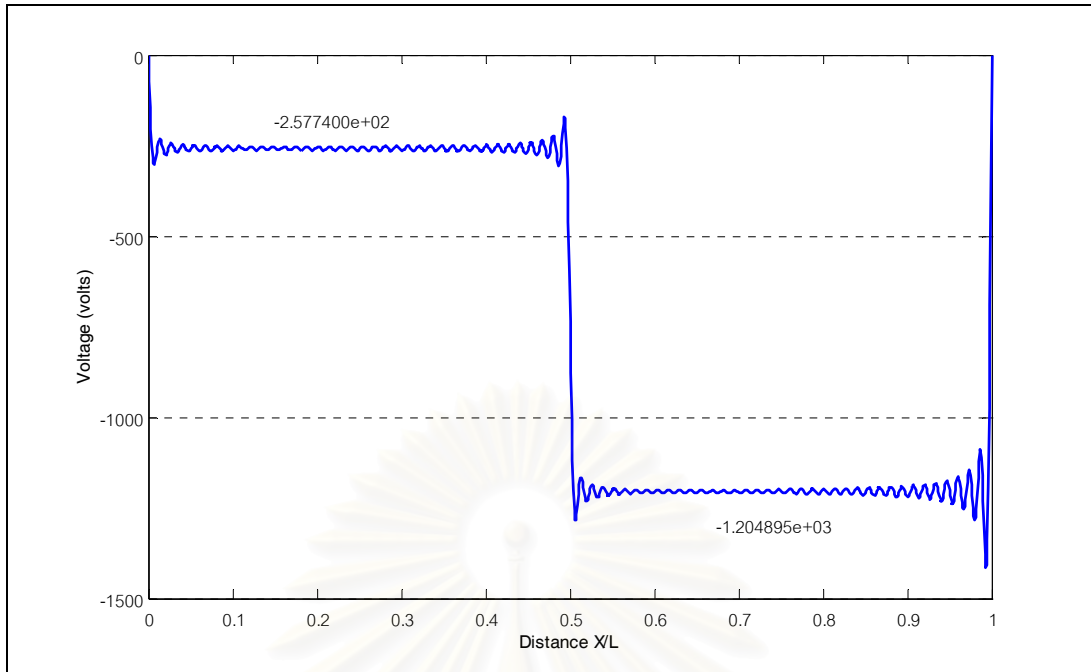
(ก)



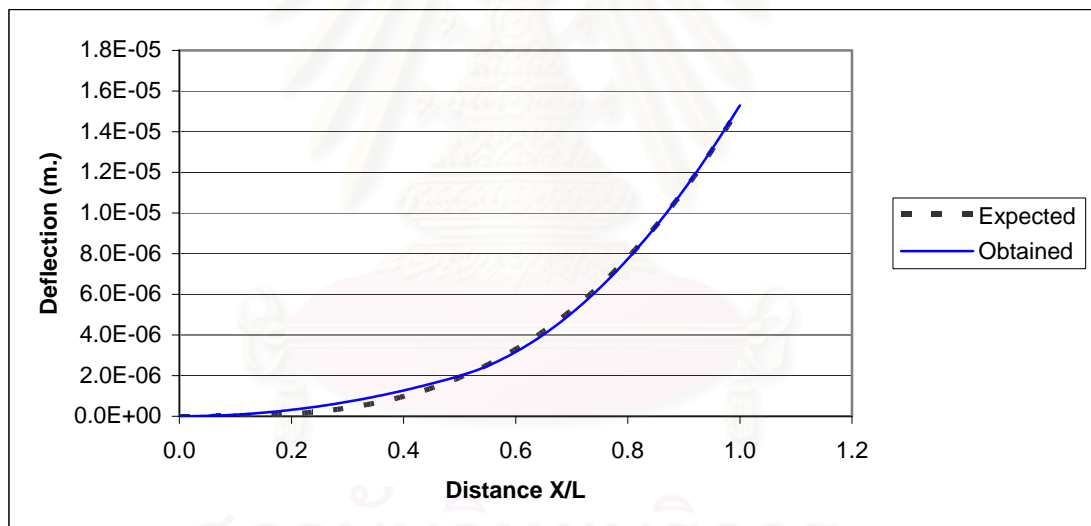
(ข)

รูปที่ 5.22 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 1 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



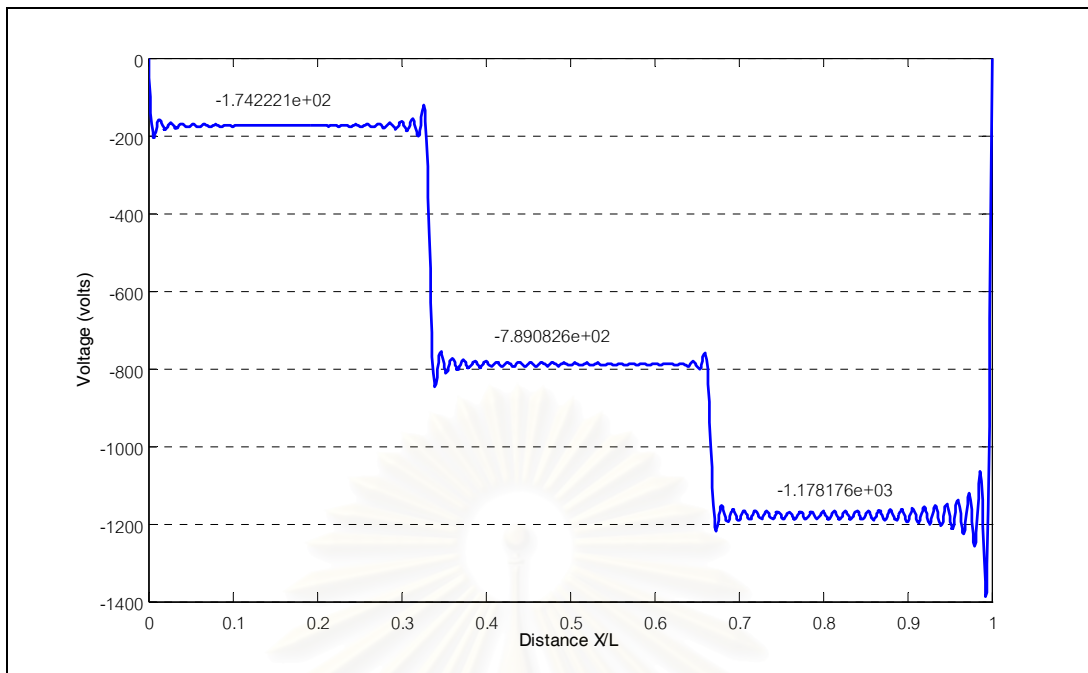
(ก)



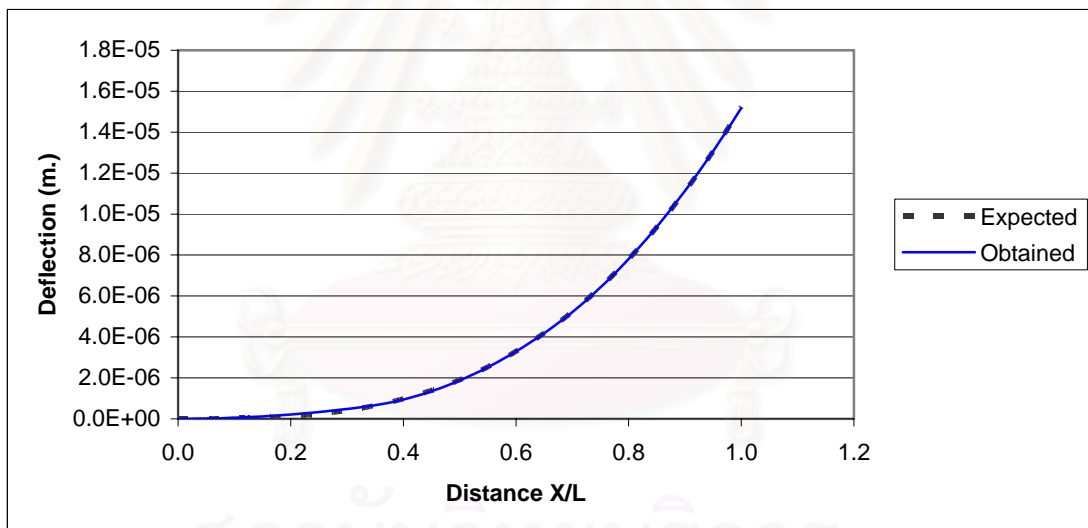
(ข)

รูปที่ 5.23 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 2 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



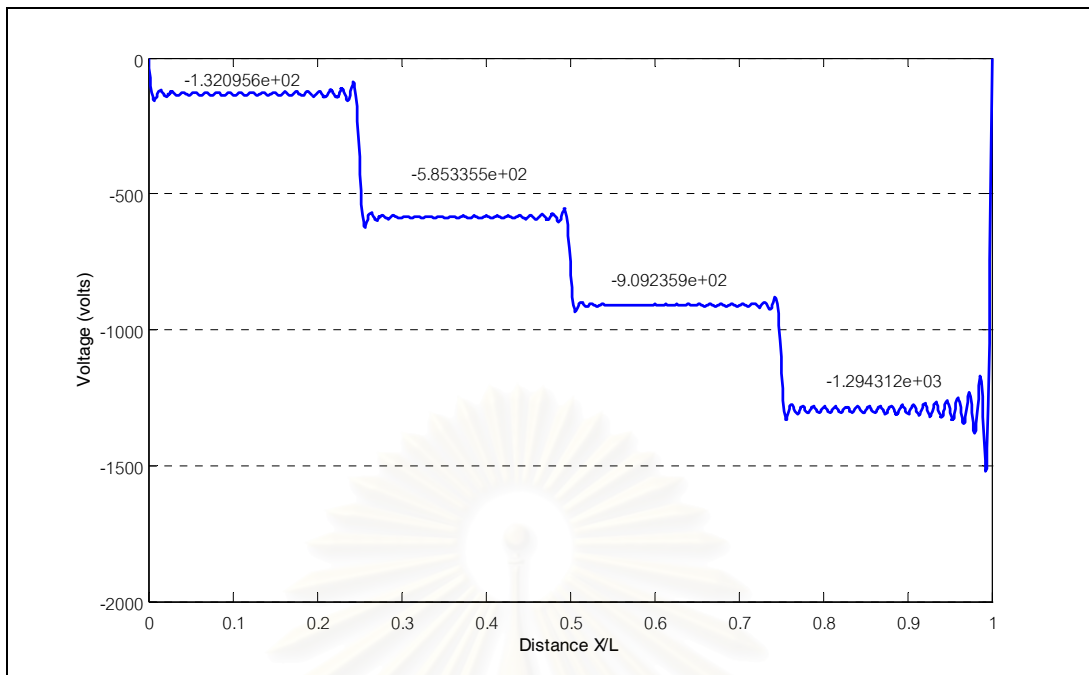
(ก)



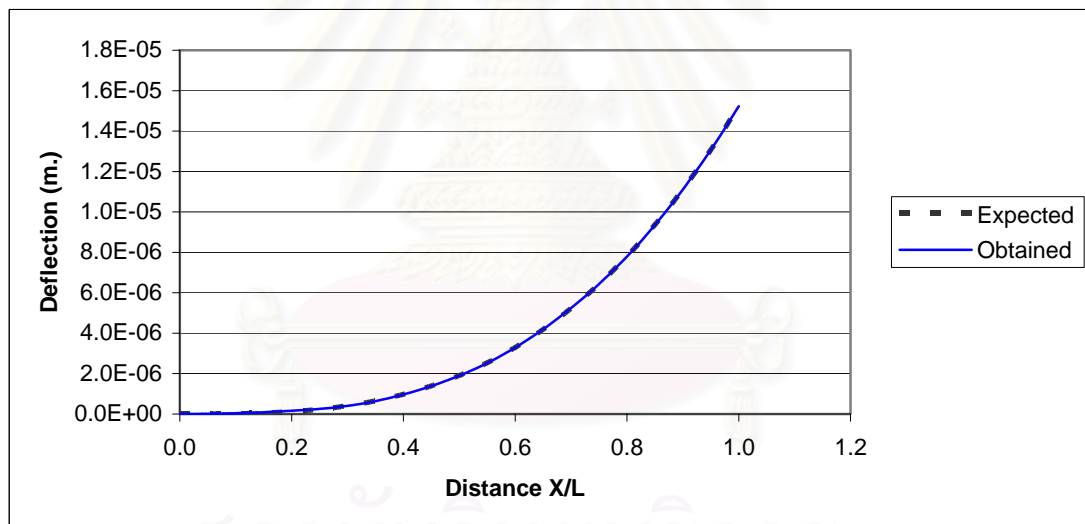
(ข)

รูปที่ 5.24 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 3 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



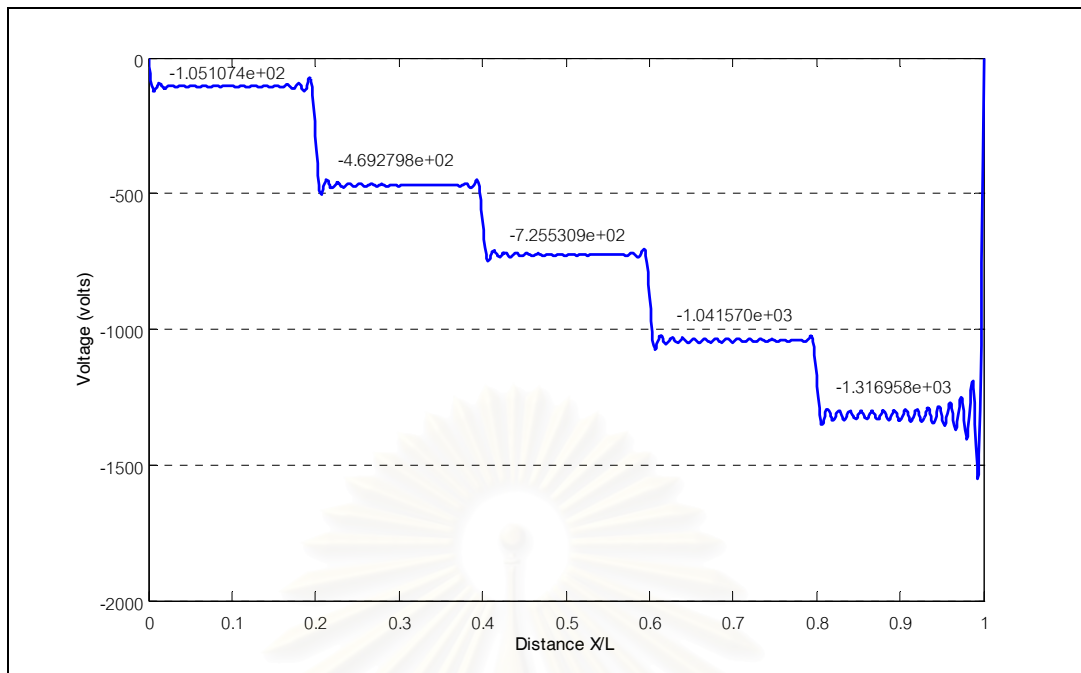
(ก)



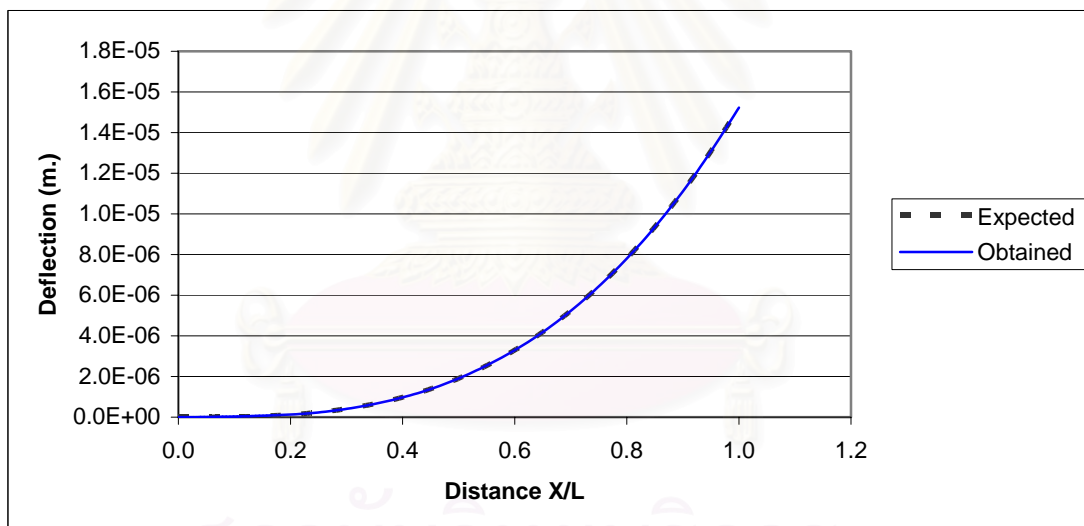
(ข)

รูปที่ 5.25 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 4 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



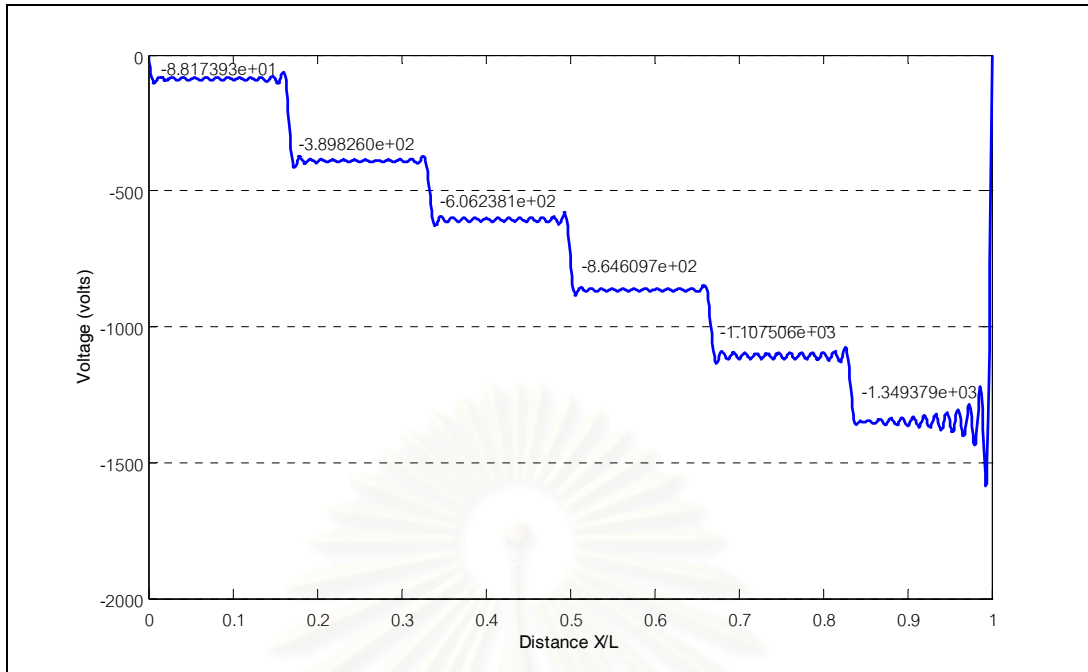
(ก)



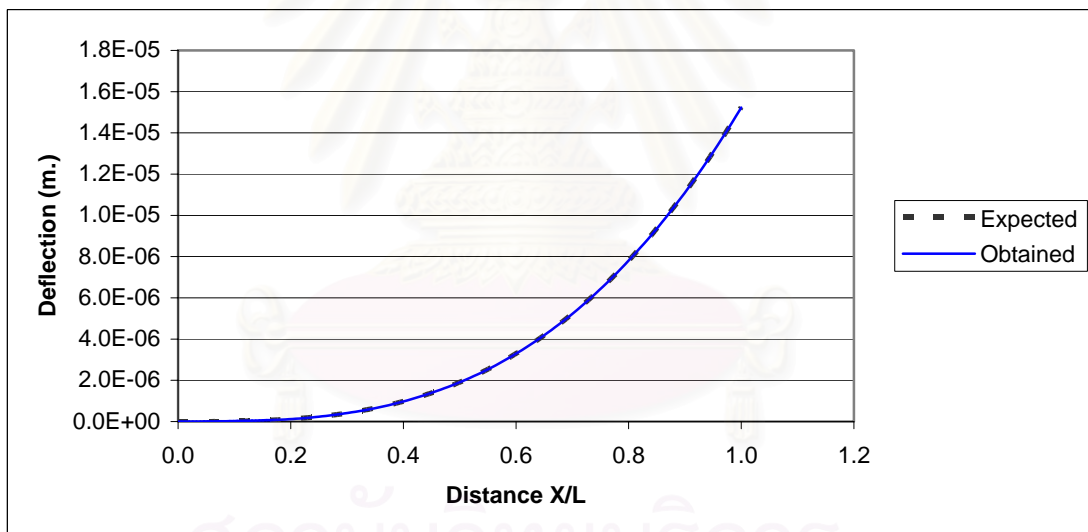
(ข)

รูปที่ 5.26 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 5 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



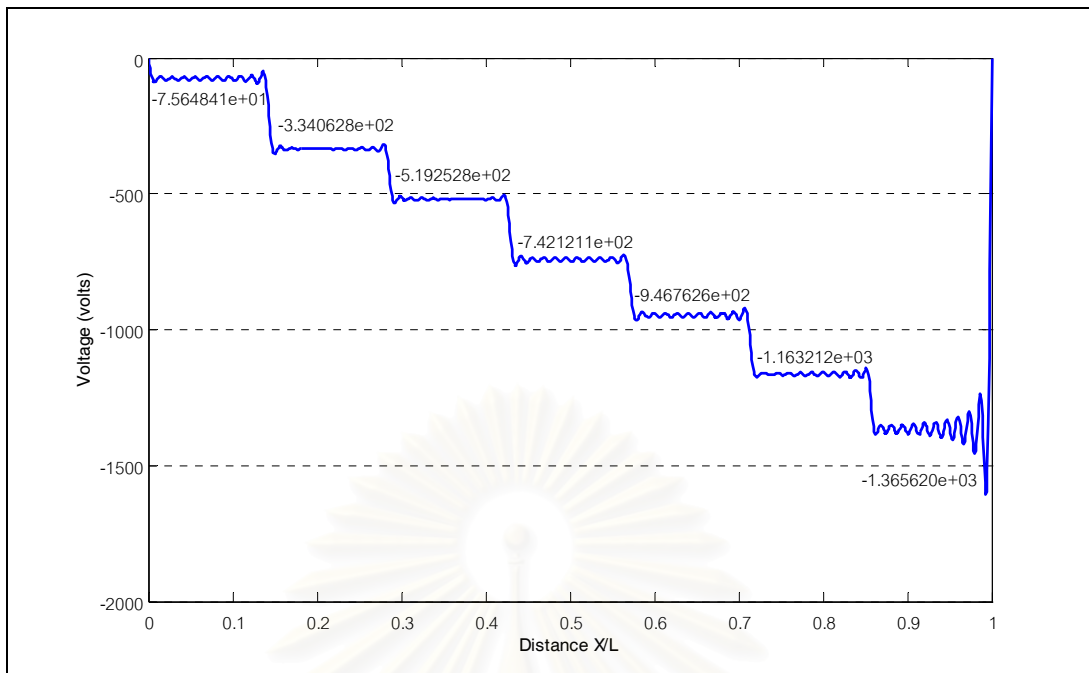
(ก)



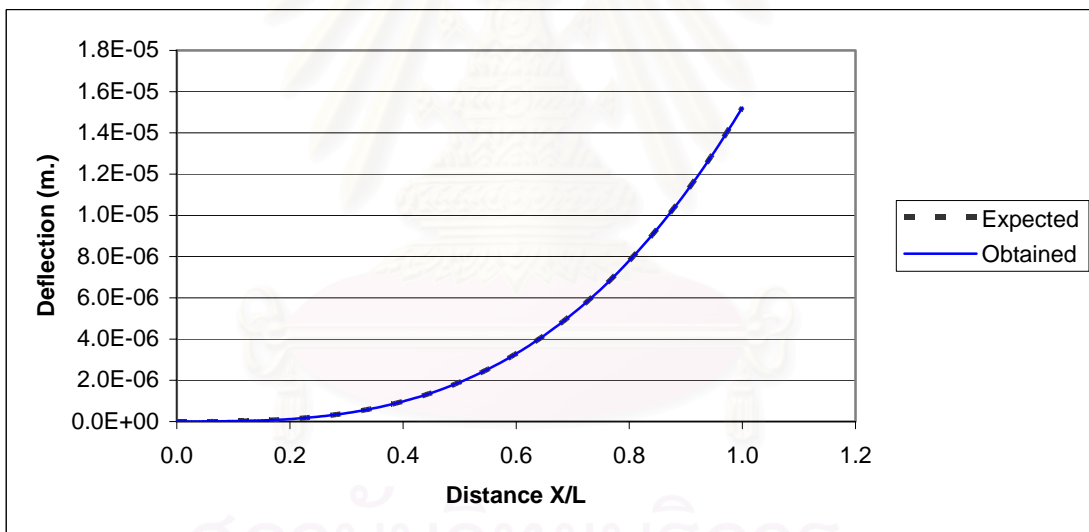
(ข)

รูปที่ 5.27 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 6 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



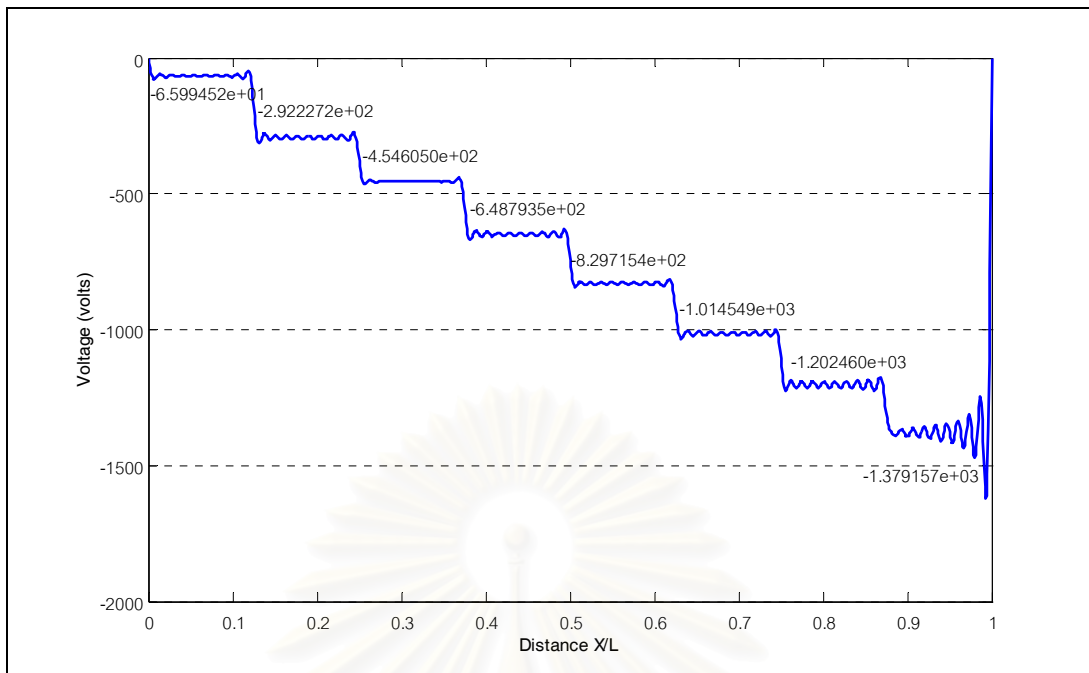
(ก)



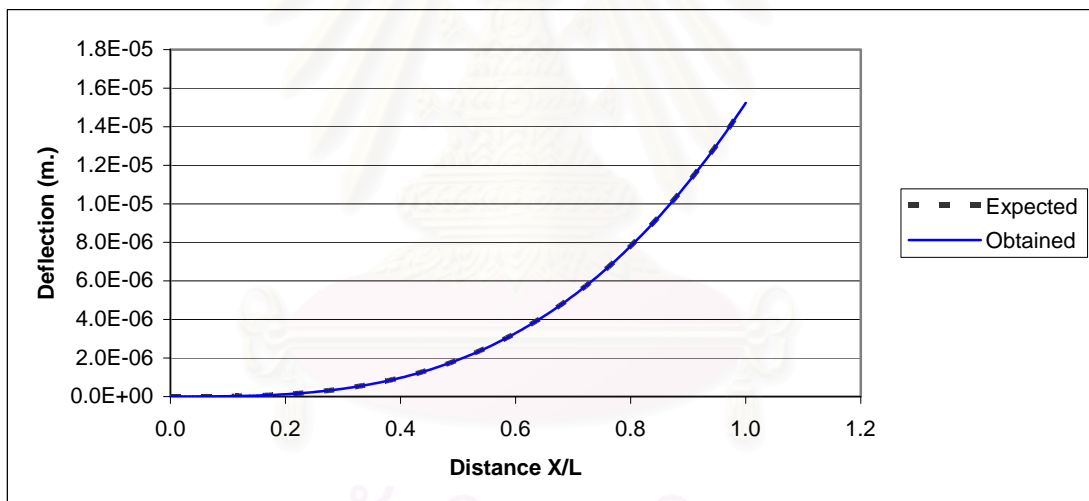
(ข)

รูปที่ 5.28 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 7 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



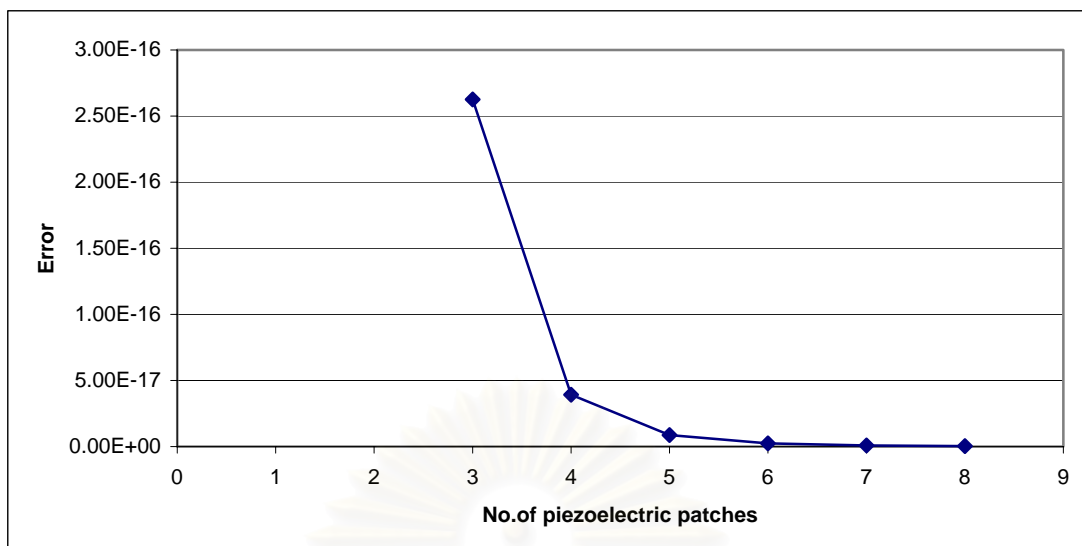
(ก)



(ข)

รูปที่ 5.29 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อพิจารณาเป็น 8 ช่วง  
 (ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้





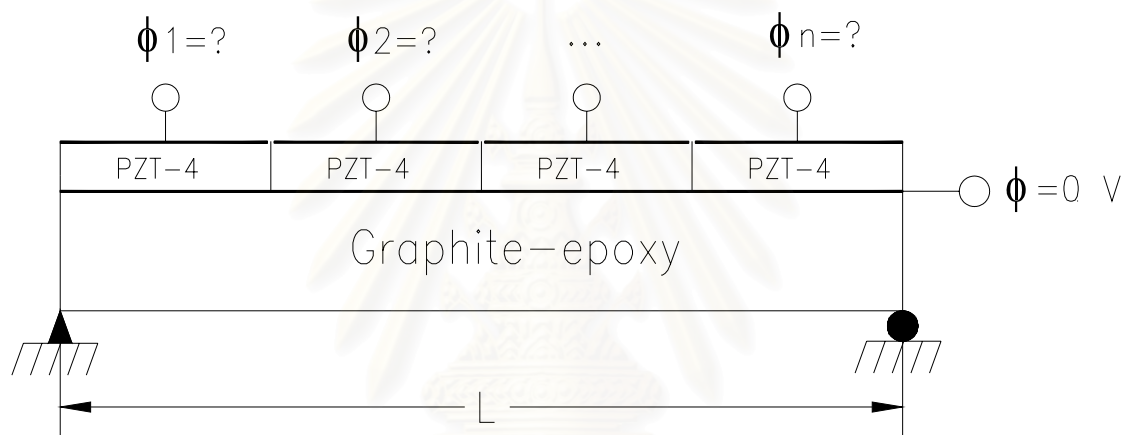
รูปที่ 5.30 ค่าคลาดเคลื่อนของการโค้งตัวแบบยกกำลังสามของคานยื่นเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่

1-8 ช่วง

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### 5.3 คานจุดรองรับธรรมดา

โครงสร้างตัวอย่างของคานจุดรองรับธรรมดาที่ทำการควบคุมการโก่งตัวในงานวิจัยนี้ จะมีลักษณะเช่นเดียวกับโครงสร้างตัวอย่างที่ 4.3.2 ของบทที่ 4 ซึ่งเป็นโครงสร้างคานที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุ 2 ชั้น คือ ชั้นล่างเป็นแกรไฟต์-อีพอกซีหนา 0.002 เมตรและชั้นบนเป็นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 หนา 0.0005 เมตร ทุกชั้นของวัสดุยาวเท่ากับ 0.025 เมตร โดยที่คุณสมบัติของวัสดุแต่ละชนิดแสดงดังตารางที่ 4.12 ของบทที่ 4 พฤติกรรมของโครงสร้างคานจุดรองรับธรรมดานี้จะสมมติเป็นแบบความเครียดระนาบระนาบ (plane strain) ตามแบบการศึกษาในอดีต สำหรับการควบคุมการโก่งตัวในการศึกษานี้ชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะถูกแบ่งออกเป็นช่วงๆและกำหนดให้ผิวล่างของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกของทุกช่วงมีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์โวลต์ ดังแสดงในรูปที่ 5.31 จากนั้นจึงทำการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในแต่ละช่วงที่ทำให้เกิดการโก่งตัวใกล้เคียงกับการโก่งตัวที่ต้องการโดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค่างตามที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 5.1

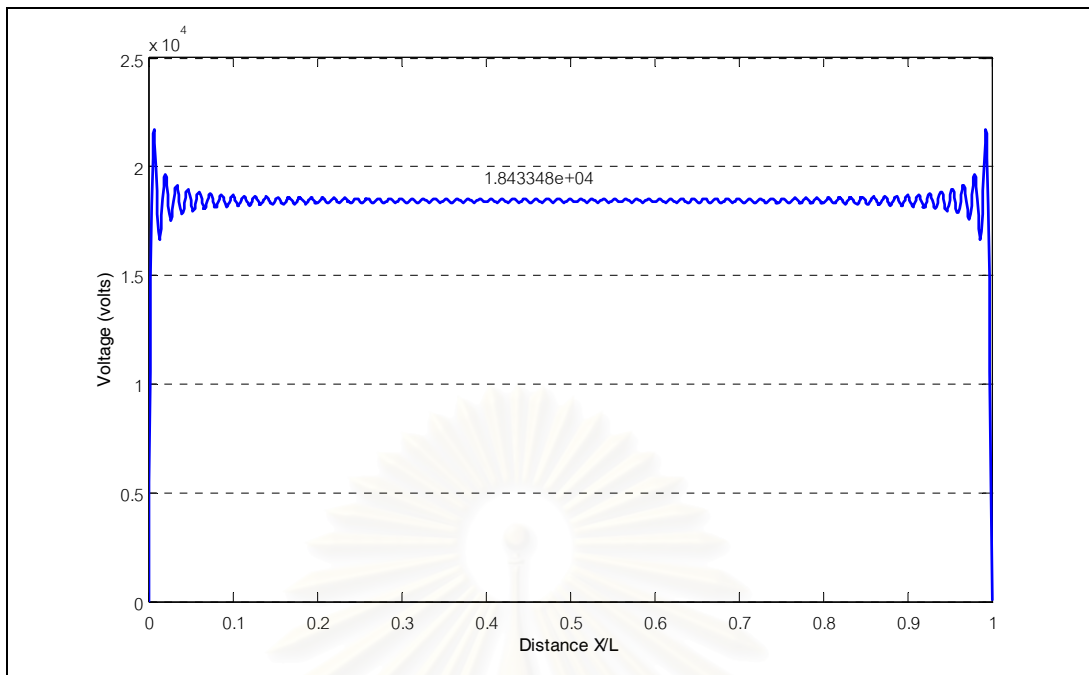


รูปที่ 5.31 ลักษณะโครงสร้างคานจุดรองรับธรรมดาที่จะทำการควบคุมการโก่งตัว

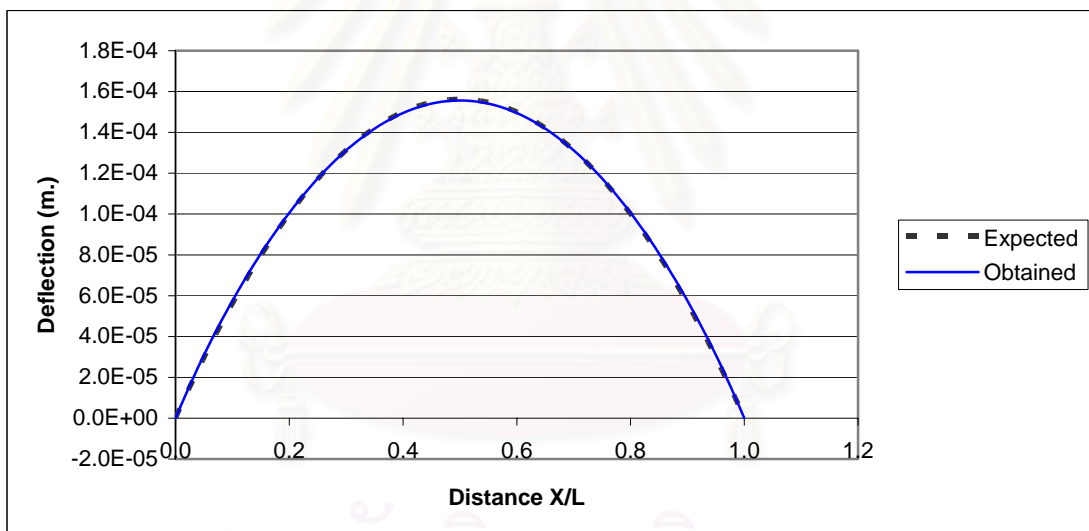
ในการคำนวณหาการโก่งตัวด้วยวิธีเลเยอร์ไวส์นี้จะพิจารณาแบ่งโครงสร้างออกเป็นชั้นๆ จำนวน  $8/2$  (แกรไฟต์-อีพอกซี/PZT-4) และเลือกใช้จำนวนเทอมของฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวคาน (แกน  $x$ ) สำหรับการกระจัด  $u, w$  และศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  เท่ากับ 40 เทอมและ 150 เทอมตามลำดับ ซึ่งการควบคุมการโก่งตัวของคานจุดรองรับธรรมดานี้จะกำหนดรูปแบบการโก่งตัวที่ต้องการขึ้น 3 แบบ คือ แบบกำลังสอง แบบกำลังสาม และแบบยกกำลังสี่ จากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เหมาะสมสำหรับกรณีการแบ่งช่วงตั้งแต่ 1 จนถึง 8 ช่วง ผลลัพธ์ที่ได้จะแสดงในลำดับต่อไป

### 5.3.1 การโค้งตัวแบบยกกำลังสอง

ตัวอย่างนี้กำหนดฟังก์ชันการโค้งตัวของคานาจุดรองรับธรรมดาที่ต้องการ (Expected) เป็นแบบยกกำลังสอง และมีค่าเท่ากับ  $X(L-X)$  เมตร ซึ่งผลของการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เหมาะสมสำหรับการแบ่งจำนวนช่วงของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1 ถึง 8 ช่วง และรูปร่างการโค้งตัวที่ได้ (obtained) จากค่าศักย์ไฟฟ้างกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 5.32 ถึง 5.39 ส่วนผลของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างการโค้งตัวที่ต้องการกับการโค้งตัวที่เกิดจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง ซึ่งคำนวณจากการอินทิเกรตผลต่างของค่าการโค้งตัวทั้งสองยกกำลังสองตลอดความยาวคานาแสดงไว้ในรูปที่ 5.40 จากผลที่ได้พบว่าสามารถป้อนค่าศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพียงช่วงเดียวก็จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าการโค้งตัวที่ต้องการ และถ้ายังเพิ่มจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมากขึ้นการโค้งตัวที่เกิดขึ้นจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะมีค่าใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการมากขึ้น



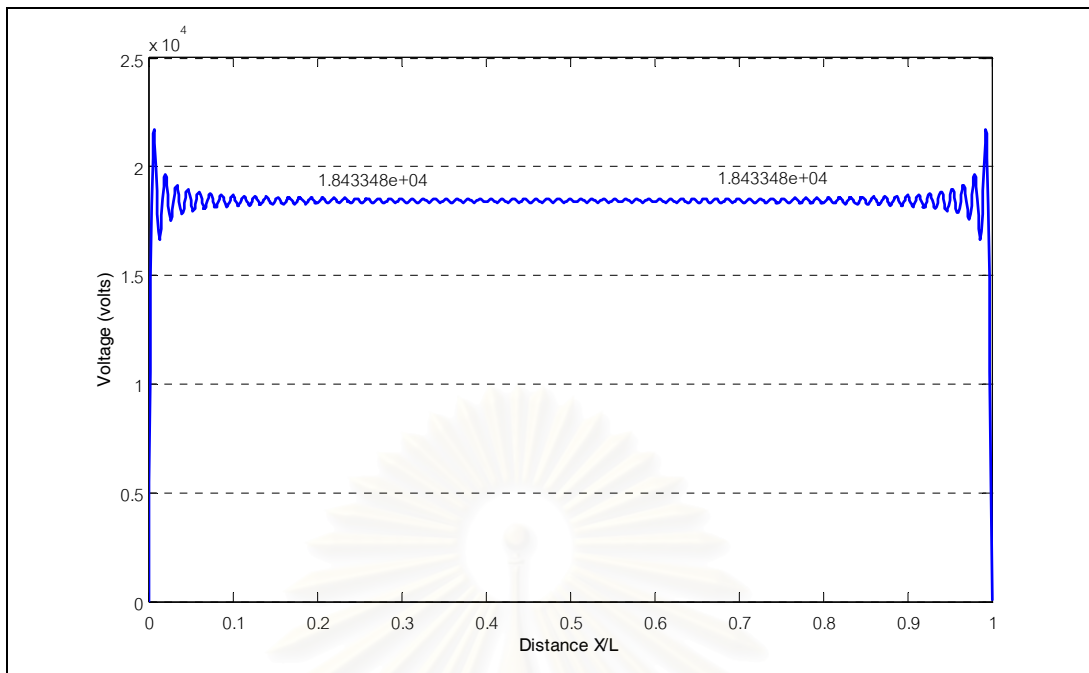
(ก)



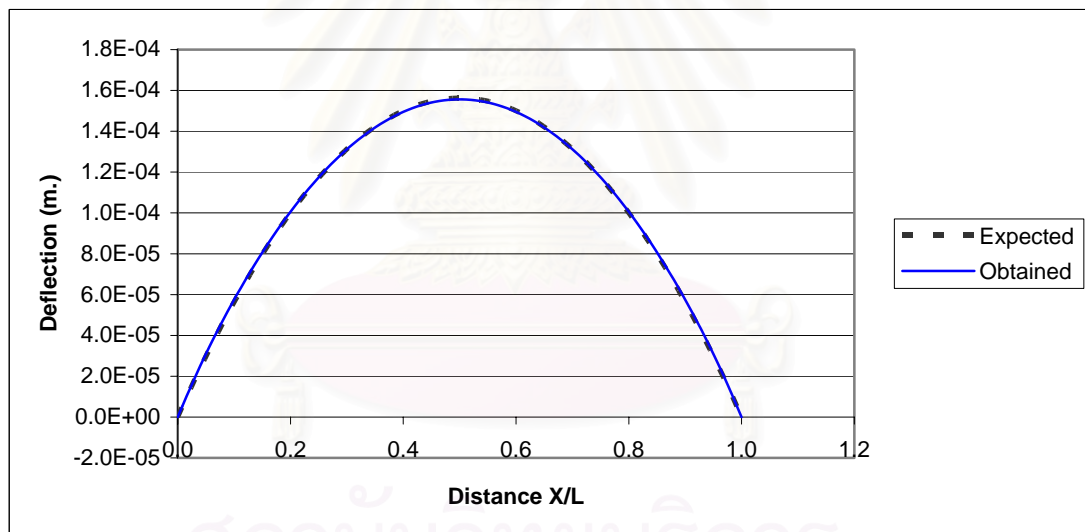
(ข)

รูปที่ 5.32 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 1 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



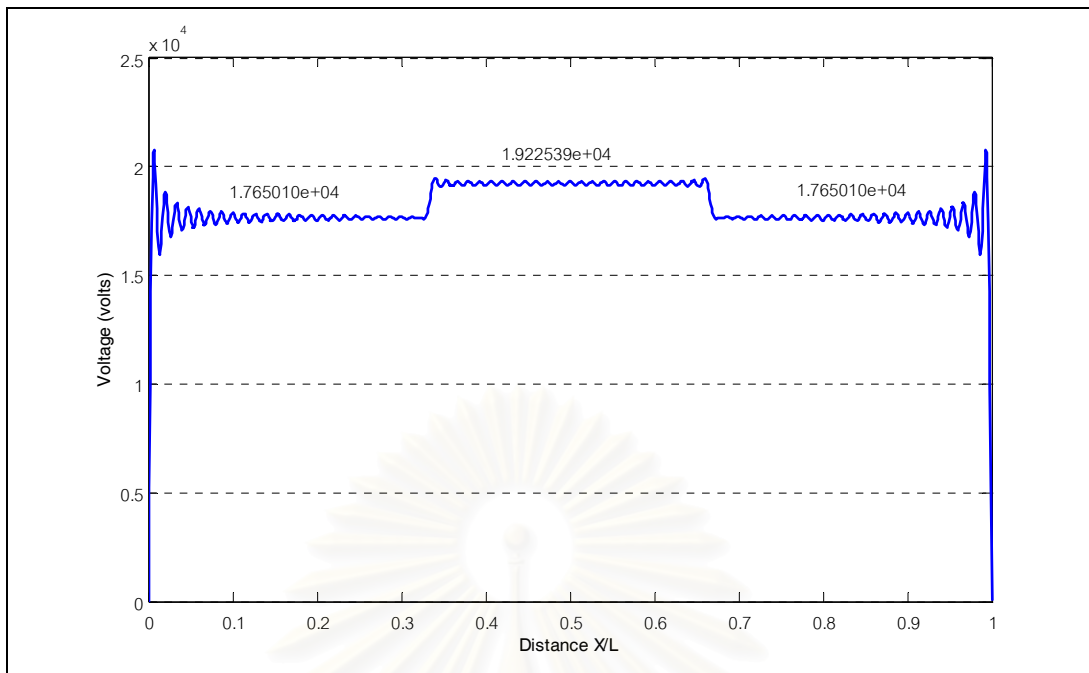
(ก)



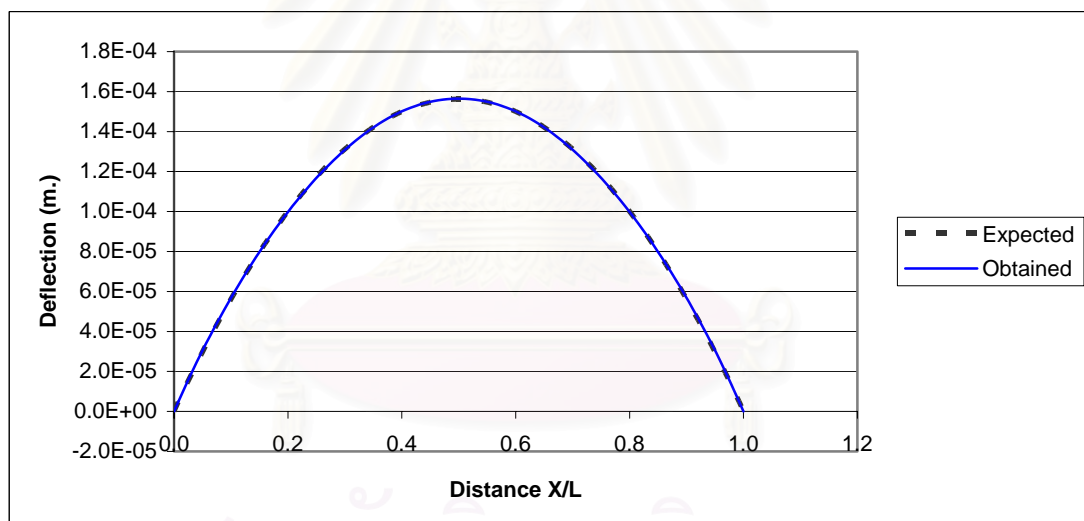
(ข)

รูปที่ 5.33 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 2 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



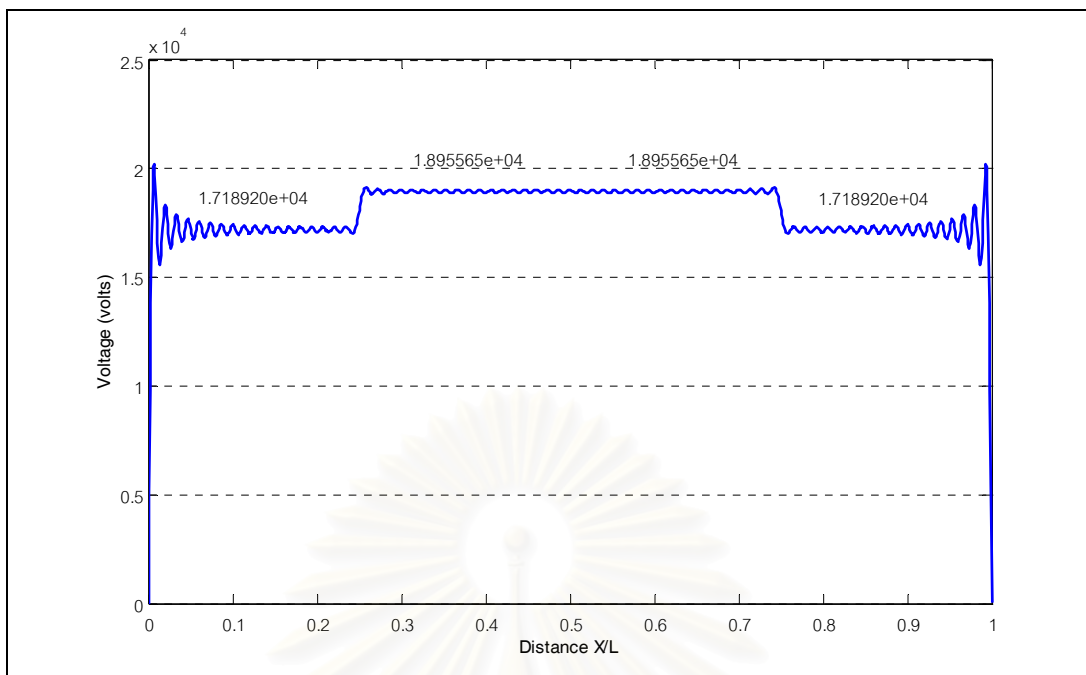
(ก)



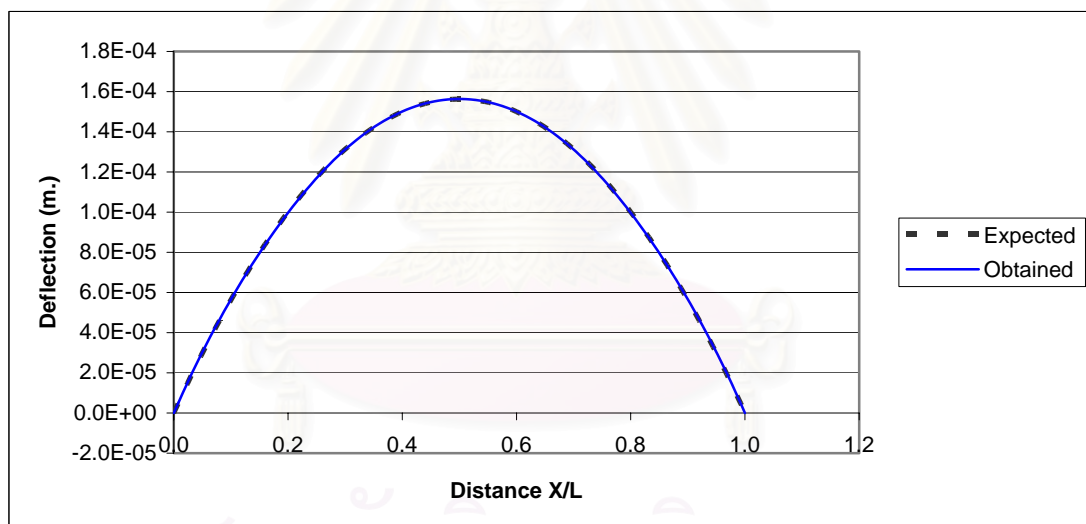
(ข)

รูปที่ 5.34 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 3 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



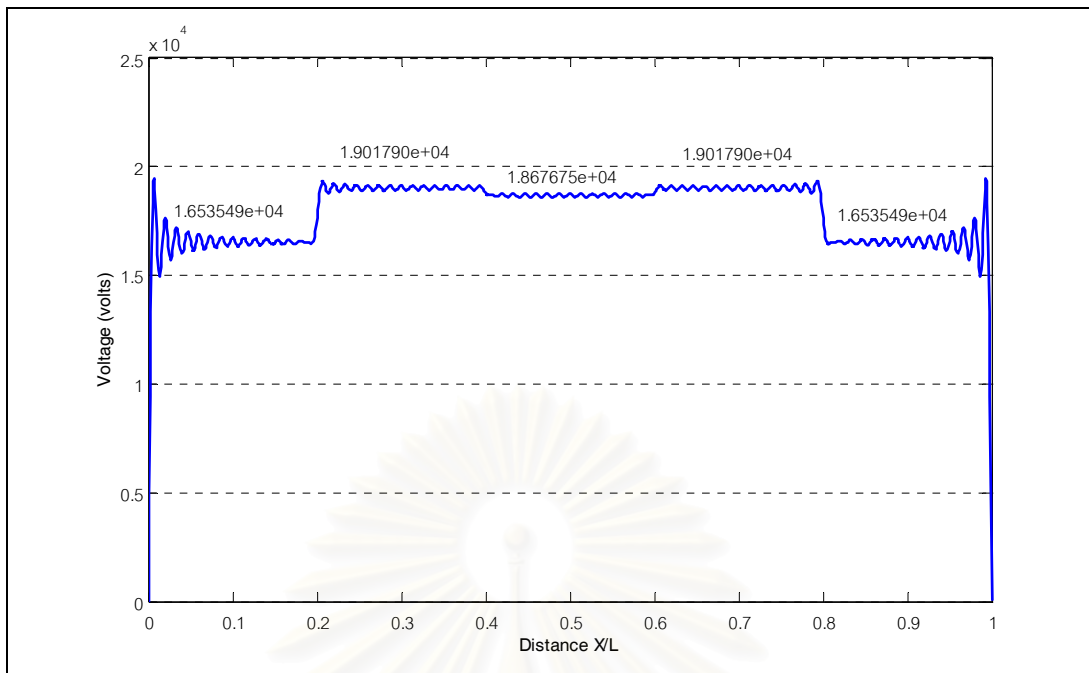
(ก)



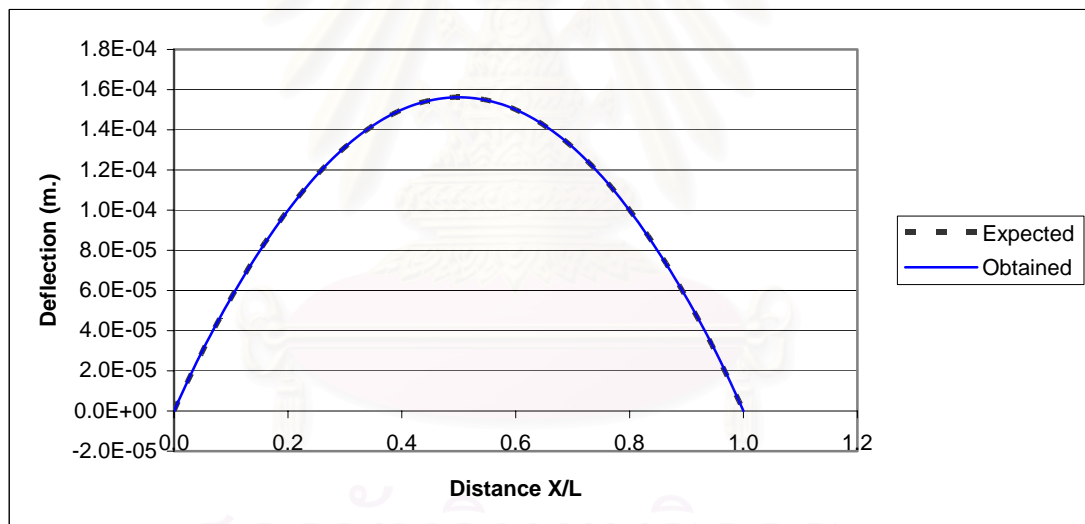
(ข)

รูปที่ 5.35 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 4 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



(ก)

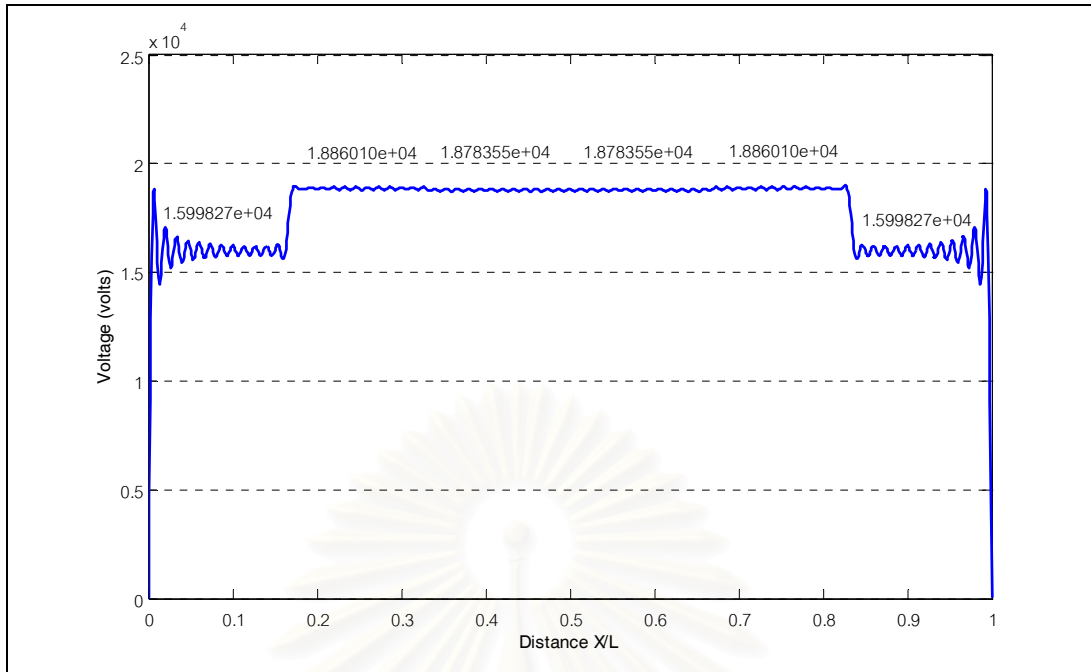


(ข)

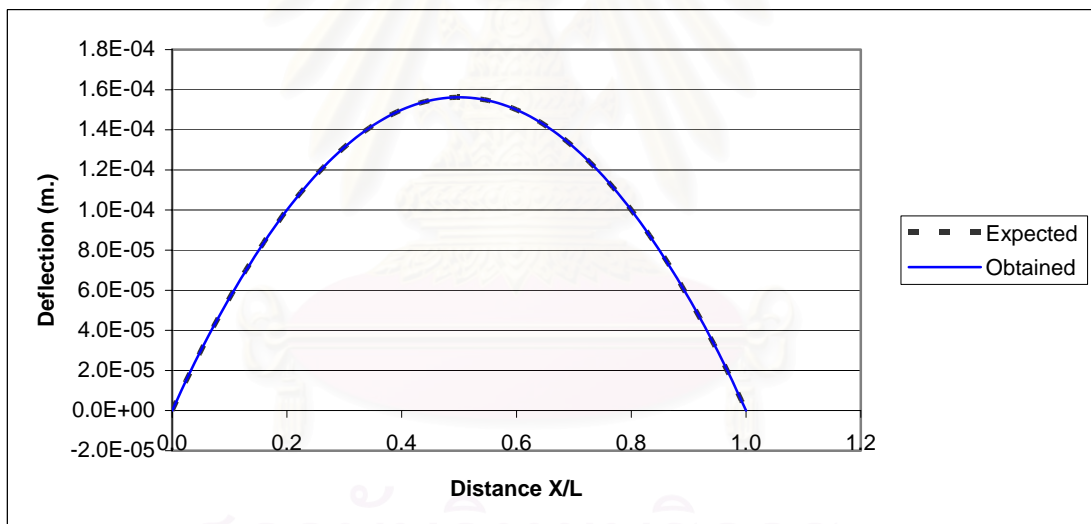
รูปที่ 5.36 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 5 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้





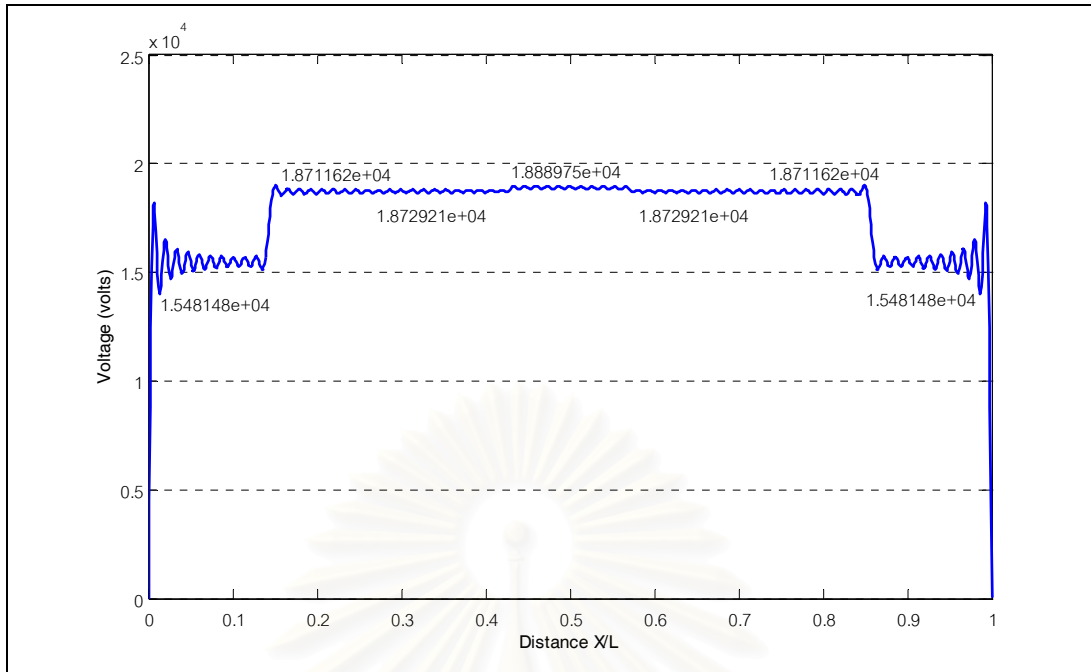
(ก)



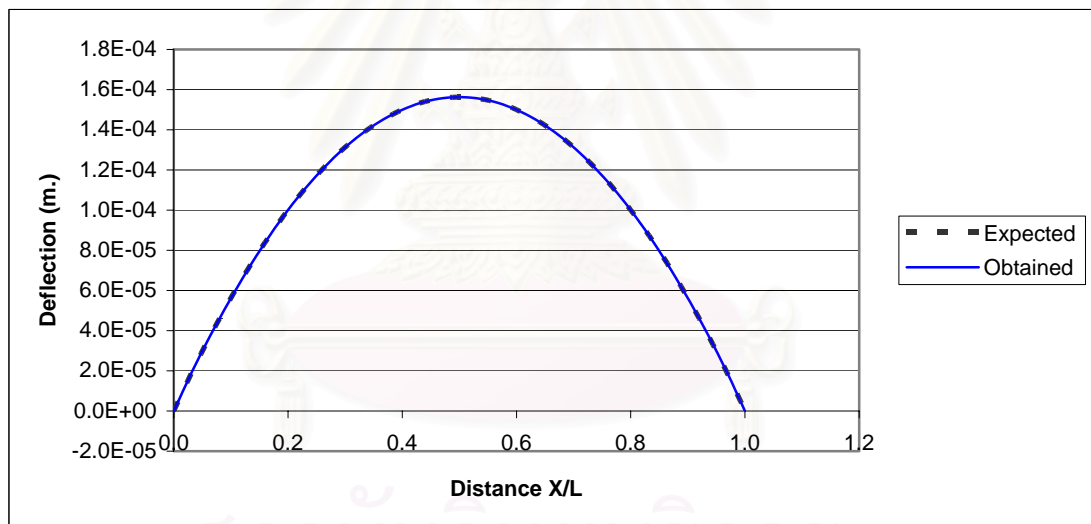
(ข)

รูปที่ 5.37 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 6 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



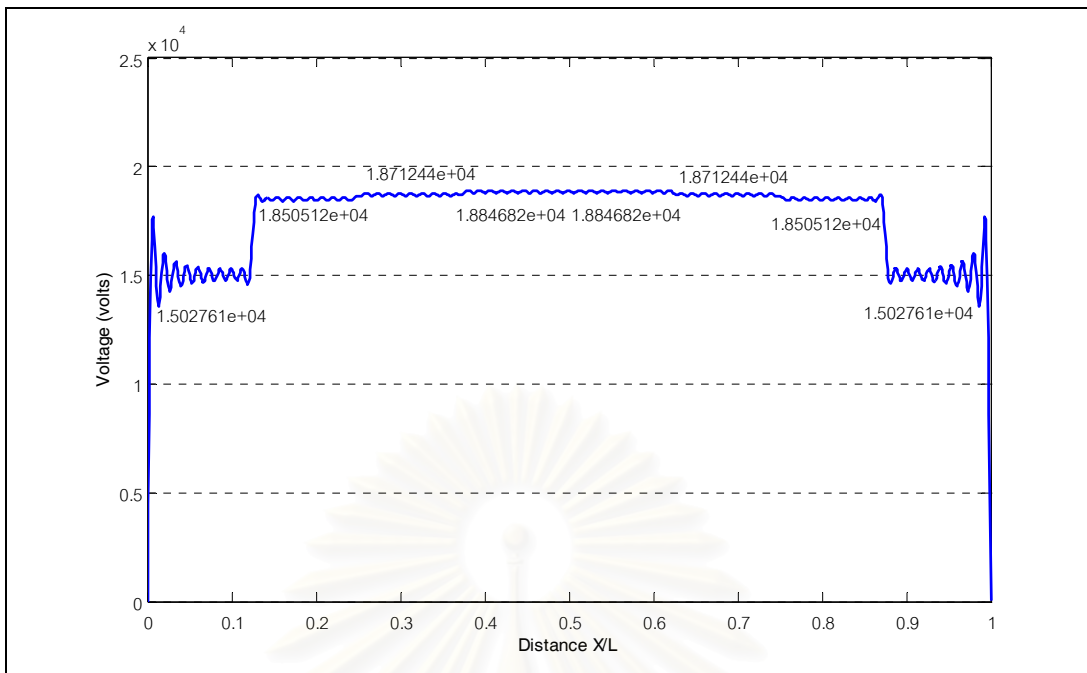
(ก)



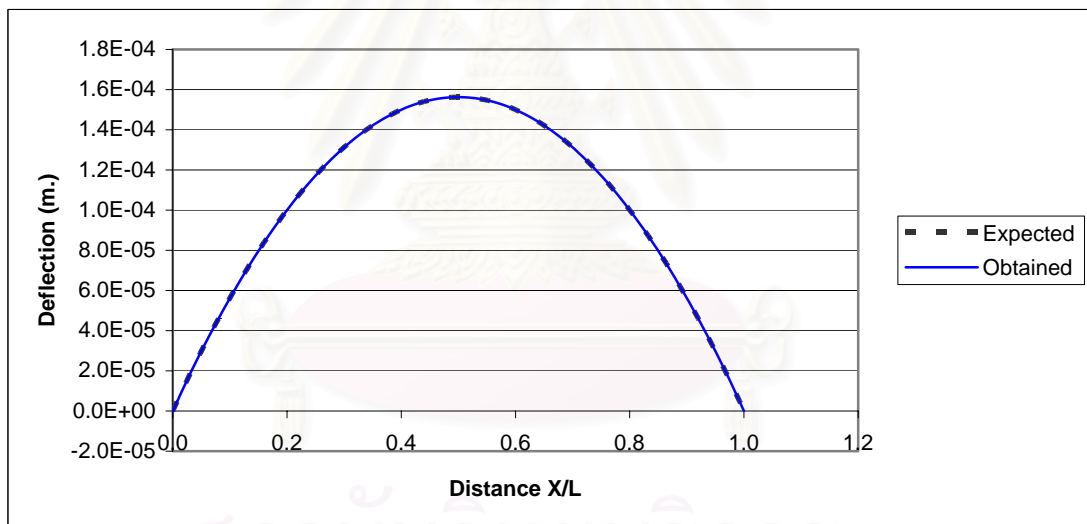
(ข)

รูปที่ 5.38 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 7 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



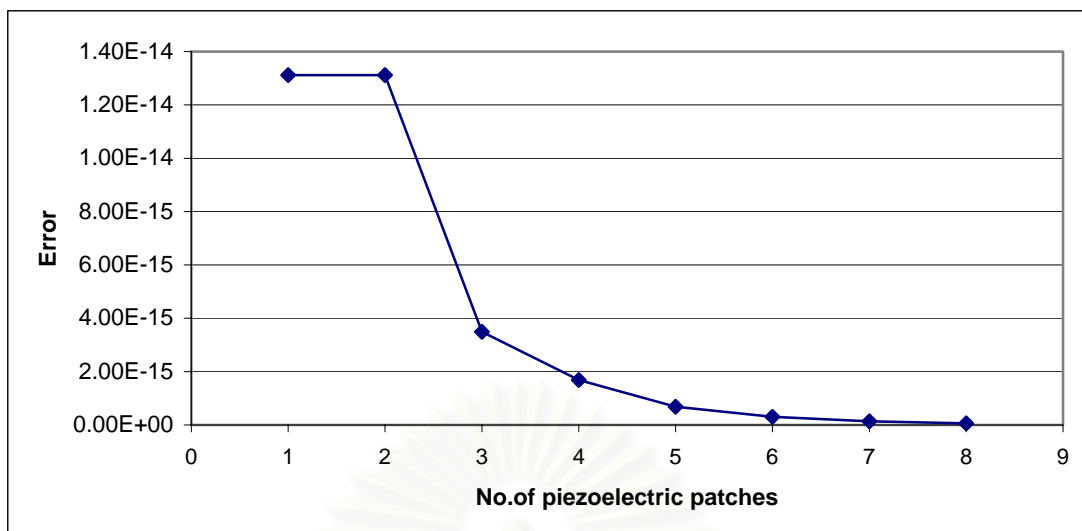
(ก)



(ข)

รูปที่ 5.39 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 8 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



รูปที่ 5.40 ค่าคลาดเคลื่อนของการโค้งตัวแบบยกกำลังสองของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง

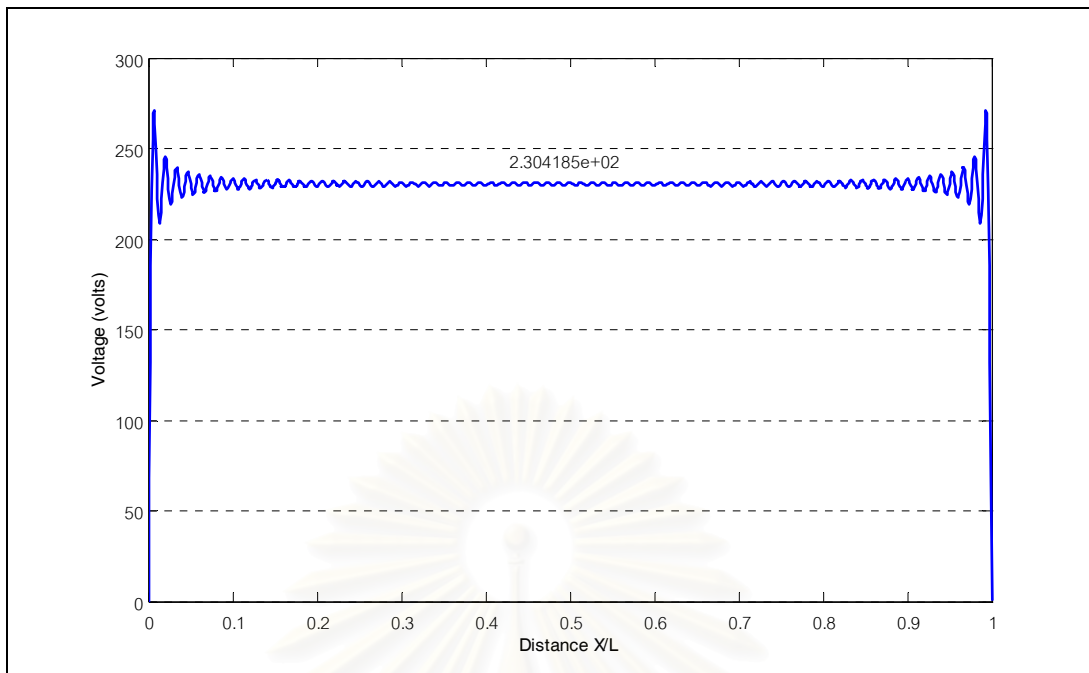
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### 5.3.2 การโค้งตัวแบบยกกำลังสาม

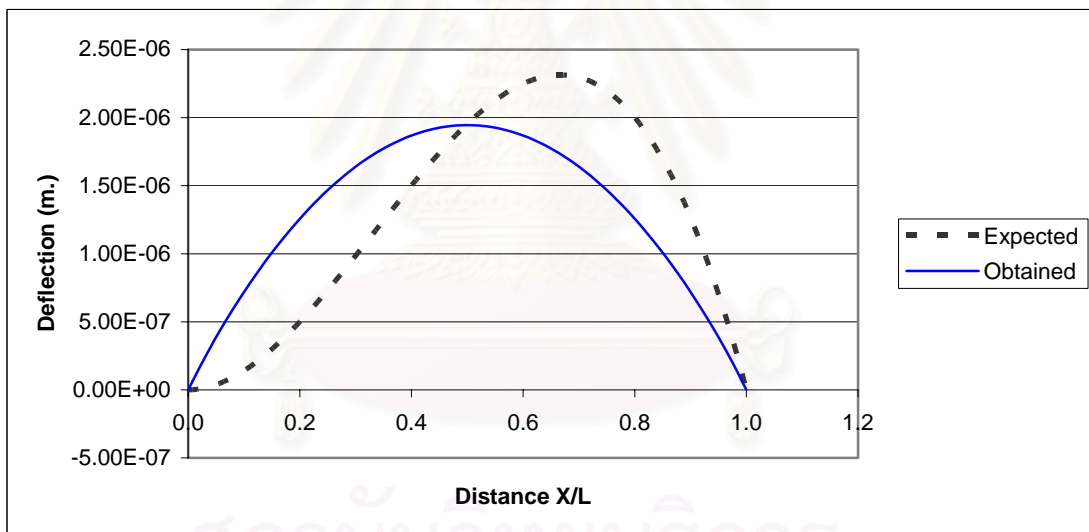
ตัวอย่างนี้กำหนดฟังก์ชันการโค้งตัวของคานาจุดรองรับธรรมดาที่ต้องการ (Expected) เป็นแบบยกกำลังสามและมีค่าเท่ากับ  $X^2(L-X)$  เมตร ซึ่งผลของการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เหมาะสมสำหรับการแบ่งจำนวนช่วงของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1 ถึง 8 ช่วง และรูปร่างการโค้งตัวที่ได้ (obtained) จากค่าศักย์ไฟฟ้างกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 5.41 ถึง 5.48 ส่วนผลของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างการโค้งตัวที่ต้องการกับการโค้งตัวที่เกิดจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง ซึ่งคำนวณจากการอินทิเกรตผลต่างของค่าการโค้งตัวทั้งสองยกกำลังสองตลอดความยาวคานาแสดงไว้ในรูปที่ 5.49 จากผลที่ได้พบว่าเมื่อจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมีค่าตั้งแต่ 6 ช่วงขึ้นไปค่าการโค้งตัวก็ค่อนข้างที่จะใกล้เคียงกับที่ต้องการ และเมื่อเพิ่มจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมากขึ้นการโค้งตัวที่เกิดขึ้นจากการป้อนค่าศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะมีค่าใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการมากขึ้น



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



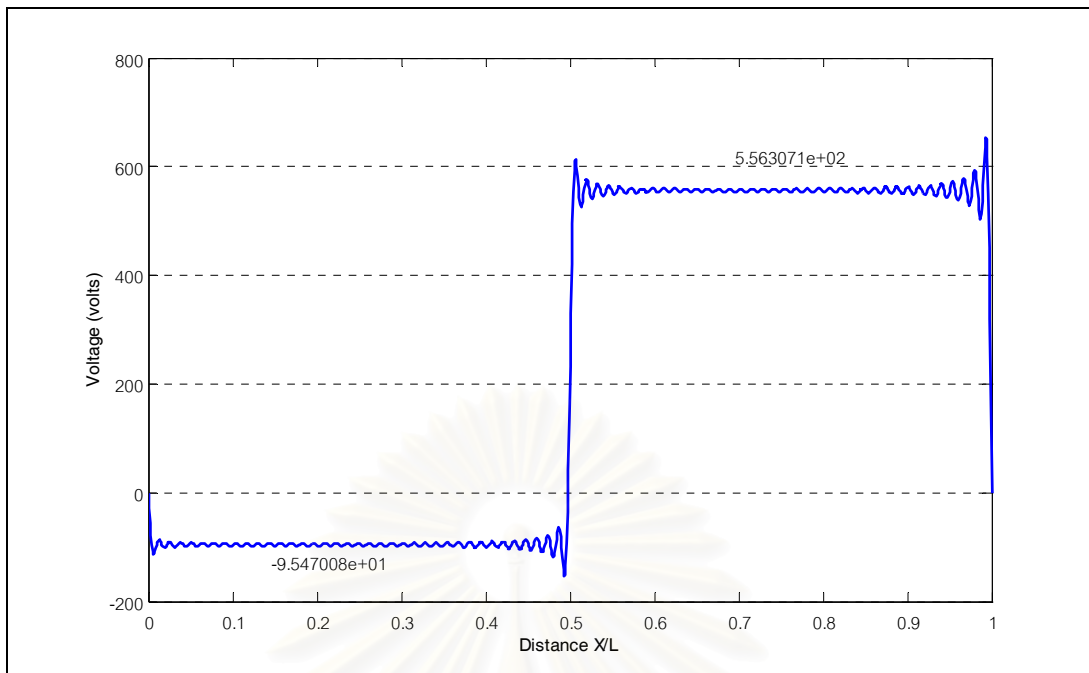
(ก)



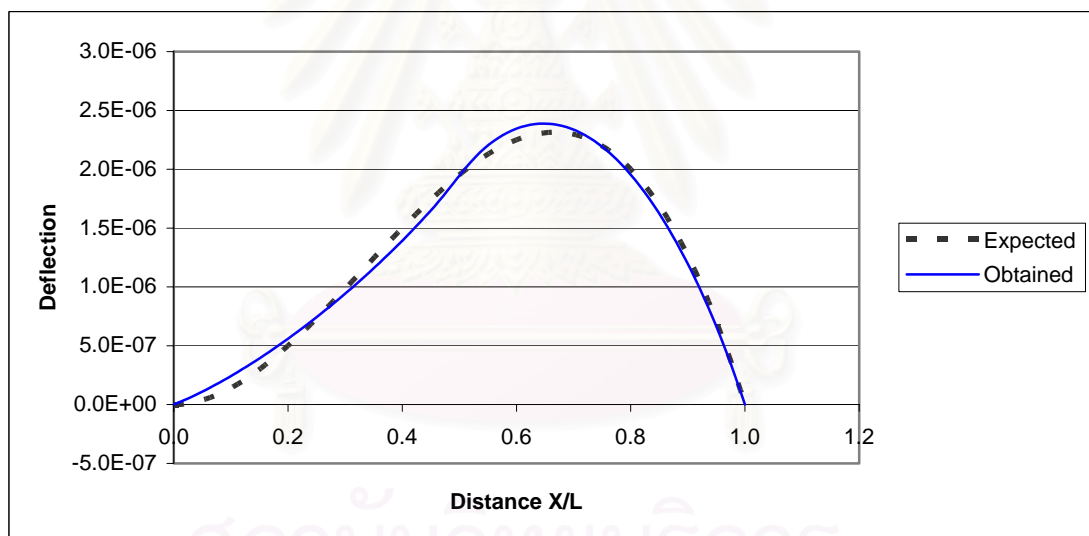
(ข)

รูปที่ 5.41 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 1 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



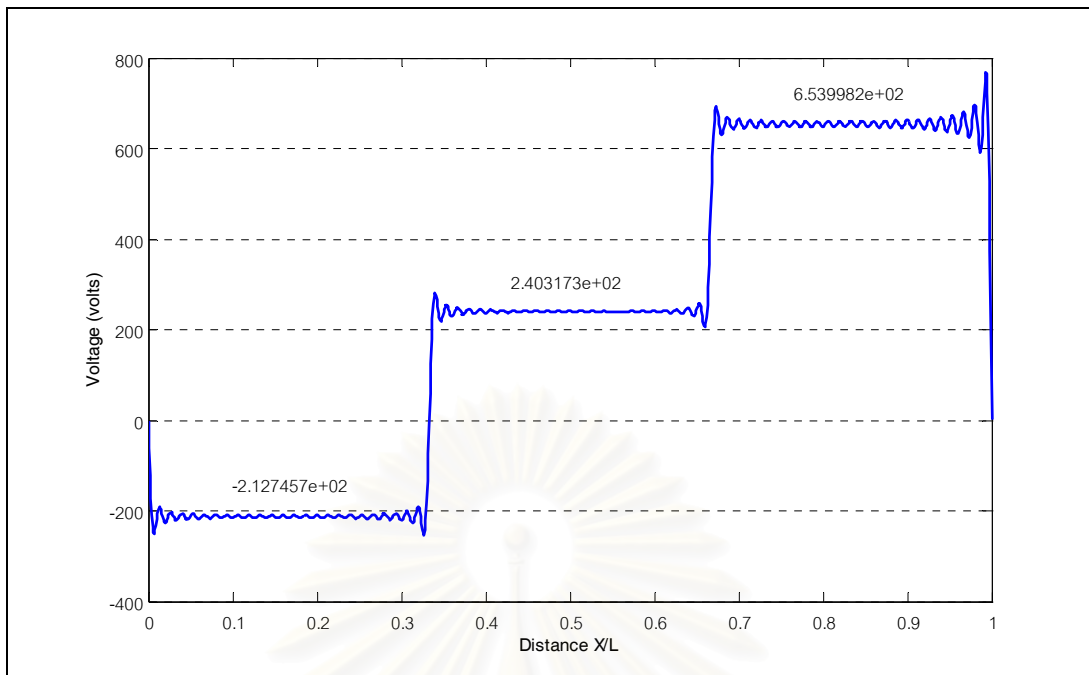
(ก)



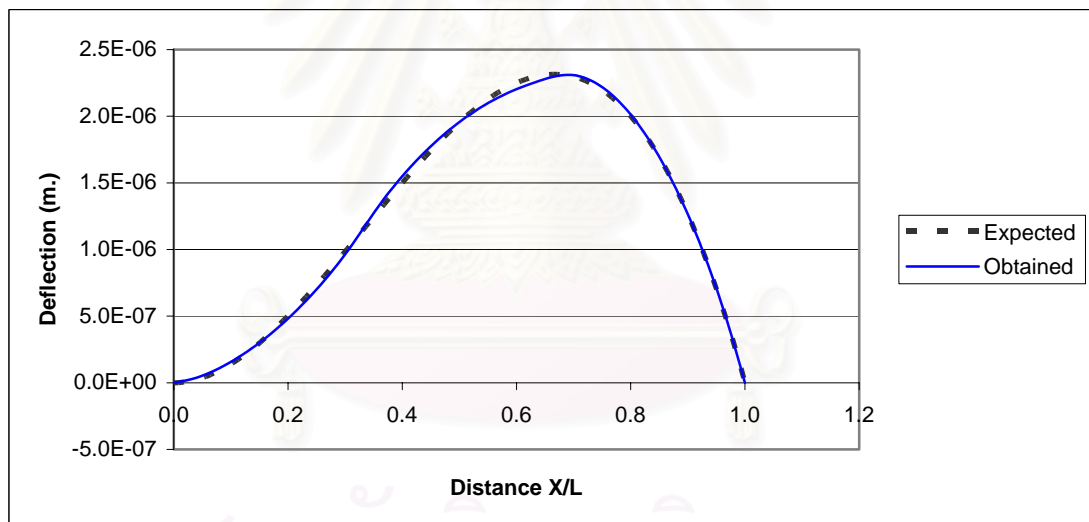
(ข)

รูปที่ 5.42 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 2 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



(ก)

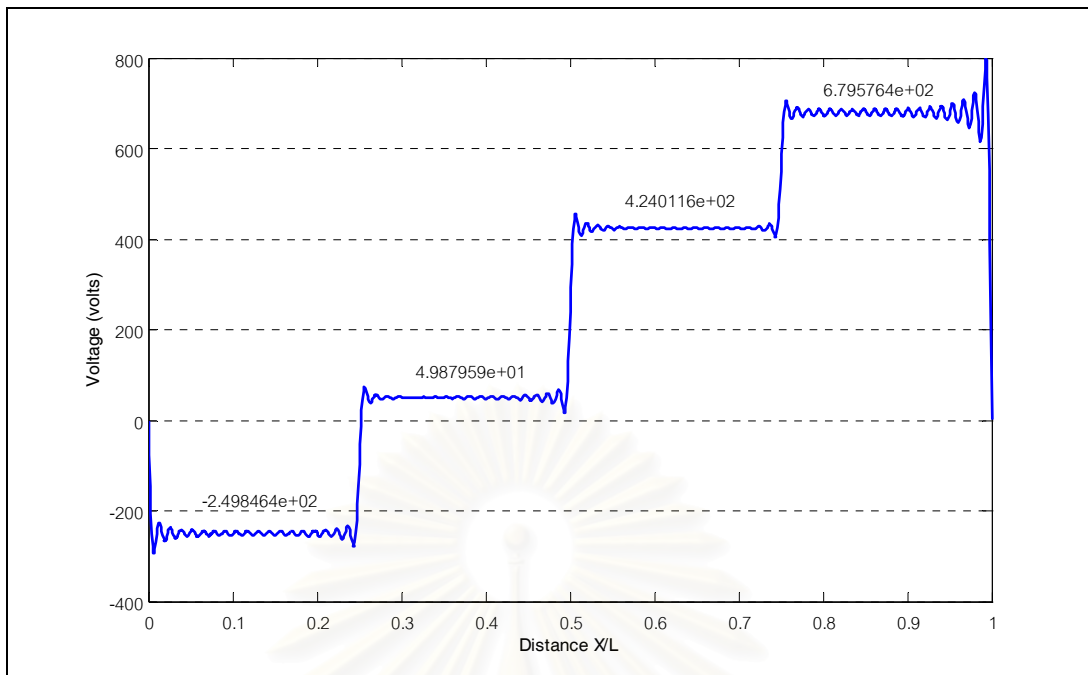


(ข)

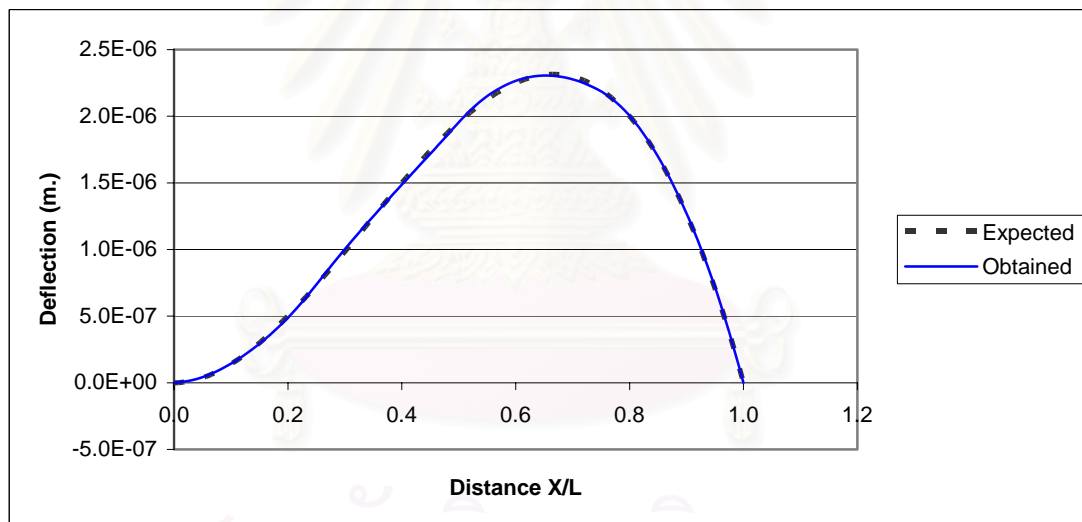
รูปที่ 5.43 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 3 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้





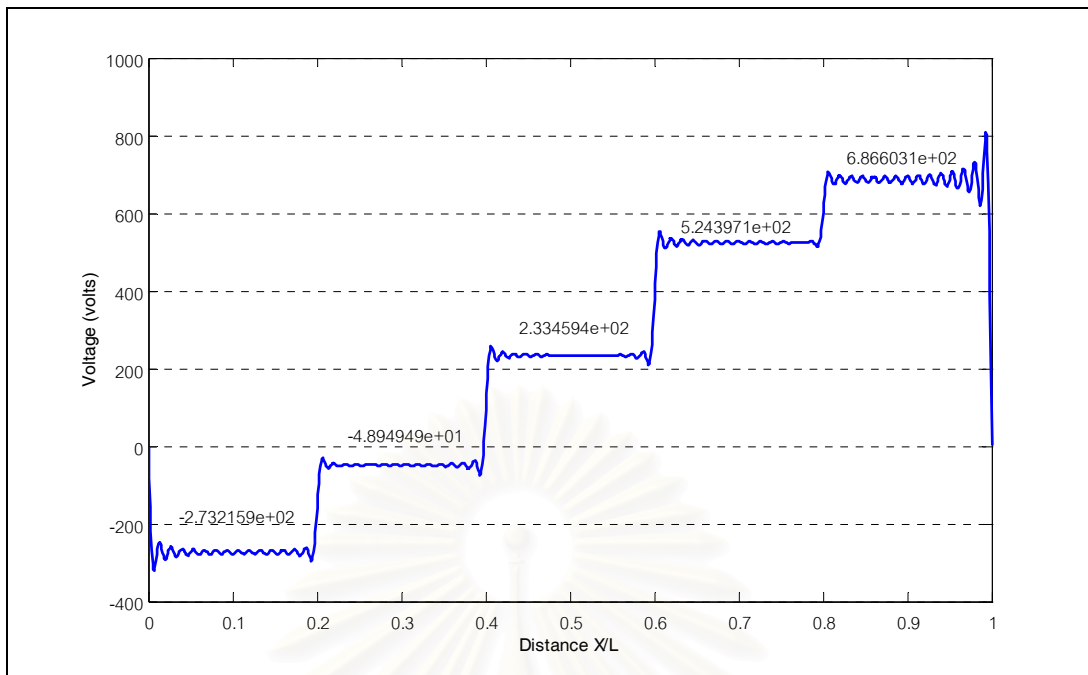
(ก)



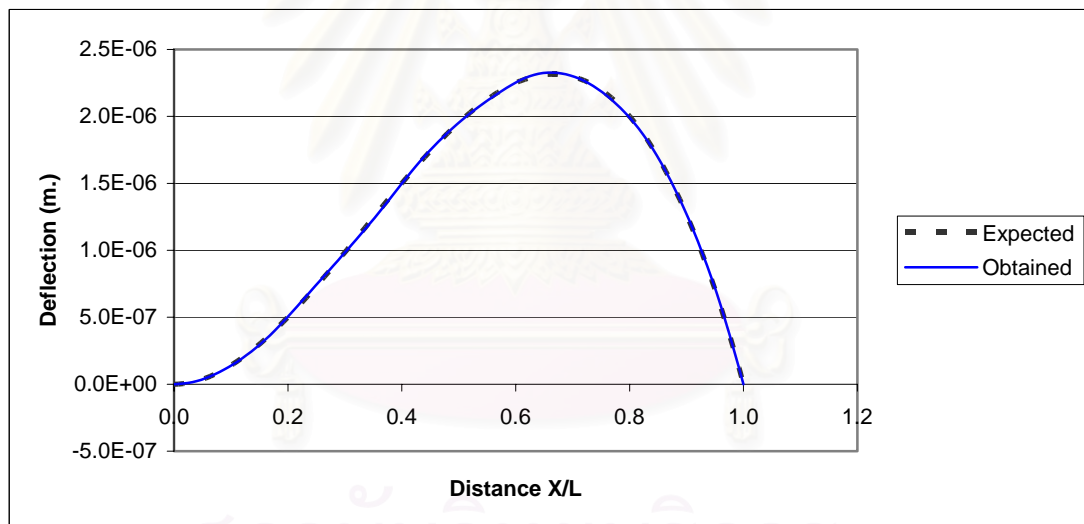
(ข)

รูปที่ 5.44 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 4 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



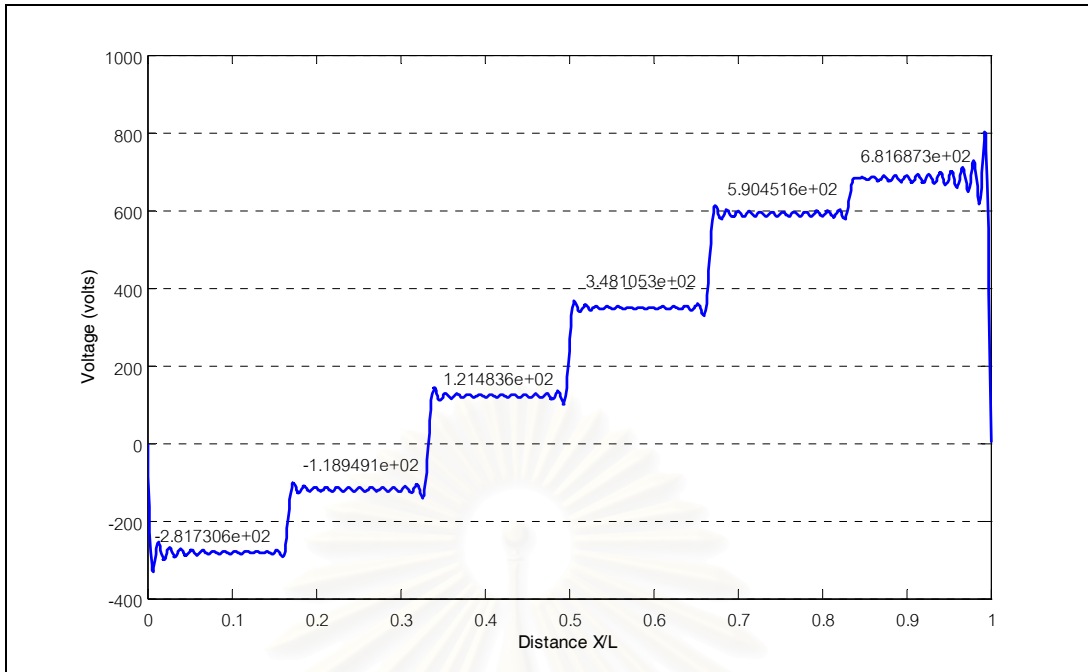
(ก)



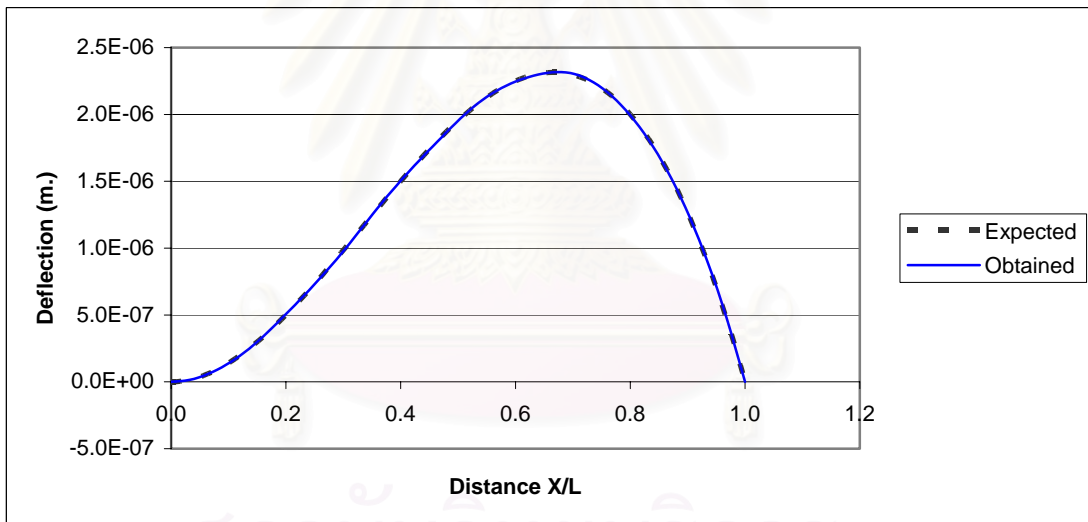
(ข)

รูปที่ 5.45 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 5 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



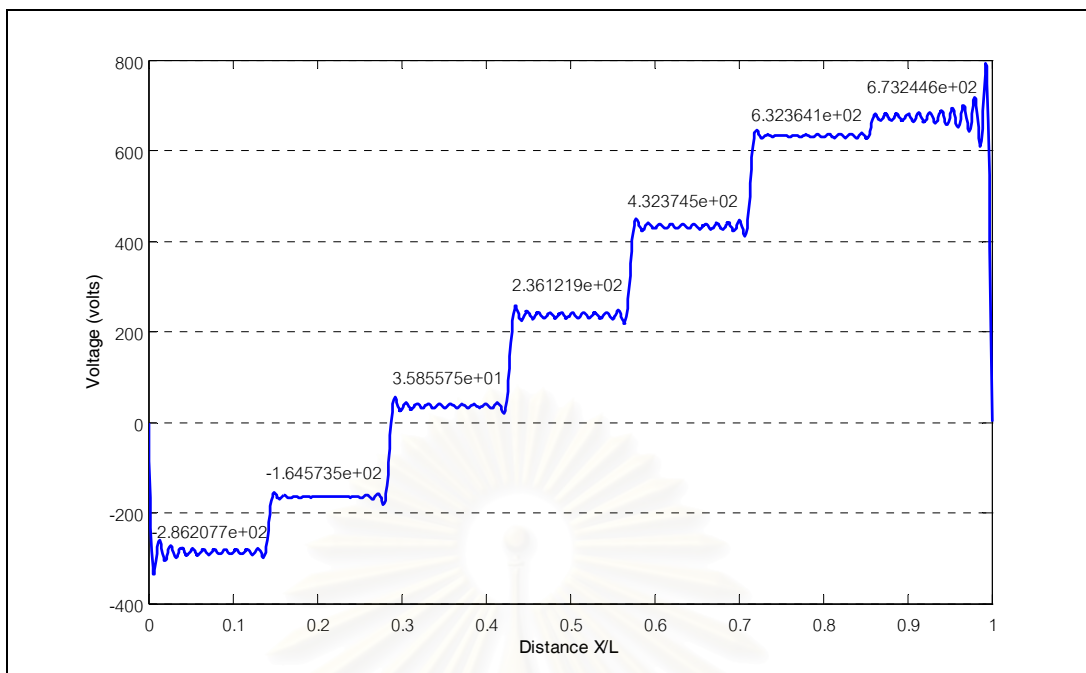
(ก)



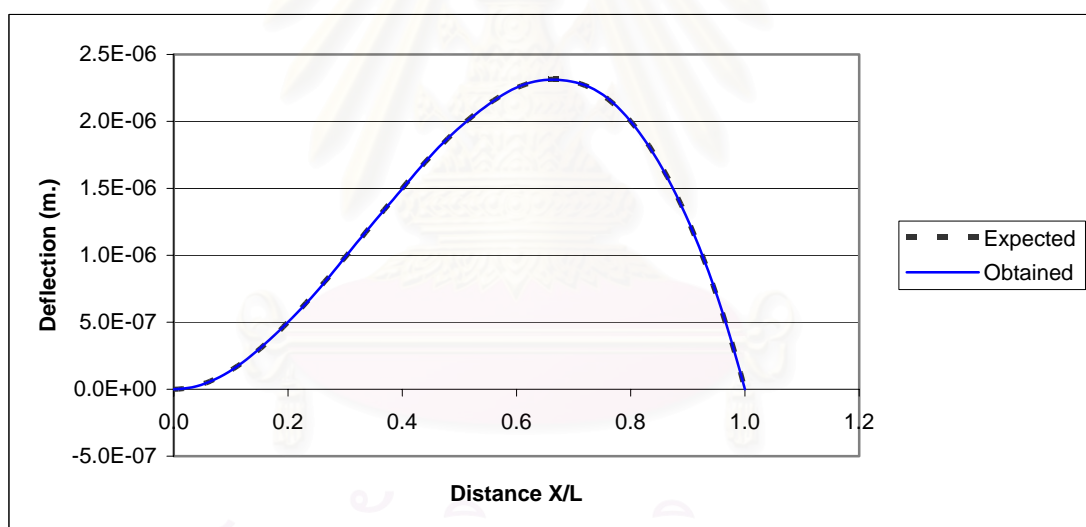
(ข)

รูปที่ 5.46 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 6 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



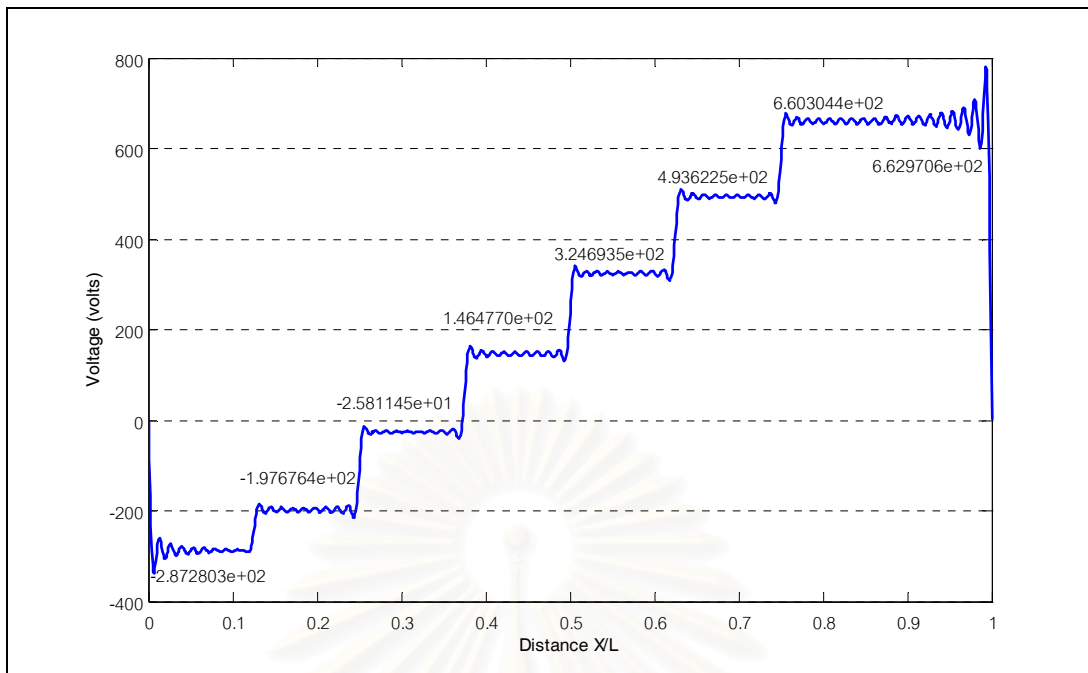
(ก)



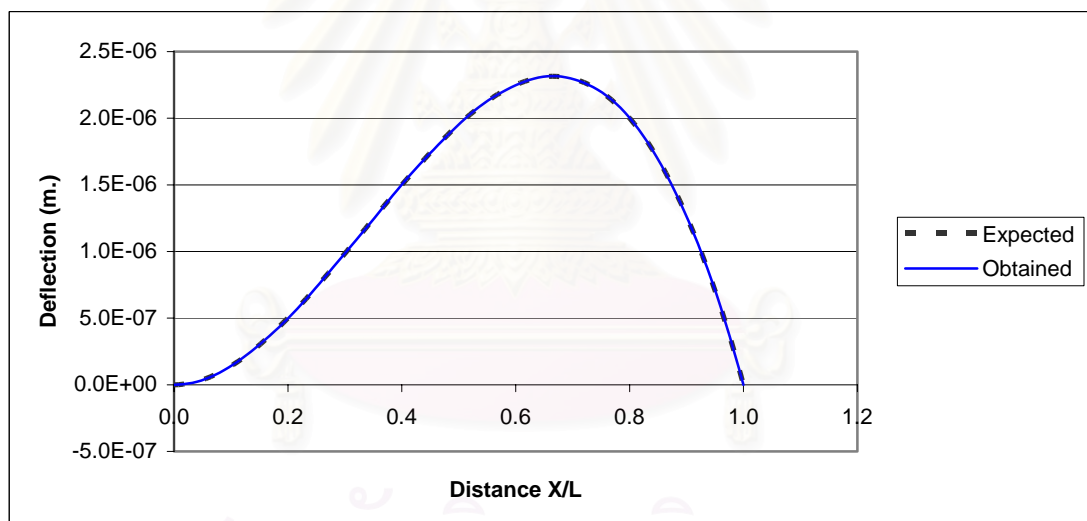
(ข)

รูปที่ 5.47 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 7 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



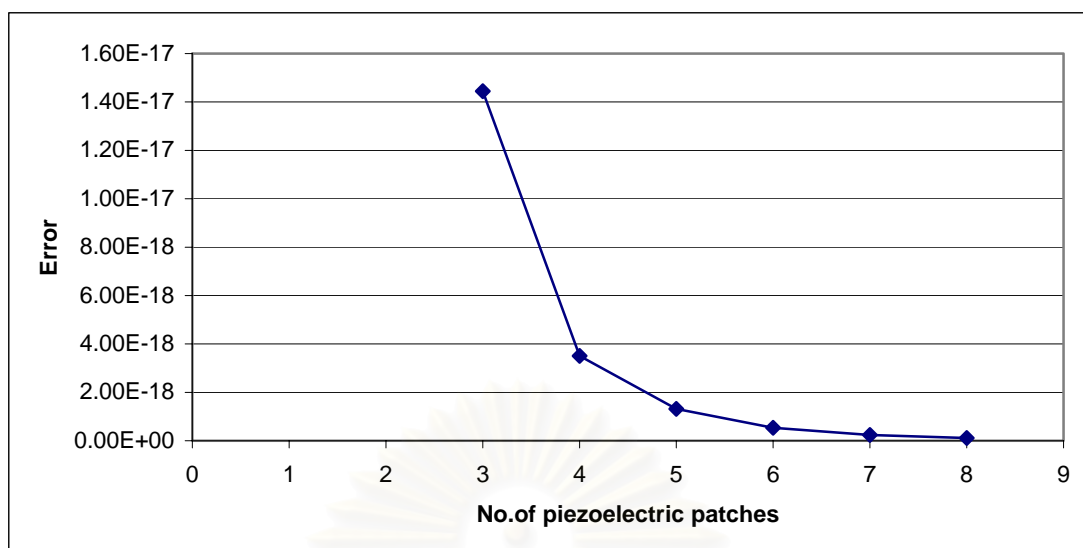
(ก)



(ข)

รูปที่ 5.48 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 8 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



รูปที่ 5.49 ค่าคลาดเคลื่อนของการโก่งตัวแบบยกกำลังสามของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง

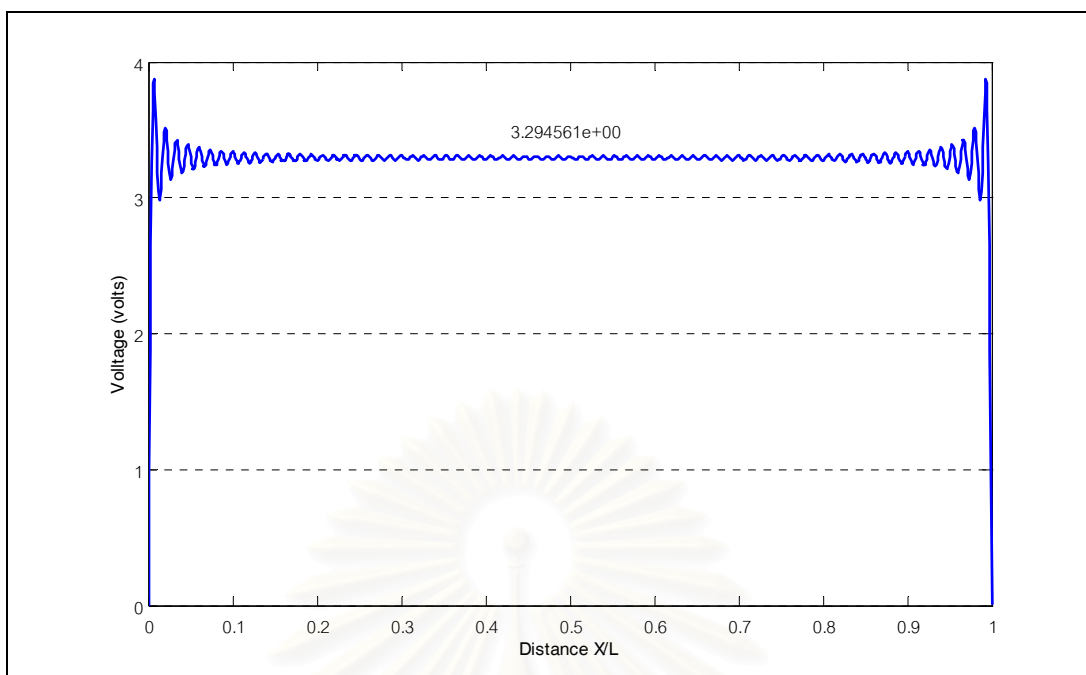
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### 5.3.3 การโค้งตัวแบบยกกำลังสี่

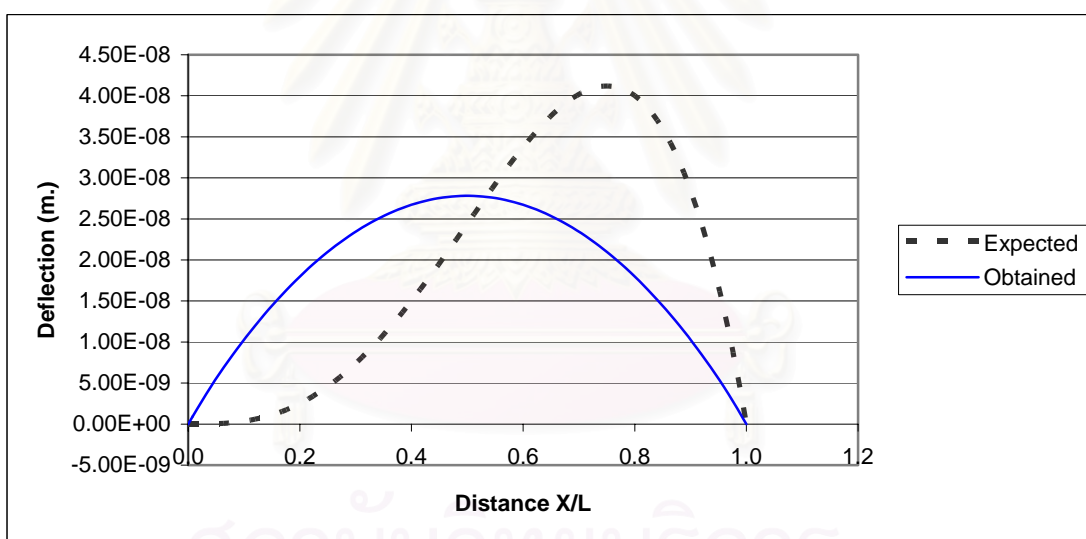
ตัวอย่างนี้กำหนดฟังก์ชันการโค้งตัวของคานาจุดรองรับธรรมดาที่ต้องการ (Expected) เป็นแบบยกกำลังสี่ และมีค่าเท่ากับ  $X^3(L-X)$  เมตร ซึ่งผลของการคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้า  $\phi$  ที่เหมาะสมสำหรับการแบ่งจำนวนช่วงของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1 ถึง 8 ช่วง และรูปร่างการโค้งตัวที่ได้ (obtained) จากค่าศักย์ไฟฟ้างกล่าวแสดงไว้ในรูปที่ 5.50 ถึง 5.57 ส่วนผลของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างการโค้งตัวที่ต้องการกับการโค้งตัวที่เกิดจากการป้อนศักย์ไฟฟ้าที่ผิวบนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง ซึ่งคำนวณจากการอินทิเกรตผลต่างของค่าการโค้งตัวทั้งสองยกกำลังสองตลอดความยาวคานาแสดงไว้ในรูปที่ 5.58 จากผลที่ได้พบว่าเมื่อจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมีค่าตั้งแต่ 6 ช่วงขึ้นไปค่าการโค้งตัวก็ค่อนข้างที่จะใกล้เคียงกับที่ต้องการ และเมื่อเพิ่มจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมากขึ้นการโค้งตัวที่เกิดขึ้นจากการป้อนค่าศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะมีค่าใกล้เคียงกับการโค้งตัวที่ต้องการมากขึ้น



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก)

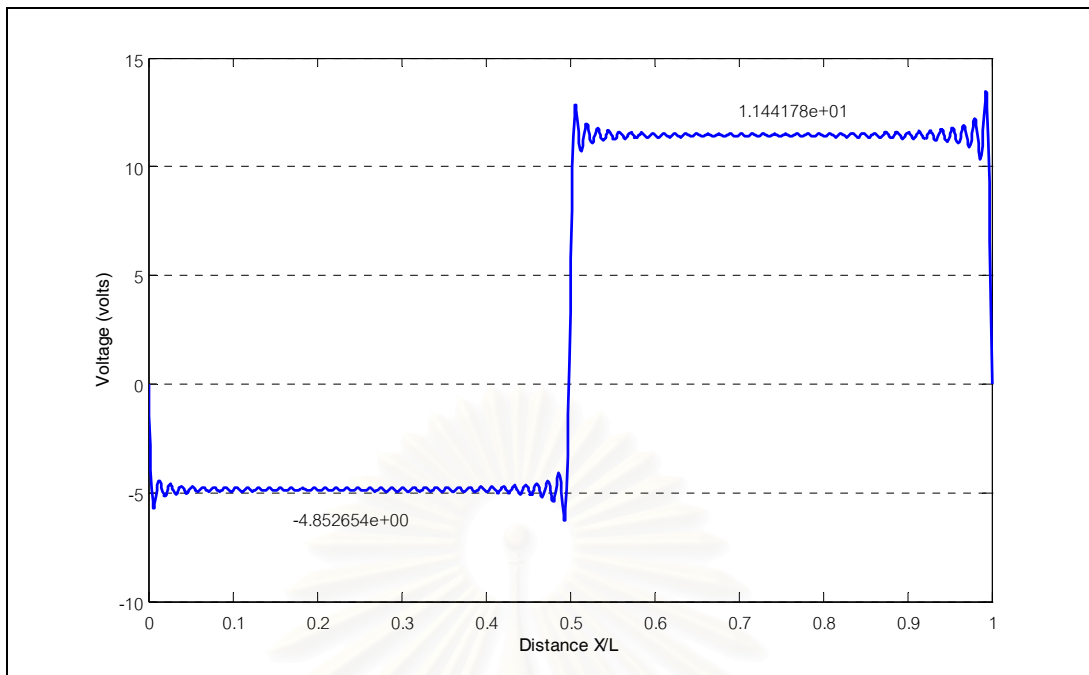


(ข)

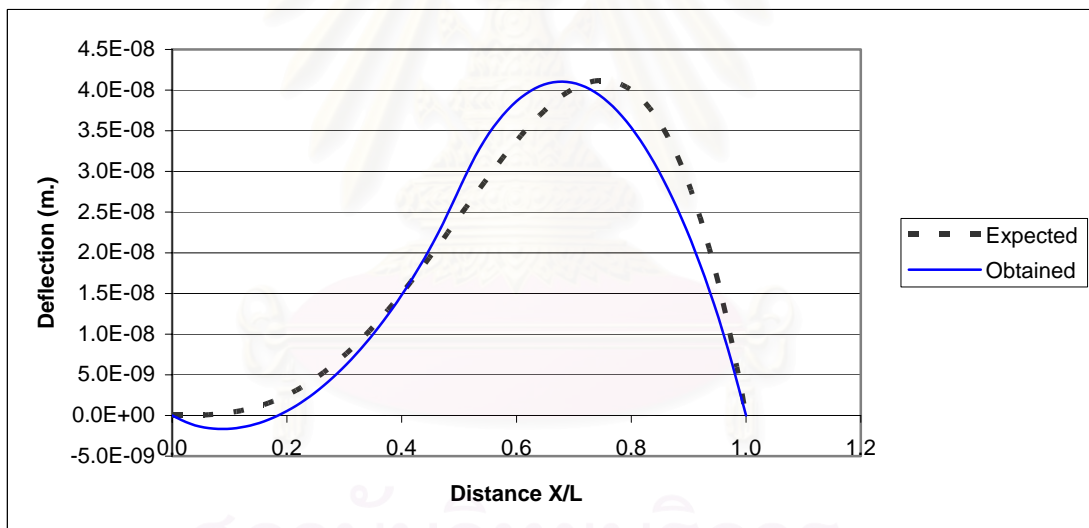
รูปที่ 5.50 การควบคุมการโก่งตัวของแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 1 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้





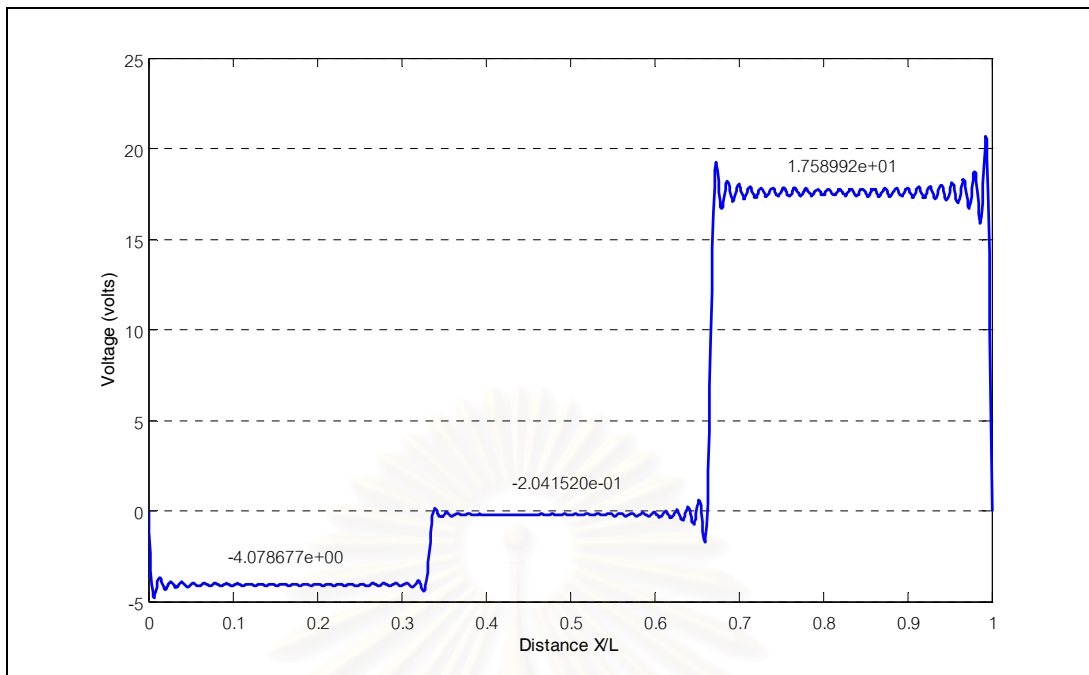
(ก)



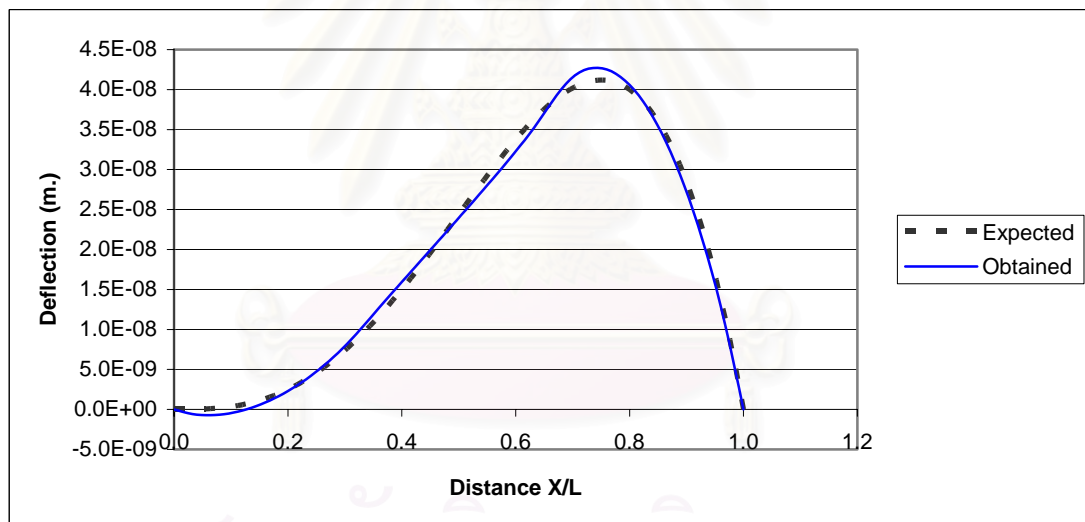
(ข)

รูปที่ 5.51 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 2 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



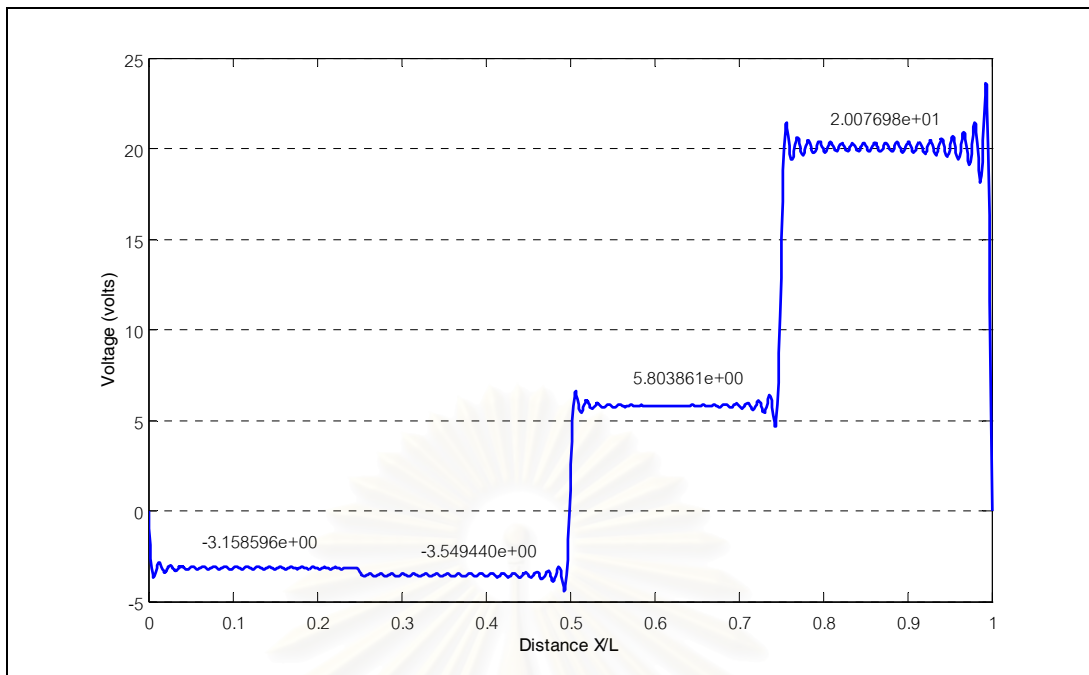
(ก)



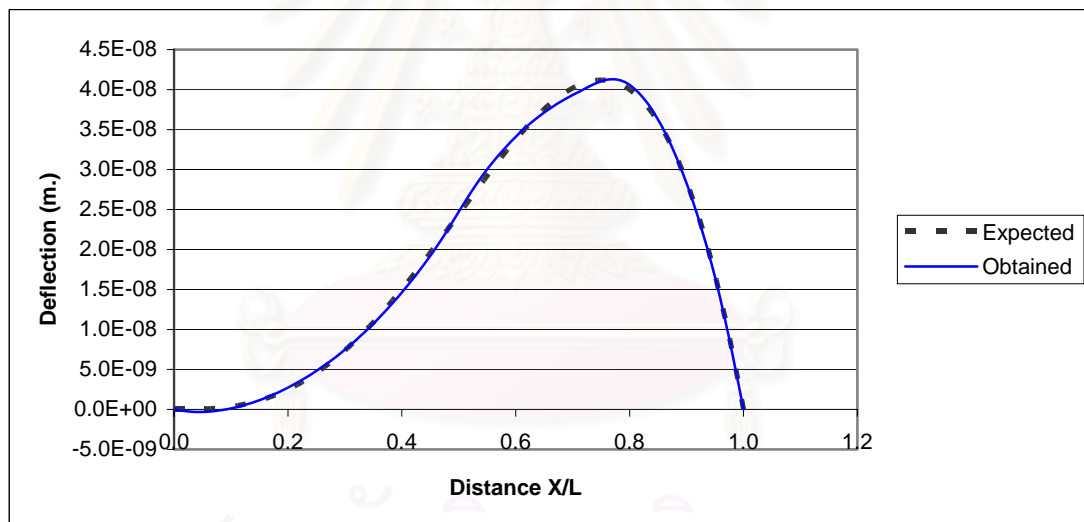
(ข)

รูปที่ 5.52 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 3 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



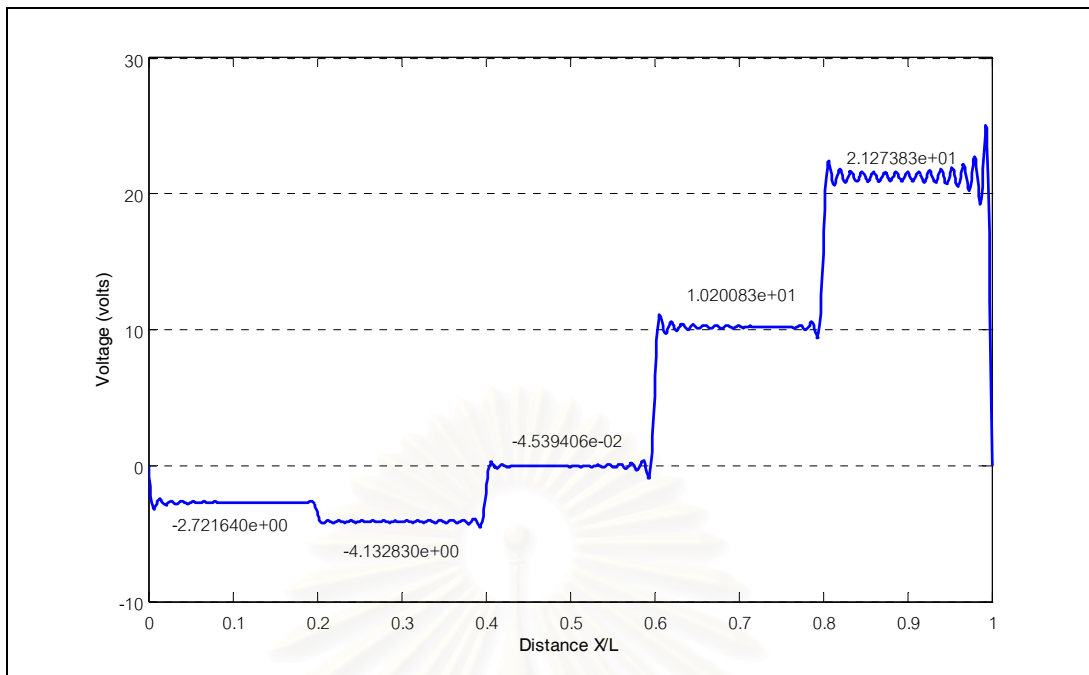
(ก)



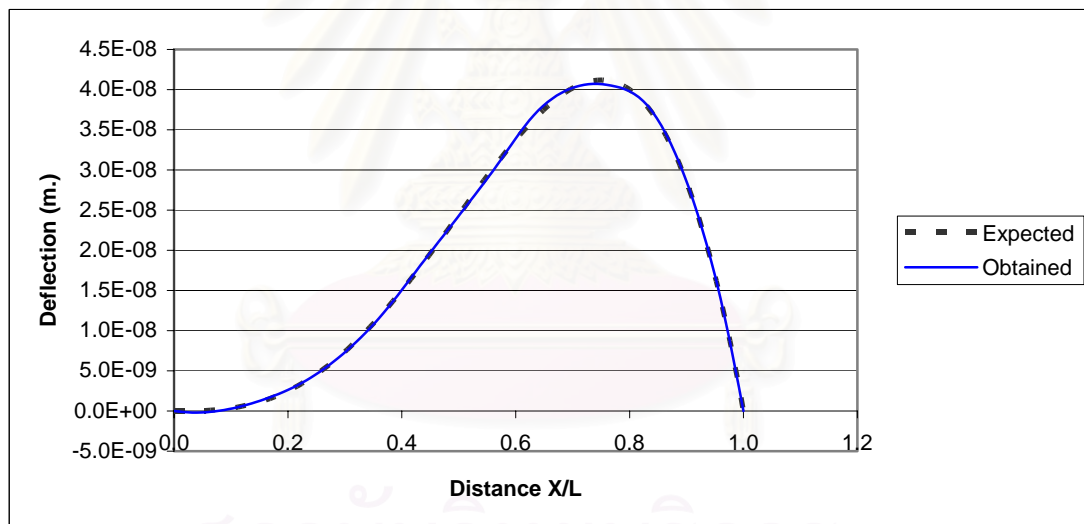
(ข)

รูปที่ 5.53 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 4 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



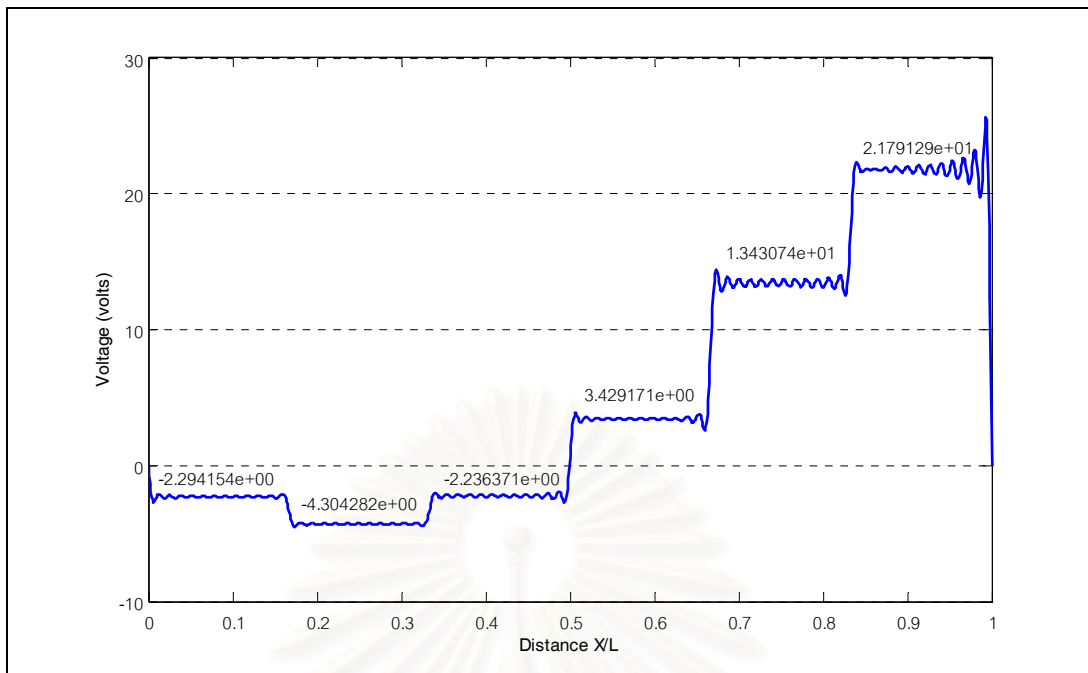
(ก)



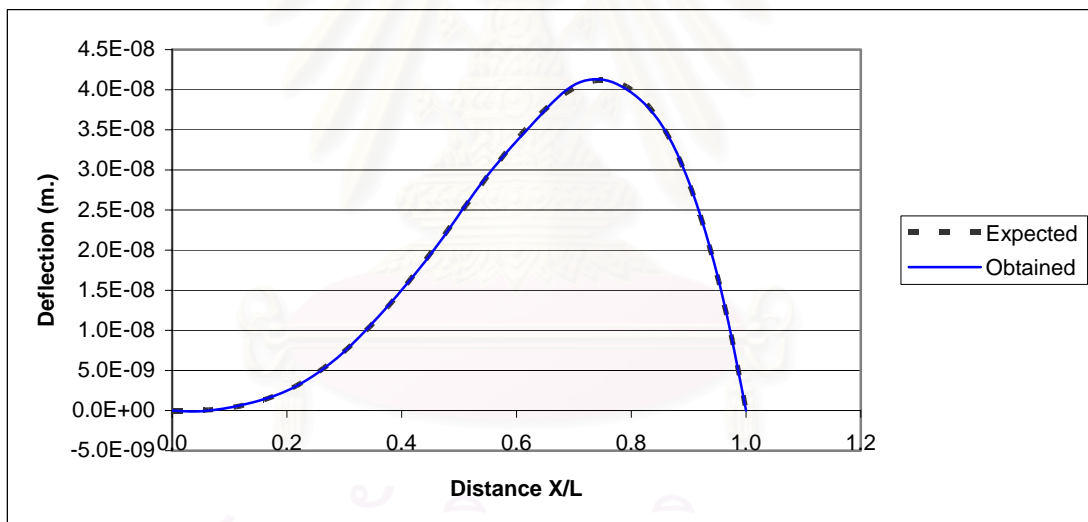
(ข)

รูปที่ 5.54 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 5 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



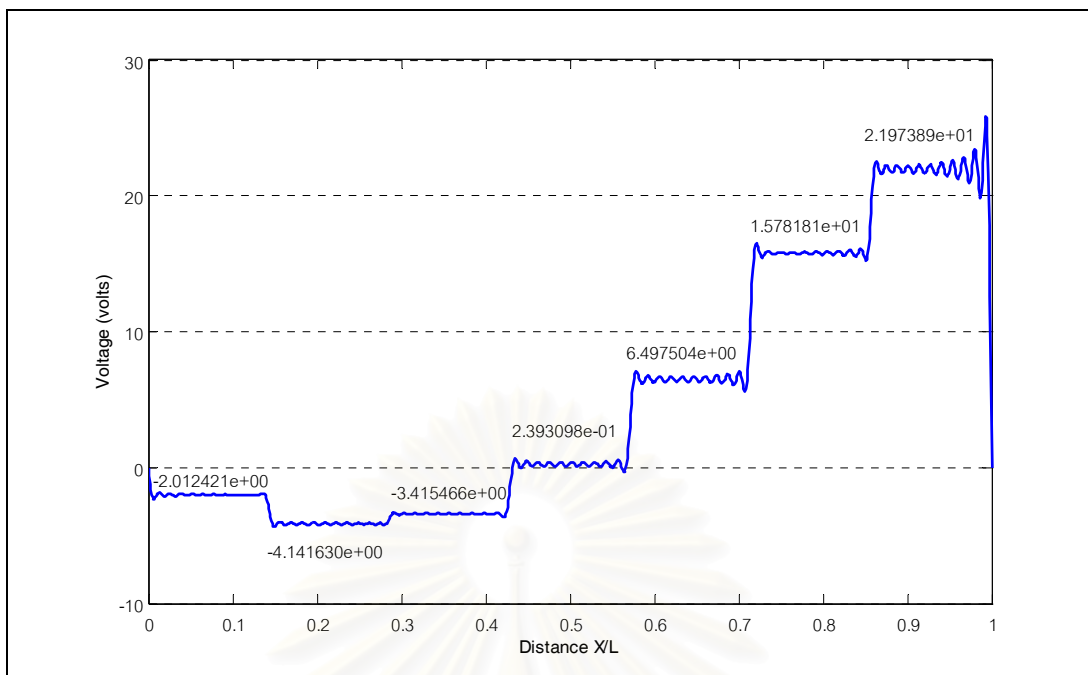
(ก)



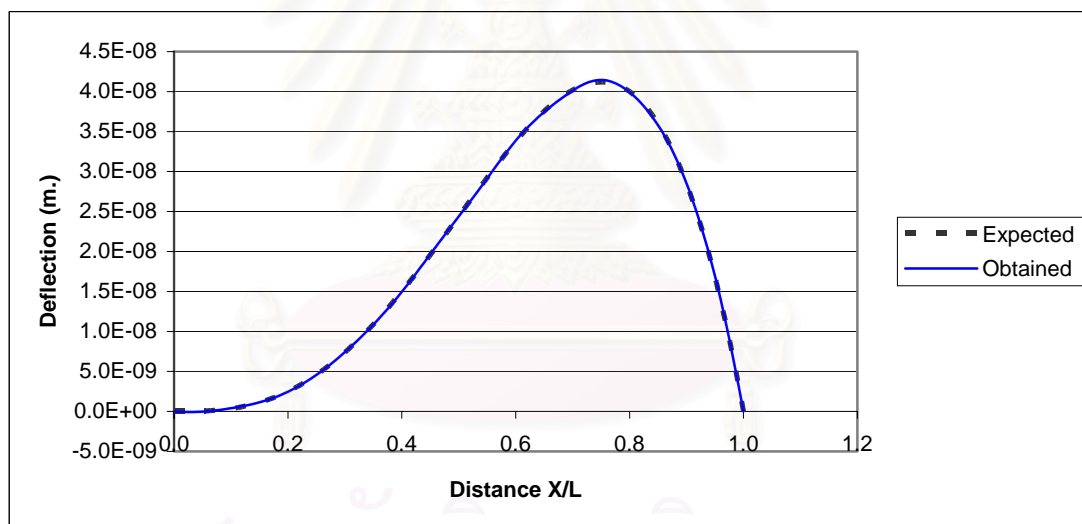
(ข)

รูปที่ 5.55 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 6 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



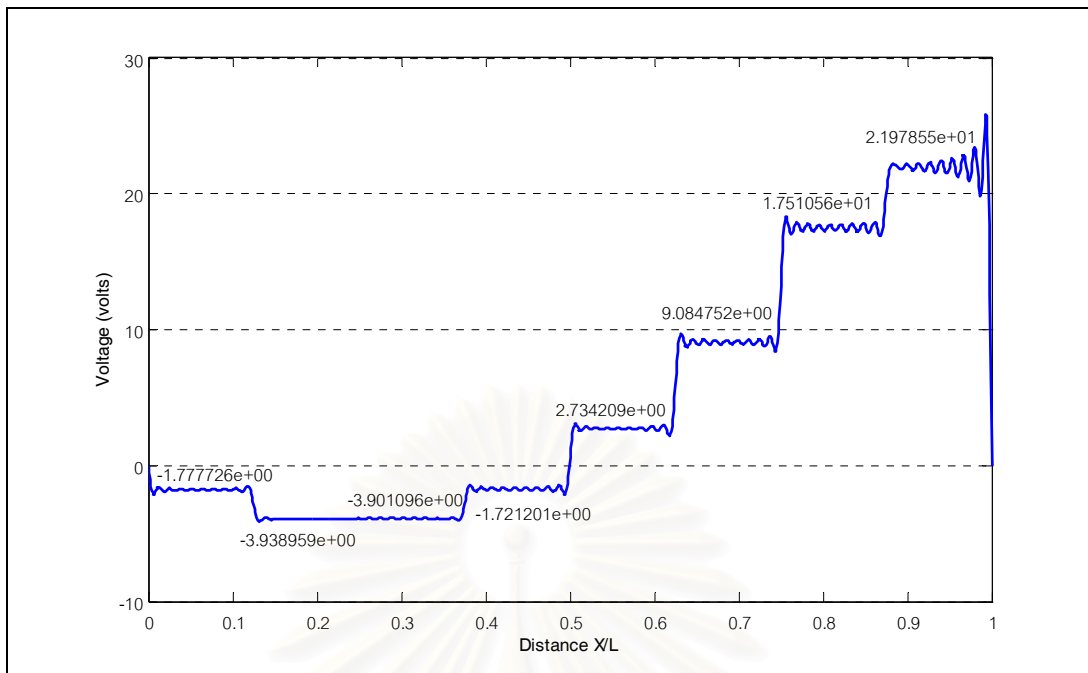
(ก)



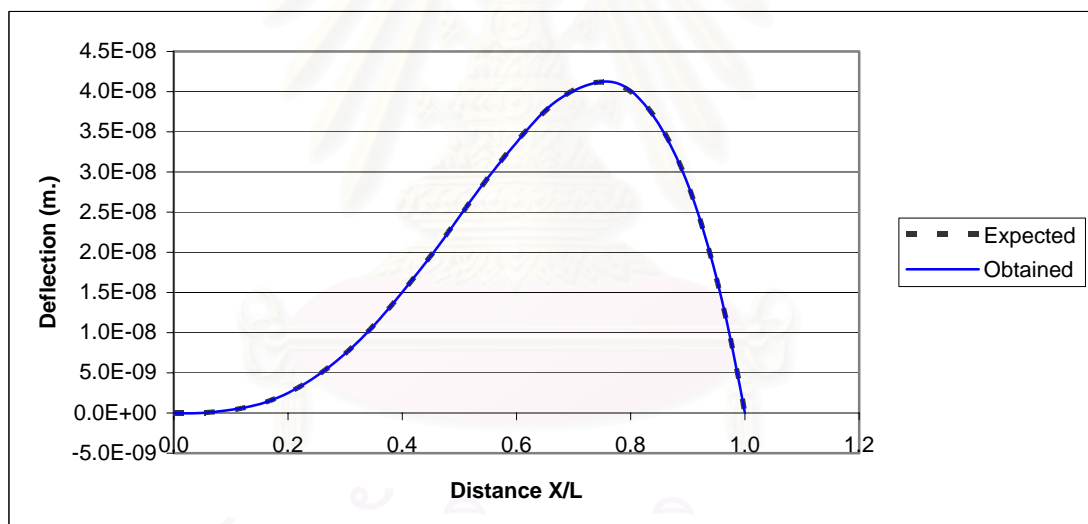
(ข)

รูปที่ 5.56 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 7 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



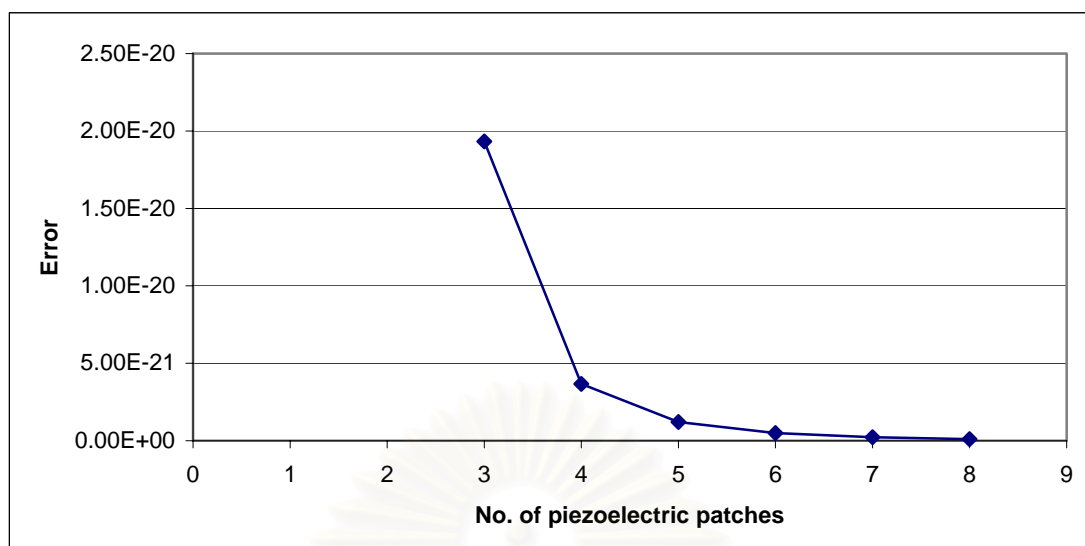
(ก)



(ข)

รูปที่ 5.57 การควบคุมการโก่งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อพิจารณาเป็น 8 ช่วง

(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสม (ข) การโก่งตัวที่ได้



รูปที่ 5.58 ค่าคลาดเคลื่อนของการโค้งตัวแบบยกกำลังสี่ของคานจุดรองรับธรรมดาเมื่อแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1-8 ช่วง

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 6

### บทสรุป

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาการควบคุมการโก่งตัวของคานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริก โดยการกำหนดศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมให้กับชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก เพื่อให้โครงสร้างคานเกิดการเปลี่ยนรูปร่างเป็นไปตามที่ต้องการ โครงสร้างคานที่พิจารณานั้นประกอบด้วยชั้นของโครงสร้างหลัก และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก โดยสมมติให้แต่ละชั้นยึดติดกันอย่างสมบูรณ์และวัสดุอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นสำหรับวิเคราะห์หาค่าการกระจัดและศักย์ไฟฟ้าอาศัยทฤษฎีเลเยอร์ไวส์ โดยใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์แทนฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวของคาน (แกน  $x$ ) และใช้ฟังก์ชันประมาณของลากรางจ์เชิงเส้นแทนฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความหนาของคาน (แกน  $z$ ) การตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองที่ได้พัฒนาขึ้นนี้กระทำโดยวิเคราะห์ปัญหาตัวอย่างและเปรียบเทียบผลกับการศึกษาในอดีต หลังจากนั้นจึงประยุกต์ใช้แบบจำลองดังกล่าวในการควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคาน ผลที่ได้สามารถสรุปได้ดังนี้

ในส่วนแรกเป็นการพัฒนาและตรวจสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมโครงสร้างคานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริก โดยเปรียบเทียบกับโครงสร้างตัวอย่างที่ศึกษามาในอดีต 2 แบบ คือ โครงสร้างคานยื่นและคานจุดรองรับธรรมดา

- การเปรียบเทียบผลการศึกษาในกรณีคานยื่นจะพิจารณาแบบความเค้นระนาบ เนื่องจากโครงสร้างตัวอย่างเปรียบเทียบมีความกว้างน้อยกว่าเมื่อเทียบกับความยาว ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับการศึกษาในอดีต พบว่าค่าการโก่งตัวตลอดความยาวของทั้งคานยื่นที่ประกอบด้วยวัสดุ PVDF 2 ชั้นประกบติดกัน และคานยื่น 3 ชั้นที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุหลัก (อลูมิเนียมหรือแกรไฟต์-อีพอกซี) ชั้นของวัสดุยึดติด และชั้นวัสดุ PZT-4 ภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักบรรทุกกระทำต่างๆมีค่าใกล้เคียงกัน และเมื่อเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวที่ปลายด้านอิสระของคานยื่นของทั้งสองกรณีจะมีค่าคลาดเคลื่อนประมาณ 1.2 % ทั้งนี้จะมีกรณีที่เปรียบเทียบกับการศึกษาของ Saravanos และ Heyliger (1995) ที่จะมีค่าที่ค่อนข้างแตกต่างกัน เนื่องจากใช้ฟังก์ชันรูปร่างในทิศทางตามความยาวและความหนาของคานของการกระจัดเป็นฟังก์ชันเส้นตรงซึ่งมีความละเอียดไม่มากนักเมื่อเทียบกับใช้ฟังก์ชันแบบเฮอริมิทเชียนของ Chee และคณะ (1999) หรือฟังก์ชันฟูเรียร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้

- การเปรียบเทียบผลการศึกษาในกรณีคานจุดรองรับธรรมดาจะพิจารณาแบบความเค้นระนาบ เนื่องจากโครงสร้างตัวอย่างเปรียบเทียบเป็นแผ่นเรียบจุดรองรับธรรมดาที่มีการดัดแบบผิวทรงกระบอก (cylindrical bending) โดยที่จุดรองรับทั้งสองข้างยาวตลอดตามความกว้างของแผ่นเรียบ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เมื่อเปรียบเทียบกับการศึกษาในอดีต พบว่าค่าการโก่งตัวที่กึ่งกลางของทั้งคานจุดรองรับธรรมดาประกอบด้วยวัสดุ PZT-4 2 ชั้นประกบติดกัน และคานจุดรองรับธรรมดา 2 ชั้นที่ประกอบด้วยชั้นของแกรไฟต์-อีพอกซีและชั้นของวัสดุ PZT-4 ภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักบรรทุกกระทำต่างๆมีค่าใกล้เคียงกัน โดยมีค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดไม่เกิน 1.87 %

จากการเปรียบเทียบค่าการโก่งตัวกับผลการศึกษาในอดีตทั้งแบบคานยื่นและคานจุดรองรับธรรมดาที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกภายใต้ศักย์ไฟฟ้าหรือน้ำหนักกระทำแบบต่างๆ พบว่าค่าการโก่งตัวที่ได้มีค่า

ใกล้เคียงกัน โดยค่าคลาดเคลื่อนที่ต่างกันอาจเกิดจากการใช้ทฤษฎีในการวิเคราะห์หรือการเลือกใช้ฟังก์ชันรูปร่างเพื่อหาผลลัพธ์ที่มีความละเอียดต่างกัน ดังนั้นถือว่าแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้สามารถนำไปวิเคราะห์คานยื่นและคานจตุรรองรับธรรมชาติที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกได้เป็นอย่างดี

ส่วนที่สองเป็นการนำแบบจำลองที่ศึกษาในงานวิจัยนี้ไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมการโก่งตัวของคาน โดยอาศัยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างในการหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่ให้แก่มิวนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพื่อควบคุมการโก่งตัวของโครงสร้างคานให้ได้รูปร่างตามที่ต้องการ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้ศักย์ไฟฟ้าที่มิวนของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมีค่าคงที่เป็นช่วงๆตลอดความยาวคานและมิวล่างของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกมีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์โวลต์ การควบคุมการโก่งตัวของคานในงานวิจัยนี้มี 2 แบบ คือ การควบคุมการโก่งตัวของคานยื่น และการควบคุมการโก่งตัวของคานจตุรรองรับธรรมชาติ

- การควบคุมการโก่งตัวของคานยื่นได้ทดสอบโดยใช้โครงสร้างตัวอย่างในหัวข้อที่ 4.2.2 ของบทที่ 4 ซึ่งเป็นโครงสร้างคานที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุ 3 ชั้น คือ ชั้นของอลูมิเนียม ชั้นวัสดุยึดติด และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 และกำหนดค่าการโก่งตัวที่ต้องการขึ้นมา ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกค่าการโก่งตัวที่ต้องการเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียลทั้งหมด 3 ตัวอย่าง คือ แบบเส้นตรง แบบยกกำลังสอง และแบบยกกำลังสาม จากนั้นทำการหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่มิวนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในแต่ละช่วงที่ทำให้เกิดการโก่งตัวใกล้เคียงกับที่ต้องการโดยในการศึกษานี้พิจารณาแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1 ช่วงถึง 8 ช่วง ผลที่ได้พบว่าเมื่อแบ่งจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพิ่มขึ้น ค่าการโก่งตัวที่เกิดจากการให้ศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าการโก่งตัวที่ต้องการ

- การควบคุมการโก่งตัวของคานจตุรรองรับธรรมชาติได้ทดสอบโดยใช้โครงสร้างตัวอย่างในหัวข้อที่ 4.3.2 ของบทที่ 4 ซึ่งเป็นโครงสร้างคานที่ประกอบด้วยชั้นของวัสดุ 2 ชั้น คือ ชั้นของแกรไฟต์-อีพอกซี และชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกชนิด PZT-4 และกำหนดค่าการโก่งตัวที่ต้องการขึ้นมา ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกค่าการโก่งตัวที่ต้องการเป็นฟังก์ชันโพลีโนเมียลทั้งหมด 3 ตัวอย่าง คือ แบบยกกำลังสอง แบบยกกำลังสาม และแบบยกกำลังสี่ จากนั้นทำการหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่มิวนของชั้นวัสดุเพียโซอิเล็กทริกในแต่ละช่วงที่ทำให้เกิดการโก่งตัวใกล้เคียงกับที่ต้องการโดยในการศึกษานี้พิจารณาแบ่งวัสดุเพียโซอิเล็กทริกตั้งแต่ 1 ช่วงถึง 8 ช่วง ผลที่ได้พบว่าเมื่อแบ่งจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพิ่มขึ้น ค่าการโก่งตัวที่เกิดจากการให้ศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าการโก่งตัวที่ต้องการ

จากผลศึกษาต่างๆดังกล่าวสรุปได้ว่า แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์พฤติกรรมคานที่ประกอบด้วยวัสดุเพียโซอิเล็กทริกภายใต้ศักย์ไฟฟ้าและน้ำหนักกระทำต่างๆได้ รวมทั้งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมการโก่งตัวของคานได้ โดยการให้ศักย์ไฟฟ้าที่เหมาะสมที่ชั้นของวัสดุเพียโซอิเล็กทริก เพื่อให้โครงสร้างคานเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างตามที่ต้องการ ซึ่งค่าการโก่งตัวที่เกิดจากการให้ศักย์ไฟฟ้าแก่วัสดุเพียโซอิเล็กทริกจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าการโก่งตัวที่ต้องการมากขึ้นเมื่อแบ่งจำนวนช่วงของวัสดุเพียโซอิเล็กทริกเพิ่มขึ้น ทั้งนี้มีข้อจำกัด คือ งานวิจัยนี้พิจารณาวัสดุที่มีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น และแต่ละชั้นของวัสดุสมมติให้ยึดติดกันอย่างสมบูรณ์เท่านั้น

## รายการอ้างอิง

- Aldraihem, O.J. and Khdeir, A.A. Precise deflection analysis of beams with piezoelectric actuator. Composite Structures (2003): 135-143.
- Correia, F.V.M., Gomes, M.A.A. and Suleman, A. Modeling and design of adaptive composite structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 185(2000): 325-346.
- Crawley, E.F. and Anderson, E.H. Detailed models of piezoceramic actuation of beams. International Journal of Solids and Structures (1990): 4-25.
- Curie, J. and Curie, P. Comptes Rendus. 91(1880).
- Eisenberger, M. and Abramovich, H. Shape control of non-symmetric piezolaminated composite beams. Composite Structures 38(1997): 565-571.
- Fernandes, A. and Pouget, J. An accurate modeling of piezoelectric multi-layer plates. European Journal of mechanics A/Solids 21(2002): 629-651.
- Fukunaga, H., Hu, N. and Ren, G.X. FEM modeling of adaptive composite structures using a reduced higher-order plate theory via penalty function. International Journal of Solids and Structures 38(2001): 8735-8752.
- Heyliger, P., Brooks, P., Exact solution for laminated plates in cylindrical bending. J.Appl.Mech (1996): 903-910
- Hwang, W.S., Park, H.C., Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuator. AIAA Journal 31(1993): 930-937
- Kapurria, S. An efficient couple theory for multilayered beams with embedded piezoelectric sensory and active layers. International Journal of Solids and Structures (2001): 9179-9199.
- Liew, K.M., Lim, H.K., Tan, M.J. and He, X.Q. Analysis of laminated composite beams and plates with piezoelectric patches using the element-free Galerkin method. Computational Mechanics 29(2002): 486-497.
- Reddy, J.N., Robbins, D.H., Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory. Computers and Structures 41(1991): 265-279
- Saravanos, D.A. and Heyliger, P.R. Coupled layerwise analysis of composite beams with embedded piezoelectric sensors and actuators. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 6(1995): 350-363.
- Shen, M.H.H. A new modeling technique for piezoelectrically actuated beams. Computers and Structures 57(1995): 361-366.
- Suleman, A. and Venkaya, V.B.. A simple finite element formulation for a laminated composite plate with piezoelectric layers. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 6(1995): 776-782.

Tiersten, H.F. Linear piezoelectric plate vibration. New York: Plenum, 1969.

Tseng, C., Tzou, H.S., Active vibration controls of distributed parameter systems by finite element method. Computational Engineering (1998): 599-604

Tzou, H.S. and Ye, R. Analysis of piezoelectric structures with laminated piezoelectric triangle shell elements. AIAA Journal (1996): 110-115.

Voight, W. Lehrbuch de Kristallphysik. 2 nd ed. Germany: B.G. Teubre, 1928.



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก

### กฎของวัสดุในระนาบ 2 มิติ

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง (stress) ความเครียด (strain) และสนามไฟฟ้า (electric field) กับสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดไฟฟ้า (electric displacement) ความเครียด (strain) และสนามไฟฟ้า (electric field) ในระบบ 3 มิติ คือ

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (ก.1)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (ก.2)$$

โดยที่

$$C_{11} = E_{11} \frac{(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}$$

$$C_{22} = E_{22} \frac{(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{\Delta}$$

$$C_{33} = E_{33} \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}$$

$$C_{12} = E_{11} \frac{(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})}{\Delta} = E_{22} \frac{(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})}{\Delta}$$

$$C_{13} = E_{11} \frac{(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})}{\Delta} = E_{33} \frac{(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{\Delta}$$

$$C_{23} = E_{22} \frac{(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})}{\Delta} = E_{33} \frac{(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})}{\Delta}$$

$$C_{44} = G_{23}, C_{55} = G_{13}, C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

$E_{11}, E_{22}, E_{33}$  คือ โมดูลัสยืดหยุ่นในทิศทาง 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

$\nu_{ij}$  คือ อัตราส่วนปัวซองของ เมื่อ  $i, j = 1, 2, 3$

$G_{23}, G_{13}, G_{12}$  คือ โมดูลัสแรงเฉือนในระนาบ 2-3, 1-3 และ 1-2 ตามลำดับ

$$\text{และ } [e] = [C][d]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$d$  คือ piezoelectric strain constant

สำหรับงานวิจัยนี้ศึกษาพฤติกรรมการโก่งตัวของโครงสร้าางคาน ดังนั้นจะต้องทำการลดรูปสมการในระบบ 3 มิติให้กลายเป็นปัญหาในระนาบ 2 มิติ ซึ่งในที่นี้พิจารณาใน 2 ลักษณะ คือ แบบความเค้นระนาบ และความเครียดระนาบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของแต่ละปัญหาว่าจะเข้ากับปัญหาแบบใด ดังนี้

#### ความเค้นระนาบ

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง ความเครียด และสนามไฟฟ้าที่ (ก.1) สำหรับคานมีความกว้างน้อยๆเมื่อเทียบกับความยาวจะมีพฤติกรรมแบบความเค้นระนาบ นั่นคือ  $\sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0$  และ  $E_y = 0$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ \sigma_{zz} \\ 0 \\ \sigma_{xz} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ 2S_{yz} \\ 2S_{xz} \\ 2S_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.3})$$

จากสมการที่ (ก.3) จะได้  $S_{yz} = S_{xy} = 0$  และ  $S_{yy} = -\frac{C_{12}}{C_{22}}S_{xx} - \frac{C_{23}}{C_{22}}S_{zz} + \frac{e_{32}}{C_{22}}E_z$  แล้วนำค่าที่ได้แทนกลับเข้าไปในสมการที่ (ก.3) ซึ่งจะได้

$$\sigma_{xx} = \left(C_{11} - \frac{C_{12}C_{12}}{C_{22}}\right)S_{xx} + \left(C_{13} - \frac{C_{23}C_{12}}{C_{22}}\right)S_{zz} - \left(e_{31} - \frac{C_{12}}{C_{22}}e_{32}\right)E_z \quad (\text{ก.3.ก})$$

$$\sigma_{zz} = \left(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}}\right)S_{xx} + \left(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}}\right)S_{zz} - \left(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32}\right)E_z \quad (\text{ก.3.ข})$$

$$\sigma_{xz} = C_{55}2S_{xz} - e_{15}E_x \quad (\text{ก.3.ค})$$

เนื่องจาก  $\sigma_{zz}$  มีค่าน้อยมาก (Kapuria, 2001) งานวิจัยนี้จึงกำหนดให้  $\sigma_{zz} = 0$  ดังนั้นสมการที่ (ก.3.

ข) จะได้ 
$$S_{zz} = -\frac{\left(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}}\right)}{\left(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}}\right)}S_{xx} + \frac{\left(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32}\right)}{\left(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}}\right)}E_z$$
 แล้วนำไปแทนในสมการที่ (ก.3.ก) จะได้

$$\sigma_{xx} = \left[ \left(C_{11} - \frac{C_{12}C_{12}}{C_{22}}\right) - \frac{\left(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}}\right)\left(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}}\right)}{\left(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}}\right)} \right] S_{xx} \quad (\text{ก.3.ง})$$

$$- \left[ \left(e_{31} - \frac{C_{12}}{C_{22}}e_{32}\right) - \frac{\left(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32}\right)\left(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}}\right)}{\left(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}}\right)} \right] E_z$$

$$\sigma_{xz} = C_{55}2S_{xz} - e_{15}E_x \quad (\text{ก.3.จ})$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 2S_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.4})$$

โดยที่

$$\bar{C}_{11} = \left(C_{11} - \frac{C_{12}C_{12}}{C_{22}}\right) - \frac{\left(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}}\right)\left(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}}\right)}{\left(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}}\right)} = E_{11}$$

$$\bar{C}_{55} = C_{55} = G_{13}$$



$$\bar{e}_{31} = \left( e_{31} - \frac{C_{12}}{C_{22}} e_{32} \right) - \frac{(e_{33} - \frac{C_{23}e_{32}}{C_{22}})(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} = E_{11}d_{31}$$

$$\bar{e}_{15} = e_{15} = G_{13}d_{15}$$

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระตุ้นไฟฟ้า ความเครียด และสนามไฟฟ้าที่ (ก.2) เมื่อพิจารณาโครงสร้างคานเป็นแบบความเค้นระนาบในระนาบ x-z นั่นคือ  $E_y = 0$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ 2S_{yz} \\ 2S_{xz} \\ 2S_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.5})$$

นำ  $S_{yy} = -\frac{C_{12}}{C_{22}}S_{xx} - \frac{C_{23}}{C_{22}}S_{zz} + \frac{e_{32}}{C_{22}}E_z$ ,  $S_{yz} = S_{xy} = 0$  จากสมการที่ (ก.3) มาแทนในสมการที่ (ก.5) ซึ่งจะได้

$$D_x = e_{15}S_{xz} + \varepsilon_{11}E_x \quad (\text{ก.5.ก})$$

$$D_z = \left( e_{31} - \frac{C_{12}}{C_{22}}e_{32} \right) S_{xx} + \left( e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32} \right) S_{zz} + \left( \varepsilon_{33} + \frac{e_{32}e_{32}}{C_{22}} \right) E_z \quad (\text{ก.5.ข})$$

$$\text{นำ } S_{zz} = -\frac{(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} S_{xx} + \frac{(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} E_z \text{ จากการทำหนดให้สมการที่ (ก.3.ข) มี}$$

ค่า  $\sigma_{zz} = 0$  มาแทนในสมการที่ (ก.5.ข) จะได้

$$D_x = e_{15}S_{xz} + \varepsilon_{11}E_x \quad (\text{ก.5.ค})$$

$$D_z = \left( \left( e_{31} - \frac{C_{12}}{C_{22}}e_{32} \right) - \frac{(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32})(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} \right) S_{xx} + \left( \varepsilon_{33} + \frac{e_{32}e_{32}}{C_{22}} \right) + \frac{(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32})(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} E_z \quad (\text{ก.5.ง})$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{15} \\ \bar{e}_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 2S_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (ก.6)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \bar{e}_{15} &= e_{15} \\ \bar{e}_{31} &= \left( e_{31} - \frac{C_{12}}{C_{22}} e_{32} \right) - \frac{(e_{33} - \frac{C_{23}e_{32}}{C_{22}})(C_{13} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} \\ \bar{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= \left( \varepsilon_{33} + \frac{e_{32}e_{32}}{C_{22}} \right) + \frac{(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32})(e_{33} - \frac{C_{23}}{C_{22}}e_{32})}{(C_{33} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{22}})} \approx \varepsilon_{33} \end{aligned}$$

ดังนั้นคานที่มีความกว้างน้อยๆเมื่อเทียบกับความยาวจะมีพฤติกรรมแบบความเค้นระนาบ ดังแสดงในสมการที่ (ก.4) และ (ก.6)

#### ความเค้นระนาบ

สมการความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง ความเค้น และสนามไฟฟ้าที่ (ก.1) สำหรับคานที่มีความกว้างมากๆเมื่อเทียบกับความยาวจะมีพฤติกรรมแบบความเค้นระนาบ นั่นคือ  $S_{yy} = S_{yz} = S_{xy} = 0$  และ  $E_y = 0$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 0 \\ S_{zz} \\ 0 \\ 2S_{xz} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (ก.7)$$

จากสมการที่ (ก.7) จะได้

$$\sigma_{xx} = C_{11}S_{xx} + C_{13}S_{zz} - e_{31}E_z \quad (ก.7.ก)$$

$$\sigma_{zz} = C_{13}S_{xx} + C_{33}S_{zz} - e_{33}E_z \quad (\text{ก.7.ข})$$

$$\sigma_{xz} = C_{55}2S_{xz} - e_{15}E_x \quad (\text{ก.7.ค})$$

เนื่องจาก  $\sigma_{zz}$  มีค่าน้อยมาก (Kapuria, 2001) งานวิจัยนี้จึงกำหนดให้  $\sigma_{zz} = 0$  ดังนั้นสมการที่ (ก.7.

ข) จะได้  $S_{zz} = -\frac{C_{13}}{C_{33}}S_{xx} + \frac{e_{33}}{C_{33}}E_z$  แล้วนำไปแทนในสมการที่ (ก.7.ก) จะได้

$$\sigma_{xx} = (C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}})S_{xx} - (e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}}e_{33})E_z \quad (\text{ก.7.ง})$$

$$\sigma_{xz} = C_{55}2S_{xz} - e_{15}E_x \quad (\text{ก.7.จ})$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 2S_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.8})$$

โดยที่

$$\bar{C}_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}}$$

$$\bar{C}_{55} = C_{55}$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}}e_{33}$$

$$\bar{e}_{15} = e_{15}$$

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดไฟฟ้า ความเครียด และสนามไฟฟ้าที่ (ก.2) เมื่อพิจารณาโครงสร้างคานเป็นแบบความเครียดระนาบในระนาบ x-z นั่นคือ  $S_{yy} = S_{yz} = S_{xy} = 0$  และ  $E_y = 0$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 0 \\ S_{zz} \\ 0 \\ 2S_{xz} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.9})$$

นำ  $S_{zz} = -\frac{C_{13}}{C_{33}}S_{xx} + \frac{e_{33}}{C_{33}}E_z$  จากกรที่กำหนดให้สมการที่ (ก.7.ข) มีค่า  $\sigma_{zz} = 0$  มาแทนในสมการที่ (ก.9) จะได้

$$D_x = e_{15}S_{xz} + \varepsilon_{11}E_x$$

$$D_z = (e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}}e_{33})S_{xx} + (\varepsilon_{33} + \frac{e_{33}e_{33}}{C_{33}})E_z$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{e}_{15} \\ \bar{e}_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 2S_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (\text{ก.10})$$

โดยที่

$$\bar{e}_{15} = e_{15}$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{C_{13}}{C_{33}}e_{33}$$

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11}$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} + \frac{e_{33}e_{33}}{C_{33}}$$

ดังนั้นคานที่มีความกว้างมากๆเมื่อเทียบกับความยาวจะมีพฤติกรรมแบบความเคี้ยวตระนาบ ดังแสดงในสมการที่ (ก.8) และ (ก.10)

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ข

### ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด

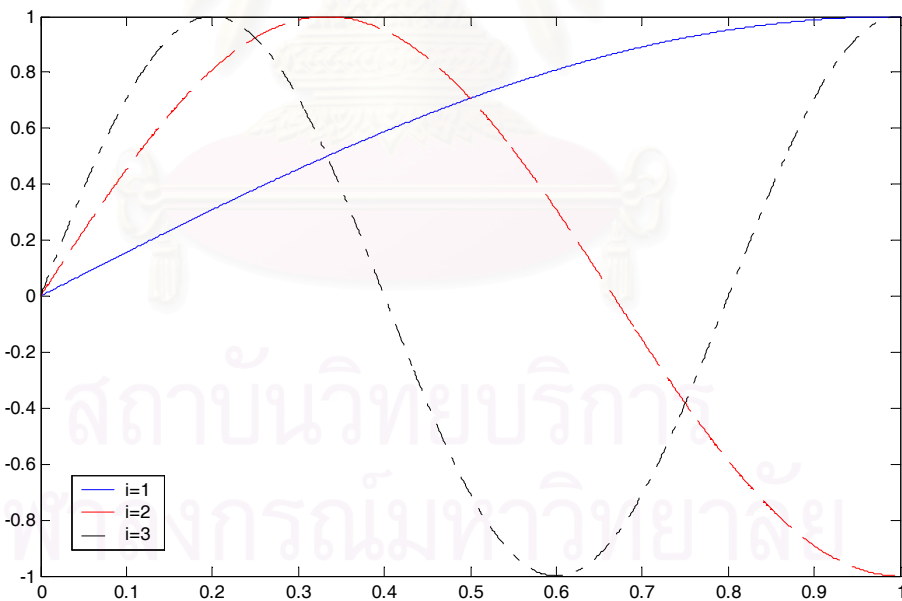
ในงานวิจัยนี้เลือกใช้ฟังก์ชันฟูเรียร์สี่แทนฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u, w$  ในทิศทางตามความยาวคานตามที่ได้แสดงไว้ในหัวข้อที่ 3.6 ของบทที่ 3 ซึ่งลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละกรณีจะแยกได้ดังนี้

#### ข.1 คานยื่น

ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ในทิศทางตามความยาวคานยื่น

$$R_i^u = \sin\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right)$$

ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ในทิศทางตามความยาวคานยื่นจะเป็นดังรูปที่ ข1 ซึ่งในที่นี้แสดงตัวอย่างลักษณะของฟังก์ชันรูปร่าง 3 ลำดับตั้งแต่  $i = 1, 2, 3$  ดังนี้

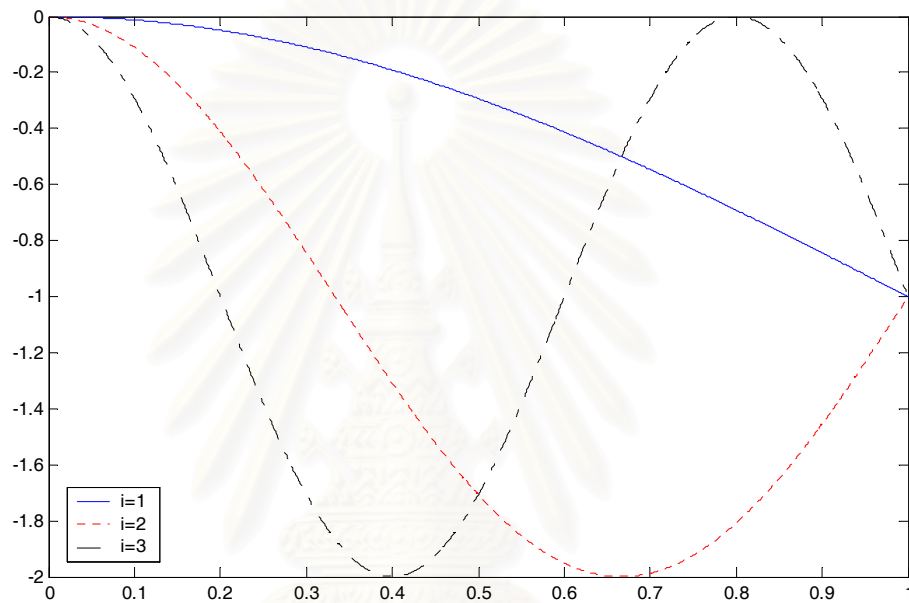


รูปที่ ข1 ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ในทิศทางตามความยาวคานยื่น

ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ในทิศทางตามความยาวคานยื่น

$$R_i^w = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi x}{2L}\right) - 1$$

ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ในทิศทางตามความยาวคานยื่นจะเป็นดังรูปที่ ข2 ซึ่งในที่นี้แสดงตัวอย่างลักษณะของฟังก์ชันรูปร่าง 3 ลำดับตั้งแต่  $i = 1, 2, 3$  ดังนี้



รูปที่ ข2 ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ในทิศทางตามความยาวคานยื่น

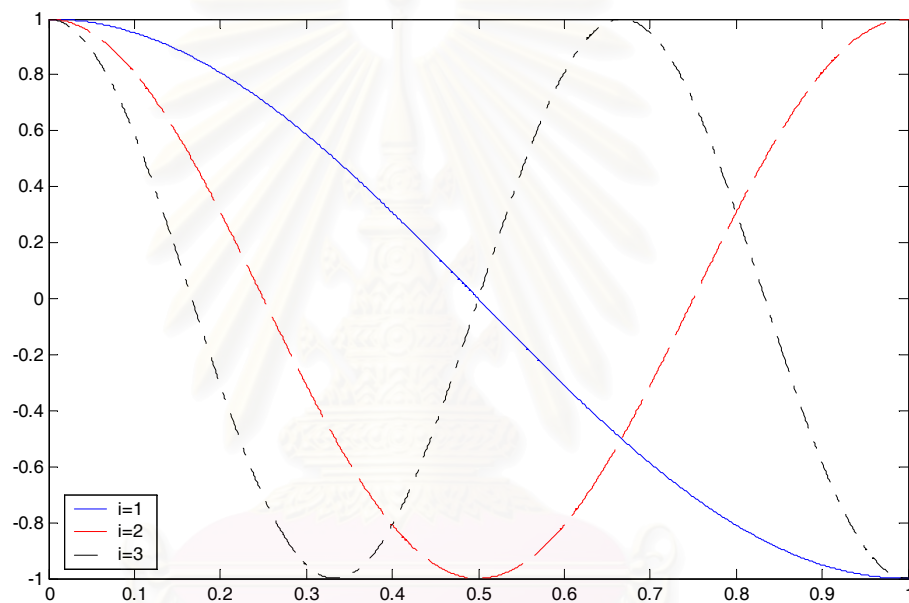
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ข.2 คานจุดรองรับธรรมดา

ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ในทิศทางตามความยาวคานจุดรองรับธรรมดา

$$R_i'' = \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ในทิศทางตามความยาวคานจุดรองรับธรรมดาจะเป็นดังรูปที่ ข3 ซึ่งในที่นี้แสดงตัวอย่างลักษณะของฟังก์ชันรูปร่าง 3 ลำดับตั้งแต่  $i = 1, 2, 3$  ดังนี้



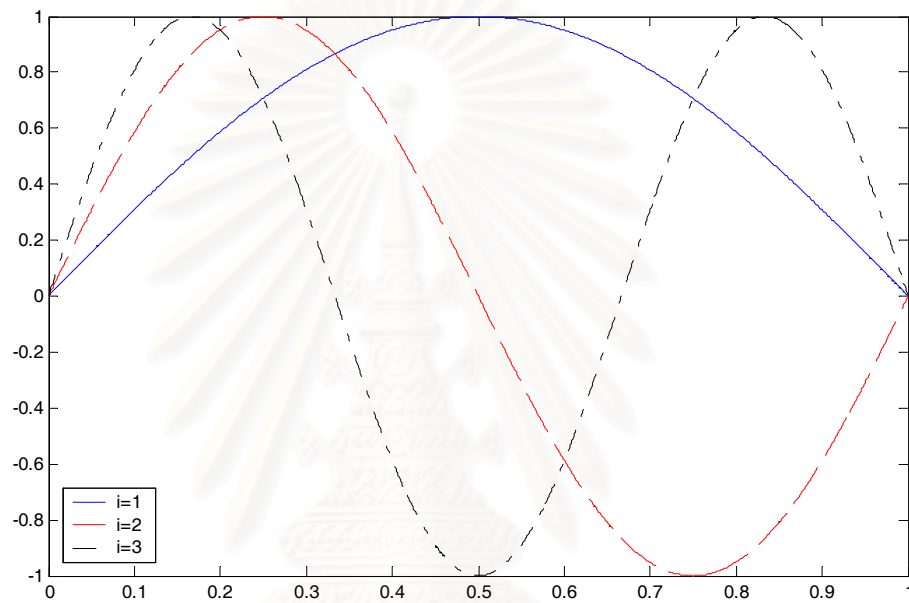
รูปที่ ข3 ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $u$  ในทิศทางตามความยาวคานจุดรองรับธรรมดา

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ในทิศทางตามความยาวคานจุดรองรับธรรมดา

$$R_i^w = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ในทิศทางตามความยาวคานจุดรองรับธรรมดาจะเป็นดังรูปที่ ข4 ซึ่งในที่นี้แสดงตัวอย่างลักษณะของฟังก์ชันรูปร่าง 3 ลำดับตั้งแต่  $i = 1, 2, 3$  ดังนี้



รูปที่ ข4 ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างของการกระจัด  $w$  ในทิศทางตามความยาวคานจุดรองรับธรรมดา



## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นาย ธวัชชัย ศิริโคจรสมบัติ เกิดวันที่ 7 สิงหาคม พ.ศ. 2523 ที่จังหวัดขอนแก่น สำเร็จการศึกษาระดับ  
ระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนสาริตมมหาวิทยาลัยขอนแก่น (มอдинแดง) จังหวัดขอนแก่น สำเร็จการศึกษาระดับ  
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์  
มหาวิทยาลัยขอนแก่น ในปีการศึกษา 2544 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตที่  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2545



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย