

การแบ่งย่อยกริดเพื่อวิเคราะห์ความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ
โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลูเมนต์



นายวิทยา วัฒนนุกุลชัย

สถาบันวิทยบริการ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1195-2

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

LOCAL GRID REFINEMENT FOR THERMAL STRESS ANALYSIS
BY FINITE VOLUME METHOD



Mr. Withaya Wattananukulchai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering

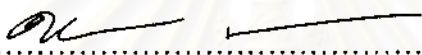
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University

Academic Year 2004

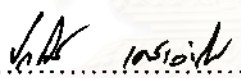
ISBN 974-53-1195-2

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การแบ่งย่อยกริดเพื่อวิเคราะห์ความถี่คลื่นเนื่องจากอุณหภูมิจนโดยระเบียบวิธีไฟ
 ในตัวออสุม
โดย นายวิทยา วัฒนนุกูลชัย
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กุณจินี มณีรัตน์

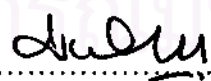
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง
ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต


..... คณะบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)


..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณจินี มณีรัตน์)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)


..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.จิตดิน แทนเที่ยง)

นายวิทยา วัฒนกุลชัย : การแบ่งย่อยกริดเพื่อวิเคราะห์ความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (LOCAL GRID REFINEMENT FOR THERMAL STRESS ANALYSIS BY FINITE VOLUME METHOD), อ.ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กุณรัตน์ มณีรัตน์ , 126 หน้า ISBN 974-53-1195-2

วิทยานิพนธ์นี้เสนอการนำเทคนิคการปรับขนาดปริมาตรควบคุมเฉพาะบริเวณมาใช้เพิ่มประสิทธิภาพในการคำนวณหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยใช้ค่าความผิดพลาดตกค้างเป็นเงื่อนไขการปรับขนาด สำหรับแก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิใน 2 มิติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Unstructured Grid เทคนิคการปรับขนาดปริมาตรควบคุมเฉพาะบริเวณ ช่วยเพิ่มความถูกต้องและลดภาระในการคำนวณลง ด้วยการปรับขนาดปริมาตรควบคุมเฉพาะบริเวณที่มีความจำเป็นโดยมีลักษณะเป็นการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมให้มีขนาดเล็กลง (*h-refinement*)

ค่าความผิดพลาดตกค้างของจุดต่อที่พิจารณา สามารถคำนวณได้จากค่าเฉลี่ยผลต่างของตัวแปรไม่ทราบค่าที่ตำแหน่งกึ่งกลางระหว่างจุดต่อกับจุดต่อข้างเคียง ซึ่งคำนวณมาจากการประมาณค่าเชิงเส้นระหว่างทั้งสองจุดต่อ และผลจากการคำนวณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ 1 จากจุดต่อที่พิจารณา ผลต่างของค่าตัวแปรที่ได้จะเป็นตัวบ่งชี้ว่าปริมาตรควบคุมใดควรทำการปรับขนาดก่อนนำไปคำนวณครั้งต่อไป กรณีศึกษาการนำความร้อนตัวบ่งชี้การปรับขนาดจะคำนวณมาจากค่าอุณหภูมิ ส่วนกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิตัวบ่งชี้การปรับขนาดจะคำนวณมาจากค่าอุณหภูมิและระยะกระจัดที่คำนวณได้ โดยเงื่อนไขที่นำมาพิจารณาหยุดการปรับขนาดสามารถกำหนดได้จาก จำนวนรอบการปรับขนาด เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ปรับขนาด และค่าความผิดพลาดตกค้างมาตรฐาน

เมื่อทำการปรับขนาดและคำนวณหาผลเฉลยจากกรณีศึกษาการนำความร้อนและความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ โดยเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำและโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ Easy FEM ซึ่งผลที่ได้แสดงให้เห็นถึงความถูกต้องแม่นยำที่เพิ่มขึ้นหลังการปรับขนาดปริมาตรควบคุม และเมื่อทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมโครงสร้างผลการออกแบบท่อพอลิโพรพิลีนพบว่า มีผลทำให้ค่าตออบเคิมบางค่าไม่อยู่ในกลุ่มของค่าตออบ และสามารถเห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิได้ดียิ่งขึ้น

ภาควิชา.....วิศวกรรมเครื่องกล..... ลายมือชื่อนิสิต.....
 สาขาวิชา.....วิศวกรรมเครื่องกล..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
 ปีการศึกษา...2547.....

457 05378 21: MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORD: LOCAL GRID REFINEMENT/ RESIDUAL ERROR/ UNSTRUCTURED GRID/ THERMAL STRESS/ CELL CENTER FINITE VOLUME METHOD.

WITHAYA WATTANANUKULCHAI: LOCAL GRID REFINEMENT FOR THERMAL STRESS ANALYSIS BY FINITE VOLUME METHOD. THESIS ADVISOR: ASST.PROF. KUNTINEE MANEERATANA, Ph.D., 126pp. ISBN974-53-1195-2

This thesis presents the utilisation of local a grid refinement (LGR) in conjunction with a residual error estimator for 2D thermal stress problems with a unstructured, cell-center finite volume method (FVM). LGR increases the accuracy and reduces computation costs by refining only parts of the computation domain where small control volumes are needed in the the *h*-refinement manner.

The simplified residual error of a given control volume is estimated from the average discrepancy of the unknown variables at the mid-points between the corresponding nodes of the control volume i.e., and adjacent nodes. The interpolation between two adjacent nodes and the extrapolation by 1st order Taylor series from the node is used to identify cells for refinement in next level. The error estimator for heat conduction problems are calculated by temperature and by temperature and displacement vector components for thermal stress problems. The LGR can be terminated by setting number of refinement levels, percentage of adaptive area or normalized residual error.

The program is verified by solving heat conduction and thermal stress test cases and the solutions are compared with the exact solutions and numerical solutions from Easy FEM program. It is shown that the improvements of solutions are obtained from LGR. When applying LGR to results of the topology design by evolutionary algorithm, some solutions are excluded from set of non-dominated solutions and better temperature distributions are observed.

Department Mechanical Engineering Student's signature

Field of study Mechanical Engineering Advisor's signature

Academic 2004

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กุณฑิณี มณีรัตน์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาและคำแนะนำ ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากในการทำวิทยานิพนธ์นี้ อีกทั้งได้คอยดูแลติดตามจนกระทั่งวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ ประธานคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ และ ดร. จิตดิน แดงเที่ยง กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาตรวจสอบและให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ต่อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบคุณ คุณกิตติพงศ์ บุญโถ่ง สำหรับคำแนะนำในเรื่อง การออกแบบทอพอโลยีด้วยวิธีขั้นตอนทางพันธุกรรม ขอขอบคุณเพื่อนๆ ทุกคนที่ร่วมกันสร้างบรรยากาศการเรียนรู้ที่มีความสุข

สุดท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา และครอบครัวอันเป็นที่รักยิ่ง ที่ให้ความรักและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาตลอด ขอขอบคุณ คุณมยุรา ภักดีว่าปี ที่เป็นกำลังใจให้เสมอมา อนึ่งคุณค่าอันใดที่ได้จากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นกตัญญูตราบูชาแต่บิดา มารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้ที่มีพระคุณทุกท่าน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฐ
สารบัญรูปภาพ.....	ฑ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 รูปแบบของปัญหา.....	3
1.3 วัตถุประสงค์.....	3
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	4
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน.....	4
1.6 ประโยชน์ที่จะได้รับ.....	5
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	7
2.1 บทนำ.....	7
2.2 ลำดับการปรับขนาดปริมาตรควบคุม.....	8
2.2.1 การปรับขนาดก่อนการคำนวณ.....	8
2.2.2 การปรับขนาดจากผลการคำนวณ.....	9
2.3 เงื่อนไขการปรับขนาด.....	10
2.3.1 Richardson Extrapolation.....	10
2.3.2 Residual Error Estimation.....	10
2.3.3 ค่าอนุพันธ์อันดับสอง.....	10
2.3.4 ฟังก์ชันค่าตัวแปร.....	11

	หน้า
2.4 รูปแบบการปรับขนาดปริมาตรควบคุม.....	11
2.4.1 ระเบียบวิธีการปรับขนาดแบบอาร์.....	11
2.4.2 ระเบียบวิธีการปรับขนาดแบบเอช.....	12
2.4.3 ระเบียบวิธีการปรับขนาดแบบพี.....	13
2.5 รูปแบบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม.....	14
2.5.1 การแบ่งย่อยแบบแบ่งเป็น 2 ส่วน.....	14
2.5.2 การแบ่งย่อยแบบแบ่งเป็น 4 ส่วน.....	15
2.5.3 การแบ่งย่อยแบบแบ่งรูป 3 เหลี่ยม.....	16
2.6 การประมาณค่าฟลักซ์.....	17
2.6.1 การประมาณค่าฟลักซ์แบบเชิงเส้น.....	18
2.6.2 การประมาณค่าฟลักซ์แบบ Unstructured Grid.....	19
2.7 บทสรุป.....	20
บทที่ 3 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์.....	21
3.1 บทนำ.....	21
3.2 สมการครอบคลุม.....	22
3.2.1 สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น.....	22
3.2.2 สมการอนุรักษ์พลังงาน.....	22
3.3 สมการเฉพาะเจาะจง.....	23
3.3.1 Fourier's Law.....	23
3.3.2 Strain-Displacement Relationship.....	23
3.3.3 Stress-Strain Relationship.....	24
3.3.4 Plane Stress-Plane Strain.....	25
3.3.4.1 Plane Stress.....	25
3.3.4.2 Plane Strain.....	26
3.4 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์.....	26
3.5 บทสรุป.....	27

	หน้า
บทที่ 4 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม.....	28
4.1 การแบ่งกริดรูปร่าง.....	28
4.2 การประมาณค่าตัวแปรที่ตำแหน่งใดๆ	29
4.3 การประมาณค่าสมการทั่วไป.....	30
4.3.1 การประมาณค่าพจน์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา.....	31
4.3.2 การประมาณค่าพจน์การแพร่.....	31
4.3.3 การประมาณค่าพจน์ของวัตถุ.....	32
4.4 รูปสำเร็จของสมการครอบคลุม.....	33
4.5 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต.....	34
4.5.1 Implementation of the Dirichlet Boundary Condition.....	34
4.5.2 Implementation of the Neumann Boundary Condition.....	34
4.6 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์.....	35
4.7 ขั้นตอนการคำนวณ.....	36
4.8 สรุป.....	37
บทที่ 5 ตัวบ่งชี้การปรับขนาดและการปรับขนาดปริมาตรควบคุม.....	38
5.1 ค่าความผิดพลาดตกค้าง.....	38
5.1.1 ความผิดพลาดตกค้างกรณี 1 มิติ.....	38
5.1.2 ความผิดพลาดตกค้างกรณี 2 มิติ.....	40
5.2 ตัวบ่งชี้การปรับขนาด.....	41
5.3 ตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำ.....	42
5.4 ขั้นตอนการกำหนดปริมาตรควบคุมที่ต้องปรับขนาด.....	43
5.5 การแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม.....	46
5.5.1 การกำหนดปริมาตรควบคุมข้างเคียงเมื่อปริมาตรควบคุมนั้นๆ ไม่ถูกปรับขนาด.....	48
5.5.2 การกำหนดปริมาตรควบคุมข้างเคียงเมื่อปริมาตรควบคุมนั้นๆ ถูกปรับขนาด.....	49
5.5.3 กระบวนการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม.....	51
5.6 เงื่อนไขพิจารณาหยุดการปรับขนาด.....	53

	หน้า
5.6.1 เงื่อนไขจำนวนรอบการปรับขนาด.....	53
5.6.2 เงื่อนไขเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ปรับขนาด.....	53
5.6.3 เงื่อนไขค่าความผิดพลาดตกค้างเพื่อหยุดปรับขนาด.....	54
5.7 การตรวจสอบคุณภาพหลังการปรับขนาด.....	56
5.8 สรุป.....	57
บทที่ 6 การทดสอบโปรแกรมสำหรับปัญหาการนำความร้อน.....	58
6.1 บทนำ.....	58
6.2 กรณีศึกษาปัญหาการนำความร้อน.....	58
6.2.1 กรณีศึกษาปัญหาการนำความร้อน กรณีที่ 1	58
6.2.2 กรณีศึกษาปัญหาการนำความร้อน กรณีที่ 2	59
6.3 การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาด.....	60
6.3.1 การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 1.....	61
6.3.1.1 ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 4×8 สำหรับกรณีศึกษาที่ 1	61
6.3.1.2 ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 8×16 สำหรับกรณีศึกษาที่ 1	63
6.3.2 การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 2.....	65
6.3.2.1 ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 5×5 สำหรับกรณีศึกษาที่ 2	65
6.3.2.2 ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 10×10 สำหรับกรณีศึกษาที่ 2	67
6.3.3 การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 1.....	69
6.3.3.1 ปริมาตรควบคุมสามเหลี่ยมมุมฉาก ขนาด $(3 \times 6) \times 2$ สำหรับกรณีศึกษาที่ 1	70

6.3.3.2 ปริมาตรควบคุมสามเหลี่ยมมุมฉาก $(5 \times 10) \times 2$ สำหรับกรณีศึกษาที่ 1	72
6.4 การทดสอบโปรแกรมแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม.....	75
6.4.1 การทดสอบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 1	75
6.4.2 การทดสอบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 2.....	79
6.5 สรุป.....	83
บทที่ 7 ความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ.....	84
7.1 บทนำ.....	84
7.2 โปรแกรมความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ.....	84
7.3 โปรแกรม Easy FEM	85
7.4 โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์.....	87
7.5 การปรับขนาดปริมาตรควบคุมสำหรับปัญหาเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ.....	88
7.5.1 การคำนวณปริมาตรควบคุมเริ่มต้น	89
7.5.2 การคำนวณหลังปรับขนาดครั้งที่ 1	92
7.5.3 การคำนวณหลังปรับขนาดครั้งที่ 2	95
7.5.4 ผลการคำนวณครั้งสุดท้าย	97
7.6 สรุป.....	102
บทที่ 8 การออกแบบทอพอโลยี.....	103
8.1 บทนำ.....	103
8.2 ทฤษฎีเบื้องต้นของขั้นตอนวิธีทางพันธุกรรม.....	103
8.2.1 การเข้ารหัสโครโมโซม.....	103
8.2.2 การคัดเลือก	103
8.2.3 การสลับสายพันธุ.....	105
8.3 การกำหนดลักษณะโครงสร้าง.....	106
8.4 การออกแบบปัญหาการถ่ายเทความร้อน.....	106
8.4.1 การปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 1.....	110
8.4.2 การปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 2	111

	หน้า
8.4.3 การปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 3.....	112
8.4.4 การปรับขนาดโครงสร้างจากการออกแบบทอพอโลยี.....	113
8.5 การวิเคราะห์โครงสร้างหลังการปรับขนาด.....	115
8.6 สรุป.....	117
บทที่ 9 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	119
9.1 สรุปผลการวิจัย.....	120
9.2 ข้อเสนอแนะ.....	121
9.2.1 ตัวบ่งชี้การปรับขนาด.....	121
9.2.2 ลักษณะการปรับขนาด.....	122
9.2.3 โปรแกรมการปรับขนาดออกแบบทอพอโลยี.....	122
รายการอ้างอิง.....	123
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	126

สารบัญตาราง

	หน้า
ตาราง 6.1 การเปรียบเทียบค่าบ่งชี้ต่างๆ ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 1	65
ตาราง 6.2 การเปรียบเทียบค่าบ่งชี้ต่างๆ ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 2	69
ตาราง 6.3 การเปรียบเทียบค่าบ่งชี้ต่างๆ ปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 1	74
ตาราง 6.4 ค่าบ่งชี้ต่างๆ จากผลการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 1	77
ตาราง 6.5 ค่าบ่งชี้ต่างๆ จากผลการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 2	77
ตาราง 7.1 ค่าบ่งชี้ที่ได้จากกระบวนการปรับขนาดปริมาตรควบคุม.....	101
ตาราง 8.1 เปรียบเทียบค่าจากการปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 1	110
ตาราง 8.2 เปรียบเทียบค่าจากการปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 2	111
ตาราง 8.3 เปรียบเทียบค่าจากการปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 3	112
ตาราง 8.4 เปรียบเทียบค่าหลังปรับขนาดโครงสร้างจากผลการออกแบบทอพอโลยี.....	113

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญรูปภาพ

	หน้า
รูป 2.1 การสร้างกริดด้วยปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอและปริมาตรควบคุมที่ทำการปรับขนาด โดยจำนวนปริมาตรควบคุมเท่ากัน.....	8
รูป 2.2 การปรับขนาดแบบอาร์.....	12
รูป 2.3 การปรับขนาดแบบเอช.....	12
รูป 2.4 การปรับขนาดแบบพี.....	13
รูป 2.5 การแบ่งย่อยที่ละด้าน ตามทิศทางที่พิจารณา.....	15
รูป 2.6 การแบ่งย่อยแบบแบ่งเป็น 4 ส่วน.....	15
รูป 2.7 ลักษณะการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยม.....	16
รูป 2.8 ลักษณะการประมาณค่าฟลักซ์แบบเชิงเส้น.....	18
รูป 2.9 ลักษณะปริมาตรควบคุมแบบ Cell-Center Unstructured Grid	19
รูป 3.1 ลักษณะความเค้นและความเครียดสำหรับพิจารณาปัญหา 2 มิติ.....	25
รูป 4.1 ปริมาตรควบคุมและเวกเตอร์ส่วนประกอบต่างๆ	28
รูป 4.2 การกำหนดค่าจุดต่อในปริมาตรควบคุม.....	31
รูป 4.3 ลักษณะเวกเตอร์ การวางตัวของเวกเตอร์ผิวและเวกเตอร์ระยะกระจัด.....	32
รูป 4.4 กระบวนการคำนวณค่าอุณหภูมิและความเค้น.....	36
รูป 5.1 ค่าของตัวแปรที่คำนวณได้และเวกเตอร์บอกตำแหน่ง.....	39
รูป 5.2 ค่าความคลาดเคลื่อนจากผลต่างการประมาณค่า.....	39
รูป 5.3 ค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าใน 2 มิติ.....	40
รูป 5.4 ผลการหาค่าความคลาดเคลื่อนตกค้างแต่ละปริมาตรควบคุม.....	41
รูป 5.5 ขั้นตอนการคำนวณอย่างง่ายของทั้งระบบ.....	43
รูป 5.6 รายละเอียดขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาปริมาตรควบคุมที่ต้องปรับขนาด.....	44
รูป 5.7 การกำหนดปริมาตรควบคุมที่แบ่งย่อย จากเงื่อนไขหลายตัวแปร.....	45
รูป 5.8 การแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด.....	46
รูป 5.9 การกำหนดลำดับและหมายเลขปริมาตรควบคุมหลังทำการแบ่งย่อย.....	47
รูป 5.10 ลักษณะการเชื่อมต่อปริมาตรควบคุมย่อย เมื่อปริมาตรควบคุมข้างเคียงถูกแบ่งย่อย... ..	48
รูป 5.11 ลักษณะการเชื่อมต่อปริมาตรควบคุมย่อย เมื่อปริมาตรควบคุมที่พิจารณาถูกแบ่งย่อย.. ..	49

รูป 5.12 ลักษณะการอ้างอิงปริมาตรควบคุมใหม่ในรูปของปริมาตรควบคุมเดิม.....	51
รูป 5.13 กระบวนการสร้างปริมาตรควบคุมใหม่ โดยการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมที่กำหนด..	52
รูป 5.14 ความคลาดเคลื่อนที่เท่ากันที่ของเงื่อนไขขอบเขตที่ต่างกัน.....	54
รูป 6.1 ลักษณะปัญหาและการกระจายของอุณหภูมิ กรณีศึกษาที่ 1	59
รูป 6.2 ลักษณะปัญหาและการกระจายของอุณหภูมิ กรณีศึกษาที่ 2	59
รูป 6.3 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม 4×8 กรณีศึกษาที่ 1	61
รูป 6.4 การปรับขนาดจากผลเฉลี่ยแม่นยำ ปริมาตรควบคุม 4×8 กรณีศึกษาที่ 1	62
รูป 6.5 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลี่ยแม่นยำที่ระยะ $x_2 = 0.625$ cm กรณีศึกษาที่ 1 ..	62
รูป 6.6 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลี่ยแม่นยำที่ระยะ $x_2 = 4.375$ cm กรณีศึกษาที่ 1 ..	62
รูป 6.7 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม 8×16 กรณีศึกษาที่ 1	63
รูป 6.8 การปรับขนาดจากผลเฉลี่ยแม่นยำ ปริมาตรควบคุม 8×16 กรณีศึกษาที่ 1	63
รูป 6.9 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลี่ยแม่นยำที่ระยะ $x_2 = 0.937$ cm กรณีศึกษาที่ 1 ..	64
รูป 6.10 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลี่ยแม่นยำที่ระยะ $x_2 = 4.687$ cm กรณีศึกษาที่ 1 ..	64
รูป 6.11 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม 5×5 กรณีศึกษาที่ 2	66
รูป 6.12 การปรับขนาดจากผลเฉลี่ยแม่นยำ ปริมาตรควบคุม 5×5 กรณีศึกษาที่ 2	66
รูป 6.13 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลี่ยแม่นยำที่ระยะ $x_2 = 0.5$ cm กรณีศึกษาที่ 2 ...	66
รูป 6.14 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลี่ยแม่นยำที่ระยะ $x_2 = 0.9$ cm กรณีศึกษาที่ 2	67
รูป 6.15 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม 10×10 กรณีศึกษาที่ 2	67
รูป 6.16 การปรับขนาดจากผลเฉลี่ยแม่นยำ ปริมาตรควบคุม 10×10 กรณีศึกษาที่ 2	68

รูป 6.17 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงที่ระยะ $x_2 = 0.55$ cm กรณีศึกษาที่ 2...	68
รูป 6.18 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงที่ระยะ $x_2 = 0.85$ cm กรณีศึกษาที่ 2...	68
รูป 6.19 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม $(3 \times 6) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1	70
รูป 6.20 การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำตรง ปริมาตรควบคุม $(3 \times 6) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1	70
รูป 6.21 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงที่ระยะ $x_2 = 0.556$ cm กรณีศึกษาที่ 1..	71
รูป 6.22 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงที่ระยะ $x_2 = 2.222$ cm กรณีศึกษาที่ 1 ..	71
รูป 6.23 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม $(5 \times 10) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1	72
รูป 6.24 การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำตรง ปริมาตรควบคุม $(5 \times 10) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1	72
รูป 6.25 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงที่ระยะ $x_2 = 0.333$ cm กรณีศึกษาที่ 1..	73
รูป 6.26 ผลการคำนวณเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงที่ระยะ $x_2 = 2.333$ cm กรณีศึกษาที่ 1 ..	73
รูป 6.27 ลักษณะปัญหา และปริมาตรควบคุมเริ่มต้น กรณีศึกษาที่ 1	75
รูป 6.28 ผลการทดสอบการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 1	76
รูป 6.29 ปริมาตรควบคุมที่ได้จากการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 1	78
รูป 6.30 ลักษณะปัญหา และปริมาตรควบคุมเริ่มต้น กรณีศึกษาที่ 2	79
รูป 6.31 ผลการทดสอบการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 2	80
รูป 6.32 ปริมาตรควบคุมที่ได้จากการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 2	82
รูป 7.1 ลักษณะปัญหาและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ	84
รูป 7.2 ลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์โดเมนของปัญหาสำหรับหาผลเฉลย ด้วยโปรแกรม Easy FEM	85
รูป 7.3 ผลการกระจายอุณหภูมิ จากการคำนวณระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	86
รูป 7.4 ผลการกระจายระยะกระจัดแนวนอน จากการคำนวณระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์...	86
รูป 7.5 ผลการกระจายระยะกระจัดแนวตั้ง จากการคำนวณระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	86
รูป 7.6 ผลการกระจายอุณหภูมิ จากการคำนวณระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม.....	87
รูป 7.7 ผลการกระจายระยะกระจัดแนวนอน จากการคำนวณระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม.....	87

รูป 7.24	ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 3 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ	97
รูป 7.25	การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากอุณหภูมิ หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงล่างของโดเมนกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ..	98
รูป 7.26	การเปรียบเทียบค่า U และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากภาระกระจัด U หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงล่างของโดเมนกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ..	98
รูป 7.27	การเปรียบเทียบค่า V และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากภาระกระจัด V หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงล่างของโดเมนกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ..	99
รูป 7.28	การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากอุณหภูมิ หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงกลางโดเมนกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ.....	99
รูป 7.29	การเปรียบเทียบค่า U และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากภาระกระจัด U หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงกลางโดเมนกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ...	100
รูป 7.30	การเปรียบเทียบค่า V และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากภาระกระจัด V หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงกลางโดเมนกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ...	100
รูป 8.1	การเข้ารหัสโครโมโซม.....	104
รูป 8.2	การคัดเลือก.....	104
รูป 8.3	การสลับสายพันธุ.....	105
รูป 8.4	การกำหนดลักษณะโครงสร้าง.....	106
รูป 8.5	ลักษณะและเงื่อนไขของปัญหาที่พิจารณา.....	107
รูป 8.6	ลักษณะโครงสร้างและความสามารถการถ่ายเทความร้อน.....	108
รูป 8.7	การปรับขนาดปริมาตรควบคุม โครงสร้างตัวอย่างที่ 1	110
รูป 8.8	การปรับขนาดปริมาตรควบคุม โครงสร้างตัวอย่างที่ 2	111
รูป 8.9	การปรับขนาดปริมาตรควบคุม โครงสร้างตัวอย่างที่ 3	112
รูป 8.10	ปริมาตรควบคุมและการนำความร้อนชุดคำตอบใหม่หลังทำการปรับขนาด.....	114
รูป 8.11	ชุดคำตอบและการนำความร้อนหลังปรับขนาดปริมาตรควบคุม.....	115
รูป 8.12	การถ่ายเทความร้อนบริเวณผิวสัมผัสแหล่งความร้อนของโครงสร้าง III-i	116

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึง ความสำคัญและที่มาของวิชานี้ รูปแบบของปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ วัตถุประสงค์ ขอบเขตของวิชานี้ ขั้นตอนการดำเนินงาน และประโยชน์ที่จะได้รับจากวิชานี้

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิชานี้

ในหลายทศวรรษที่ผ่านมา ได้มีการนำการจำลองแบบด้วยวิธีเชิงตัวเลขมาศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรม เพื่อใช้ในการออกแบบและแก้ปัญหาต่างๆ การคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีข้อได้เปรียบหลายประการเมื่อเทียบกับการทดลอง เช่น สามารถหาผลเฉลยของปัญหาได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำเพียงพอสำหรับการใช้งานจริง ความซับซ้อนในการเตรียมการที่น้อยกว่า สะดวกในการดำเนินการ และต้นทุนค่าใช้จ่ายที่ต่ำ อีกทั้งความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีและประสิทธิภาพของคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นอย่างรวดเร็ว ทำให้การนำความรู้ความเข้าใจในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาผสมผสานกับวิชาคณิตศาสตร์แขนงต่างๆ ร่วมกับความรู้ทางด้านภาษาคอมพิวเตอร์ เพื่อทำการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาใช้ในการแก้ปัญหา กำลังเป็นที่นิยมกันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน

โดยทั่วไปทฤษฎีทางกลศาสตร์ในงานวิศวกรรมนั้น จะแสดงลักษณะทางกายภาพของปัญหาอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations, PDEs) โดยสามารถสร้างมาจากสมการครอบคลุม สมการเฉพาะเจาะจง ภาวะ เงื่อนไขเบื้องต้น และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ซึ่งการหาผลเฉลยแม่นยำไม่สามารถทำได้โดยง่ายและบางปัญหาอาจหาผลเฉลยไม่ได้ จึงได้มีการนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาใช้ในการหาผลเฉลย โดยการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของระบบสมการพีชคณิต แล้วทำการประยุกต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์แก้ระบบสมการ เพื่อหาค่าประมาณผลเฉลยของปัญหา การเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเป็นระบบสมการพีชคณิตมีอยู่หลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Methods, FEM) ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (Finite Difference Method, FDM) และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Methods, FVM)

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นำมาใช้หาผลเฉลยไม่ว่าจะเป็นระเบียบวิธีใดก็ตาม จะต้องทำการแบ่งขอบเขตของปัญหา (Spatial Discretisation) ออกเป็นส่วนย่อยๆ โดยในระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มจะเรียกแต่ละส่วนย่อยเหล่านี้ว่า ปริมาตรควบคุม (Control Volume) เพื่อนำไปใช้หาผลเฉลยโดยการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในปริมาตรควบคุมนี้ ค่าความคลาดเคลื่อน (Error, ϵ) ของผลเฉลยที่ได้จะขึ้นอยู่กับขนาดของปริมาตรควบคุม (δx) เช่น ถ้าระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่มีมีอันดับความแม่นยำ (Order of Accuracy) เท่ากับสอง ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจะแปรผันตามขนาดของส่วนแบ่งย่อยยกกำลังสอง หรือ $\epsilon \propto \delta x^2$ เป็นต้น

จะเห็นว่าการแบ่งย่อยขอบเขตของปัญหาให้มีขนาดเล็กลง ทำให้ผลเฉลยมีความถูกต้องมากขึ้น เมื่อลดขนาดปริมาตรควบคุมลง จนได้คำตอบที่ไม่เปลี่ยนแปลงอีกหรือผลเฉลยที่ได้ไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของกริด (Grid Independency) จะถือว่าผลการคำนวณที่ได้มีความถูกต้อง คือมีการลู่เข้าของผลเฉลย แต่การแบ่งขอบเขตของปัญหาให้มีขนาดเล็กสม่ำเสมอทั้งโดเมน ทำให้มีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าจำนวนมาก ระบบสมการพีชคณิตมีขนาดใหญ่ทำให้ต้องใช้หน่วยความจำ (RAM) และเวลาในการคำนวณ (CPU Time) เพิ่มมากขึ้นด้วย ดังนั้นการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมให้มีขนาดเล็กเฉพาะบริเวณที่จำเป็นจะช่วยให้อาจมีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าที่จำเป็นเท่านั้น และผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้องเท่าเทียมกับการแบ่งเท่ากันทั้งโดเมน

โครงการวิจัยนี้ เป็นการเขียน โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมเฉพาะบริเวณ (Local Grid Refinement, LGR) เพื่อใช้ในการวิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิ เนื่องจากการนำความร้อนและความเค้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (Thermal Stress) ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม โดยผลการคำนวณที่ได้หลังการปรับขนาดปริมาตรควบคุมแล้วจะมีค่าความถูกต้องมากขึ้น และพิจารณาเงื่อนไขที่จะนำไปเป็นเงื่อนไขหยุดการปรับขนาด ทั้งนี้โปรแกรมที่ได้สามารถนำมาใช้ร่วมกับวิธีการออกแบบทอพอโลยี (Topology Design) ของโครงสร้างเพื่อให้ได้คำตอบถูกต้องยิ่งขึ้นได้

การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในโครงการวิจัยนี้ ได้ทำการพัฒนาบนระบบปฏิบัติการลินุกซ์ (Linux) รุ่นทะเล (Thai Language Extension, TLE) ซึ่งเป็นระบบปฏิบัติการซึ่งพัฒนาโดยความร่วมมือระหว่างองค์กรต่างๆ ภายในประเทศไทย โดยทำการเขียนโปรแกรมด้วยภาษา C++ ซึ่งเป็นภาษาที่ได้รับความนิยมในการพัฒนาโปรแกรม เนื่องจากระบบปฏิบัติการลินุกซ์เป็นระบบปฏิบัติการเปิด (Open Source) และเป็นฟรีแวร์ (Free Ware) ซึ่งจะเห็นได้ว่าการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์บนระบบปฏิบัติการเปิดเริ่มเป็นที่แพร่หลาย เพื่อไม่เป็นการละเมิดทรัพย์สิน

ทางปัญญา ลดค่าใช้จ่ายในการซื้อ โปรแกรมที่มีลิขสิทธิ์ และเพื่อให้สามารถเผยแพร่โปรแกรมต่อไป โดยง่าย

1.2 รูปแบบของปัญหา

ปัญหาที่นำมาพิจารณาในโครงการวิจัยนี้ คือ ปัญหาการนำความร้อน และความเค้นที่เกิดขึ้น เนื่องจากอุณหภูมิในสถานะสมดุล ของวัตถุที่มีความยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear Elastic) และมีการผิดรูปน้อย (Small Deformation) สมการความสัมพันธ์ที่นำมาพิจารณาประกอบด้วย สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น (Conservative of Linear Momentum) สมการอนุรักษ์พลังงานความร้อน (Conservation of Energy) สมการการถ่ายเทความร้อนของฟูรีเยร์ (Fourier's Law) และสมการความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียด (Stress-Strain Relationship) ในสองมิติ แล้วสร้างระบบสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) เมื่อได้แบบจำลองแล้วจะนำไปสร้างระบบสมการพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Unstructured Grid โดยใช้ปริมาตรควบคุมสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทั้งยังทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม หรืออาจกล่าวได้อีกอย่างว่าการปรับขนาดกริด เฉพาะในบริเวณที่จำเป็น การปรับขนาดจะพิจารณาโดยใช้ค่าความผิดพลาดตกค้างที่เกิดขึ้นจากการคำนวณของแต่ละปริมาตรควบคุม แล้วทำการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมนั้นเป็น 4 ส่วนเท่ากัน เพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลการคำนวณ แล้วทำการเปรียบเทียบผลกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงหรือโปรแกรมอื่นๆ ที่ได้รับการยอมรับ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

1.3 วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์นี้ คือ การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการจำลองแบบเชิงตัวเลขของโครงสร้าง 2 มิติ ที่รับภาระเชิงกลและความร้อน ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม เพื่อให้ได้คำตอบที่มีความถูกต้องเพิ่มมากขึ้นหลังทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม โดยมีการวิเคราะห์ถึงเงื่อนไขที่จะนำมาใช้กำหนดปรับขนาดและเงื่อนไขที่ใช้ในการหยุดการปรับขนาด

ในโครงการวิจัยนี้จะทำการพัฒนาโปรแกรมด้วยภาษา C++ ที่เขียนบนระบบปฏิบัติการเปิด Linux TLE โดยประมวลผลโดยใช้คำสั่ง g++ ในรูปสัญนิยมเทนเซอร์ (Tensor Notation) โดยผลลัพธ์ที่ได้ คือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการจำลองแบบปัญหาโครงสร้าง

ทั่วไปและยังสามารถนำมารองรับการออกแบบทอพอโลยี ด้วยการขั้นตอนวิธีทางพันธุศาสตร์ (Genetic Algorithm, GA) ได้อีกด้วย

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับของแข็งที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้น และมีการผิดรูปน้อย กรณีศึกษาการนำความร้อน และความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ
2. ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ไฟไนต์วอลุ่มเซลล์เซ็นเตอร์ (Cell Center Finite Volume Method) ด้วยภาษา C++ บนระบบปฏิบัติการเปิด Linux TLE สำหรับปัญหาสองมิติในระบบพิกัดฉากที่มีปริมาตรควบคุมสี่เหลี่ยมมุมฉากแบบ Unstructured Grid โดยมีการปรับขนาดปริมาตรควบคุมเฉพาะบริเวณที่จำเป็น โดยพิจารณาเงื่อนไขการปรับขนาดจากค่าความผิดพลาดค้ำของแต่ละปริมาตรควบคุม แล้วทำการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมนั้นเป็น 4 ส่วนเท่ากัน เพื่อให้ผลการคำนวณที่ได้มีความถูกต้องเพิ่มมากขึ้น
3. ทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น กับกรณีศึกษาการนำความร้อนและความเค้นที่เกิดเนื่องจากอุณหภูมิต่างๆ แล้วเทียบผลเฉลยกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรงหรือโปรแกรมอื่นๆ ที่ได้รับการยอมรับ เพื่อเปรียบเทียบความถูกต้องของโปรแกรม และนำโปรแกรมที่พัฒนามาใช้ร่วมกับการออกแบบทอพอโลยีโดยใช้วิธีขั้นตอนทางพันธุกรรม

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาหลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องซึ่งประกอบด้วย การสำรวจงานวิจัยที่ผ่านมาเกี่ยวกับการปรับขนาดกริดเฉพาะบริเวณ การจำลองแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับวัตถุยืดหยุ่นเชิงเส้น สมการอนุพันธ์โมเมนต์ สมการอนุพันธ์พลังงาน ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Unstructured Grid และการออกแบบทอพอโลยี
2. ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยการนำความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม โดยใช้ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

3. พัฒนาโปรแกรมให้สามารถทำการแบ่งย่อยกริดเฉพาะบริเวณได้ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีความถูกต้องเพิ่มมากขึ้น หลังการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม และพิจารณาเงื่อนไขที่นำมาหาค่าการปรับขนาดปริมาตรควบคุม
4. พัฒนาโปรแกรมให้สามารถหาค่าความเค้นที่เกิดเนื่องจากอุณหภูมิได้
5. ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น เปรียบเทียบกับปัญหาที่มีผลเฉลย โดยอ้างอิงผลกับผลการคำนวณด้วยโปรแกรมที่มีไฟไนต์เอลิเมนต์ Easy FEM
6. นำโปรแกรมที่ได้มาประยุกต์ใช้ในการออกแบบท่อพอลิโพลี โดยใช้ขั้นตอนวิธีทางพันธุกรรมสำหรับปัญหาการนำความร้อน
7. เขียนบทความวิจัย
8. สรุปผลและจัดทำวิทยานิพนธ์เพื่อนำเสนอ
9. สอบวิทยานิพนธ์

1.6 ประโยชน์ที่จะได้รับ

1. ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจถึงการจำลองแบบเชิงตัวเลข ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มร่วมกับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ที่ตั้งอยู่บนสัจนิยมเทนเซอร์ โดยสามารถอธิบายปัญหาทางกายภาพเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และอธิบายความหมายทางกายภาพของผลลัพธ์ได้
2. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ที่เขียนบนระบบปฏิบัติการ Linux สำหรับวิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิเนื่องจากการนำความร้อน และความเค้นที่เกิดเนื่องจากอุณหภูมิในวัสดุที่มีความยืดหยุ่นเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งมีการทำการปรับขนาดกริดเฉพาะบริเวณ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีความถูกต้องเพิ่มขึ้น โดยมีจำนวนปริมาตรควบคุมเฉพาะที่จำเป็นเท่านั้น
3. สามารถนำโปรแกรมมาประยุกต์ใช้ในการออกแบบท่อพอลิโพลีของโครงสร้าง โดยใช้ขั้นตอนวิธีทางพันธุกรรม สำหรับปัญหาการนำความร้อนได้

4. เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Unstructured Grid โดยใช้สัญนิยมเทนเซอร์ ต่อไป



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนำ

การจำลองแบบเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาในทางวิศวกรรม เช่น ปัญหาการนำความร้อน การหาค่าความเค้น หรือปัญหาของไหล เป็นต้น การกระจายตัวของปริมาณต่างๆ ในแต่ละบริเวณของขอบเขตของปัญหา โดยทั่วไปจะมีขนาดที่ไม่เท่ากัน มีทั้งบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงน้อยและบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงมาก ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของโดเมน ภาวะที่กระทำ เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

ดังนั้นในการคำนวณหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ ที่ได้กล่าวมา ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงมาก จำเป็นต้องใช้ปริมาตรควบคุมที่มีขนาดเล็กเพื่อให้ค่าที่คำนวณได้มีความถูกต้องแม่นยำ ในทำนองเดียวกันบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยน้อยสามารถเลือกใช้ปริมาตรควบคุมที่มีขนาดใหญ่ได้เพื่อลดจำนวนปริมาตรควบคุมให้น้อยลง ซึ่งผลที่คำนวณได้จะมีความแม่นยำเช่นกัน จะเห็นได้ว่าการเลือกใช้ปริมาตรควบคุมที่มีขนาดให้เหมาะสมกับแต่ละบริเวณของปัญหา จะทำให้ได้ผลการคำนวณที่ถูกต้องและมีจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่าเฉพาะที่จำเป็นเท่านั้น

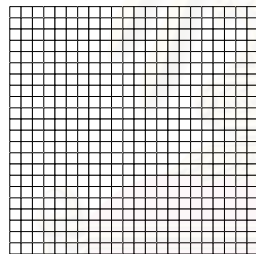
ในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเทคนิคและวิธีการแบ่งย่อยกริดเฉพาะบริเวณ ซึ่งประกอบด้วย ลำดับขั้นการปรับขนาด เงื่อนไขที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้การปรับขนาด รูปแบบการปรับขนาด ปริมาตรควบคุม รูปแบบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม และการประมาณค่าฟังก์ชัน โดยพิจารณาปริมาตรควบคุมที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น การศึกษาเทคนิคเหล่านี้จะเป็นประโยชน์ในการตัดสินใจเลือกเทคนิคที่เหมาะสม เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาที่พิจารณาในโครงการวิจัยนี้ ต่อไป

2.2 ลำดับชั้นการปรับขนาดปริมาตรควบคุม

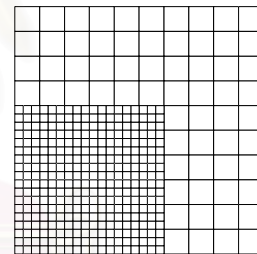
เมื่อพิจารณาลำดับชั้นในการปรับขนาดสามารถแบ่งได้เป็น 2 วิธี คือ การปรับขนาดก่อนทำการคำนวณ และการปรับขนาดหลังการคำนวณ โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.2.1 การปรับขนาดก่อนการคำนวณ

ในการหาผลเฉลยด้วยวิธีการสร้างแบบจำลองนั้น ในบางปัญหาที่สามารถคาดเดาได้ว่าบริเวณใดน่าจะมีการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรมาก บริเวณนั้นก็จะถูกกำหนดให้ใช้ปริมาตรควบคุมที่มีขนาดเล็ก ส่วนในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงน้อยจะถูกกำหนดให้ใช้เป็นปริมาตรควบคุมที่ใหญ่กว่า เช่น ในงานวิจัยของ Core et al. (2003) ทำการจำลองแบบการไหลโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลูม เพื่อหาค่าความดันและความเร็ว ปัญหาการไหลผ่านช่อง โดยสามารถคาดเดาได้ว่าบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของการไหลสูงจะอยู่บริเวณทางเข้า จึงได้มีการปรับขนาดก่อนการคำนวณ โดยได้ปริมาตรควบคุม โดยใช้ปริมาตรควบคุมขนาด 22×22 โดยมี 2 ลักษณะดังรูป 2.1



(ก) ปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอ



(ข) ปรับขนาดก่อนการคำนวณ

รูป 2.1 การสร้างกริดด้วยปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอและปริมาตรควบคุมที่ทำการปรับขนาด โดยให้จำนวนปริมาตรควบคุมเท่ากัน

ผลที่ได้จากปริมาตรควบคุมทั้งสองแบบ เมื่อนำไปเปรียบเทียบผลจากการคำนวณ โดยใช้ปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอจำนวน 189×189 ผลจากการคำนวณโดยใช้ปริมาตรที่ทำการปรับขนาดให้ผลที่ใกล้เคียงกับผลที่ได้จากปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอจำนวน 189×189 ซึ่งให้ผลที่ได้มีความถูกต้องมากกว่าผลจากปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอ ที่มีจำนวนเท่ากัน

งานวิจัยอื่นที่ใช้วิธีปรับขนาดปริมาตรควบคุมก่อนการคำนวณ เช่น Coelho and Argain (1997) ทำการจำลองการไหลผ่านท่อ ที่หน้าตัดมีการเปลี่ยนแปลงขนาดแบบทันทีทันใดเป็น 2 ระดับ โดยใช้ปริมาตรควบคุมสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีหลายขนาด โดยปริมาตรควบคุมขนาดเล็กมีขนาดความยาวด้านเท่ากับครึ่งหนึ่งของปริมาตรควบคุมใหญ่ที่อยู่ติดกัน ส่วน Li and Modest (2001) ศึกษาการพาความร้อนแบบปั่นป่วนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลูม ลักษณะปัญหาเป็นการไหลเข้าท่อโดยใช้ปริมาตรควบคุมบริเวณกลางท่อและทางเข้าที่มีขนาดเล็ก แปรผันตามพิกัดของปริมาตรควบคุมนั้นๆ เป็นต้น

การปรับขนาดปริมาตรควบคุมเฉพาะบริเวณก่อนการคำนวณ ทำให้ผลที่ได้มีความแม่นยำเพิ่มมากขึ้น เมื่อเทียบกับการแบ่งย่อยแบบสม่ำเสมอที่จำนวนปริมาตรควบคุมเดียวกัน แต่คำตอบที่ได้อาจยังไม่ถูกต้องเพียงพอเนื่องจากปริมาตรควบคุมที่ใช้ยังมีขนาดใหญ่อยู่ ทำนองเดียวกันหากคาดเดาโดยใช้ปริมาตรควบคุมที่เล็กเกินไป มีผลให้จำนวนมากเกินไปจนเป็นความจำเป็นได้ เช่นเดียวกัน

2.2.2 การปรับขนาดจากผลการคำนวณ

การปรับขนาดปริมาตรควบคุมจากผลการคำนวณ เป็นการปรับขนาดโดยใช้ผลของการคำนวณครั้งก่อนมาสร้างเงื่อนไข เพื่อพิจารณาปรับขนาดปริมาตรควบคุมสำหรับการใช้ในการคำนวณครั้งต่อไป การปรับขนาดมีทั้งแบบการแบ่งย่อยให้มีขนาดเล็กลงในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูง และการปรับให้ปริมาตรควบคุมมีขนาดใหญ่ขึ้นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยน้อย

การปรับขนาดจากผลการคำนวณ สามารถระบุบริเวณที่ต้องทำการปรับขนาดได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากเมื่อนำผลการคำนวณที่ได้มาวิเคราะห์เกี่ยวกับ ค่าอนุพันธ์อันดับสอง หรือค่าความผิดพลาดตกค้างของตัวแปรไม่ทราบค่าเป็นตัวบ่งชี้ถึงความถูกต้องของผลการคำนวณที่จุดต่อด้วย หากค่าตัวบ่งชี้มีค่าน้อย ผลการคำนวณของจุดต่อนั้นจะมีความถูกต้องสูง แต่หากมีค่ามาก จะเป็นตัวแสดงว่าผลการคำนวณที่จุดต่อนั้น ยังมีความผิดพลาดอยู่มากเช่นกัน ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเงื่อนไขที่ได้กล่าวมานี้สามารถนำมาเป็นเงื่อนไขของการปรับขนาดปริมาตรควบคุมต่อไปได้

2.3 เงื่อนไขการปรับขนาด

เงื่อนไขการปรับขนาดเป็นผลที่ได้จากการคำนวณครั้งก่อน ซึ่งจะเป็นตัวบ่งชี้การปรับขนาด การปรับขนาดของปริมาตรควบคุมนั้น ซึ่งสามารถหาได้จากหลายวิธี โดยเงื่อนไขการปรับขนาดต่างๆ ที่พบจากการสำรวจงานวิจัย มีดังนี้

2.3.1 Richardson Extrapolation

ในการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณที่ได้ หากพิจารณาปริมาตรควบคุมที่มีขนาดต่างกัน แต่ที่ตำแหน่งจุดต่อเดียวกันหากผลที่ได้มีค่าเท่ากันจะถือได้ว่าผลที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำ แต่หากผลที่ได้มีค่าต่างกันมาก ปริมาตรควบคุมนั้นจะถูกกำหนดให้ปรับขนาด การพิจารณาเงื่อนไขปรับขนาดในลักษณะนี้ คือหลักการวิธี Richardson Extrapolation ตัวอย่างงานวิจัยที่ปรับด้วยเงื่อนไขนี้ได้แก่ Coelho and Argain (1997), Ziegler (1997) และวารงศ์รัตน์ จันทสาโร และคณะ (2546) เป็นต้น

2.3.2 Residual Error Estimation

เป็นการคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณ โดยพิจารณาค่าตัวแปรที่อยู่ตำแหน่งเดียวกันระหว่างจุดต่อทั้งสอง โดยใช้การประมาณค่าที่ต่างกันสองวิธี หากค่าที่ตำแหน่งเดียวกันของการประมาณค่า 2 วิธีนี้ให้ค่าที่ใกล้เคียงกันจะถือว่า ผลที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำ แต่หากผลที่ได้มีค่าต่างกันมากจะบ่งชี้ว่าผลการคำนวณที่ได้นั้นมีความยังไม่ถูกต้องแม่นยำ เงื่อนไขการปรับขนาดในลักษณะนี้ คือหลักการวิธี Residual Error Estimation หรือเรียกได้ว่าเป็นการประมาณค่าความผิดพลาดตกค้าง ตัวอย่างงานวิจัยที่ปรับด้วยเงื่อนไขนี้ได้แก่ Jasak and Gosman (2003)

2.3.3 ค่าอนุพันธ์อันดับสอง

เมื่อทำการคำนวณปัญหาที่ผลเฉลยเป็นแบบเชิงเส้น หากค่าอนุพันธ์อันดับสองของผลเฉลยมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ มีแนวโน้มว่าผลการคำนวณที่ได้นั้นมีค่าความแม่นยำสูง การนำค่าอนุพันธ์อันดับสองของจุดต่อมาพิจารณาปรับขนาด ตัวอย่างเช่น ปราโมทย์ เศษะอำไพ (2544) ปรับขนาดเอลิเมนต์ในการคำนวณค่าคลื่นช็อคด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และ Ham et al. (2002) สร้างเงื่อนไขการปรับขนาดในรูปของฟังก์ชันค่าอนุพันธ์อันดับสอง เป็นต้น

2.3.4 ฟังก์ชันค่าตัวแปร

เงื่อนไขการปรับขนาดการปรับขนาดอีกรูปแบบที่พบคือ เงื่อนไขที่สร้างขึ้นในรูปของฟังก์ชันของตัวแปรที่ทำการคำนวณอยู่ เช่นงานวิจัยของ เช่น Becker and Braack (2001) ศึกษาการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและทำการปรับขนาด โดยพิจารณาจากฟังก์ชันของค่า Nusselt Number และ Durbin and Iaccarino (2002) ศึกษาการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและทำการปรับขนาด โดยสร้างสมการความสัมพันธ์ของค่าความเร็วและความดันที่จุดต่อนั้นๆ หากจุดต่อใดมีค่ามากกว่าที่กำหนดจะถูกแบ่งย่อยให้มีขนาดเล็กลง เป็นต้น

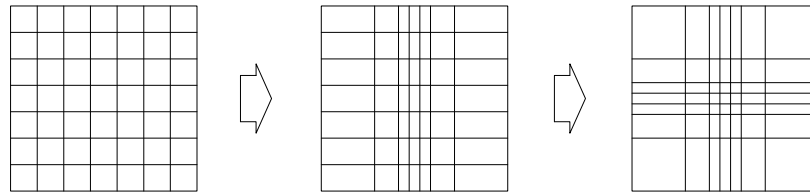
จะเห็นว่าเทคนิคในการปรับขนาดนั้นมีอยู่หลายวิธีขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา และระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นำมาพิจารณา เมื่อได้ศึกษาและพิจารณาเงื่อนไขที่จะนำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ ได้เลือกวิธีการปรับขนาดโดยใช้หลักของ Residual Error Estimation หรือเรียกได้ว่าเป็นค่าความผิดพลาดตกค้าง เนื่องจากสามารถทำความเข้าใจได้ง่าย และค่าความผิดพลาดตกค้างที่ได้ ยังสามารถนำมาพิจารณาเพื่อเป็นเงื่อนไขหยุดการปรับขนาดได้อีกด้วย

2.4 รูปแบบการปรับขนาดปริมาตรควบคุม

รูปแบบการปรับขนาดปริมาตรควบคุม เพื่อเพิ่มความถูกต้องให้ผลการคำนวณนั้น สามารถแบ่งได้เป็น 3 ลักษณะคือ ระเบียบวิธีการปรับขนาดแบบอาร์ แบบเอช และแบบพี โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.4.1 ระเบียบวิธีการปรับขนาดแบบอาร์ (*r* - Refinement)

ระเบียบวิธีการปรับขนาดแบบอาร์ เป็นการปรับขนาดปริมาตรควบคุมโดยการเปลี่ยนขนาดปริมาตรควบคุม แต่จำนวนของปริมาตรควบคุมยังมีจำนวนคงที่ งานวิจัยที่ใช้การปรับขนาดปริมาตรควบคุมแบบอาร์ เช่น Zegeling (2003) ทำการจำลองแบบการเผาไหม้ ใน 2 มิติ ด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันดับสอง เงื่อนไขที่ใช้ปรับขนาดได้มาจากฟังก์ชันของอนุพันธ์อันดับสองของผลเฉลย ซึ่งเป็นตัวกำหนดการเลื่อนตำแหน่งของแกนของปริมาตรควบคุม ทั้งพิกัดตามแนวอน และพิกัดตามแกนตั้งตามลำดับ ดังรูป 2.2



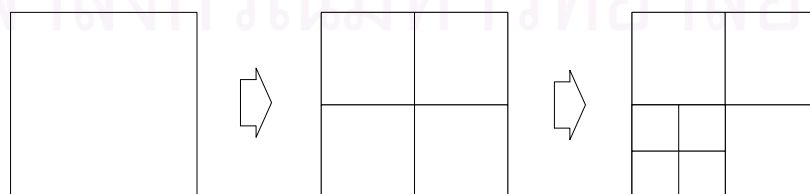
รูป 2.2 การปรับขนาดแบบอาร์

ตัวอย่างอื่นๆ เช่น Anne et al. (1999) ศึกษาการไหลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม และ ปราโมทย์ เตะอำไพ (2544) ทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ใน ปัญหาการไหลที่เกิดคลื่นช็อก เป็นต้น

การปรับขนาดด้วยวิธีแบบอาร์ มีข้อดีหลายประการ เช่น เป็นการปรับขนาดโดยที่จำนวน ปริมาตรควบคุมคงที่ ซึ่งสามารถทำได้ง่ายกว่าการปรับขนาดโดยการแบ่งย่อย สำหรับปัญหาที่หาผล เฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มนั้น จะเห็นได้ว่าเมื่อทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมแล้ว ยังมี ลักษณะเป็น Structured Grids ซึ่งระเบียบวิธีในการคำนวณจะมีความซับซ้อนน้อยกว่าปริมาตร ควบคุมที่มีลักษณะเป็น Unstructured Grids สำหรับข้อเสียของการปรับขนาดแบบอาร์ คือ มี ลักษณะเป็นการกระจายค่าความคลาดเคลื่อนทั้งโดเมนให้มีขนาดสม่ำเสมอ ซึ่งยังคงมีค่าความ คลาดเคลื่อนอยู่ คำตอบที่ได้หลังการปรับขนาดอาจเปลี่ยนแปลงได้อีกเมื่อเปลี่ยนขนาดปริมาตร ควบคุมให้เล็กลง และเมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่อที่เก็บค่าตัวแปร จะต้องประมาณค่าตัวแปรที่ ตำแหน่งใหม่ด้วย

2.4.2 ระเบียบวิธีการปรับขนาดแบบเอช (h - Refinement)

การปรับขนาดแบบเอช เป็นการปรับขนาดปริมาตรควบคุม โดยมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและ จำนวนของปริมาตรควบคุม ดังรูป 2.3

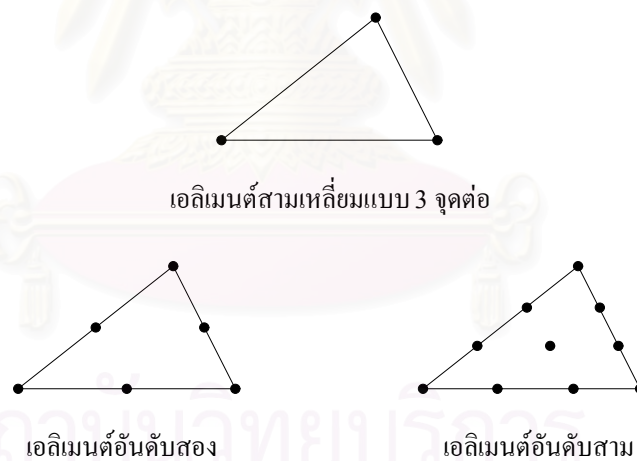


รูป 2.3 การปรับขนาดแบบเอช

ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูงการปรับขนาดจะมีลักษณะเป็นการแบ่งย่อย โดยจะได้ปริมาตรควบคุมที่มีขนาดเล็กลงแต่มีจำนวนเพิ่มมากขึ้น ส่วนในบริเวณที่ผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงน้อย ปริมาตรควบคุมบริเวณนั้นจะถูกรวมกันให้มีขนาดใหญ่ขึ้นทำให้จำนวนปริมาตรควบคุมลดลง ตัวอย่างงานวิจัยที่ปรับขนาดแบบเอชโดยใช้การแบ่งย่อย เช่น Kim and Jameson (1998), Steinbach (1998), Borthwick et al. (2000), Kim and Choi (2000), Lan et al. (2001) และ Ham et al. (2002) นอกจากนี้ยังมีการปรับขนาดแบบเอชที่มีทั้งการแบ่งย่อยและรวมปริมาตรควบคุมเพื่อลดตัวแปรไม่ทราบค่า เช่น Jasak (1996) เป็นต้น

2.4.3 ระเบียบวิธีการปรับขนาดแบบพี (p - Refinement)

การปรับขนาดแบบพี เป็นการปรับขนาดที่นิยมใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยที่ขนาดของเอลิเมนต์มีขนาดเท่าเดิม แต่เพิ่มอันดับชั้นโพลิโนเมียล (Polynomial Order) ของฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน (Interpolation Function) ทำให้ค่าที่คำนวณได้มีความถูกต้อง ลักษณะของเอลิเมนต์ที่อันดับชั้นต่าง แสดงได้ดังรูป 2.3



รูป 2.4 การปรับขนาดแบบพี

ตัวอย่างงานวิจัย เช่น Kobsak (2004) ทำการวิเคราะห์ปัญหา ความเค้นที่ปลายรอยร้าว ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้ใช้เอลิเมนต์อันดับสองในการคำนวณ ซึ่งการใช้เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อไม่สามารถหาคำตอบได้แม่นยำ เป็นต้น

จากการศึกษารูปแบบการปรับขนาดปริมาตรควบคุม พบว่าการปรับขนาดด้วยวิธีแบบที่เหมาะสมกับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากการลดความผิดพลาดในฟังก์ชันการประมาณค่าภายในของเอลิเมนต์นั้นๆ โดยตรง ในส่วนของการปรับขนาดแบบอาร์ เมื่อทำการปรับขนาดแล้ว แม้ว่าปริมาตรควบคุมที่ได้จะยังคงมีลักษณะเป็น Structured Grid แต่ผลเฉลยที่ได้จะมีลักษณะเป็นการเฉลี่ยค่าความคลาดเคลื่อนให้เท่ากันทั้ง โดเมน ซึ่งผลเฉลยที่ได้อาจยังมีความคลาดเคลื่อนอยู่ การแบ่งย่อยแบบเอชมีลักษณะเป็นการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมในบริเวณที่จำเป็นให้มีขนาดเล็กลง จึงทำให้ค่าความผิดพลาดจากการคำนวณลดลง ดังนั้นระเบียบวิธีแบบเอชเป็นลักษณะการปรับขนาดที่ทำให้ปริมาตรควบคุมที่ได้มีลักษณะเป็น Unstructured Grid ทั้งยังมีผลทำให้จำนวนปริมาตรควบคุมมีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งทำให้กระบวนการจัดการกริดมีความซับซ้อนกว่าการปรับขนาดแบบอาร์

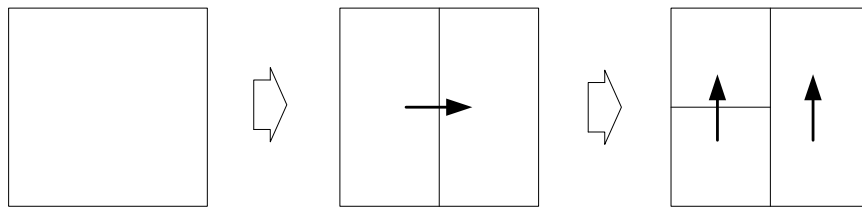
จากผลสรุปที่ได้ การปรับขนาดปริมาตรควบคุมในวิทยานิพนธ์นี้จะทำการปรับขนาดด้วยระเบียบวิธีแบบเอช โดยการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม เนื่องจากต้องการลดความผิดพลาดจากการคำนวณให้น้อยลง อีกทั้งการปรับขนาดด้วยระเบียบวิธีเอช มีลักษณะสอดคล้องกับการออกแบบทอพอโลยี เนื่องจากไม่มีการย้ายตำแหน่งของจุดต่อ ทำให้ลักษณะของโครงสร้างที่ได้จากการออกแบบไม่มีการเปลี่ยนแปลง

2.5 รูปแบบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม

รูปแบบของการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมที่ได้ศึกษานั้น จะพิจารณาเฉพาะปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น ซึ่งเป็นลักษณะของปริมาตรควบคุมเริ่มต้นที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ โดยรูปแบบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม สามารถแบ่งรูปแบบเป็นการแบ่งย่อย 2 ส่วน 4 ส่วน และเป็นรูปสามเหลี่ยมได้ดังนี้

2.5.1 การแบ่งย่อยแบบแบ่งเป็น 2 ส่วน

การแบ่งย่อยแบบแบ่งเป็น 2 ส่วน มีลักษณะการแบ่งปริมาตรควบคุมตามทิศทางที่พิจารณา โดยมีลักษณะเป็นการแบ่งที่ละด้าน ดังรูป 2.5



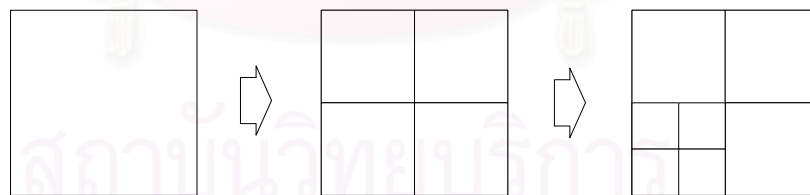
(ก) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น (ข) พิจารณาปรับขนาดตามแนวนอน (ค) พิจารณาปรับขนาดตามแนวตั้ง

รูป 2.5 การแบ่งย่อยทีละด้าน ตามทิศทางที่พิจารณา

เมื่อคำนวณค่าตัวแปรด้วยปริมาตรควบคุมเริ่มต้นรูป 2.5 (ก) แล้วพิจารณาเงื่อนไขการปรับขนาดโดยเงื่อนไขนั้นๆ เป็นการพิจารณาในแนวนอน เช่น ค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวแปรในทิศแนวนอน หากค่าที่ได้กำหนดให้ปรับขนาด จะได้ปริมาตรควบคุมดังรูป 2.5 (ข) จากนั้นพิจารณาปรับขนาดโดยเงื่อนไขจากแนวตั้งได้ผลดังรูป 2.5 (ค) ซึ่งปริมาตรควบคุมด้านขวาไม่ถูกปรับขนาด แต่ด้านซ้ายถูกปรับขนาด ตัวอย่างงานวิจัยที่ปรับขนาดลักษณะนี้ เช่น Ham et al. (2002)

2.5.2 การแบ่งย่อยแบบแบ่งเป็น 4 ส่วน

การแบ่งปริมาตรควบคุมเป็น 4 ส่วน มีลักษณะเป็นการแบ่งปริมาตรควบคุมทีละ 2 ด้าน ซึ่งเมื่อพิจารณาเงื่อนไขการปรับขนาดแล้ว หากปริมาตรควบคุมใด ถูกกำหนดให้ปรับขนาดปริมาตรควบคุมอื่นๆ จะถูกแบ่ง ดังรูป 2.6



(ก) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น (ข) พิจารณาปรับขนาดครั้งที่ 1 (ค) พิจารณาปรับขนาดครั้งที่ 2

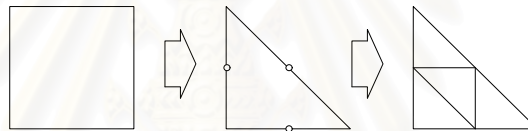
รูป 2.6 การแบ่งย่อยแบบแบ่ง 4 ส่วน

จากรูปที่แสดง ปริมาตรควบคุมเริ่มต้นรูป 2.6 (ก) กำหนดให้ปรับขนาด โดยแบ่งเป็นปริมาตรควบคุมใหม่ จำนวน 4 ปริมาตรควบคุม ดังรูป 2.6 (ข) จากนั้นเมื่อพิจารณาปรับขนาดครั้งที่ 2 หากปริมาตรควบคุมที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด คือ ปริมาตรควบคุมด้านล่างซ้าย ผลที่ได้จะเป็นดังรูป 2.6 (ค)

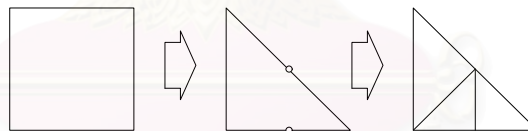
ตัวอย่างงานวิจัยที่ทำการแบ่งปริมาตรควบคุมเป็น 4 ส่วน เช่น Borthwick et al. (2000), Lan et al. (2001) และ Ham et al. (2002) เป็นต้น

2.5.3 การแบ่งย่อยแบบแบ่งรูป 3 เหลี่ยม

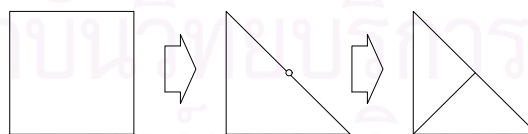
การแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมแบบรูป 3 เหลี่ยม เป็นลักษณะการแบ่งโดยใช้เส้นทแยงมุม โดยปริมาตรควบคุมเริ่มต้นที่อยู่ในรูป 4 เหลี่ยม หลังทำการแบ่งจะได้ปริมาตรควบคุมย่อยใหม่ ซึ่งมีทั้งแบบแบ่งด้วยเส้นทแยงมุม 1 เส้น เส้นทะแยงมุม 2 เส้น ตัวอย่างงานวิจัยที่แบ่งย่อยปริมาตรควบคุมในลักษณะนี้ เช่น Steinbach (1998) ได้สร้างปริมาตรควบคุมเริ่มต้นรูปสี่เหลี่ยม จากนั้นได้ทำการแบ่งย่อยเป็นรูป 3 เหลี่ยม และได้แสดงลักษณะการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม 3 เหลี่ยมใหม่ที่ได้ โดยแบ่งเป็น 3 ลักษณะดังรูป 2.7



(ก) การปรับขนาดแบบแบ่ง 3 ด้าน



(ข) การปรับขนาดแบบแบ่ง 2 ด้าน



(ค) การปรับขนาดแบบแบ่ง 1 ด้าน

รูป 2.7 ลักษณะการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยม

จากรูปแบบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมในงานวิจัยที่ได้พบ เมื่อพิจารณาการแบ่งแบบทีละด้านนั้น มีข้อดีที่สามารถแบ่งปริมาตรควบคุมเฉพาะในทิศทางที่จำเป็นเท่านั้น แต่ข้อเสียคือต้องมีการพิจารณาหลายครั้งตามจำนวนของทิศทาง ในส่วนการแบ่งแบบแบ่งเป็น 4 ส่วนนั้น มีข้อดีคือเมื่อปรับขนาด 1 ครั้งจะเป็นการแบ่งย่อยทั้งในทิศทางแนวนอนและแนวตั้ง สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ ซึ่งไม่จำเป็นต้องปรับขนาดทีละทิศทาง แต่ข้อเสียคือมีโอกาสปรับขนาดมากเกินไปจนเกิดความจำเป็น การแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมในลักษณะรูป 3 เหลี่ยมสามารถปรับขนาดปริมาตรควบคุมเฉพาะบริเวณได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่กระบวนการในการแบ่งย่อยนั้นมีความซับซ้อนมากกว่า อีกเมื่อขนาดความคลาดเคลื่อนที่แต่ละด้านของปริมาตรควบคุม (Skewness error on face) จะมีขนาดมาก ซึ่งต้องมีการแก้ไขความผิดพลาดที่เกิดขึ้น ทำให้กระบวนการคำนวณมีความซับซ้อนมากขึ้นด้วย (Lertsurayut and Maneeratana, 2002) และสามารถทำการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มได้เฉพาะแบบ Unstructured Grid เท่านั้น

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกลักษณะการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมแบบแบ่ง 4 ส่วน เนื่องจากเงื่อนไขที่ใช้พิจารณาในลักษณะของค่าความผิดพลาดตรงข้างรวมของจุดต่อ โดยไม่ได้พิจารณาแยกทิศทาง อีกทั้งค่าความคลาดเคลื่อนที่แต่ละด้านของปริมาตรควบคุมจะมีขนาดน้อยกว่าการแบ่งย่อยแบบ 3 เหลี่ยม ซึ่งสามารถละทิ้งค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการคำนวณได้

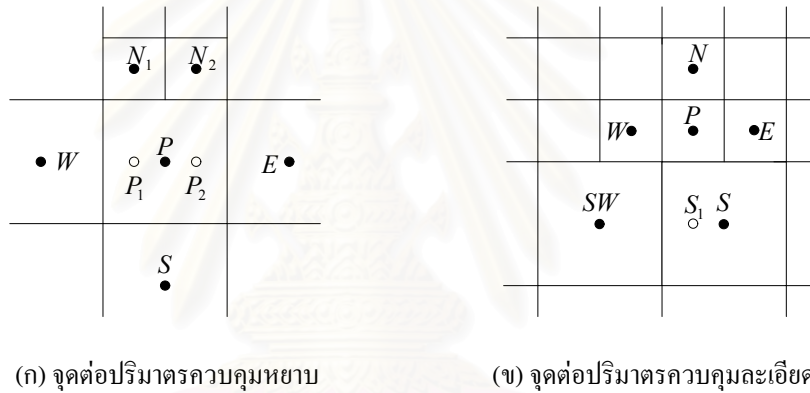
2.6 การประมาณค่าฟลักซ์

การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม เริ่มจากการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม แล้วทำการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์ค่าฟลักซ์ของตัวแปรไม่ทราบค่าที่พิจารณาตลอดปริมาตรควบคุม ซึ่งหากปริมาตรควบคุมที่ใช้มีลักษณะเป็น Structured Grid การประมาณค่าทางคณิตศาสตร์จะมีลักษณะคล้ายคลึงกับระเบียบวิธีผลต่างอันดับ แต่หากปริมาตรควบคุมที่ใช้มีลักษณะเป็น Unstructured Grid การประมาณค่าทางคณิตศาสตร์จะมีความซับซ้อนมากกว่า

หลังจากทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมด้วยวิธีการแบ่งย่อยแล้ว ปริมาตรควบคุมที่ได้จะมีลักษณะเป็น Unstructured Grid ลักษณะการประมาณค่าที่พบสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ การประมาณค่าเชิงเส้น ซึ่งเป็นลักษณะการสร้างจุดต่อเทียมด้วยการประมาณเชิงเส้นเพื่อให้สามารถประมาณค่าฟลักซ์แบบ Structured Grid ได้ และการประมาณค่าฟลักซ์แบบ Unstructured Grid โดยตรง ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

2.6.1 การประมาณค่าฟังก์ชันแบบเชิงเส้น

การประมาณค่าฟังก์ชันแบบเชิงเส้นของปริมาตรควบคุมที่มีลักษณะเป็น Unstructured Grid สามารถทำได้โดยการสร้างจุดต่อเทียมขึ้นมา เพื่อให้การหาปริพันธ์ค่าฟังก์ชันรอบปริมาตรควบคุม นั้น มีลักษณะเดียวกับ Structured Grid ซึ่งทำให้การหาปริพันธ์ง่ายขึ้น เช่นในงานวิจัยของ Coelho and Argain (1997) แสดงเทคนิคและลักษณะการประมาณค่าสมการแบบเชิงเส้น โดยพิจารณา จุดต่อของปริมาตรควบคุมหยาบ (Coarse Grid Control Volume) และจุดต่อของปริมาตรควบคุมละเอียด (Fine Grid Control Volume) โดยมีการประมาณค่าของตัวแปรในตำแหน่งใหม่แบบเชิงเส้น ดังแสดงในรูป 2.8



รูป 2.8 ลักษณะการประมาณค่าฟังก์ชันแบบเชิงเส้น

เมื่อพิจารณาจุดต่อของปริมาตรควบคุมหยาบดังรูป 2.8 (ก) ระบบสมการพีชคณิตที่จุดต่อ P สามารถคำนวณได้จาก ระบบสมการ

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_{N_1} (\phi_{N_1} - \phi_{P_1}) + a_{N_2} (\phi_{N_2} - \phi_{P_2}) + b \tag{2.1}$$

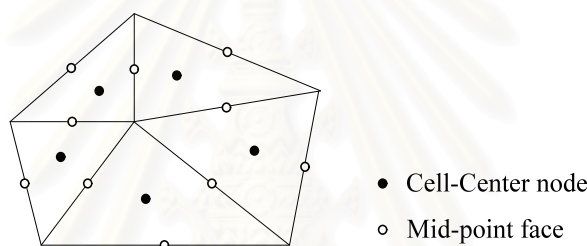
เมื่อ ϕ_i แทนค่าตัวแปรใดๆ a_i แทนค่าสัมประสิทธิ์ตัวแปรตามทิศทางต่างๆ ดังรูป 2.8 โดยค่าของ ϕ_{P_1} และ ϕ_{P_2} ได้จากการประมาณค่าเชิงเส้น ในทำนองเดียวกัน จุดต่อปริมาตรควบคุมละเอียดรูป 2.8 (ข) สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_N \phi_N + a_W \phi_W + a_S (\phi_{S_1} - \phi_P) + b \tag{2.2}$$

หลังจากทำการประมาณค่าฟลักซ์ในลักษณะนี้แล้ว ระบบสมการที่ได้มีลักษณะเป็น Structured Grid ตัวอย่างงานวิจัยที่ใช้การประมาณค่าฟลักซ์แบบเชิงเส้น เช่น Edwards (1996), Core et al. (2002)

2.6.2 การประมาณค่าฟลักซ์แบบ Unstructured Grid

การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Unstructured Grid จะมีความซับซ้อนมากกว่าการหาผลเฉลยแบบ Structured Grid แต่ข้อได้เปรียบที่สำคัญคือ รูปร่างของปริมาตรควบคุมมีได้หลากหลายกว่า ทำให้สามารถใช้ได้ทั้งปริมาตรควบคุมสามเหลี่ยม หรือปริมาตรควบคุมที่ไม่สม่ำเสมออื่น ดังเช่น Maneeratana (2004) แสดงลักษณะของปริมาตรควบคุมแบบ Cell-Center Unstructured Grid โดยมีลักษณะดังรูป 2.9



รูป 2.9 ลักษณะปริมาตรควบคุมแบบ Cell-Center Unstructured Grid

การหาผลเฉลยของปริมาตรควบคุมแบบ Unstructured Grid จะมีลักษณะเป็นการหาปริพันธ์แต่ละด้านของปริมาตรควบคุม ตัวอย่างงานวิจัยที่ทำการประมาณค่าในลักษณะนี้ เช่น Jasak and Gosman (2001), Lertsurayut and Maneeratana (2002), Wattananukulchai and Maneeratana (2004) เป็นต้น

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกวิธีการประมาณค่าฟลักซ์ในลักษณะของ Unstructured Grid เพื่อให้สามารถพิจารณาปริมาตรควบคุมที่มีรูปร่างหลากหลายได้ และไม่พิจารณาบริเวณที่ถูกแบ่งย่อยเป็นพิเศษ

2.7 บทสรุป

จากการศึกษางานวิจัยที่ผ่านมา จะเห็นได้ว่าการปรับขนาดปริมาตรควบคุมสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มด้วยวิธีแบบเอช ทำให้ผลการประมาณค่าที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น เนื่องจากปริมาตรควบคุมถูกแบ่งย่อยให้เล็กลงและมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นด้วย อีกทั้งยังแบ่งย่อยได้ทั้งโดเมนอย่างเป็นอิสระซึ่งต่างจากการปรับขนาดแบบอาร์ ซึ่งปริมาตรควบคุมข้างเคียงจะต้องเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย

เงื่อนไขการปรับขนาดจะพิจารณาจากค่าความผิดพลาดตกค้างซึ่งสามารถคำนวณและแสดงลักษณะทางกายภาพได้อย่างชัดเจน อีกทั้งขนาดของค่าความผิดพลาดที่ได้ยังสามารถใช้เป็นเงื่อนไขการหยุดการปรับขนาดได้อีกด้วย

หลังจากสามารถระบุปริมาตรควบคุมที่ต้องทำการปรับขนาด จากเงื่อนไขการปรับขนาดได้แล้ว กำหนดให้ปริมาตรควบคุมนั้นจะถูกแบ่งย่อยออกเป็น 4 ส่วนที่มีขนาดเท่ากัน และเมื่อทำการปรับขนาดแล้ว ปริมาตรควบคุมใหม่ที่ได้มีลักษณะเป็นแบบ Unstructured Grid ซึ่งการประมาณค่าฟลักซ์ของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มที่ใช้ จะมีลักษณะเป็น Unstructured Grid โดยตรง แม้จะมีความซับซ้อน แต่ข้อได้เปรียบ คือ สามารถใช้ได้กับปริมาตรควบคุมรูปร่างต่างๆ ได้เป็นอย่างดี

หรือสรุปได้ว่าในวิทยานิพนธ์นี้ได้เลือกใช้การปรับขนาดปริมาตรควบคุมด้วยวิธีแบบเอช โดยการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมจาก 1 เป็น 4 ปริมาตรควบคุมย่อย ที่มีขนาดเท่ากัน ด้วยเงื่อนไขของค่าความผิดพลาดตกค้าง โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Unstructured Grid เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องมากขึ้น ด้วยจำนวนปริมาตรควบคุมที่น้อยที่สุด ตามความจำเป็น

บทที่ 3

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

3.1 บทนำ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ของปัญหาต่างๆ ในงานทางวิศวกรรม ถูกสร้างขึ้นจากการวิเคราะห์ผลการทดลอง โดยอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เพื่อนำมาใช้ทำนาย การเปลี่ยนแปลงทางกายภาพที่เกิดขึ้นกับวัตถุที่รับภาระต่างๆ เช่น การถ่ายเทความร้อน ค่าความเค้น หรือลักษณะการไหลของของไหล เป็นต้น

โดยทั่วไปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะประกอบด้วย สมการครอบคลุม (Governing Equation) ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย และสมการเฉพาะเจาะจง (Constitutive Relationship) ซึ่งนำมาพิจารณาร่วมกับ ภาระที่กระทำ (Load), เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition), และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) ของปัญหา การหาคำตอบให้ได้ผลเฉลย แม่นตรงนั้นทำได้ยากหรืออาจไม่สามารถหาคำตอบได้ในบางปัญหา ทำให้มีการหาผลเฉลยของปัญหา โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ ให้อยู่ในระบบ สมการพีชคณิตและแก้ระบบสมการ เพื่อหาผลเฉลยต่อไป

ในบทนี้จะกล่าวถึง สมการครอบคลุม สมการเฉพาะเจาะจง ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้การ วิเคราะห์ค่าความเค้นที่เกิดจากอุณหภูมิ เงื่อนไขปัญหาที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ คือ การหาค่าความ เค้นเนื่องจากความร้อนในสภาวะสมดุล กำหนดเป็นการผิดรูปขนาดเล็ก (Small Deformation) และ วัสดุมีลักษณะยึดหยุ่นเชิงเส้น โดยมีรายละเอียดดังนี้

3.2 สมการครอบคลุม

ปัญหาที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ คือการหาค่าของความเค้นที่เกิดขึ้นเนื่องจากอุณหภูมิ ของวัสดุที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้น โดยสมการครอบคลุมที่นำมาใช้ประกอบด้วย สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น และสมการอนุรักษ์พลังงานซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

3.2.1 สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น (Conservation of Linear Momentum)

จากกฎข้อที่สองของนิวตันเมื่อพิจารณาวัตถุที่เป็นของแข็ง ความสัมพันธ์ของแรงที่กระทำบนวัตถุจะเป็นไปตาม Cauchy's First Law of Motion กล่าวว่ายัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมของวัตถุเท่ากับผลรวมของแรงที่กระทำบนพื้นผิว (Traction Surface Force) และแรงเนื่องจากวัตถุ (Body Force) เช่น น้ำหนักวัตถุ ดังสมการ 3.1

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{f}_b dV \quad (3.1)$$

Initial force Surface force Body force

โดยที่ ρ แทนความหนาแน่นของวัตถุ, \mathbf{u} แทน เวกเตอร์การกระจัด (Displacement), t แทน เวลา, V แทน ปริมาตร, $\boldsymbol{\sigma}$ แทน เทนเซอร์ความเค้น, \mathbf{n} แทน เวกเตอร์แนวฉากกับพื้นที่ผิวขนาดหนึ่งหน่วย, S แทน ขนาดพื้นที่ผิว โดยเวกเตอร์ผิว $\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ และ \mathbf{f}_b แทนแรงเนื่องจากวัตถุ ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของวัตถุ

เมื่อพิจารณาที่ภาวะสมดุล อัตราการเปลี่ยนแปลงของแรงที่กระทำต่อวัตถุจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นผลรวมของแรงที่กระทำบนผิวและแรงเนื่องจากวัตถุ จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังสมการ 3.2

$$0 = \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \mathbf{f}_b dV \quad (3.2)$$

3.2.2 สมการอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of Energy)

จากกฎการอนุรักษ์พลังงานกล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในของวัตถุ มีค่าเท่ากับผลรวมฟลักซ์ความร้อนที่ผ่านพื้นผิวของวัตถุ (Surface Heat Flux) และพลังงานที่เกิดขึ้นภายในของวัตถุ (Heat Source) แสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการ 3.3

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c T dV = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V H dV \quad (3.3)$$

Internal energy Surface heat flux Heat source

โดยที่ c แทน ความจุความร้อนจำเพาะ, T แทน อุณหภูมิ, \mathbf{q} แทน เวกเตอร์ความร้อน (Heat Flux) และ H แทน แหล่งความร้อนภายในของวัตถุ

เมื่อพิจารณาที่ภาวะสมดุล อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นผลรวมของพลังงานที่ผ่านเข้าหรือออกบนผิวกับพลังงานที่เกิดขึ้นภายในจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังสมการ 3.4

$$0 = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V H dV \quad (3.4)$$

3.3 สมการเฉพาะเจาะจง

สมการเฉพาะเจาะจงที่นำมาวิเคราะห์ปัญหาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ สำหรับใช้ในวิชานี้ประกอบด้วย สมการการถ่ายเทความร้อน Fourier's Law และสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ที่เกิดขึ้นเนื่องจากผลต่างของอุณหภูมิ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

3.3.1 Fourier's Law

ในปัญหาการนำความร้อน ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ความร้อน (\mathbf{q}) และอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ (Temperature Gradient) เป็นไปตาม Fourier's Law ดังสมการ (3.5)

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (3.5)$$

เมื่อ k แทนค่าการนำความร้อน (Thermal Conductivity)

3.3.2 Strain-Displacement Relationship

ปัญหาของวัตถุที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้น กรณีของการเสียรูปน้อย ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเครียด (ϵ) และระยะการเคลื่อนของระยะกระจัด (\mathbf{u}) ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (3.6)$$

โดยที่ \mathbf{x} แทนเวกเตอร์บอกตำแหน่งแกนพิกัดฉาก (Cartesian Coordinate System)

3.3.3 Stress-Strain Relationship

สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น ($\boldsymbol{\sigma}$) และความเครียด ($\boldsymbol{\varepsilon}$) สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นเชิงเส้น ในกรณีเป็น Thermo-Elastic Solid จาก Hook's Law แสดงค่าความเค้นในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและอุณหภูมิดังสมการ

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + [\lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - (2\mu + 3\lambda)\alpha T] \mathbf{I} \quad (3.7)$$

โดยที่ α แทน สัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงเส้นของวัสดุจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ (Linear Thermal Expansion Coefficient), \mathbf{I} แทน เทนเซอร์เอกลักษณ์ (Identity Tensor), μ และ λ เป็นค่า Lamé's Coefficients ซึ่งอยู่ในรูปความสัมพันธ์ของ Shear Modulus (G), Young's Modulus (E) และ Poisson's Ratio (ν) ดังสมการ

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.8)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.9)$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถแสดงความเครียดในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้นกับอุณหภูมิดังสมการ

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \left(\frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) - \alpha T \right) \mathbf{I} \quad (3.10)$$

3.3.4 Plane Stress-Plane Strain

การพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในปัญหาแบบ 2 มิติ จะสามารถพิจารณาได้ 2 แบบ คือ Plane Stress และ Plane Strain ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

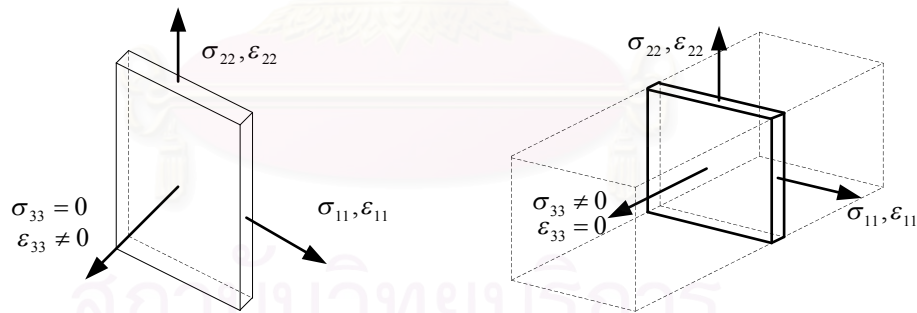
3.3.4.1 Plane Stress

เมื่อพิจารณาปัญหาในรูป 2 มิติ ลักษณะ Plane Stress ภาวะที่กระทำบนแผ่นบางลักษณะดังรูป 3.1 (ก) โดยกำหนดให้ความเค้นและความเครียดบางทิศทางมีค่าเป็นศูนย์ โดยประกอบด้วย

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (3.11)$$

จากเงื่อนไขที่กำหนดสามารถสร้างเมทริกซ์ความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$



(ก) ลักษณะการพิจารณาปัญหา Plane Stress

(ข) ลักษณะการพิจารณาปัญหา Plane Strain

รูป 3.1 ลักษณะความเค้นและความเครียดสำหรับพิจารณาปัญหา 2 มิติ

3.3.4.2 Plane Strain

เมื่อพิจารณาปัญหาในรูป 2 มิติ ในลักษณะ Plane Strain ภาวะที่กระทำบนวัตถุซึ่งมีความยาวมากดังรูป 3.1 (ข) กำหนดให้ความเค้นและความเครียดบางทิศทางมีค่าเป็นศูนย์ โดยประกอบด้วย

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (3.13)$$

จากเงื่อนไขที่กำหนดสามารถสร้างเมทริกซ์ความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.4 ตัวอย่างทางคณิตศาสตร์

เมื่อพิจารณาสมการอนุรักษ์โมเมนตัมโดยแทนค่าด้วยสมการเฉพาะเจาะจง ซึ่งประกอบด้วยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น ความเครียด และอุณหภูมิ สามารถสร้างตัวอย่างทางคณิตศาสตร์ของสมการ ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_S (2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I}) \cdot d\mathbf{S} - \int_S ((2\mu + 3\lambda)\alpha T \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{f}_b dV \quad (3.15)$$

ทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาสมการอนุรักษ์พลังงานสำหรับวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น พร้อมกับสมการเฉพาะเจาะจง สามารถสร้างตัวอย่างทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho c T dV = \int_S k \frac{\partial T}{\partial x} dS + \int_V H dV \quad (3.16)$$

สำหรับปัญหาที่พิจารณาภาวะสมดุลและไม่คิดแรงเนื่องจากวัตถุ สมการอนุรักษ์โมเมนตัม (3.15) และสมการอนุรักษ์พลังงาน (3.16) ที่ภาวะสมดุลและไม่มีแหล่งความร้อนภายใน จะลดรูปเป็น

$$0 = \int_S (2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{S} - \int_S ((2\mu + 3\lambda) \alpha T \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.17)$$

$$0 = \int_S k \frac{\partial T}{\partial x} d\mathbf{S} \quad (3.18)$$

ซึ่งสมการเหล่านี้จะนำไปสร้างระบบสมการเพื่อหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลูเมนต์ต่อไป

3.5 บทสรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงสมการที่นำมาวิเคราะห์ปัญหาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ สำหรับวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นที่มีการเสียดรูปน้อย ประกอบด้วยสมการอนุรักษ์โมเมนตัม สมการอนุรักษ์พลังงาน และสมการเฉพาะเจาะจง ประกอบด้วย สมการการนำความร้อน และสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดใน 2 มิติ แต่เนื่องจากตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ได้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย การหาผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาที่มีความซับซ้อนนั้นทำได้ยากหรืออาจหาผลเฉลยไม่ได้

ในบทต่อไป จะกล่าวถึงการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ให้อยู่ในรูปของระบบสมการพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลูเมนต์ เพื่อนำไปหาผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่อไป

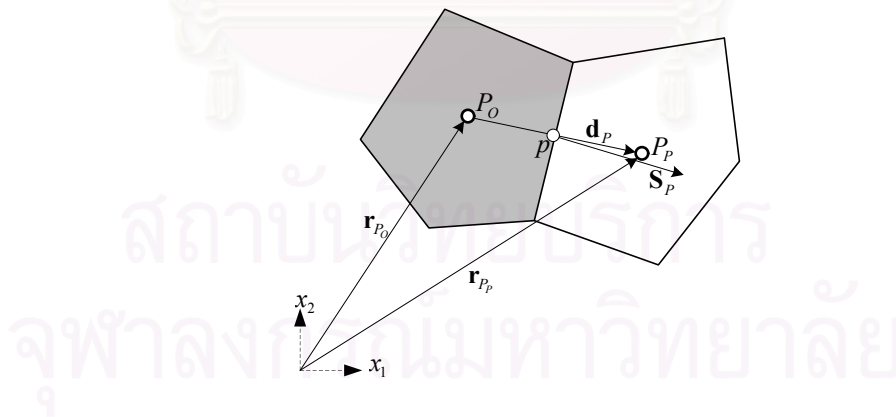
บทที่ 4

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างระบบสมการพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม จากตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวมาแล้ว ประกอบด้วย การแบ่งกริดรูปร่าง การประมาณค่าตัวแปรที่ตำแหน่งใดๆ การประมาณค่าสมการทั่วไป รูปสำเร็จของสมการไฟไนต์วอลุ่ม การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ และขั้นตอนการคำนวณ โดยมีรายละเอียดดังนี้

4.1 การแบ่งกริดรูปร่าง (Spatial Discretisation)

การแบ่งกริดรูปร่าง เริ่มจากการกำหนดเส้นขอบเขตของปัญหา จากนั้นทำการแบ่งปริมาตรควบคุมให้เกิดปริมาตรควบคุมย่อยๆ ทั่วทั้งโดเมน แล้วทำให้เกิดจุดต่อ ที่อยู่ตรงกลางของแต่ละปริมาตรควบคุม (Cell Center Grid Arrangement) ซึ่งปริมาตรควบคุมย่อยจะมีขนาดเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ ดังรูป 4.1

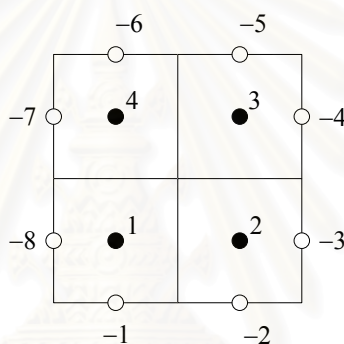


รูป 4.1 ปริมาตรควบคุมและเวกเตอร์ส่วนประกอบต่างๆ

ตำแหน่งของจุดต่อศูนย์กลางปริมาตรควบคุมที่พิจารณาแทนด้วย P_o ตำแหน่งจุดต่อปริมาตรควบคุมข้างเคียงที่ต่อกันหน้า p ของ P_o แทนด้วย P_p โดยมี \mathbf{r}_{P_o} และ \mathbf{r}_{P_p} แทนเวกเตอร์บอกตำแหน่ง \mathbf{S}_p แทนเวกเตอร์ผิวตั้งฉากในทิศทางเข้าหาปริมาตรควบคุมข้างเคียง (Surface Vector) และ \mathbf{d}_p แทนเวกเตอร์ระยะกระจัดระหว่างจุดต่อ (Distance Vector) มีความสัมพันธ์ดังสมการ 4.1

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{r}_{P_p} - \mathbf{r}_{P_o} \quad (4.1)$$

จุดต่อที่กำหนดจะมี 2 แบบคือ จุดต่อของตัวแปรไม่ทราบค่า และจุดต่อที่ขอบเขตของโดเมนที่ใช้ในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ดังแสดงในรูป 4.2



รูป 4.2 การกำหนดค่าจุดต่อในปริมาตรควบคุม

เพื่อให้เห็นความแตกต่างที่ชัดเจน ได้กำหนดตัวเลขติดลบแทนจุดต่อที่ขอบ และตัวเลขค่าบวกแทนจุดต่อที่เก็บค่าตัวแปร เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณต่อไป

4.2 การประมาณค่าตัวแปรที่ตำแหน่งใดๆ (Spatial Distribution of Variables)

การประมาณค่าของตัวแปรใดๆ ϕ ของปัญหาที่มีลักษณะการกระจายแบบเชิงเส้น (Linear Distribution of Variable) ที่ตำแหน่ง \mathbf{r} เมื่อรู้ค่าของตัวแปรที่ตำแหน่ง P_o สามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$\phi_r = \phi_{P_o} + (\nabla \phi)_{P_o} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_o}) \quad (4.2)$$

โดยที่ $(\nabla\phi)_{P_0}$ แทนค่าอนุพันธ์ของตัวแปรตำแหน่ง P_0 โดยคำนวณมาจากความสัมพันธ์

$$\mathbf{G} \cdot (\nabla\phi)_{P_0} = \mathbf{h} \quad (4.3)$$

เมื่อ \mathbf{G} และ \mathbf{h} เป็นเมทริกซ์และเวกเตอร์ตามลำดับ ที่มีผลมาจากค่าตัวแปรของปริมาตรควบคุมข้างเคียง ϕ_{P_p} รอบจุดต่อ P_0 ซึ่งมีจำนวน nb ปริมาตรควบคุม (Muzafferija, 1994) ซึ่งสามารถกระจายความสัมพันธ์ของแต่ละเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{G} = \sum_{p=1}^{nb} \frac{\mathbf{d}_p \otimes \mathbf{d}_p^T}{|\mathbf{d}_p|^3} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{h} = \sum_{p=1}^{nb} \frac{(\phi_{P_p} - \phi_{P_0}) \mathbf{d}_p}{|\mathbf{d}_p|^3} \quad (4.5)$$

สำหรับค่าของตัวแปรที่ตำแหน่ง p ระหว่างจุดต่อ P_p และ P_0 สามารถคำนวณได้ในลักษณะเดียวกันแต่เป็นการเฉลี่ยค่าจากทั้งสองตำแหน่ง ดังสมการ

$$\phi_p = \frac{1}{2}(\phi_{P_0} + \phi_{P_p}) + \frac{1}{2}((\nabla\phi)_{P_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_0}) + (\nabla\phi)_{P_p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{P_p})) \quad (4.6)$$

4.3 การประมาณค่าสมการทั่วไป

สมการครอบคลุมของปัญหาทางวิศวกรรมที่สร้างมาจากสมการอนุรักษ์ต่างๆ แต่ละสมการจะสามารถแบ่งได้เป็น 3 พจน์ ได้แก่ พจน์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Temporal Term) พจน์จากการแพร่ (Diffusion Term) และพจน์ที่เกิดจากวัตถุ (Source Term) ดังสมการ

$$\frac{d}{dt} \int_V I_\phi dV = \int_S D_\phi (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{Q}_{\phi S} \cdot d\mathbf{S} + \int_V Q_{\phi V} dV \quad (4.7)$$

Temporal Term Diffusion Term Source Term

โดยที่ I_ϕ แทน สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Temporal Coefficients), D_ϕ แทน สัมประสิทธิ์ของพจน์การแพร่ (Diffusion Coefficients), พจน์ที่เกิดจากวัตถุจะแบ่งสัมประสิทธิ์ได้เป็นสองส่วนคือ $\mathbf{Q}_{\phi S}$ แทน สัมประสิทธิ์ของพจน์จากวัตถุที่เกิดที่พื้นผิว (Surface Source Term)

และ $Q_{\phi V}$ แทน สัมประสิทธิ์ของพจน์จากวัตถุในเกิดที่ปริมาตรทั้งหมด (Volume Source Term) ค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้จะเปลี่ยนแปลงไปตามสมการครอบคลุมของแต่ละปัญหาที่พิจารณา

จะเห็นว่าในแต่ละพจน์ของสมการทั่วไปอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย การประมาณค่าเพื่อให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มของแต่ละพจน์ มีรายละเอียดดังนี้

4.3.1 การประมาณค่าพจน์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (Approximation of the Temporal Term)

การหาค่าอนุพันธ์ของตัวแปร ϕ เทียบกับเวลา t ที่ตำแหน่ง P_o โดยมีตัวบ่งชี้เวลาที่ช่วงเวลาเดิมคือ $m-1$ สามารถประมาณค่าในรูปสมการพีชคณิตได้เป็น

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{P_o} \approx \frac{\phi_{P_o} - \phi_{P_o}^{[m-1]}}{\delta t} \quad (4.8)$$

เมื่อ δt แทนขนาดช่วงของเวลา (Size of a Time Step) คำนวณได้จากสมการ

$$\delta t = t - t^{[m-1]} \quad (4.9)$$

ในการทำงานเดียวกัน พจน์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาที่ตำแหน่ง P_o ของปริมาตร V ประมาณค่าโดยใช้วิธีโดยปริยาย (Implicit Scheme) ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \int_V I_\phi dV \approx \frac{I_\phi V_{P_o} - I_\phi V_{P_o}^{[m-1]}}{\delta t} \quad (4.10)$$

4.3.2 การประมาณค่าพจน์การแพร่ (Approximation of the Diffusion Term)

ฟลักซ์ของการแพร่ D_p ของตัวแปร ϕ บนผิวปริมาตรควบคุมด้าน p ขึ้นอยู่กับค่า $\nabla \phi$ ที่ผิวสามารถประมาณค่าได้จาก

$$D_p = \int_{S_p} D_\phi (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} \approx (D_\phi (\nabla \phi)_p^* \cdot \mathbf{S}) \quad (4.11)$$

ค่าของ $(\nabla \phi)_p^*$ แทนค่าอนุพันธ์ของตัวแปรบนผิวด้าน p



(ก) เวกเตอร์ผิวอยู่แนวเดียวกับเวกเตอร์ระยะกระจัด (ข) เวกเตอร์ผิวไม่อยู่แนวเดียวกับเวกเตอร์ระยะกระจัด

รูป 4.3 ลักษณะเวกเตอร์การวางตัวของเวกเตอร์ผิวและเวกเตอร์ระยะกระจัด

กรณีที่เวกเตอร์ระยะกระจัดตั้งฉากกับผิวดังรูป 4.2 (ก) จะเห็นได้ว่า \mathbf{d}_p และ \mathbf{S}_p อยู่ในแนวเดียวกัน จะได้ว่า

$$(\nabla\phi)_p^* \cdot \mathbf{S}_p \approx \frac{\phi_{P_p} - \phi_{P_o}}{|\mathbf{d}_p|} |\mathbf{S}_p| \quad (4.12)$$

กรณีที่ผิวหน้าปริมาตรควบคุมและเวกเตอร์ระยะกระจัดไม่ได้ตั้งฉากกัน ดังรูป 4.2 (ข) การประมาณค่าพจน์ของการแพร่ (Jasak, 1996) ประมาณค่าได้ดังนี้

$$(D_\phi)_p (\nabla\phi)_p^* \cdot \mathbf{S}_p \approx (D_\phi)_p \frac{\phi_{P_p} - \phi_{P_o}}{|\mathbf{d}_p|} |\mathbf{S}_p| + (D_\phi)_p (\nabla\phi)_p \cdot \left(\mathbf{S}_p - \frac{\mathbf{d}_p}{|\mathbf{d}_p|} |\mathbf{S}_p| \right) \quad (4.13)$$

4.3.3 การประมาณค่าพจน์ของวัตถุ (Approximation of the Source Term)

การประมาณค่าพจน์ที่เกิดจากวัตถุในรูปการหาปริพันธ์ของพื้นผิว (Surface Integral) รอบปริมาตรควบคุมในรูปสมการพีชคณิต ประมาณค่าโดยใช้ค่าเฉลี่ยของทั้งปริมาตรควบคุม ได้ดังนี้

$$\int_S \mathbf{Q}_{\phi S} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{p=1}^{nb} \int_S \mathbf{Q}_{\phi S} \cdot d\mathbf{S} \approx \sum_{p=1}^{nb} (\mathbf{Q}_{\phi S} \cdot \mathbf{S})_p \quad (4.14)$$

ในทำนองเดียวกัน การประมาณค่าพจน์ที่เกิดจากวัตถุ การหาปริพันธ์ของปริมาตรควบคุม (Volume Integral) สามารถประมาณค่าได้ในรูปสมการ

$$\int_V Q_{\phi V} dV \approx (Q_{\phi V} dV)_{P_o} \quad (4.15)$$

การประมาณค่าในแต่ละพจน์ของสมการครอบคลุมดังที่กล่าวมา เมื่อนำแต่ละพจน์มารวมกันจะได้ระบบสมการสำหรับหาผลเฉลยของปัญหานั้นๆ ต่อไป

4.4 รูปสำเร็จของสมการครอบคลุม (Final Form of Discretised Governing Equation)

การแก้ระบบสมการเพื่อหาผลเฉลยของตัวแปรที่ตำแหน่ง P_o ศูนย์กลางของปริมาตรควบคุม โดยมีปริมาตรควบคุมข้างเคียง P_p จำนวน nb ตำแหน่ง เมื่อแทนค่าสมการครอบคลุมของปัญหาที่พิจารณาในสมการ (4.7) ด้วยสมการ (4.8)-(4.15) แล้วทำการจัดรูปสมการโดยมี $(a_\phi)_{P_o}$ และ $(a_\phi)_{P_p}$ แทนสัมประสิทธิ์ที่ได้มาจากพจน์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและพจน์การแพร่ของตำแหน่ง P_o และปริมาตรควบคุมข้างเคียง P_p ตามลำดับ ส่วนค่าสัมประสิทธิ์จากพจน์ที่มาจากวัตถุ แทนด้วย b_ϕ สามารถเขียนเป็นระบบสมการพีชคณิตได้ดังนี้

$$(a_\phi)_{P_o} \phi_{P_o} - \sum_{p=1}^{nb} (a_\phi)_{P_p} \phi_{P_p} = b_\phi \quad (4.16)$$

การประมาณค่าในรูปสมการพีชคณิตของสัมประสิทธิ์ $(a_\phi)_{P_o}$, $(a_\phi)_{P_p}$ และ b_ϕ แสดงได้ดังนี้

$$(a_\phi)_{P_p} = (D_\phi)_p \frac{|\mathbf{S}_p|}{|\mathbf{d}_p|} \quad (4.17)$$

$$(a_\phi)_{P_o} = \sum_{p=1}^{nb} (a_\phi)_p + \frac{(a_\phi^t V)_{P_o}}{\delta t} \quad (4.18)$$

$$b_\phi = \sum_{p=1}^{nb} (D_\phi)_p \left((\nabla \phi)_p \cdot \mathbf{S}_p - (\nabla \phi)_p \cdot \frac{\mathbf{d}_p}{|\mathbf{d}_p|} |\mathbf{S}_p| \right) + q_{\phi S} + q_{\phi V} + \frac{(a_\phi^t V)_{P_o}^{[m-1]}}{\delta t} \quad (4.19)$$

สำหรับปัญหาในภาวะสมดุลค่าสัมประสิทธิ์ a_ϕ^t จะมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อได้ระบบสมการของปัญหา พร้อมทั้งกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแล้ว จะใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Methods) เพื่อแก้ระบบสมการหาผลเฉลยต่อไป

4.5 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Implementation of Boundary Condition)

การประมาณค่าจุดต่อที่บริเวณขอบของโดเมน จะมีวิธีการประมาณค่าที่แตกต่างจากจุดต่อที่อยู่บริเวณภายในโดเมน เนื่องจากไม่ใช้ในการเก็บค่าตัวแปรไม่ทราบค่า แต่ใช้ในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต การพิจารณาบริเวณขอบแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะดังนี้

4.5.1 Implementation of the Dirichlet Boundary Condition

เงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet มีลักษณะเป็นการกำหนดค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าที่ขอบแทนด้วย ϕ_{P_b} ซึ่งจะนำไปคำนวณค่าฟลักซ์ที่ผ่านขอบและคำนวณหาค่าอนุพันธ์ที่จุดต่อ P_o เมื่อ $(a_\phi)_{P_b}$ แทน สัมประสิทธิ์ของจุดต่อที่ขอบ และ nb แทน จำนวนปริมาตรควบคุมข้างเคียงที่อยู่รอบ P_o จะได้สมการสำหรับปริมาตรควบคุมที่อยู่บริเวณขอบดังนี้

$$(a_\phi)_{P_o} \phi_{P_o} - \sum_{p=1}^P (a_\phi)_{P_p} \phi_{P_p} = b_\phi + (a_\phi)_{P_b} \phi_{P_b} \quad (4.20)$$

โดยทั่วไปการพิจารณาแบบ Dirichlet Boundary สำหรับสมการอนุพันธ์โมเมนต์ดัมจะแทนด้วยระยะกระจัด (u) สำหรับสมการพลังงานจะแทนด้วยอุณหภูมิ (T)

4.5.2 Implementation of the Neumann Boundary Condition

เงื่อนไขขอบเขตแบบ Neumann มีลักษณะเป็นการกำหนดค่าอนุพันธ์ของตัวแปรที่ขอบ ค่าฟลักซ์ที่บริเวณขอบแทนด้วย s_b ซึ่งนำไปรวมกับพจน์ b_ϕ โดยตรงซึ่งจะได้สมการ

$$(a_\phi)_{P_o} \phi_{P_o} - \sum_{p=1}^P (a_\phi)_{P_p} \phi_{P_p} = b_\phi + s_b \quad (4.21)$$

โดยทั่วไปการพิจารณาแบบ Neumann Boundary สำหรับสมการโมเมนต์ดัมจะแทนด้วยความเค้น ความดัน หรือ แรง ที่ผิวขอบ สำหรับสมการพลังงานจะแทนด้วยฟลักซ์ความร้อน

4.6 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

จากสมการทั่วไป (4.7) เป็นสมการรูปทั่วไปซึ่งสามารถนำไปหาผลเฉลยของปัญหาแต่ละกรณีได้โดยการแทนค่าพจน์ต่างๆ ในสมการ ซึ่งจะมีค่าแตกต่างกันตามสมการครอบคลุมที่นำมาพิจารณา สำหรับปัญหาที่พิจารณาในโครงการวิจัยนี้ สมการที่นำมาพิจารณาประกอบด้วย สมการการนำความร้อน และสมการโมเมนตัม โดยทั้งสองสมการมีลักษณะเป็นการเสียดรูปน้อย

เมื่อทำการจัดรูปทั้งสองสมการเพื่อแทนค่า ในรูปสมการสำเร็จไฟไนต์วอลุ่ม (Maneeratana, 2000) สัมประสิทธิ์ของตัวแปร สมการการนำความร้อนแบบเสียดรูปน้อย ประกอบด้วยค่าต่างๆ ดังสมการ (4.22)

$$\begin{aligned}\phi &= T \\ \nabla_{\phi} &= \partial / \partial \mathbf{x} \\ I_{\phi} &= \rho c T \\ D_{\phi} &= k\end{aligned}\tag{4.22}$$

สัมประสิทธิ์ของตัวแปรของสมการโมเมนตัมแบบเสียดรูปน้อย ประกอบด้วยค่าต่างๆ ดังสมการ (4.23)

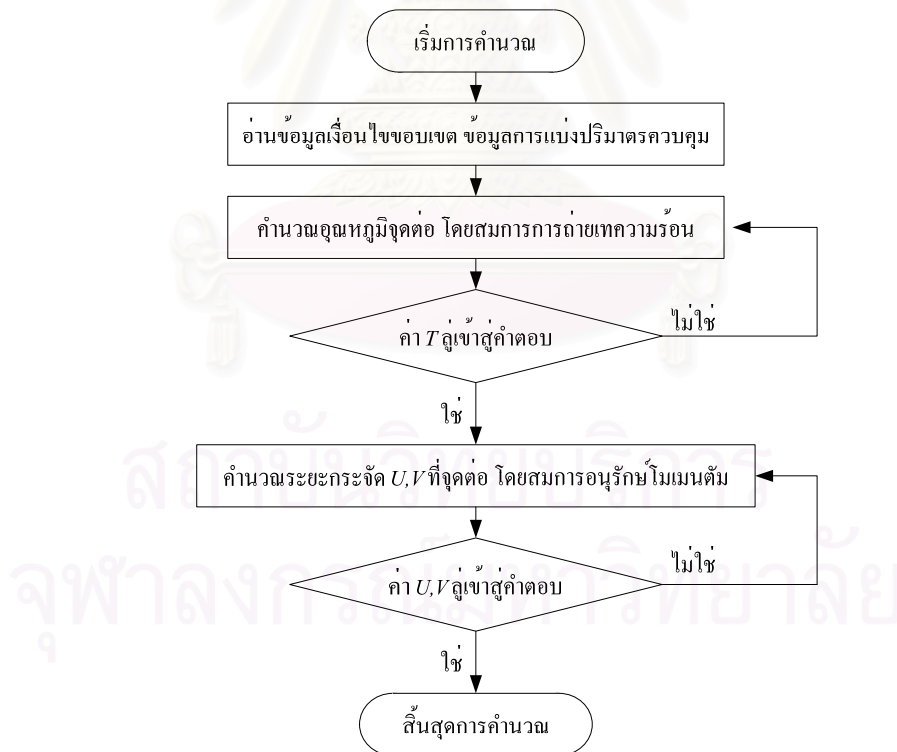
$$\begin{aligned}\phi &= \mathbf{u} \\ \nabla_{\phi} &= \partial / \partial \mathbf{x} \\ I_{\phi} &= \rho (d\mathbf{u}/dt) \\ D_{\phi} &= 2\mu + \lambda \\ \mathbf{Q}_{\phi S} &= \lambda (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}) - (2\mu + \lambda)\alpha T \mathbf{I} + \mu \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{I}' - (\mu + \lambda)\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}' \\ Q_{\phi V} &= \rho \mathbf{b}\end{aligned}\tag{4.23}$$

โดยที่ $I'_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ เมื่อ δ_{ij} หมายถึง Kronecker delta และ $\mathbf{J} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ เมื่อนำค่าของแต่ละพจน์ดังที่แสดง ไปแทนในสมการทั่วไปจะได้ระบบสมการแก้ปัญหา สำหรับนำไปหาผลเฉลยต่อไป

4.7 ขั้นตอนการคำนวณ

ขั้นตอนในการคำนวณเพื่อหาค่าความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ จะเริ่มต้นจาก การอ่านข้อมูลเงื่อนไขขอบ ข้อมูลการแบ่งปริมาตรควบคุม ทำการคำนวณค่าอุณหภูมิ (T) โดยใช้สมการการนำความร้อนแบบผิครูปนูน จากนั้นนำค่าอุณหภูมิที่ได้ไปเป็นข้อมูลเพื่อใช้ในการคำนวณเพื่อหาค่าความเค้น โดยใช้สมการโมเมนต์แบบผิครูปนูน ซึ่งคำตอบที่ได้จะอยู่ในรูประยะกระจัดของจุดต่อ ซึ่งประกอบด้วยระยะกระจัดในแนวอน (U) และระยะกระจัดในแนวตั้ง (V) ในการคำนวณเพื่อหาค่าของตัวแปรไม่ทราบค่า ใช้วิธีการสมมุติค่าเริ่มต้นให้แก่ค่าตัวแปรแล้วใช้วิธีการคำนวณแบบการทำซ้ำในจนค่าของตัวแปรที่คำนวณได้ลู่เข้าสู่คำตอบค่าหนึ่งแล้วจะถือว่าค่าที่คำนวณได้เป็นคำตอบของการคำนวณค่าตัวแปรนั้นๆ

กระบวนการคำนวณค่าอุณหภูมิและความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ เฉพาะส่วนของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลูม แสดงกระบวนการคำนวณโดยสังเขป ได้ดังรูป 4.4



รูป 4.4 กระบวนการคำนวณค่าอุณหภูมิและความเค้น

4.8 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงหลักการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ให้อยู่ในรูปของระบบสมการพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม โดยพิจารณาแต่ละปริมาตรควบคุมย่อย ซึ่งได้แสดงการแบ่งย่อยกริดรูปร่าง การประมาณค่าที่ตำแหน่งใดๆ การประมาณค่ารูปของสมการทั่วไป ซึ่งประกอบด้วยพจน์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา พจน์การแพร่ และพจน์ที่เกิดจากตัววัตถุเอง เมื่อรวมแต่ละพจน์ พร้อมทั้งพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตแล้วทำการจัดรูปสมการ จะได้ระบบสมการรูปสำเร็จ ซึ่งจะนำไปคำนวณเพื่อหาคำตอบด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่อไป

ปัญหาที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ พิจารณากรณีศึกษาการนำความร้อนและความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิแบบผิกรูปนอຍ โดยนำสัมประสิทธิ์ของสมการที่ได้จัดรูปแล้ว จากสมการ (4.22) และ (4.23) แทนในสมการรูปสำเร็จ แล้วทำการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งจะทำได้ค่าของผลเฉลยที่อยู่บนจุดต่อทั่วทั้งโดเมน

เมื่อทำการคำนวณจนได้ผลเฉลยแล้ว ในส่วนต่อไปจะเป็นการนำผลเฉลยที่ได้ มาวิเคราะห์เงื่อนไขเพื่อใช้ปรับขนาดปริมาตรควบคุม โดยการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมให้มีขนาดเล็กลงในบริเวณที่จำเป็น เมื่อได้ปริมาตรควบคุมใหม่จากการแบ่งย่อยแล้ว จะนำปริมาตรควบคุมนั้นมาหาผลเฉลยใหม่อีกครั้ง แล้วทำการคำนวณในลักษณะเดียวกันนี้ วนซ้ำจนได้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำตามที่ต้องการ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

ตัวบ่งชี้การปรับขนาด และการปรับขนาดปริมาตรควบคุม

ในบทนี้ จะกล่าวถึงค่าความผิดพลาดตกค้างจากการเปรียบเทียบการประมาณค่าตัวแปรไม่ทราบค่า การหาตัวบ่งชี้การปรับขนาด ซึ่งเป็นข้อมูลที่แสดงว่าควรทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม นั้นเพื่อให้คำตอบที่ดีขึ้น การหาตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลี่ยแม่นยำตรง กระบวนการแบ่งย่อย ปริมาตรควบคุม และการตรวจสอบเชิงคุณภาพของผลการคำนวณหลังทำการปรับขนาดปริมาตร ควบคุม

5.1 ค่าความผิดพลาดตกค้าง (Residual Error)

เมื่อทำการหาผลเฉลี่ยของปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขดังที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น ในปัญหาที่ไม่ได้มีผลเฉลี่ยแม่นยำตรงมาเปรียบเทียบ จะไม่สามารถรู้ได้ว่าผลที่ได้มีความถูกต้องหรือมีความผิดพลาด มากหรือน้อยเท่าใด

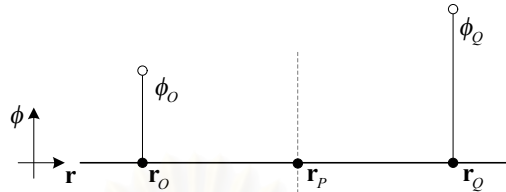
ตัวบ่งชี้การปรับขนาดซึ่งคำนวณมาจากค่าความผิดพลาดตกค้าง จะเป็นตัวที่แสดงว่าผลการ คำนวณของปริมาตรควบคุมที่พิจารณานั้นมีความแม่นยำเพียงพอหรือไม่ รายละเอียดการคำนวณค่า ความผิดพลาดตกค้างใน 1 มิติ และ 2 มิติ มีรายละเอียดดังนี้

5.1.1 ความผิดพลาดตกค้างกรณี 1 มิติ

กำหนดให้ ϕ_0 และ ϕ_p แทนตัวแปรไม่ทราบค่าจากการคำนวณที่ตำแหน่ง r_0 และ r_p ตามลำดับ โดยมี r_f แทนตำแหน่งกึ่งกลางระหว่างจุดต่อ O และ P ดังรูป 5.1

สำหรับปัญหาที่มีลักษณะผลเฉลยแบบเชิงเส้น จากผลการคำนวณเมื่อทราบ ϕ_p และ ϕ_0 ค่า ของ ϕ_f ที่มีตำแหน่งอยู่กึ่งกลางระหว่างจุดต่อ O และ P สามารถหาได้จากค่าเฉลี่ยของทั้งสองจุดดัง สมการ (5.1)

$$\phi_f = \frac{\phi_o + \phi_P}{2} \quad (5.1)$$



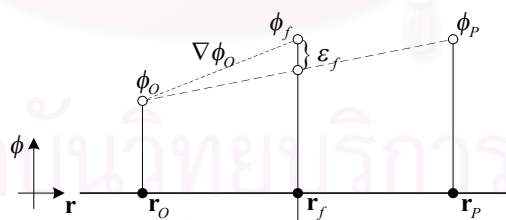
รูป 5.1 ค่าของตัวแปรที่คำนวณได้และเวกเตอร์บอกตำแหน่ง

อีกวิธีที่สามารถนำมาคำนวณค่าของ ϕ_f โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ 1 (1st order Taylor series) มาจาก ϕ_o และ $(\nabla\phi_o)$ ดังสมการ (5.2)

$$\phi_f = \phi_o + (\nabla\phi_o) \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_o) \quad (5.2)$$

หากผลที่ได้จากการคำนวณมีความถูกต้องทั้งค่าของ ϕ_P , ϕ_Q และ $(\nabla\phi_P)$ มีความถูกต้องตามการประมาณในการกระจายแบบเชิงเส้นตามที่ได้ประมาณค่าในหัวข้อ 4.2 ค่าของ ϕ_f ที่คำนวณได้จากทั้งสองวิธีจะต้องมีค่าเท่ากันหรือใกล้เคียงกันมาก

ด้วยเหตุผลดังกล่าวเมื่อนำผลที่ได้จากการคำนวณมาหาค่าของ ϕ_f จากทั้งสองวิธี แล้วทำการเปรียบเทียบจะได้ผล ดังรูป 5.2 จะเห็นผลต่างของผลการคำนวณจากสมการ (5.1) และ (5.2)



รูป 5.2 ค่าความคลาดเคลื่อนจากผลต่างการประมาณค่า

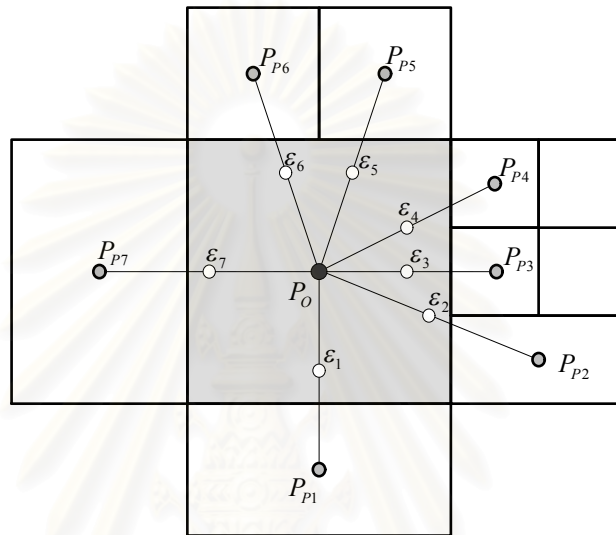
โดยที่ขนาดของความผิดพลาดตกค้าง ϵ_f คำนวณได้จาก

$$\epsilon_f = \left| \frac{\phi_o + \phi_P}{2} - (\phi_o + \nabla\phi_o \cdot (\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_o)) \right| \quad (5.3)$$

จากลักษณะแนวคิดดังกล่าวสามารถนำไปใช้พิจารณาในลักษณะ 2 มิติได้ต่อไป

5.1.2 ความผิดพลาดตกค้างกรณี 2 มิติ

เมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุมในลักษณะ 2 มิติ โดย P_0 แทน จุดต่อของปริมาตรควบคุมที่กำลังพิจารณาและมีปริมาตรควบคุมข้างเคียงที่อยู่ล้อมรอบ ดังรูป 5.3



รูป 5.3 ค่าความคลาดเคลื่อนจากผลต่างการประมาณค่าใน 2 มิติ

ค่า ϵ_1 ถึง ϵ_7 ที่อยู่กึ่งกลางระหว่างจุดต่อ P_0 และ P_i ในแต่ละจุดดังรูป ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (5.3) เมื่อนำ ϵ_i แต่ละค่ามารวมแล้วหาค่าเฉลี่ย จะได้ค่าเฉลี่ยความผิดพลาดตกค้างของปริมาตรควบคุมที่ตำแหน่ง P_0 ($\overline{\epsilon_{P_0}}$) จากสมการ

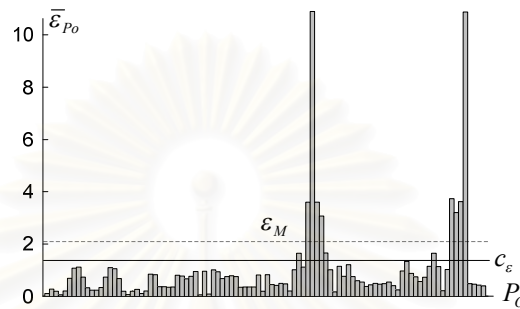
$$\overline{\epsilon_{P_0}} = \frac{\sum_{i=1}^{nb} \epsilon_i}{nb} \quad (5.4)$$

โดยที่ nb แทน จำนวนของปริมาตรควบคุมข้างเคียง

เมื่อพิจารณาทุกปริมาตรควบคุมของทั้งโดเมนในลักษณะเดียวกันนี้ ในแต่ละปริมาตรควบคุมจะมีค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ย ซึ่งจะนำไปใช้คำนวณค่าเงื่อนไขการปรับขนาดต่อไป

5.2 ตัวบ่งชี้การปรับขนาด (Refinement Indicator)

หลังจากคำนวณค่าความผิดพลาดส่วนเกินของแต่ละปริมาตรควบคุมทั้งโดเมน เมื่อนำผลความผิดพลาดส่วนเกินของแต่ละปริมาตรควบคุมที่ได้ มาเปรียบเทียบจะผลได้ดังรูป 5.4



รูป 5.4 ผลการหาค่าความคลาดเคลื่อนตัก้างแต่ละปริมาตรควบคุม

โดยที่แกนในแนวตั้งแทนขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนส่วนเกิน ($\bar{\epsilon}_{P_0}$) ส่วนแกนในแนวนอนแทนหมายเลขกำกับของแต่ละปริมาตรควบคุม (P_0) ลำดับต่างๆ เมื่อได้ค่าผิดพลาดส่วนเกินเฉลี่ยของแต่ละปริมาตรควบคุมจนครบแล้ว นำค่าผิดพลาดส่วนเกินเฉลี่ยของทั้งโดเมนซึ่งมีจำนวนปริมาตรควบคุมทั้งหมด nc ปริมาตรควบคุม มาหาค่าเฉลี่ยจะได้ค่าเฉลี่ยความผิดพลาดส่วนเกินของทั้งโดเมน (ϵ_M) ซึ่งคำนวณจากสมการ

$$\epsilon_M = \frac{\sum_{O=1}^{nc} \bar{\epsilon}_{P_0}}{nc} \quad (5.5)$$

เมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุม P_0 ใดๆ หากมีค่าความผิดพลาดตัก้างของปริมาตรควบคุม ($\bar{\epsilon}_{P_0}$) มากกว่าตัวบ่งชี้การปรับขนาด ปริมาตรควบคุมนั้นจะถูกกำหนดให้ต้องทำการปรับขนาด สำหรับค่าซึ่งใช้เป็นตัวกำหนดการปรับขนาดนั้น คำนวณได้จากสมการ (5.6)

$$c_\epsilon = f_{\epsilon_M} \epsilon_M \quad (5.6)$$

โดยที่ f_{ϵ_M} แทน แฟกเตอร์การปรับขนาด ซึ่งเป็นค่าคงที่ ที่ควรมีค่าอยู่ในช่วงประมาณ 0.75 ถึง 1.5 ในกรณีที่ค่าของ f_{ϵ_M} มีค่าน้อยจะทำให้ตัวกำหนดการปรับขนาดมีค่าต่ำลง ทำให้จำนวนของปริมาตรควบคุมที่ถูกปรับขนาดมีจำนวนมากขึ้น ดังรูป 5.4 ในทำนองเดียวกันหากค่าของ f_{ϵ_M} มีค่ามากขึ้นมีผลทำให้ปริมาตรควบคุมถูกปรับขนาดมีจำนวนน้อยลง

ในการคำนวณนั้น จะเริ่มต้นจากการใช้ค่าแฟกเตอร์การปรับขนาดที่มีค่าน้อยในช่วงแรกของการคำนวณซึ่งมีลักษณะคล้ายเป็นตัวเร่งในการปรับขนาด และเมื่อจำนวนรอบในการปรับขนาดมากขึ้นค่าแฟกเตอร์ที่ใช้ควรมีค่ามากขึ้นด้วยในลักษณะที่เป็นตัวหน่วงในการปรับขนาด

5.3 ตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำ

หลังทำการหาปริมาตรควบคุมที่ต้องทำการปรับขนาดโดยพิจารณาจากค่าความผิดพลาดตกค้างได้แล้วนั้น อาจยังไม่สามารถแน่ใจได้ว่าบริเวณที่ถูกกำหนดให้ทำการปรับขนาดนั้น มีค่าความคลาดเคลื่อนมากกว่าปริมาตรควบคุมอื่นจริงหรือไม่

สำหรับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำ สามารถนำผลเฉลยแม่นยำมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้ ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนที่จุดต่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ (ε_{Exact}^P) ของการคำนวณหาได้จากสมการ

$$\varepsilon_{P_0}^{Exact} = \left| \phi_{P_0}^{Exact} - \phi_{P_0}^{FV} \right| \quad (5.7)$$

โดยที่ $\phi_{P_0}^{Exact}$ แทนผลการคำนวณค่าตัวแปรจากผลเฉลยแม่นยำ และ $\phi_{P_0}^{FV}$ แทนผลการคำนวณค่าตัวแปรจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม จากนั้นเมื่อนำค่า $\varepsilon_{P_0}^{Exact}$ ของแต่ละจุดต่อทั้งโดเมนมาหาค่าเฉลี่ย จะได้ค่าความผิดพลาดเฉลี่ยจากผลเฉลยแม่นยำ $\bar{\varepsilon}^{Exact}$ หาได้จากสมการ

$$\bar{\varepsilon}^{Exact} = \frac{\sum_{i=1}^{nc} \varepsilon_{P_i}^{Exact}}{nc} \quad (5.8)$$

จะเห็นว่า $\varepsilon_{P_0}^{Exact}$ แสดงขนาดของความผิดพลาดที่เกิดขึ้นลักษณะเดียวกับ $\bar{\varepsilon}^{Exact}$ และค่า $\bar{\varepsilon}^{Exact}$ แทนขนาดความผิดพลาดเฉลี่ยทั้งโดเมนลักษณะเดียวกับ ε_M ซึ่งสามารถนำมาเป็น ตัวกำหนดการปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำ (c_ε^{Exact}) ซึ่งคำนวณได้สมการ

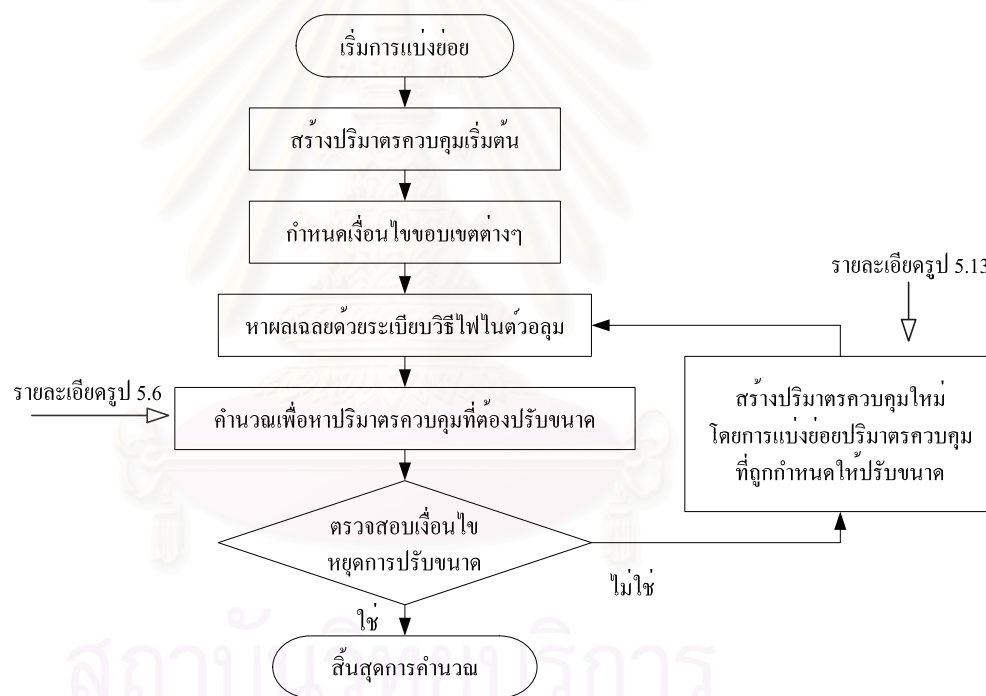
$$c_\varepsilon^{Exact} = f_{\varepsilon_M} \bar{\varepsilon}^{Exact} \quad (5.9)$$

ดังนั้นการนำผลเฉลยแม่นยำมาพิจารณาปรับขนาด จะได้ว่าหากปริมาตรควบคุมใดที่มีค่า $\varepsilon_{P_0}^{Exact}$ มากกว่าค่า c_ε^{Exact} ปริมาตรควบคุมนั้น จะถูกกำหนดให้ปรับขนาด ซึ่งถือว่าเป็นการกำหนด

ปรับขนาดโดยเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ จากนั้นจะนำบริเวณปรับขนาดที่ได้มาเปรียบเทียบกับบริเวณปรับขนาดจากการพิจารณาค่าความผิดพลาดตกค้าง เพื่อเป็นการยืนยันความถูกต้องของบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดว่าเป็นบริเวณที่มีค่าความคลาดเคลื่อนสูงกว่าบริเวณอื่นจริง

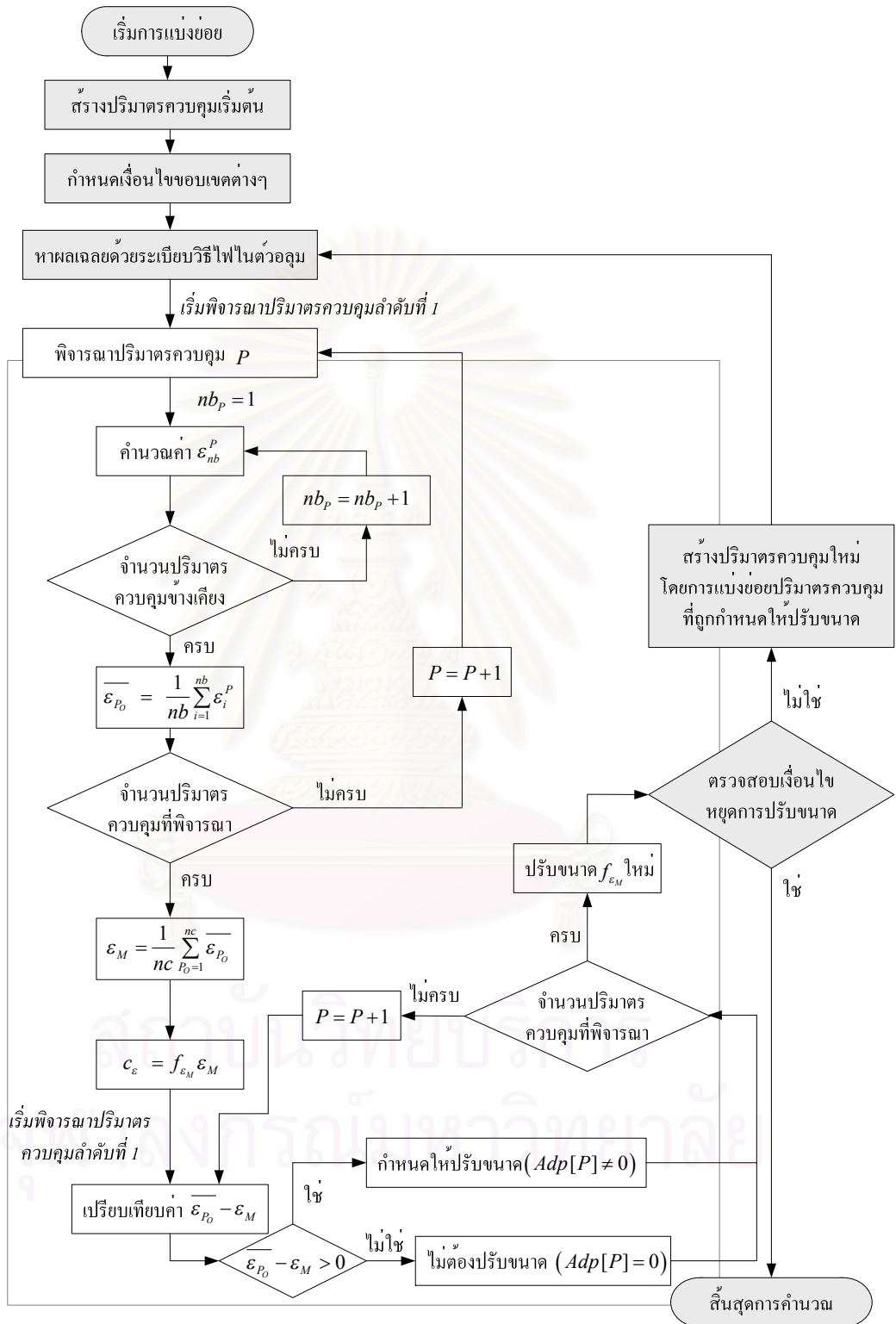
5.4 ขั้นตอนการกำหนดปริมาตรควบคุมที่ต้องปรับขนาด

กระบวนการในการคำนวณทั้งหมดตั้งแต่เริ่มการคำนวณ การสร้างปริมาตรควบคุมเริ่มต้น กำหนดเงื่อนไขต่างๆ การหาผลเฉลย การหาปริมาตรควบคุมที่ต้องปรับขนาด การสร้างปริมาตรควบคุมใหม่ จนได้คำตอบที่พึงพอใจ แสดงรายละเอียดพอสังเขปได้ดังนี้



รูป 5.5 รูปขั้นตอนการคำนวณอย่างง่ายของทั้งระบบ

ในที่นี้จะขอแสดงรายละเอียดเฉพาะ ขั้นตอนการคำนวณเพื่อหาปริมาตรควบคุมที่ต้องปรับขนาดซึ่งมีขั้นตอนดังแสดงในรูป 5.6



รูป 5.6 รายละเอียดขั้นตอนคำนวณเพื่อหาปริมาตรควบคุมที่ต้องปรับขนาด

ขั้นตอนในรูป 5.6 แสดงถึงลำดับขั้นในการคำนวณเพื่อหาปริมาณควบคุมที่ด้อยประขนาดโดยสังเขป หากปริมาณ P ถูกกำหนดให้ปรับขนาดกำหนดให้มีการเก็บค่า $Adp[P]=1$ หากไม่ปรับขนาดจะเก็บค่า $Adp[P]=0$ เมื่อพิจารณาจากเงื่อนไขการปรับขนาดโดยใช้เงื่อนไขของตัวแปรไม่ทราบค่าเพียงตัวแปรเดียว เช่น ปัญหาการนำความร้อน จะพิจารณาการปรับขนาดจากอุณหภูมิ (T) เป็นตัวกำหนดการปรับขนาดเพียงตัวแปรเดียว

ในกรณีที่ตัวแปรไม่ทราบค่ามีค่า > 1 ค่า เช่น ปัญหาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิเงื่อนไขของการปรับขนาดจะพิจารณาจาก อุณหภูมิ (T) ระยะกระจัดแนวอน (U) และระยะกระจัดแนวตั้ง (V) การกำหนดปริมาณควบคุมที่ถูกปรับขนาด สามารถพิจารณาได้ในลักษณะเดียวกันกับการพิจารณาค่ากรณีตัวแปรเดียว โดยการแยกพิจารณาทีละตัวแปร จากนั้นผลที่ได้มารวมกัน จะได้บริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับโดยพิจารณาจากตัวแปรทั้ง 3 ตัว ดังรูป 5.7

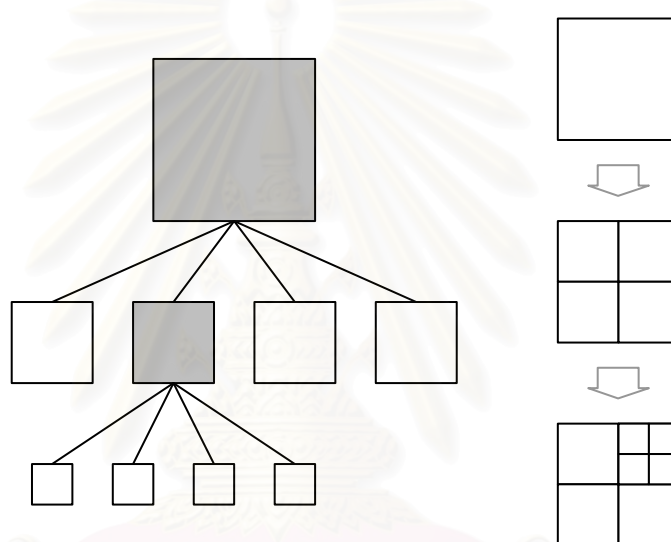


รูป 5.7 การกำหนดปริมาณควบคุมที่แบ่งย่อย จากเงื่อนไขหลายตัวแปร

ลักษณะการกำหนดปริมาณควบคุมที่แบ่งย่อยดังที่แสดง เป็นการรวมผลการกำหนดปริมาณควบคุมจากแต่ละเงื่อนไข ซึ่งจะเป็นการปรับขนาดที่ครอบคลุมทุกตัวแปร เมื่อกำหนดบริเวณที่ต้องทำการปรับขนาดแล้ว กระบวนการต่อไปจะเป็นการแบ่งย่อยปริมาณควบคุมตามผลที่ได้จากการกำหนดการปรับขนาด

5.5 การแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม

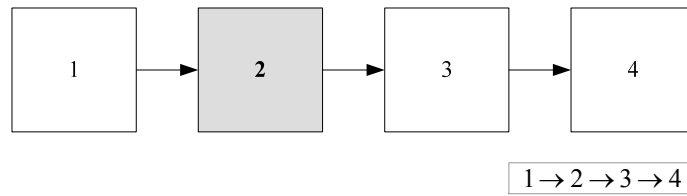
การแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม กรณีปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพบลักษณะการแบ่งในหลายรูปแบบ ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในส่วนของ เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง สำหรับลักษณะการปรับขนาดปริมาตรควบคุมที่เลือกใช้ใน โครงการวิจัยนี้ ได้เลือกวิธีการแบ่งครั้งด้าน โดยเมื่อสามารถระบุได้แล้วว่าปริมาตรควบคุมใดถูกกำหนดให้ทำการปรับขนาด ปริมาตรควบคุมนั้นๆ จะถูกแบ่งออกเป็น 4 ปริมาตรควบคุมย่อยที่มีขนาดเท่ากัน โดยการแบ่งครั้งด้านแต่ละด้าน ดังรูป 5.8



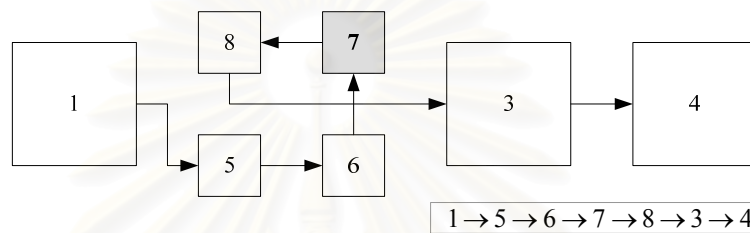
รูป 5.8 การแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด

ปริมาตรควบคุมใหม่ที่ได้จะมีลักษณะเหมือนกับปริมาตรควบคุมเดิม แต่จะมีขนาดลดลงเหลือเพียง 1 ใน 4 ของปริมาตรควบคุมเดิม

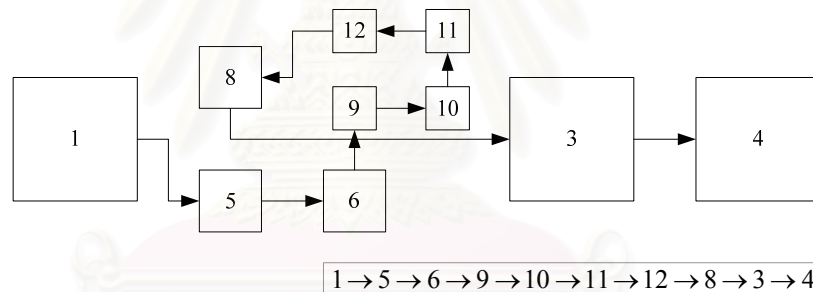
ในการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยนั้น จะมีการกำหนดลำดับปริมาตรควบคุม และกำหนดหมายเลขให้แก่ปริมาตรควบคุมนั้นๆ ซึ่งทำหน้าที่แทนชื่อของปริมาตรควบคุม เพื่อใช้ชี้เฉพาะถึงปริมาตรควบคุม หลังทำการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม จะเห็นได้ว่าจำนวนของปริมาตรควบคุมนั้นเพิ่มมากขึ้น และจะต้องมีการกำหนดหมายเลขให้แก่ปริมาตรควบคุมใหม่ที่ได้ ลักษณะการลำดับปริมาตรควบคุมและกำหนดหมายเลขปริมาตรควบคุมใหม่ ดังแสดงในรูป 5.8



(ก) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น



(ข) ปริมาตรควบคุมหลังแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมครั้งที่ 1



(ค) ปริมาตรควบคุมหลังแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมครั้งที่ 2

รูป 5.9 การกำหนดลำดับและหมายเลขปริมาตรควบคุมหลังทำการแบ่งย่อย

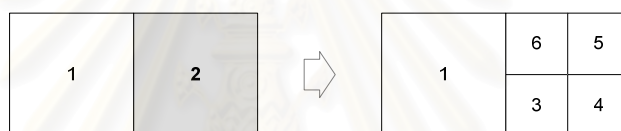
โดยบริเวณที่แรเงา หมายถึงปริมาตรควบคุมที่ถูกกำหนดให้แบ่งย่อย จะเห็นได้ว่าเมื่อทำการแบ่งย่อย ปริมาตรควบคุม หมายเลขปริมาตรควบคุมนั้นจะหายไป เปลี่ยนเป็นหมายเลขของปริมาตรควบคุมใหม่ ซึ่งมีการลำดับดังต่อเนื่องกันแทนหมายเลขเดิม

ปัญหาที่สำคัญในการเขียนโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมนั้น คือการกำหนดปริมาตรควบคุมข้างเคียง เนื่องจากปริมาตรควบคุมใหม่ที่ทำการแบ่งย่อยนั้นจะมีตำแหน่งและปริมาตรควบคุมข้างเคียงที่เปลี่ยนไป การกำหนดปริมาตรควบคุมข้างเคียงมีรายละเอียดดังนี้

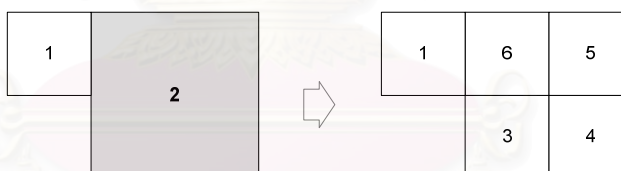
5.5.1 การกำหนดปริมาตรควบคุมข้างเคียงเมื่อปริมาตรควบคุมนั้นๆ ไม่ถูกปรับขนาด

จากรูป 5.10 จะเห็นว่า เมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุมหมายเลข 1 ซึ่งมีปริมาตรควบคุมหมายเลข 2 เป็นปริมาตรควบคุมข้างเคียง เมื่อปริมาตรควบคุมหมายเลข 2 ถูกแบ่งย่อยจะมีปริมาตรควบคุมย่อยใหม่ 4 ปริมาตรควบคุม ได้แก่ ปริมาตรควบคุมหมายเลข 3, 4, 5 และ ดังนั้นความเป็นไปได้ของปริมาตรควบคุมข้างเคียงคือ ปริมาตรควบคุมหมายเลข 1 จึงมีความเป็นไปได้ทั้ง 4 ปริมาตรควบคุมย่อย

ดังนั้นสิ่งแรกที่พิจารณาคือทิศทางการเชื่อมต่อกันของปริมาตรควบคุม เมื่อพิจารณาทิศทางการเชื่อมต่อนี้จะเห็นได้ว่า ปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุมหมายเลข 1 เป็นไปได้ 2 ค่า คือ ปริมาตรควบคุมหมายเลข 3 และ 6



(ก) ปริมาตรควบคุมข้างเคียงแบบเชื่อมต่อกับ 2 ปริมาตรควบคุมย่อย



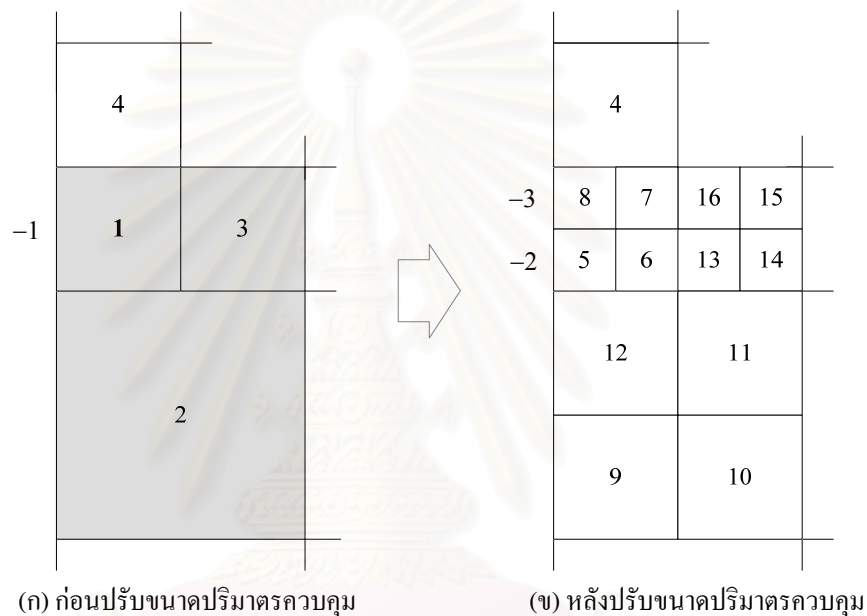
(ข) ปริมาตรควบคุมข้างเคียงแบบเชื่อมต่อกับ 1 ปริมาตรควบคุมย่อย

รูป 5.10 ลักษณะการเชื่อมต่oprมาตรควบคุมย่อย เมื่อปริมาตรควบคุมข้างเคียงถูกแบ่งย่อย

เมื่อพิจารณาดำแหน่งของปริมาตรควบคุมที่เชื่อมต่อกัน โดยอาศัยการเหลื่อมล้ำของปริมาตรควบคุมจะสามารถระบุปริมาตรควบคุมข้างเคียงที่ชัดเจนได้ ดังรูป 5.10 (ก) จะเห็นได้ว่าปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุมที่ 1 ได้แก่ ปริมาตรควบคุม 3 และ 6 แต่ในกรณีรูป 5.10 (ข) ปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุมที่ 1 จะมีเพียงปริมาตรควบคุมหมายเลข 6 เท่านั้น เนื่องจากตำแหน่งของปริมาตรควบคุม 3 ล้าออกมานอกบริเวณของปริมาตรควบคุมที่ 1 เป็นต้น

5.5.2 การกำหนดปริมาตรควบคุมข้างเคียงเมื่อปริมาตรควบมนั้นๆ ถูกปรับขนาด

เมื่อปริมาตรควบคุมถูกทำการแบ่งย่อย ทำให้เกิดปริมาตรควบคุมใหม่ ลักษณะการเชื่อมต่อของปริมาตรควบคุมข้างเคียง จะมีทั้งการเชื่อมต่อกับปริมาตรควบคุมภายนอกและการเชื่อมต่อภายในของปริมาตรควบคุมใหม่ภายในด้วยกันเอง เลขค่าบวกหมายถึงปริมาตรควบคุมและเลขค่าลบแสดงจุดต่อที่ขอบเขตของโดเมน โดยมีตัวอย่างการแบ่งย่อย เมื่อพิจารณารูป 5.11



รูป 5.11 ลักษณะการเชื่อมต่อปริมาตรควบคุมย่อย เมื่อปริมาตรควบมนั้นๆ ที่พิจารณาถูกแบ่งย่อย

การลำดับปริมาตรควบคุมข้างเคียง กำหนดให้มีลักษณะเรียงลำดับแบบทวนเข็มนาฬิกา โดยเริ่มจากปริมาตรควบคุมด้านล่างซ้ายเป็นลำดับที่ 1 เมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุมหมายเลข 1 ปริมาตรควบคุมข้างเคียงเรียงตามลำดับประกอบด้วย ปริมาตรควบคุมหมายเลข 2, 3, 4 และ -1 หลังจากทำการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม 1, 2 และ 3 ผลที่ได้ดังรูป 5.11 (b) เมื่อพิจารณาปริมาตรควบคุมหมายเลข 1 หลังทำการแบ่งย่อยทำให้เกิดปริมาตรควบคุมใหม่ 5, 6, 7 และ 8 ซึ่งแต่ละปริมาตรควบคุมเหล่านี้ มีรายละเอียดการกำหนดปริมาตรควบคุมดังต่อไปนี้

ปริมาตรควบคุมหมายเลข 5

พิจารณาเริ่มต้นจากปริมาตรควบคุมด้านล่าง ปริมาตรควบคุมข้างเคียงของลำดับที่ 1 เดิม คือ ปริมาตรควบคุมข้างเคียงหมายเลข 2 หลังจากถูกแบ่งย่อยจะได้ปริมาตรควบคุมหมายเลข 9, 10, 11 และ 12 เมื่อพิจารณาทิศทางการเชื่อมต่อ ปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุมหมายเลข 5 ที่เป็นไปได้ คือ 11 และ 12 เมื่อพิจารณาการเหลื่อมล้ำจะพบว่า ปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุม 5 ได้แก่ ปริมาตรควบคุมหมายเลข 12 ปริมาตรควบคุมข้างเคียงลำดับต่อไปเป็นการเชื่อมต่อกันภายในของปริมาตรควบคุมใหม่ ได้แก่ 6 และ 8 ตามลำดับ ในส่วนต่อไปซึ่งเป็นบริเวณขอบ เดิมเป็นบริเวณขอบหมายเลข -1 หลังทำการแบ่งย่อยจะได้ขอบใหม่ -2 และ -3 ซึ่งด้านที่เชื่อมต่อกับปริมาตรควบคุมที่ 5 คือ -3 ดังนั้น ปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุม 5 คือ 12, 6, 8 และ -2

ปริมาตรควบคุมหมายเลข 6

ปริมาตรควบคุมหมายเลข 6 เริ่มต้นเชื่อมต่อกับปริมาตรควบคุมหมายเลข 12 เหตุผลเดียวกับ ปริมาตรควบคุมหมายเลข 5 ปริมาตรควบคุมข้างเคียงลำดับถัดไป เดิมก่อนแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมข้างเคียงคือ หมายเลข 3 เมื่อแบ่งย่อยจะได้ปริมาตรควบคุมใหม่ คือ 13, 14, 15 และ 16 พิจารณาจาก ทิศทางการเชื่อมต่อและความเหลื่อมล้ำของปริมาตรควบคุมจะได้ปริมาตรข้างเคียงคือ 13 และลำดับต่อไปคือการเชื่อมต่อภายในของปริมาตรควบคุมเอง ได้แก่ ปริมาตรควบคุม 7 และ 5 ดังนั้นปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุม 6 คือ 12, 13, 7 และ 5

ปริมาตรควบคุมหมายเลข 7

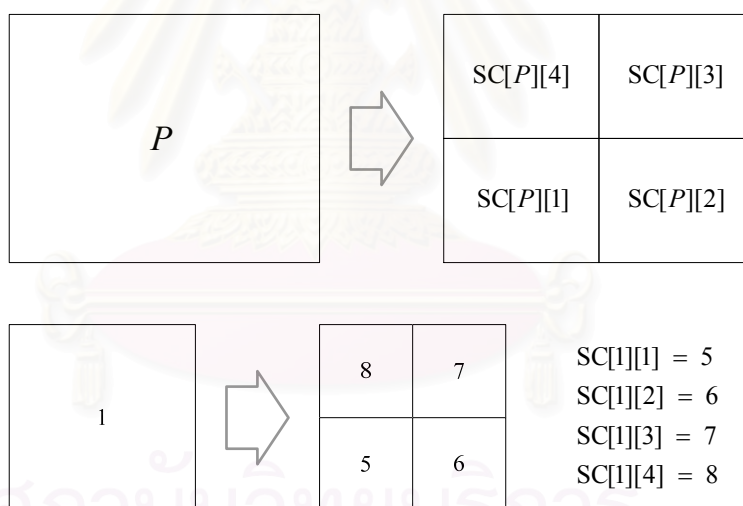
ปริมาตรควบคุมหมายเลข 7 เริ่มต้นเชื่อมต่อกับปริมาตรควบคุมภายในหมายเลข 6 ปริมาตรควบคุมข้างเคียงหมายเลข 3 เดิม หลังทำการปรับขนาดแล้วได้ปริมาตรควบคุมใหม่ เมื่อพิจารณา ทิศทางเชื่อมต่อและการเหลื่อมล้ำของปริมาตรควบคุม จะได้ปริมาตรควบคุมข้างเคียงคือ ปริมาตรควบคุมหมายเลข 16 ปริมาตรควบคุมข้างเคียงถัดไปคือหมายเลข 4 ซึ่งไม่ได้ทำการปรับขนาดจึงไม่มีการเปลี่ยนแปลง และลำดับถัดไปเป็นการเชื่อมต่อภายในหมายเลข 8 ดังนั้นปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุม 7 คือ 6, 16, 4 และ 8

ปริมาตรควบคุมหมายเลข 8

ปริมาตรควบคุมหมายเลข 8 เชื่อมต่อภายในกับปริมาตรควบคุมหมายเลข 5 และ 7 และเชื่อมต่อกับปริมาตรควบคุมที่ไม่ถูกปรับขนาดหมายเลข 4 ลำดับถัดไปเป็นการเชื่อมต่อกับขอบของโดเมน โดยเป็นขอบที่ถูกแบ่งย่อยใหม่หมายเลข -3 ดังนั้นปริมาตรควบคุมข้างเคียงของปริมาตรควบคุม 7 คือ 5, 7, 4 และ -3 ตามลำดับ

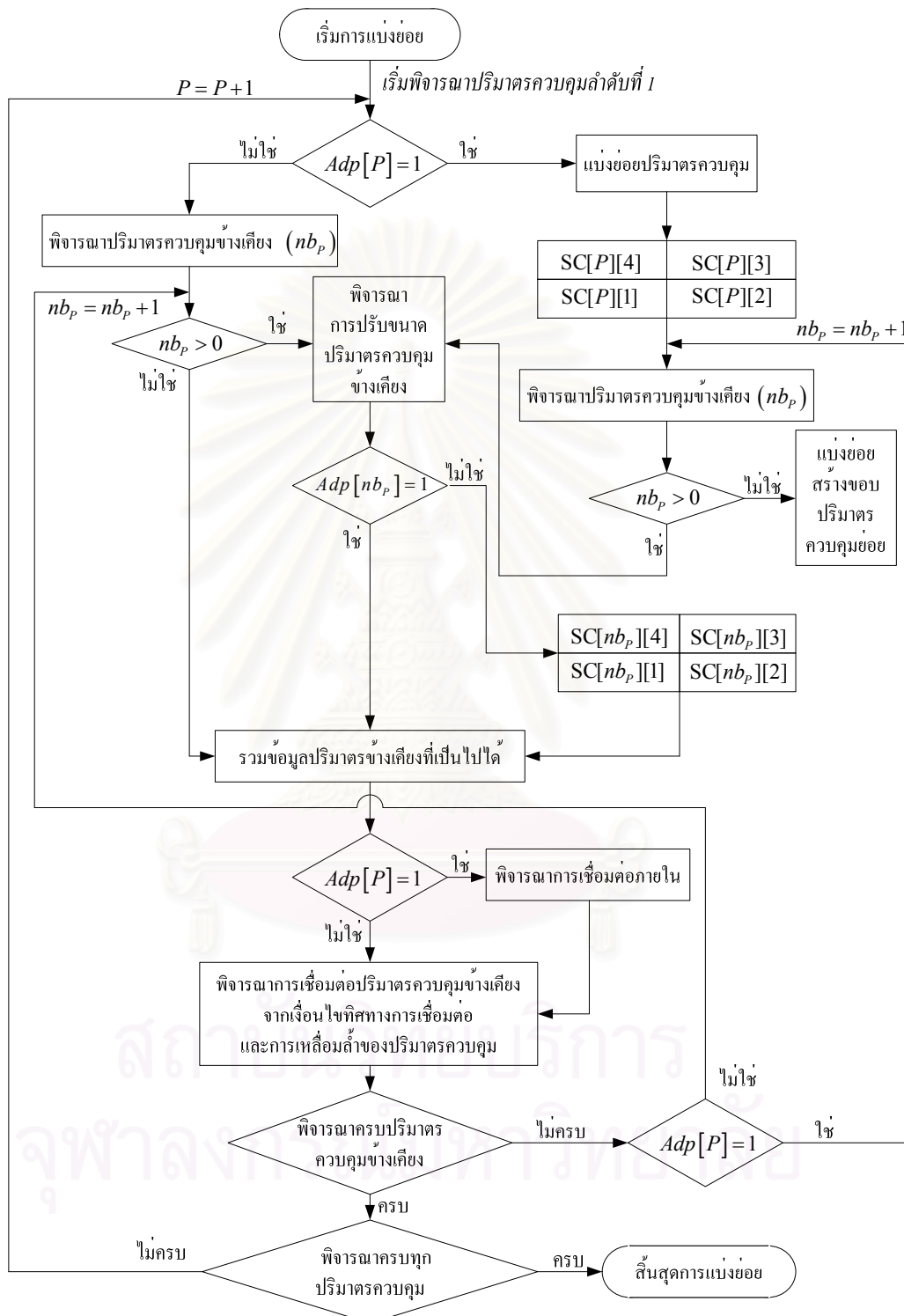
5.5.3 กระบวนการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม

ความสัมพันธ์ของดัชนีหมายเลขปริมาตรควบคุมย่อยใหม่ที่ได้ สามารถกำหนดให้อยู่ในรูปของหมายเลขปริมาตรควบคุมเดิม โดยมองว่าปริมาตรควบคุมใหม่ที่ได้ เป็นปริมาตรควบคุมลูก (Son-Cell, SC) ซึ่งสามารถแสดงโดยระบุตำแหน่งและแสดงหมายเลขโดยอ้างอิงจากรูป 5.11 (ข) ได้ดังรูป 5.12



รูป 5.12 ลักษณะการอ้างอิงปริมาตรควบคุมใหม่ในรูปของปริมาตรควบคุมเดิม

จากที่ได้กล่าวมาถึง การลำดับปริมาตรควบคุมที่แบ่งย่อยใหม่ การกำหนดค่าปริมาตรควบคุมข้างเคียง และการกำหนดปริมาตรควบคุมใหม่ในรูปปริมาตรควบคุมเดิม ดังที่กล่าวมา ความสัมพันธ์ต่างๆ เหล่านี้จะถูกนำไปใช้เป็นส่วนหนึ่งในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อให้สามารถระบุปริมาตรควบคุมข้างเคียงโดยเรียงตามลำดับอย่างเป็นระเบียบและมีความต่อเนื่องกันได้ กระบวนการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมสามารถแสดงโดยสังเขปได้ดังรูป 5.13



รูป 5.13 กระบวนการสร้างปริมาตรควบคุมใหม่ โดยการแบ่งย่อยตามปริมาตรควบคุมที่กำหนด

5.6 เงื่อนไขพิจารณาหยุดการปรับขนาด

จากกระบวนการในการปรับขนาดจะเห็นได้ว่าเป็นกระบวนการวนซ้ำ แม้ว่ากระบวนการปรับขนาดจะเป็นการเพิ่มความถูกต้องให้แก่ผลการคำนวณ แต่ในกรณีที่ผลเฉลยมีความถูกต้องแม่นยำในระดับที่ต้องการแล้ว จึงควรการหยุดปรับขนาดปริมาตรควบคุม

เงื่อนไขที่นำมาใช้ในการหยุดการปรับขนาดนั้นได้กำหนดไว้ 3 เงื่อนไขประกอบด้วย จำนวนรอบการปรับขนาด เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ปรับขนาด และค่าความผิดพลาดตกค้างเพื่อหยุดปรับขนาด โดยแต่ละค่ามีรายละเอียดดังนี้

5.6.1 เงื่อนไขจำนวนรอบการปรับขนาด

เงื่อนไขการหยุดการปรับขนาดโดยกำหนดจำนวนรอบ เป็นลักษณะกำหนดจำนวนรอบของการวนซ้ำที่แน่นอน โดยจำนวนรอบที่เหมาะสมขึ้นอยู่กับจำนวนปริมาตรเริ่มต้นที่ใช้ การกำหนดหยุดปรับขนาดลักษณะนี้สามารถทำได้ง่าย แต่จำนวนรอบที่ใช้ อาจมากเกินไปจนความจำเป็น หรือจำนวนรอบที่น้อยจนไม่สามารถให้ผลเฉลยที่แม่นยำได้

5.6.2 เงื่อนไขเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ปรับขนาด

สำหรับปัญหาที่การเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยอย่างสูงเฉพาะจุด (Singularity) เมื่อทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม บริเวณที่ถูกปรับขนาดจะเป็นเฉพาะบริเวณจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงสูงนี้เท่านั้น ซึ่งเป็นพื้นที่ขนาดเล็ก ดังนั้นหากพิจารณาว่าทั้งโดเมนมีผลการคำนวณที่ถูกต้องแม่นยำแล้ว แต่มีเพียงจุดเดียวซึ่งเป็นพื้นที่น้อยมากเมื่อเทียบกับพื้นที่ทั้งหมดที่ยังไม่ถูกต้องแม่นยำ อาจสามารถละทิ้งความผิดพลาดในส่วนนี้แล้วหยุดการปรับขนาดได้

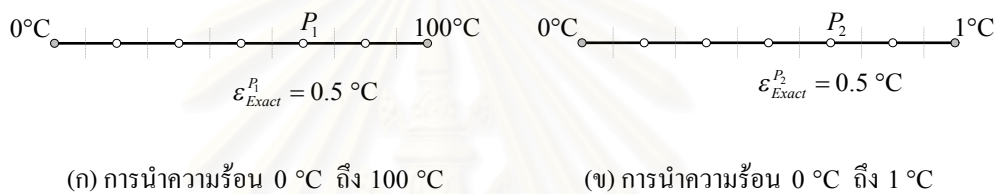
ดังนั้นการหยุดปรับขนาดโดยเงื่อนไขเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ปรับขนาด จึงหมายถึง หากพื้นที่ที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ที่น้อยเมื่อเทียบกับพื้นที่ทั้งหมด สามารถหยุดปรับขนาดโดยอาศัยเหตุผลดังที่อธิบายไว้ได้

แต่สำหรับปัญหาที่การเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยในโดเมนเป็นแบบสม่ำเสมอ การกำหนดให้หยุดปรับขนาดโดยเงื่อนไขเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ด้วยวิธีนี้ จะไม่สามารถทำได้ เนื่องจากปัญหาลักษณะนี้ บริเวณที่ปรับขนาดจะมีเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่มากในแต่ละรอบของการปรับขนาด

5.6.3 เงื่อนไขค่าความผิดพลาดตกค้างเพื่อหยุดปรับขนาด

การสร้างเงื่อนไขค่าความผิดพลาดตกค้างเพื่อหยุดการปรับขนาด เป็นการสร้างเงื่อนไขจากค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ย โดยอาศัยความสัมพันธ์ที่ว่า เมื่อผลการคำนวณมีความถูกต้องแม่นยำเพิ่มขึ้นค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ยจะลดลงด้วย แต่การนำค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ย มาใช้โดยตรงอาจไม่เหมาะสมเนื่องจากเหตุผลดังนี้

พิจารณาตัวอย่างปัญหาการนำความร้อนใน 1 มิติ กำหนดให้ลักษณะของปัญหาเป็นดังรูป 5.14 (ก) และ 5.14 (ข) โดยมีลักษณะและการแบ่งย่อยที่เหมือนกัน แต่แตกต่างกันที่เงื่อนไขขอบเขต



รูป 5.14 ความคลาดเคลื่อนที่เท่ากันของเงื่อนไขขอบเขตที่ต่างกัน

หากทำการคำนวณหาผลเฉลยการนำความร้อนของทั้ง 5.14 (ก) และ 5.14 (ข) พบว่าหากผลการคำนวณที่ได้ของทั้งจุด P_1 และ P_2 มีค่าความผิดพลาดเท่ากันคือ 0.5°C แต่หากพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตจะเห็นว่ากรณีของรูป 5.14 (ก) มีช่วงอุณหภูมิของขอบเขตคือ 0°C ถึง 100°C ความผิดพลาดในระดับ 0.5°C อาจถือได้ว่ามีความผิดพลาดน้อย แต่ในกรณีของรูป 5.14 (ข) ช่วงอุณหภูมิขอบเขตคือ 0°C ถึง 1°C ความผิดพลาดในระดับ 0.5°C อาจถือได้ว่ามีความผิดพลาดสูงมาก

ด้วยเหตุผลนี้การพิจารณาเฉพาะขนาดของความผิดพลาดจากการคำนวณอาจไม่เหมาะสม ดังนั้นจึงควรมีการแปลงให้ความคลาดเคลื่อนนี้อยู่ในระดับเดียวกัน จึงทำค่าความคลาดเคลื่อนให้เป็นบรรทัดฐานเดียวกัน (Normalize) โดยการนำขนาดของผลต่างค่าตัวแปรน้อยสุดและค่าตัวแปรน้อยที่สุดมาหาร เช่น

$$\begin{aligned} \text{ระดับความผิดพลาดของ } P_1 &= \frac{0.5^{\circ}\text{C}}{|100-0|^{\circ}\text{C}} = 0.005 \\ \text{ระดับความผิดพลาดของ } P_2 &= \frac{0.5^{\circ}\text{C}}{|1-0|^{\circ}\text{C}} = 0.5 \end{aligned}$$

จากค่าที่ได้จะเห็นว่าระดับความคลาดเคลื่อนที่ได้อยู่ในระดับที่แตกต่างกัน ซึ่งหากค่าความผิดพลาดที่ยอมรับได้ของปัญหารูป 5.14 (ก) มีขนาด 0.5°C ความผิดพลาดที่ยอมรับได้ของปัญหารูป 5.14 (ข) ต้องมีขนาด 0.005°C ซึ่งจะถือได้ว่า ค่าความผิดพลาดของทั้งสองกรณีอยู่ในระดับเดียวกัน

แต่ในการคำนวณปัญหาโดยทั่วไป จะไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรง การหาค่าความผิดพลาดโดยเทียบจากผลเฉลยแม่นยำนั้นไม่สามารถทำได้ แต่เนื่องจากค่าความผิดพลาดตกค้างสามารถเป็นตัวบ่งบอกถึงความแม่นยำในการคำนวณได้ จึงนำค่าดังกล่าวมาพิจารณาเป็น ค่าความผิดพลาดตกค้างมาตรฐาน (Normalize Residual Error, NR) โดยคำนวณได้จากสมการ (5.10)

$$\text{NR}_{\phi} = \frac{\varepsilon_M}{|\phi_{\max} - \phi_{\min}|} \quad (5.10)$$

โดยที่ ε_M แทนค่าความผิดพลาดเฉลี่ยของทั้งโดเมน ϕ_{\max} แทนค่าตัวแปรมากที่สุด และ ϕ_{\min} แทนค่าตัวแปรน้อยสุด ในการกำหนดหยุดการปรับขนาด หากค่า NR_{ϕ} มีค่าน้อยกว่าที่กำหนดจะทำการหยุดการปรับขนาด

จากเงื่อนไขการปรับขนาดทั้ง 3 เงื่อนไขที่ได้กล่าวมานั้น ในการคำนวณอาจเลือกเงื่อนไขเพียงอย่างหนึ่งอย่างใด พิจารณาจาก 2 เงื่อนไข หรืออาจพิจารณาทั้ง 3 เงื่อนไขรวมกันได้ ซึ่งการปรับขนาดจะหยุดเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดและมีความถูกต้องของผลการคำนวณในระดับที่ต้องการ

5.7 การตรวจสอบคุณภาพหลังการปรับขนาด

หลังทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม ผลการคำนวณที่ได้ต้องมีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้น สามารถพิจารณาได้จากค่าความผิดพลาดเฉลี่ยของทั้งโดเมน (err_{Exact}) คำนวณได้จากสมการ (5.11)

$$err^{Exact} = \left(\sum_{P=1}^{nc} |\varepsilon_P^{Exact}| V_P \right) / \sum_{i=1}^{nc} V_P \quad (5.11)$$

หากผลการคำนวณที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้น ค่า err^{Exact} หลังการปรับขนาดจะมีค่าลดลง

การวิเคราะห์หาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD) เป็นการวัดการกระจายค่าที่ออกจากค่าเฉลี่ย โดยค่าที่ได้มีลักษณะเป็นตัวแทนของข้อมูล ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความผิดพลาดเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง (SD^{Exact}) สามารถคำนวณได้จากสมการ (5.12)

$$SD^{Exact} = \left(\sum_{P=1}^{nc} (\varepsilon_P^{Exact} - err^{Exact})^2 V_P / \sum_{P=1}^{nc} V_P \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

ทำนองเดียว กันสามารถพิจารณาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ยของแต่ละจุดต่อ ($\overline{\varepsilon_{P_0}}$) ต่อขนาดของพื้นที่ ได้จากสมการ (5.13)

$$SD^{\varepsilon} = \left(\sum_{P=1}^{nc} (\overline{\varepsilon}_P - err^{\varepsilon})^2 V_P / \sum_{P=1}^{nc} V_P \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

โดยที่ค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ยโดยพิจารณาพร้อมกับขนาดของปริมาตรควบคุม สามารถคำนวณได้ดังสมการ (5.14)

$$err^{\varepsilon} = \left(\sum_{P=1}^{nc} |\overline{\varepsilon}_P| V_P \right) / \sum_{i=1}^{nc} V_P \quad (5.14)$$

จากค่าที่นำมาตรวจสอบเชิงคุณภาพของผลการคำนวณหลังการปรับขนาด ซึ่งประกอบด้วย err_{Exact} , SD_{Exact} และ SD_{ε_P} ซึ่งหากผลการคำนวณหลังจากการปรับขนาดปริมาตรควบคุมมีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้นค่าต่างๆ เหล่านี้จะมีค่าลดลงด้วย

5.8 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงเงื่อนไขที่ใช้พิจารณาปริมาณควบคุมที่ควรถูกปรับขนาด โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนตกค้างเป็นเงื่อนไขการปรับขนาด และเนื่องจากไม่สามารถแน่ใจได้ว่าบริเวณที่ปรับขนาดนั้นเป็นบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนจริง จึงได้สร้างตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลี่ยแม่นยำตรงเพื่อหาบริเวณที่ต้องทำการปรับขนาดโดยอ้างอิงผลการคำนวณที่ได้กับผลเฉลี่ยแม่นยำตรง หากทั้งสองเงื่อนไขให้ผลการปรับขนาดในบริเวณเดียวกันจะเป็นตัวบ่งชี้ถึงว่าเงื่อนไขการปรับขนาดที่สร้างมาจากเงื่อนไขค่าความผิดพลาดตกค้างนั้นสามารถบ่งชี้บริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนมากกว่าบริเวณอื่นได้จริง

จากนั้นได้กล่าวถึงการแบ่งย่อยปริมาณควบคุม การลำดับปริมาณควบคุม และกระบวนการสร้างปริมาณควบคุมใหม่ ซึ่งกระบวนการที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้ได้นำมาเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อให้สามารถระบุปริมาณควบคุมที่ต้องทำการปรับขนาดและสามารถสร้างปริมาณควบคุมใหม่ตามผลที่กำหนดได้ หลังจากการหาผลเฉลี่ยด้วยปริมาณควบคุมใหม่ที่ได้แล้วจะมีการตรวจสอบเชิงคุณภาพของผลการคำนวณที่ได้ เปรียบเทียบกับผลเฉลี่ยครั้งก่อน

ส่วนต่อไปจะเป็นการทดสอบเงื่อนไขของการปรับขนาดที่ได้กล่าวมา และทดสอบโปรแกรมสร้างปริมาณควบคุมใหม่ โดยนำมาพิจารณาปัญหาการถ่ายเทความร้อน ก่อนนำไปหาค่าความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิต่อไป

บทที่ 6

การทดสอบโปรแกรมสำหรับ ปัญหาการนำความร้อน

6.1 บทนำ

จากเงื่อนไขที่ใช้พิจารณาปรับขนาดปริมาตรควบคุมและการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม ดังที่ได้กล่าวมาในเรื่อง ตัวบ่งชี้การปรับขนาดและการปรับขนาดปริมาตรควบคุม ซึ่งเงื่อนไขต่างๆ เหล่านี้ได้นำมาเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมเฉพาะบริเวณเพื่อเป็นการเพิ่มความแม่นยำให้แก่ผลการคำนวณ

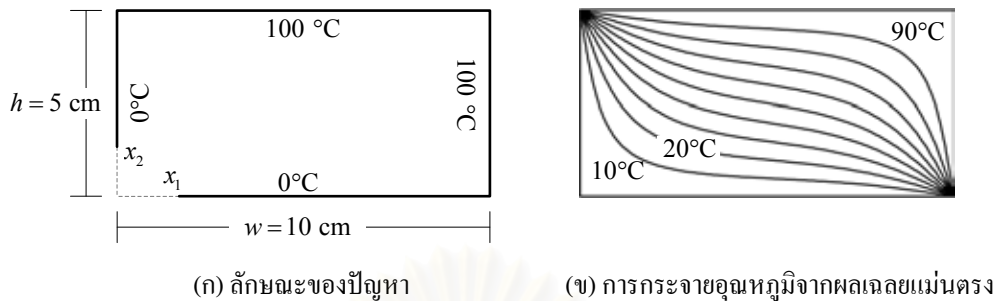
ในบทนี้ได้แบ่งหัวข้อที่จะกล่าวถึงเป็น 3 ส่วนได้แก่ ลักษณะปัญหาการนำความร้อนที่นำมาเป็นกรณีศึกษา การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาด และการทดสอบ โปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม โดยมีรายละเอียดตามลำดับ ดังนี้

6.2 กรณีศึกษาปัญหาการนำความร้อน

การทดสอบเงื่อนไขการปรับขนาด และโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม ได้เลือกปัญหาการนำความร้อนมาเป็นกรณีศึกษา 2 กรณี ซึ่งเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยแน่นอนตรง เพื่อวิเคราะห์ผลการคำนวณทั้งบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด และผลการคำนวณที่มีความแม่นยำมากขึ้นหลังทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม โดยลักษณะปัญหา และผลเฉลยแน่นอนตรงเป็นดังนี้

6.2.1 กรณีศึกษาปัญหาการนำความร้อน กรณีที่ 1

กรณีศึกษาปัญหาการนำความร้อนกรณีที่ 1 เป็นปัญหาการนำความร้อนที่ภาวะสมดุล ของแผ่นโลหะขนาดกว้าง 5 เซนติเมตร และมีความยาว 10 เซนติเมตร โดยกำหนดให้มีอุณหภูมิขอบคงที่ในแต่ละด้านดังแสดงในรูป 6.1 (ก) และจากผลเฉลยแน่นอนตรงการกระจายตัวของอุณหภูมิ สามารถแสดงดังรูป 6.1 (ข)



รูป 6.1 ลักษณะปัญหาและการกระจายของอุณหภูมิ กรณีศึกษาที่ 1

ผลเฉลยแม่นยำของอุณหภูมิ ($T_{ana}^{(x_1, x_2)}$) ของปัญหาคณิศศึกษาที่ 1 (Holman, 2001) สามารถคำนวณได้จากสมการ (6.1)

$$T_{ana}^{(x_1, x_2)} = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} [T_1(x_1, x_2) + T_2(x_1, x_2)]$$

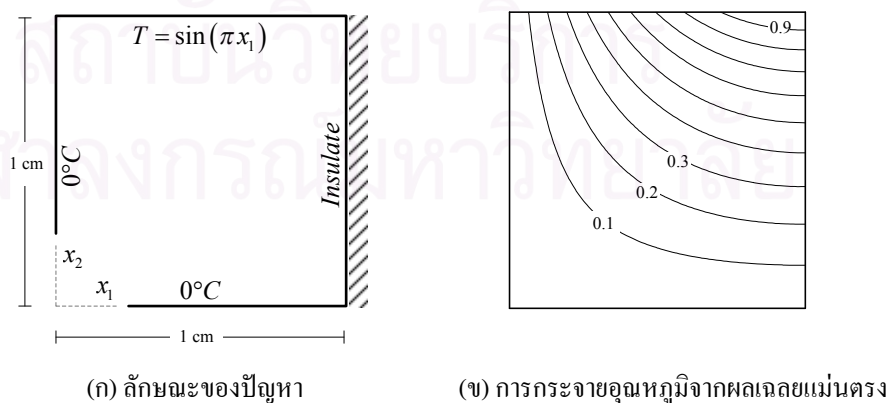
$$T_1(x_1, x_2) = \sin(n\pi x_1 / w) \frac{\sinh(n\pi x_2 / w)}{\sinh(n\pi h / w)}$$

$$T_2(x_1, x_2) = \sin(n\pi x_2 / h) \frac{\sinh(n\pi x_1 / h)}{\sinh(n\pi w / h)}$$

(6.1)

6.2.2 กรณีศึกษาปัญหาคำนวณนำความร้อน กรณีที่ 2

กรณีศึกษาปัญหาคำนวณนำความร้อนกรณีที่ 2 เป็นปัญหาคำนวณนำความร้อนที่ภาวะสมดุลของแผ่นโลหะขนาดกว้าง 1 เซนติเมตร และมีความยาว 1 เซนติเมตร ดังรูป 6.2



รูป 6.2 ลักษณะปัญหาและการกระจายของอุณหภูมิ กรณีศึกษาที่ 2

โดยกำหนดอุณหภูมิขอบในแต่ละด้านให้มีลักษณะดังแสดงในรูป 6.2 (ก) และจากเฉลยแม่นยำตรงสามารถคำนวณการกระจายของอุณหภูมิได้ดังรูป 6.2 (ข) ผลเฉลยแม่นยำตรงการนำความร้อนกรณีศึกษาที่ 2 (ปราโมทย์ เคชะอำไพ, 2544) สามารถหาได้จากสมการ (6.2)

$$T_{ana}^{(x_1, x_2)} = \sin \frac{\pi x_1}{2} \left(\frac{\sinh \frac{\pi x_2}{2}}{\sinh \frac{\pi}{2}} \right) \quad (6.2)$$

ปัญหาการนำความร้อนทั้ง 2 กรณี ซึ่งมีลักษณะการกระจายของอุณหภูมิที่แตกต่างกัน นำมาทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดว่าสามารถบ่งชี้ถึงบริเวณที่มีความผิดพลาดมากกว่าบริเวณอื่นจริงหรือไม่ อีกทั้งยังมีการตรวจสอบโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมโดยการตรวจสอบเชิงคุณภาพของผลการคำนวณที่ได้ เพื่อแสดงว่าหลังการปรับขนาดปริมาตรควบคุมแล้ว ผลการคำนวณที่ได้จะมีความถูกต้องแม่นยำเพิ่มขึ้น

6.3 การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาด

การกำหนดเงื่อนไขการปรับขนาด โดยใช้ตัวบ่งชี้การปรับขนาด (c_c) ที่คำนวณมาจากค่าความผิดพลาดตกค้าง สามารถบ่งชี้บริเวณที่ต้องทำการปรับขนาดได้ แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ด้วยตัวเลขให้แน่ใจได้ว่าบริเวณที่ถูกกำหนดปรับขนาดนั้น เป็นบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนมากกว่าบริเวณอื่นจริงหรือไม่

การปรับขนาดปริมาตรควบคุมสำหรับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง โดยใช้ตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำตรง (c_c^{Exact}) สามารถบ่งชี้บริเวณที่มีค่าความคลาดเคลื่อนจริงได้ เนื่องจากเป็นการเปรียบเทียบกับผลเฉลยของปัญหา

ดังนั้น หากทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม โดยพิจารณาทั้งจากค่าความผิดพลาดตกค้าง และจากผลเฉลยแม่นยำตรง หากบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดของทั้ง 2 เงื่อนไขอยู่ในบริเวณเดียวกัน จะสามารถสรุปได้ว่าบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดโดยการพิจารณาค่าความผิดพลาดตกค้างนั้น เป็นบริเวณที่มีค่าความผิดพลาดจากการคำนวณมากกว่าบริเวณอื่นจริง

การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาด จะนำกรณีศึกษาการนำความร้อนทั้ง 2 กรณีมาทำการทดสอบ โดยใช้ปริมาตรควบคุมขนาดสม่ำเสมอที่มีปริมาตรควบคุมขนาดใหญ่ และปริมาตรควบคุมที่มีความละเอียด โดยมีลักษณะปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม ทั้งนี้ยังได้ใช้ปริมาตรรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาทดสอบการกำหนดการปรับขนาดด้วย

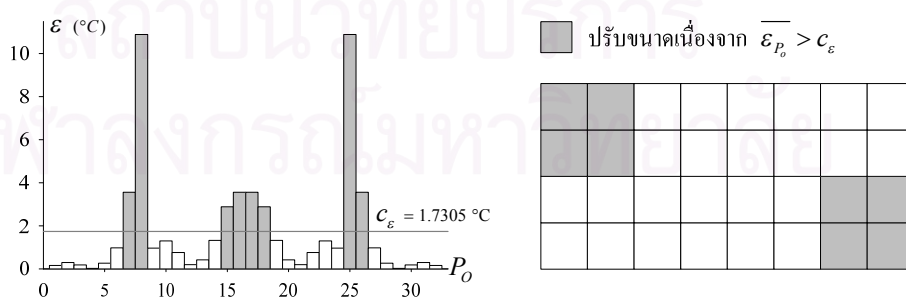
6.3.1 การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม สำหรับกรณีศึกษาที่ 1

การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดในส่วนนี้ จะใช้ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดเท่ากันทั้งโดเมนโดยแบ่งเป็นขนาด 4×8 และ 8×16 โดยได้ผลตามลำดับเป็นดังนี้

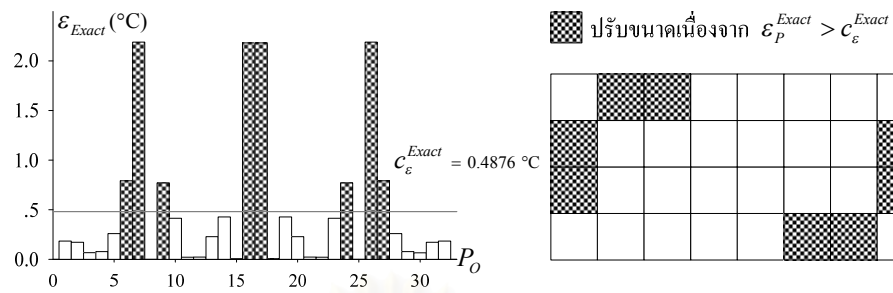
6.3.1.1 ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 4×8 สำหรับกรณีศึกษาที่ 1

เมื่อทำการคำนวณค่าอุณหภูมิของกรณีศึกษาที่ 1 โดยใช้ปริมาตรควบคุมขนาด 4×8 แล้วทำการหาบริเวณปรับขนาดโดยใช้ตัวบ่งชี้การปรับขนาด (c_ε) และตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำตรง (c_ε^{Exact}) กำหนดให้แฟกเตอร์การปรับขนาด (f_{ε_M}) ที่ใช้มีค่าเท่ากับ 0.85

โดยผลที่ได้เมื่อนำมาพิจารณาในลักษณะของแผนภูมิแท่ง แกนในแนวตั้งจะหมายถึงขนาดของค่าความผิดพลาด และแกนนอนหมายถึงหมายเลขของปริมาตรควบคุมนั้นๆ ส่วนของการแสดงปริมาตรควบคุมที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดโดยการพิจารณาค่าความผิดพลาดตกค้างแสดงโดยพื้นที่แรเงา ดังรูป (6.3) และในส่วนของปริมาตรควบคุมที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดเนื่องจากการเปรียบเทียบค่ากับผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นแทนด้วยพื้นที่รูปตารางหมากรุก ดังรูป (6.4) ซึ่งแสดงดังรูปตามลำดับได้ดังนี้

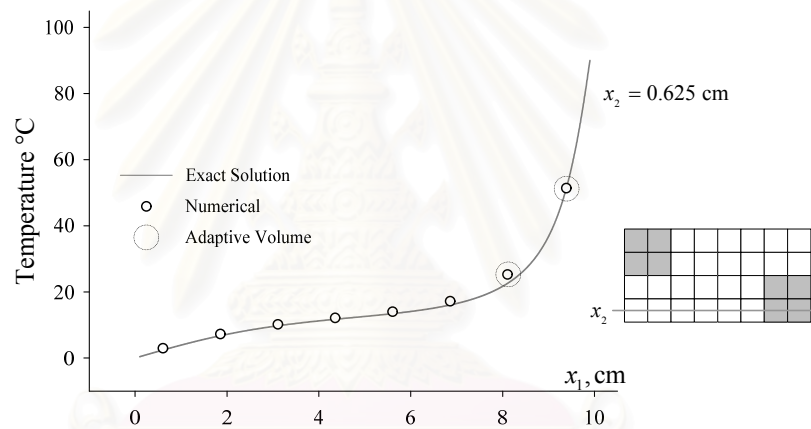


รูป 6.3 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม 4×8 กรณีศึกษาที่ 1

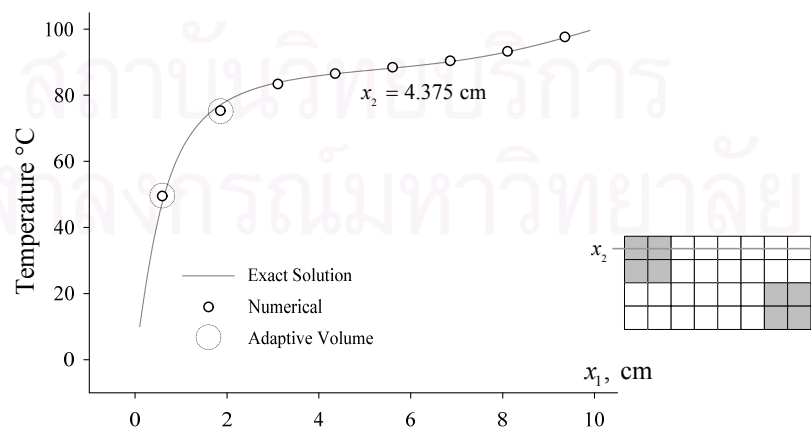


รูป 6.4 การปรับขนาดเนื่องจากผลเฉลยแม่นยำ ปริมาตรควบคุม 4×8 กรณีศึกษาที่ 1

เมื่อนำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับกับผลเฉลยแม่นยำ และแสดงจุดต่อที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด โดยได้เลือกแสดง 2 ช่วงได้ผลดังรูป 6.5 และ 6.6 ตามลำดับได้ดังนี้



รูป 6.5 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำ ที่ระยะ $x_2 = 0.625$ cm กรณีศึกษาที่ 1

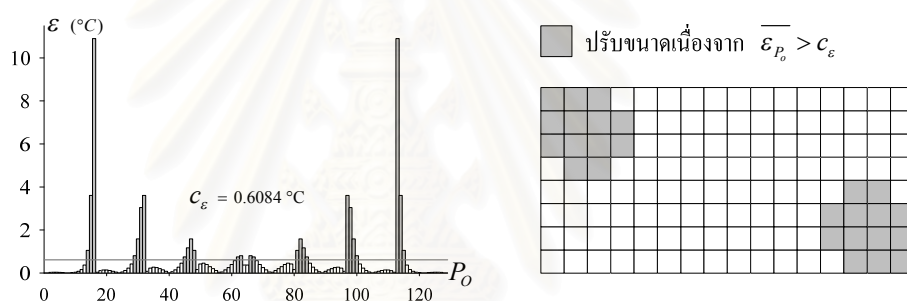


รูป 6.6 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำ ที่ระยะ $x_2 = 4.375$ cm กรณีศึกษาที่ 1

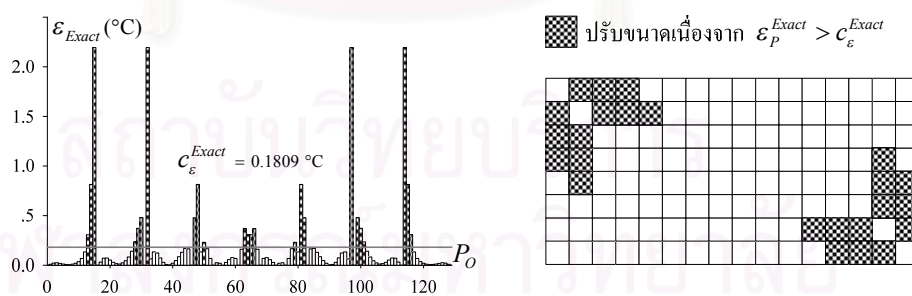
จากผลที่ได้จะเห็นว่าจุดต่อที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดนั้นจะเป็นบริเวณที่ผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่าบริเวณอื่น จากนั้นจะทำการเปรียบเทียบตัวบ่งชี้การปรับขนาดลักษณะเดียวกันนี้ โดยใช้ปริมาตรควบคุมที่ละเอียด 8×16 เพื่อเปรียบเทียบผลต่อไป

6.3.1.2 ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 8×16 กรณีศึกษาที่ 1

ทำการคำนวณผลเฉลยของกรณีศึกษาที่ 1 อีกครั้ง โดยใช้ปริมาตรควบคุมขนาด 8×16 แล้วทำการหาบริเวณปรับขนาดโดยใช้ตัวบ่งชี้การปรับขนาด (c_ε) และตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำตรง (c_ε^{Exact}) แฟกเตอร์การปรับขนาด (f_{ε_M}) ที่ใช้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.85 ได้ผลดังรูป 6.7 และรูป 6.8 ตามลำดับ

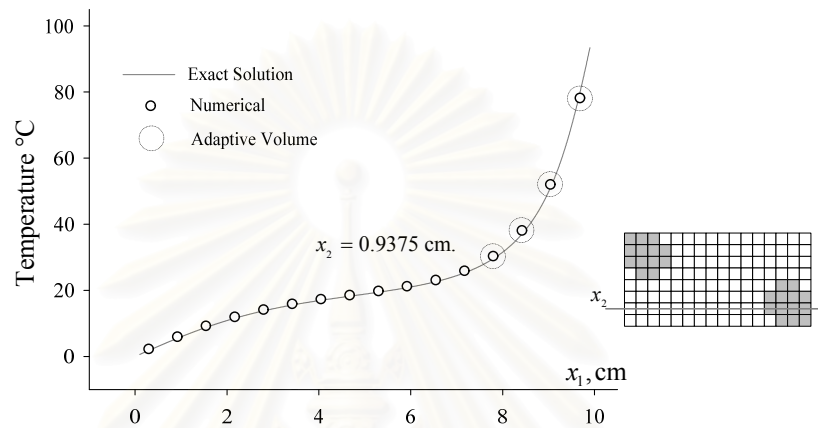


รูป 6.7 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม 8×16 กรณีศึกษาที่ 1

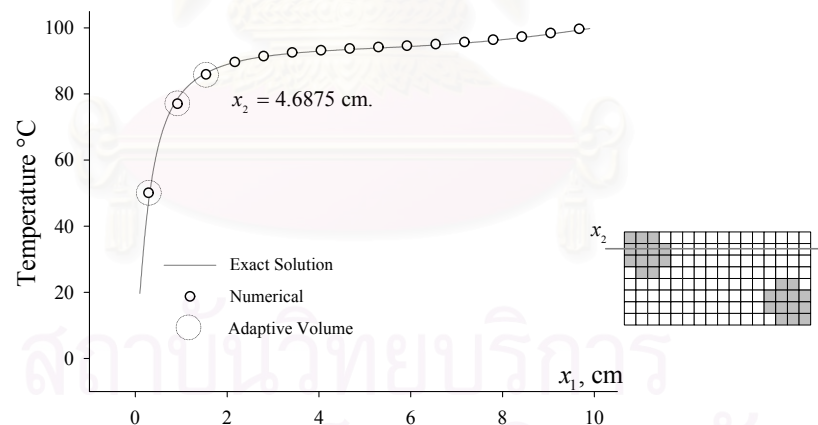


รูป 6.8 การปรับขนาดเนื่องจากผลเฉลยแม่นยำตรง ปริมาตรควบคุม 8×16 กรณีศึกษาที่ 1

นำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับกับผลเฉลยแม่นยำ และแสดงจุดต่อที่ถูกระบุให้ปรับขนาดในลักษณะเดียวกับกรณีศึกษาที่ 1 โดยได้เลือกแสดงตัวอย่าง 2 ช่วง โดยเลือกช่วงที่มีการกำหนดให้ปรับขนาดมาแสดงผล ผลการคำนวณที่ได้เป็นดังรูป 6.9 และ 6.10 ตามลำดับ



รูป 6.9 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำ ที่ระยะ $x_2 = 0.9375$ cm กรณีศึกษาที่ 1



รูป 6.10 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำ ที่ระยะ $x_2 = 4.6875$ cm กรณีศึกษาที่ 1

จากผลการคำนวณที่ได้ จะเห็นว่าปริมาณควบคุมที่ถูกระบุให้ปรับขนาดนั้น อยู่ในบริเวณที่ผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่าบริเวณที่ไม่ถูกระบุให้ปรับขนาด และจากการใช้ปริมาณควบคุมที่มีขนาดเล็กจะเห็นได้ว่า ทั้งค่าตัวบ่งชี้การปรับขนาด (c_ϵ) และตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำ (c_ϵ^{Exact}) จะมีค่าลดลงด้วย

ค่าบ่งชี้ต่างๆ ที่ได้จากการคำนวณการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 1 เมื่อนำมาเปรียบเทียบกันมีรายละเอียดดังตาราง 6.1

ตาราง 6.1 การเปรียบเทียบค่าบ่งชี้ต่างๆ ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 1

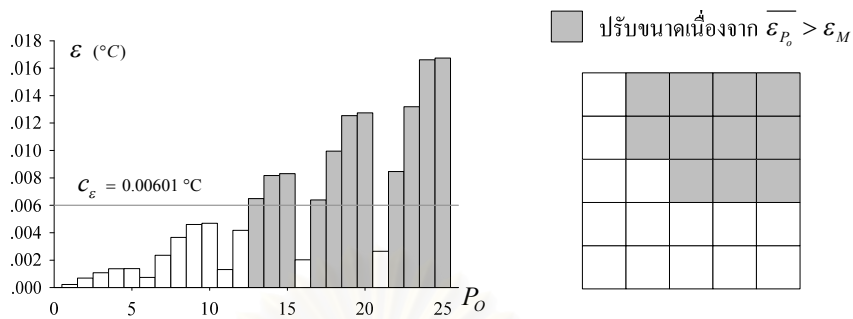
พารามิเตอร์	ปริมาตรควบคุม	
	4×8	8×16
จำนวนปริมาตรควบคุมเริ่มต้น	32	128
จำนวนปริมาตรควบคุมที่ $\overline{\varepsilon_{P_0}} > c_\varepsilon$	8	26
จำนวนปริมาตรควบคุมที่ $\varepsilon_P^{Exact} > c_\varepsilon^{Exact}$	8	24
ความคลาดเคลื่อนตกรังเฉลี่ย ε_M (°C)	1.73057	0.60846
ความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นยำเฉลี่ย $\bar{\varepsilon}^{Exact}$ (°C)	0.48762	0.18091
ความคลาดเคลื่อนมากที่สุดที่ถูกปรับขนาด (°C)	2.18924	2.19291
ความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดที่ถูกปรับขนาด (°C)	0.28190	0.23081

6.3.2 การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม สำหรับกรณีศึกษาที่ 2

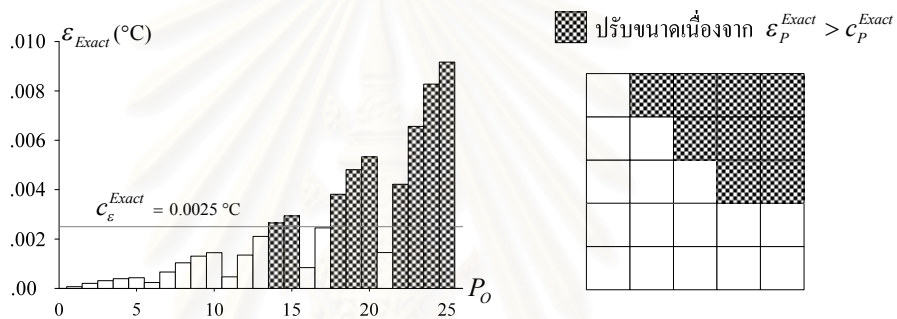
ในส่วนต่อไป จะทำการเปรียบเทียบตัวบ่งชี้การปรับขนาดลักษณะเดียวกันนี้ สำหรับกรณีศึกษาที่ 2 โดยแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีจำนวนปริมาตรควบคุม 5×5 และ 10×10 ทำการคำนวณหาผลเฉลย แล้วทำการวิเคราะห์ผลที่ได้ โดยมีรายละเอียดดังนี้

6.3.2.1 ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 5×5 สำหรับกรณีศึกษาที่ 2

เมื่อทำการคำนวณผลเฉลยของกรณีศึกษาที่ 2 โดยใช้ปริมาตรควบคุมขนาด 5×5 จากนั้นทำการหาบริเวณปรับขนาดโดยใช้ตัวบ่งชี้การปรับขนาด (c_ε) และตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำ (c_ε^{Exact}) แฟกเตอร์การปรับขนาด (f_{ε_M}) ที่ใช้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 ผลการคำนวณและบริเวณที่กำหนดปรับขนาด จากตัวบ่งชี้การปรับขนาดซึ่งคำนวณมาจากความผิดพลาดตกรังแสดงในรูป 6.11 ส่วนการปรับขนาดที่คำนวณมาจากผลเฉลยแม่นยำได้ดังรูป 6.12

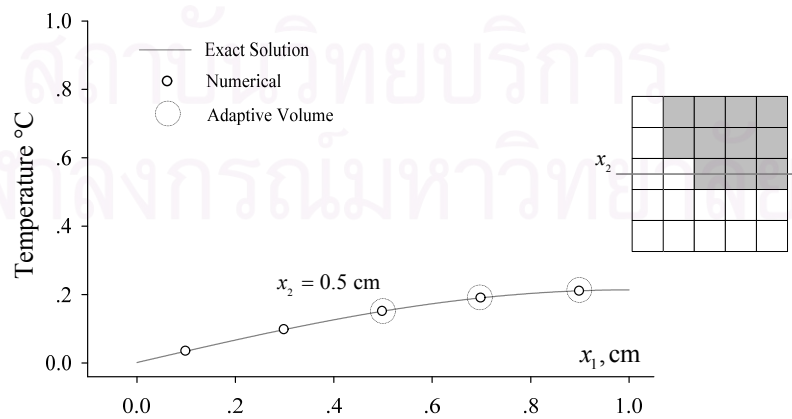


รูป 6.11 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกลง ปริมาตรควบคุม 5×5 กรณีสึกษาที่ 2

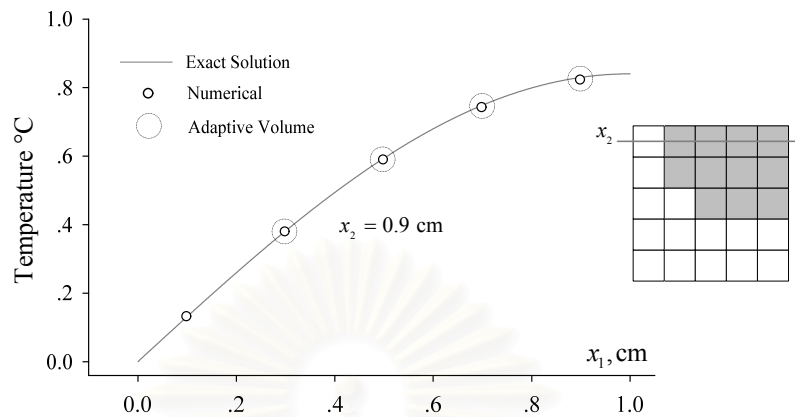


รูป 6.12 การปรับขนาดเนื่องจากผลเฉลยแม่นยำตรง ปริมาตรควบคุม 5×5 กรณีสึกษาที่ 2

นำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับกับผลเฉลยแม่นยำตรง และแสดงจุดต่อที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด โดยเลือกแสดงตัวอย่างผลการคำนวณ 2 ช่วงได้ผลดังรูป 6.13 และรูป 6.14 ตามลำดับ



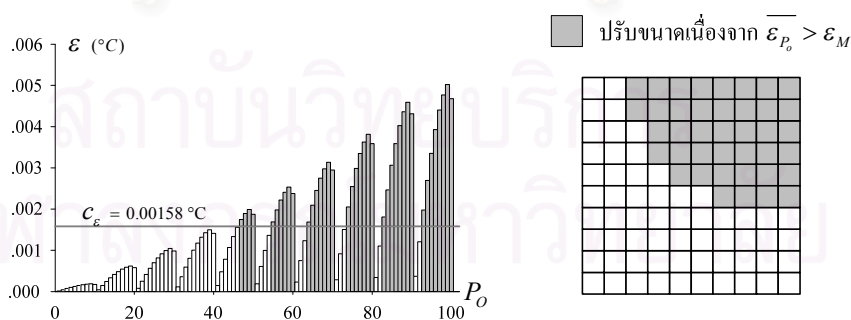
รูป 6.13 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ระยะ $x_2 = 0.5 \text{ cm}$ กรณีสึกษาที่ 2



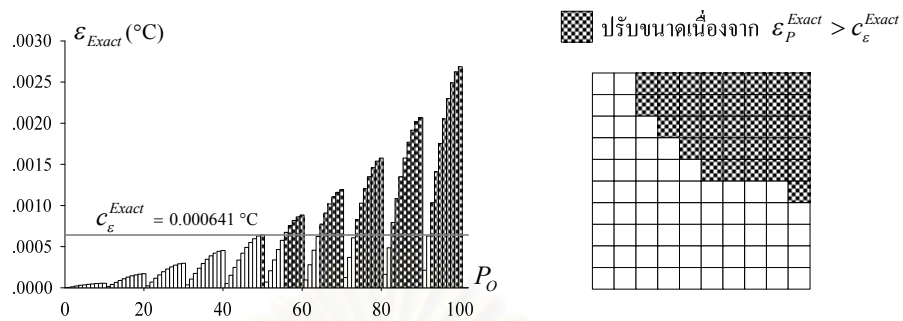
รูป 6.14 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ระยะ $x_2 = 0.9$ cm กรณีศึกษาที่ 2

6.3.2.2 ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 10×10 สำหรับกรณีศึกษาที่ 2

ทำการคำนวณผลเฉลยของอุณหภูมิของกรณีศึกษาที่ 2 อีกครั้ง โดยใช้ปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก โดยแบ่งย่อยเป็น 10×10 ปริมาตรควบคุม แล้วทำการหาบริเวณเพื่อทำการปรับขนาดโดยใช้ตัวบ่งชี้การปรับขนาด (c_e) และตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำตรง (c_e^{Exact}) แฟกเตอร์การปรับขนาด (f_{ϵ_M}) ที่ใช้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 ผลการคำนวณและบริเวณที่กำหนดปรับขนาด จากตัวบ่งชี้การปรับขนาดซึ่งคำนวณมาจากความผิดพลาดตกค้างแสดงในรูป 6.15 ส่วนการปรับขนาดที่คำนวณมาจากผลเฉลยแม่นยำตรงได้ดังรูป 6.16

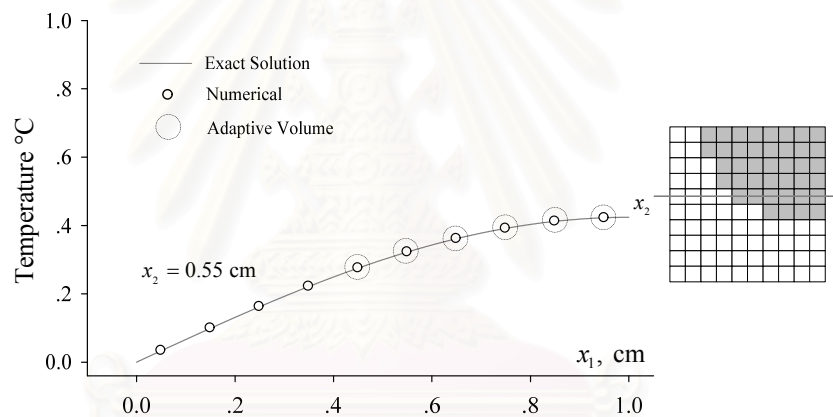


รูป 6.15 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกค้าง ปริมาตรควบคุม 10×10 กรณีศึกษาที่ 2

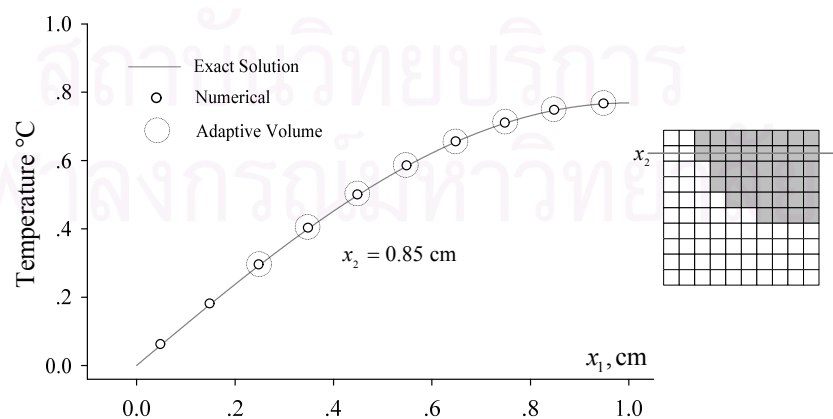


รูป 6.16 การปรับขนาดเนื่องจากผลเฉลยแม่นยำ ปริมาตรควบคุม 10×10 กรณีสี่เหลี่ยมที่ 2

นำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับกับผลเฉลยแม่นยำ และแสดงจุดต่อที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด โดยเลือกแสดงตัวอย่างผลการคำนวณ 2 ช่วงได้ผลดังรูป 6.17 และ 6.18 ตามลำดับ



รูป 6.17 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำ ที่ระยะ $x_2 = 0.55$ cm กรณีสี่เหลี่ยมที่ 2



รูป 6.18 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำ ที่ระยะ $x_2 = 0.85$ cm กรณีสี่เหลี่ยมที่ 2

ค่าบ่งชี้ต่างๆ ที่ได้จากการคำนวณการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 2 จากปริมาตรควบคุมทั้ง 2 ชุด เมื่อนำมาเปรียบเทียบกันมีรายละเอียดดังตาราง 6.2

ตาราง 6.2 การเปรียบเทียบค่าบ่งชี้ต่างๆ ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 2

พารามิเตอร์	ปริมาตรควบคุม	
	5×5	10×10
จำนวนปริมาตรควบคุมเริ่มต้น	25	100
จำนวนปริมาตรควบคุมที่ $\overline{\varepsilon_{p_o}} > c_\varepsilon$	11	40
จำนวนปริมาตรควบคุมที่ $\varepsilon_p^{Exact} > \overline{\varepsilon}^{Exact}$	9	35
ความคลาดเคลื่อนส่วนเกินเฉลี่ย ε_M (°C)	0.00601	0.00158
ความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นยำเฉลี่ย $\overline{\varepsilon}^{Exact}$ (°C)	0.00249	0.00064
ความคลาดเคลื่อนมากที่สุดที่ถูกปรับขนาด (°C)	0.00916	0.00502
ความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดที่ถูกปรับขนาด (°C)	0.00648	0.00174

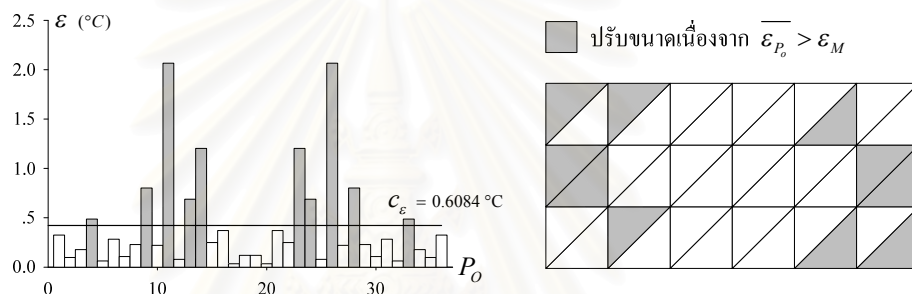
6.3.3 การทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 1

การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Unstructured Grid สามารถใช้ได้กับปริมาตรควบคุมที่หลากหลาย ไม่เฉพาะปริมาตรควบคุมแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น เพื่อแสดงให้คุณสมบัติข้อนี้ ได้เลือกปัญหาการนำความร้อนกรณีศึกษาที่ 1 มาทำการคำนวณหาผลเฉลย และทำการทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาด แล้วทำการเปรียบเทียบผลในลักษณะเดียวกับปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในหัวข้อ 6.3.1 และ 6.3.2

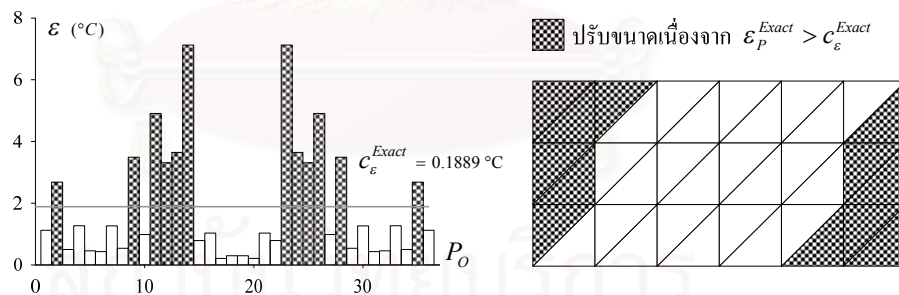
ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในการคำนวณแบ่งเป็น 2 ชุด โดยชุดแรกเริ่มจากการแบ่งเป็นปริมาตรควบคุมแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็น 3×6 ปริมาตรควบคุม จากนั้นทำการแบ่งครึ่งแต่ละปริมาตรควบคุมด้วยเส้นทแยงมุม 1 เส้น ทำให้ได้ปริมาตรควบคุมที่มีปริมาตรควบคุมย่อยจำนวน (3×6)×2 ปริมาตรควบคุม และปริมาตรควบคุมชุดที่ 2 เป็นปริมาตรควบคุมที่ถูกแบ่งย่อยให้มีขนาดเล็กกว่า โดยทำการแบ่งจากปริมาตรควบคุมเริ่มต้นรูปสี่เหลี่ยม ขนาด 5×10 ปริมาตรควบคุม และเมื่อทำการแบ่งเป็นปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยม ดังนั้นจะได้ปริมาตรควบคุมที่มีขนาดเป็น (5×10)×2 ซึ่งผลการคำนวณของปริมาตรควบคุมแต่ละชุด เป็นดังนี้

6.3.3.1 ปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $(3 \times 6) \times 2$ สำหรับกรณีศึกษาที่ 1

ในส่วนนี้ได้ทำการแบ่งโดเมนของปัญหากรณีศึกษาที่ 1 ออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยกำหนดให้มีขนาดปริมาตรควบคุมเป็น $(3 \times 6) \times 2$ ปริมาตรควบคุม จากนั้นได้ทำการคำนวณผลเฉลยของปัญหา และทำการกำหนดปริมาตรควบคุมที่ต้องปรับขนาด โดยตั้งตัวบ่งชี้การปรับขนาด (c_ε) และตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำ (c_ε^{Exact}) แฟกเตอร์การปรับขนาด (f_{ε_M}) ที่ใช้มีค่าเท่ากับ 1 ลักษณะปริมาตรควบคุมที่ใช้และผลที่ได้เป็นดังรูป 6.19 และรูป 6.20 ตามลำดับ

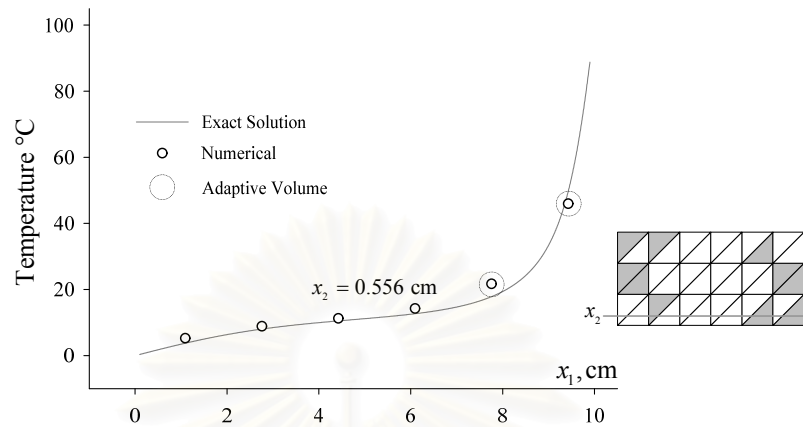


รูป 6.19 การปรับขนาดจากความผิดพลาดตกลง ปริมาตรควบคุม $(3 \times 6) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1

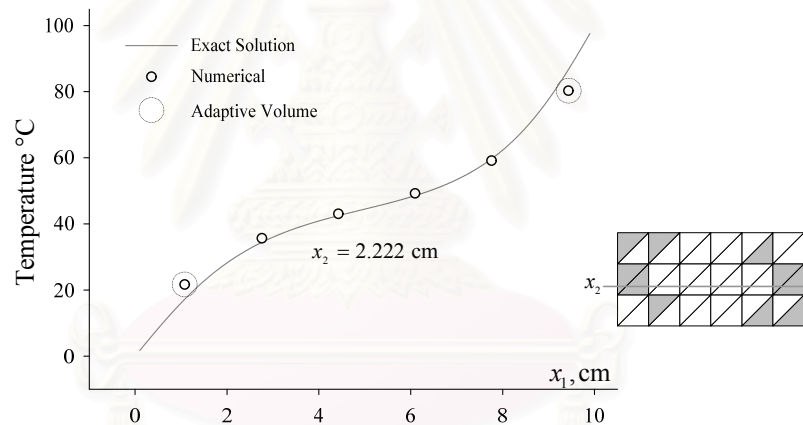


รูป 6.20 การปรับขนาดเนื่องจากผลเฉลยแม่นยำ ปริมาตรควบคุม $(3 \times 6) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1

นำผลการคำนวณการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับกับผลเฉลยแม่นยำ และแสดงจุดต่อที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด โดยเลือกแสดงตัวอย่างผลการคำนวณ 2 ช่วงได้รูป 6.21 และ 6.22



รูป 6.21 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ระยะ $x_2 = 0.556$ cm กรณีศึกษาที่ 1



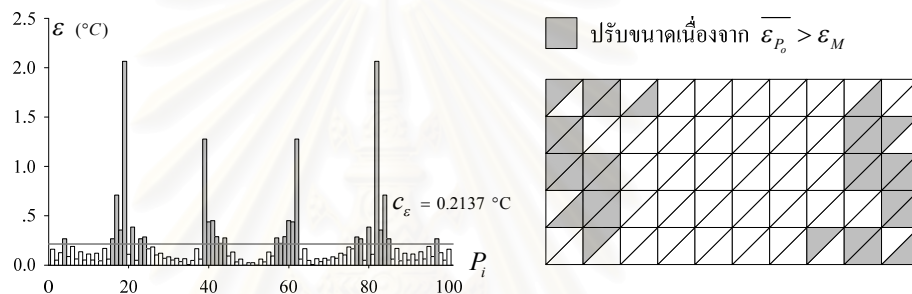
รูป 6.22 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ระยะ $x_2 = 2.222$ cm กรณีศึกษาที่ 1

จะเห็นได้ว่าบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดนั้นเป็นบริเวณที่ผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงสูงกว่าบริเวณอื่นเช่นเดียวกับการใช้ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม อีกทั้งผลการคำนวณที่ได้ยังคงมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง เช่นเดียวกัน

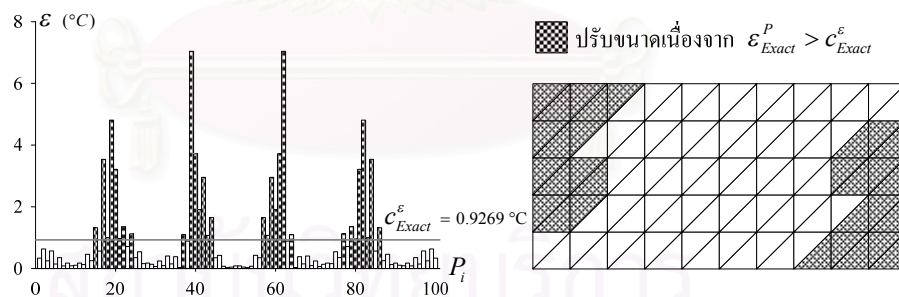
ในส่วนต่อไปจะทำการคำนวณในลักษณะเดียวกันนี้โดยใช้ปริมาตรควบคุมที่มีขนาดเล็กลงเพื่อเปรียบเทียบความเปลี่ยนแปลงของค่าบ่งชี้ต่างๆ จากการปรับขนาด

6.3.3.2 ปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $(5 \times 10) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1

ทำการเปลี่ยนแปลงขนาดปริมาตรควบคุมให้มีขนาดเล็กลง โดยแบ่งโดเมนของปัญหากรณีศึกษาที่ 1 ออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้มีขนาดเป็น $(5 \times 10) \times 2$ ปริมาตรควบคุม ทำการคำนวณผลเฉลยของปัญหา แล้วทำการกำหนดปริมาตรควบคุมที่ต้องปรับขนาด โดยทั้งตัวบ่งชี้การปรับขนาด (c_ε) และตัวบ่งชี้การปรับขนาดจากผลเฉลยแม่นยำ (c_ε^{Exact}) แฟกเตอร์การปรับขนาด (f_{ε_M}) ที่ใช้มีค่าเท่ากับ 1 ลักษณะปริมาตรควบคุมที่ใช้และผลที่ได้เป็นดังรูป 6.23 และรูป 6.24 ตามลำดับ

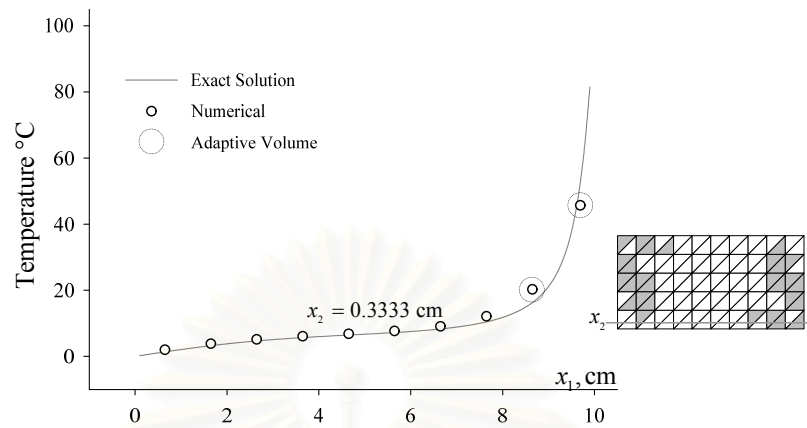


รูป 6.23 การปรับขนาดจากความผิดพลาดค้ำง ปริมาตรควบคุม $(5 \times 10) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1

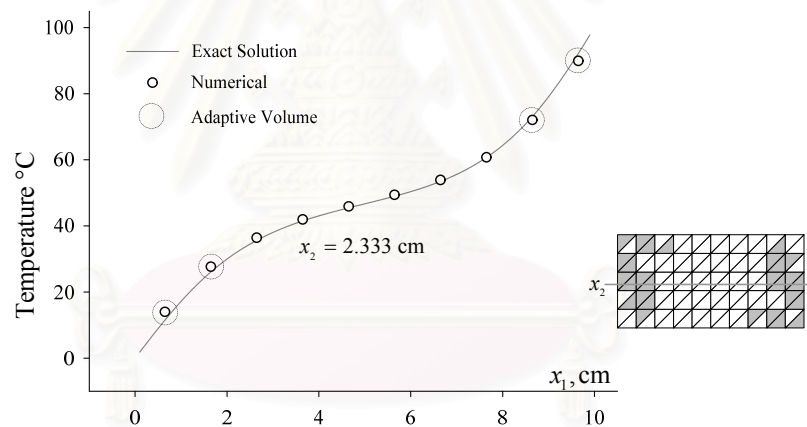


รูป 6.24 การปรับขนาดเนื่องจากผลเฉลยแม่นยำ ปริมาตรควบคุม $(5 \times 10) \times 2$ กรณีศึกษาที่ 1

นำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับกับผลเฉลยแม่นยำ และแสดงจุดต่อที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด โดยเลือกแสดงตัวอย่างผลการคำนวณ 2 ช่วง แสดงได้ดังรูป 6.25 และ 6.26 ตามลำดับได้ดังนี้



รูป 6.25 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ระยะ $x_2 = 0.3333$ cm กรณีศึกษาที่ 1



รูป 6.26 ผลการคำนวณเทียบผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ระยะ $x_2 = 2.333$ cm กรณีศึกษาที่ 1

จากผลการคำนวณ จะเห็นได้ว่าบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดนั้น ยังคงเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยมากกว่าบริเวณอื่นเช่นเดิม อีกทั้งผลการคำนวณของจุดต่อที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดนั้นเป็นจุดที่ผลการคำนวณผิดพลาดมากกว่าบริเวณอื่นจริง

ตัวอย่างต่างๆ ที่ได้จากการคำนวณเพื่อหาบริเวณที่ต้องปรับขนาด ของปริมาตรควบคุมทั้ง 2 ชุดแสดงในตาราง 6.3

ตาราง 6.3 การเปรียบเทียบค่าบ่งชี้ต่างๆ ปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยม กรณีศึกษาที่ 1

พารามิเตอร์	ปริมาตรควบคุม	
	$(3 \times 6) \times 2$	$(5 \times 10) \times 2$
จำนวนปริมาตรควบคุมเริ่มต้น	36	100
จำนวนปริมาตรควบคุมที่ $\overline{\varepsilon}_{P_0} > c_\varepsilon$	10	28
จำนวนปริมาตรควบคุมที่ $\varepsilon_P^{Exact} > c_\varepsilon^{Exact}$	12	30
ความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ย $\varepsilon_M (C^\circ)$	0.4217	0.2137
ความผิดพลาดจากผลเฉลยแม่นยำเฉลี่ย $\bar{\varepsilon}^{Exact} (C^\circ)$	1.8894	0.9265
ความคลาดเคลื่อนมากที่สุดที่ถูกปรับขนาด (C°)	7.1246	7.0372
ความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดที่ถูกปรับขนาด (C°)	2.67763	0.9560

ผลจากรายที่ได้จะเห็นว่าจำนวนปริมาตรควบคุมที่กำหนดให้ปรับขนาด ของทั้งสองเงื่อนไขที่พิจารณามีตำแหน่งและจำนวนที่ใกล้เคียงกัน ค่าความผิดพลาดจากผลเฉลยแม่นยำที่ลดลงเมื่อจำนวนปริมาตรควบคุมที่ใช้เพิ่มขึ้นเป็นตัวบ่งชี้ว่าผลการคำนวณนั้นมีความถูกต้องแม่นยำเพิ่มมากขึ้นด้วย อีกทั้งค่าความผิดพลาดตกค้างที่ลดลง ซึ่งผลที่ได้มีลักษณะเช่นเดียวกับการใช้ปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยม ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

จากผลการทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาดในกรณีต่างๆ ที่นำมาพิจารณา จะเห็นได้ว่าผลการกำหนดปริมาตรควบคุมที่ต้องทำการปรับขนาดนั้น ส่วนใหญ่จะอยู่ในบริเวณผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่าบริเวณอื่น อีกทั้งผลการคำนวณที่ได้มักจะคลาดเคลื่อนกับผลเฉลยแม่นยำมากกว่าปริมาตรควบคุมที่ไม่ถูกกำหนดให้ปรับขนาด

กรณีที่ผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำเพียงพอแล้ว แต่ยังคงถูกกำหนดให้ปรับขนาดอีกนั้น เนื่องจากว่าแม้ปริมาตรควบคุมนั้น จะมีค่าความถูกต้องสูงแล้ว แต่เมื่อเทียบกับปริมาตรควบคุมอื่นๆ แล้วปริมาตรควบคุมนั้นๆ ยังมีค่าความผิดพลาดมากกว่าปริมาตรควบคุมอื่นนั่นเอง ดังนั้นจึงควรมีการพิจารณาให้หยุดการปรับขนาดได้ ซึ่งพบว่าเมื่อผลการคำนวณมีความถูกต้องมากขึ้น ค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ยจะลดลงด้วย ดังนั้นหากค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ยมีค่าน้อยๆ อาจกำหนดให้หยุดทำการปรับขนาดได้

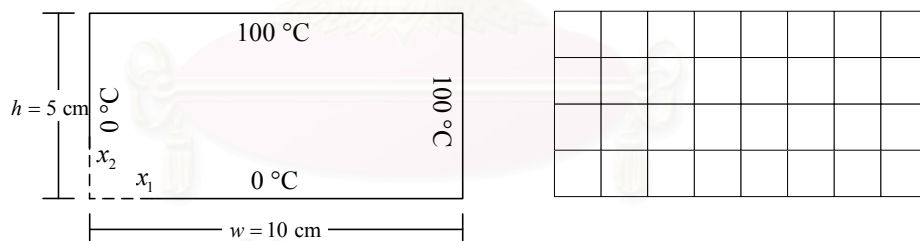
ในส่วนต่อไปจะเป็นการทดสอบโปรแกรมแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม โดยจะรับผลจากการบ่งชี้ การปรับขนาดแล้วทำการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมเพื่อให้ได้ปริมาตรควบคุมใหม่ แล้วทำการคำนวณ จำนวนรอบ

6.4 การทดสอบโปรแกรมแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม

หลังจากสามารถระบุปริมาตรควบคุมที่ต้องทำการปรับขนาดได้แล้ว ในส่วนต่อไปจะทำการ แบ่งย่อยปริมาตรควบคุม ตามค่าที่กำหนดปรับขนาด โดยนำปัญหาการนำความร้อนกรณีศึกษาที่ 1 และกรณีศึกษาที่ 2 มาใช้ในการทดสอบโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม และได้ทำการ ตรวจสอบเชิงคุณภาพของผลการคำนวณหลังทำการปรับขนาด โดยผลที่ได้เป็นดังนี้

6.4.1 การทดสอบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 1

ในส่วนนี้จะทำการทดสอบโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม โดยพิจารณาปัญหาการนำ ความร้อนกรณีศึกษาที่ 1 ในหัวข้อ 6.2.1 มาทำการทดสอบ ลักษณะของปัญหาเป็นดังรูป 6.27 (ก) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้นมีขนาด 4×8 ดังรูป 6.27 (ข)



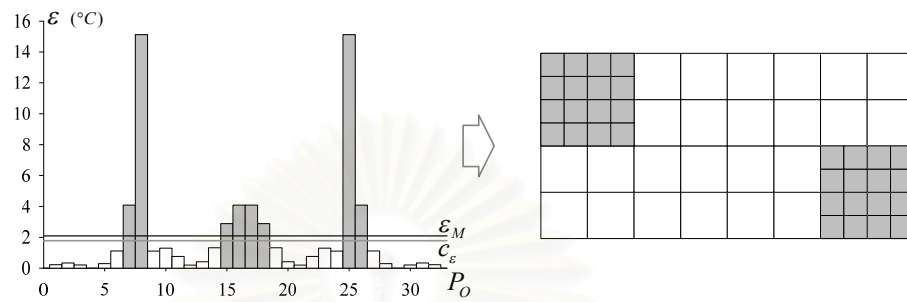
(ก) ลักษณะของปัญหา

(ข) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้นที่ใช้

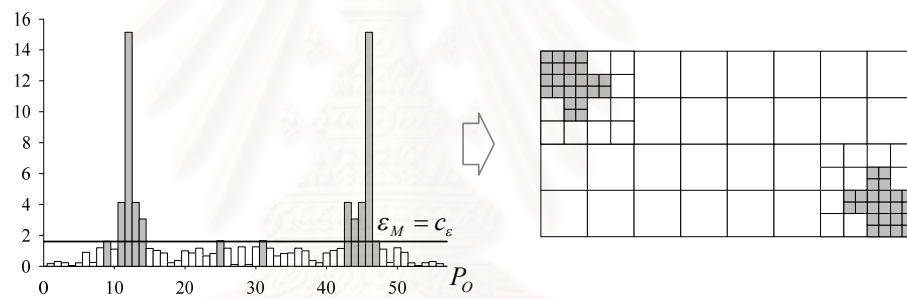
รูป 6.27 ลักษณะปัญหา และปริมาตรควบคุมเริ่มต้น

เงื่อนไขสำหรับพิจารณาหยุดการปรับขนาดคือ เมื่อทำการปรับขนาดครบ 4 รอบให้หยุดทำ การปรับขนาด เนื่องจากต้องการทราบแนวโน้มของ เปอร์เซ็นต์พื้นที่ที่ปรับขนาด และความผิดพลาด ตกค้างมาตรฐาน NR โดยเปรียบเทียบความแม่นยำจากผลเฉลยแม่นยำตรง ว่าที่ความถูกต้องในระดับที่ พอใจนั้นมีค่า NR เท่าใด เพื่อนำค่า NR นี้ไปใช้หยุดการปรับขนาดสำหรับปัญหาที่ไม่มีผลเฉลยแม่นยำ ตรงต่อไป

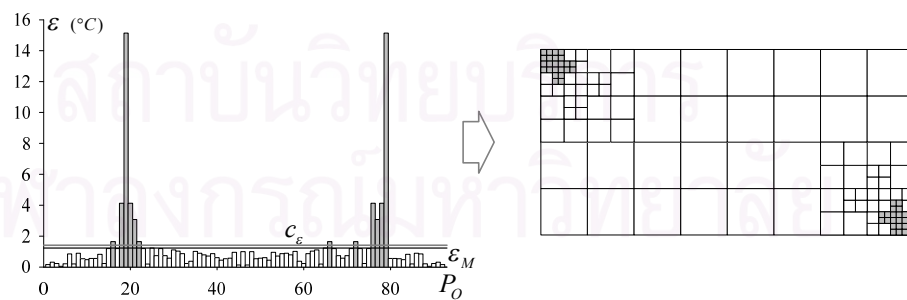
ผลการคำนวณปริมาณควบคุมที่ต้องทำการปรับขนาด ของการปรับขนาดครั้งที่ 1 2 3 และ 4 แสดงดังรูป 6.28 (ก) (ข) (ค) และ (ง) ตามลำดับได้ดังนี้



(ก) ตัวบ่งชี้การปรับขนาดและปริมาณควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 1

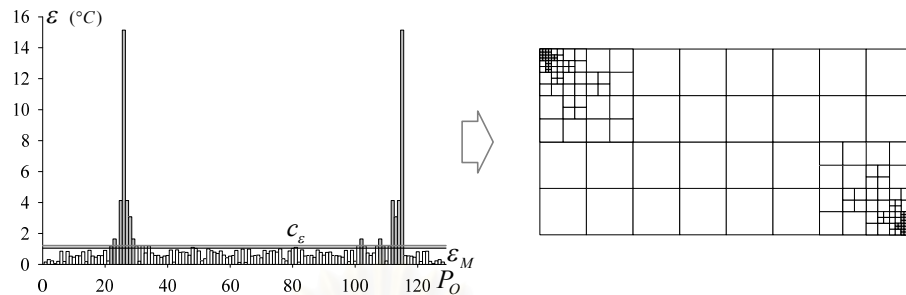


(ข) ตัวบ่งชี้การปรับขนาดและปริมาณควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 2



(ค) ตัวบ่งชี้การปรับขนาดและปริมาณควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 3

รูป 6.28 ผลการทดสอบการปรับขนาดปริมาณควบคุมกรณีศึกษาที่ 1



(ง) ตัวอย่างการปรับขนาดและปริมาณควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 4

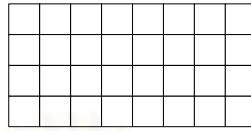
รูป 6.28 ผลการทดสอบการปรับขนาดปริมาณควบคุมกรณีศึกษาที่ 1 (ต่อ)

ค่าบ่งชี้ต่างๆ ที่ได้จากการคำนวณการปรับขนาดปริมาณควบคุมกรณีศึกษาที่ 1 แสดงดังตาราง 6.4

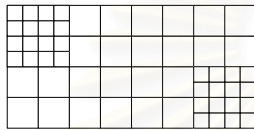
ตาราง 6.4 ค่าบ่งชี้ต่างๆ จากผลการปรับขนาดปริมาณควบคุม กรณีศึกษาที่ 1

ค่าบ่งชี้	การปรับขนาด				
	เริ่มต้น	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4
จำนวนปริมาณควบคุม	32	56	92	128	170
ปริมาณควบคุมที่ปรับขนาด	-	8	12	12	14
บริเวณที่ปรับขนาด %	-	25	9.3750	2.3437	0.6835
ค่า err_{Exact} มากที่สุด (C°)	2.1892	2.1964	2.2003	2.2046	7.5730
ค่า $\bar{\varepsilon}^{Exact}$ (C°)	0.4876	0.2107	0.1079	0.0799	0.0742
ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน SD_{Exact}	0.6961	0.5739	0.4711	0.3896	0.3637
ค่า $\bar{\varepsilon}_p$ มากที่สุด (C°)	15.1242	15.1402	15.1415	15.1416	15.1451
ค่า $\bar{\varepsilon}^P$ (C°)	2.0882	1.6016	1.2200	1.0519	0.9259
ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน SD_{ε_p}	3.6581	2.8314	2.2583	1.9345	1.6948
ค่า NR	0.0208	0.0160	0.0122	0.0105	0.0092
แฟกเตอร์การปรับขนาด	0.85	1	1.15	1.15	-

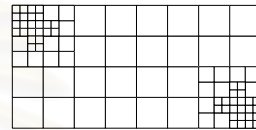
สรุปลักษณะปริมาตรควบคุมที่ได้จากการปรับขนาดและใช้ในการคำนวณแต่ละรอบของการปรับขนาด ทัศนศึกษาที่ 1 นั้น สามารถสรุปได้ดังรูป 6.28



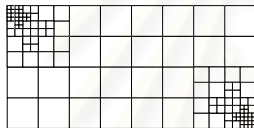
(ก) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น



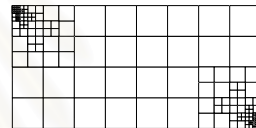
(ข) ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 1



(ค) ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 2



(ง) ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 3



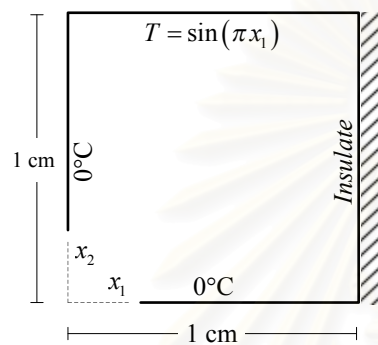
(จ) ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 4

รูป 6.29 ปริมาตรควบคุมที่ได้จากการปรับขนาดปริมาตรควบคุม ทัศนศึกษาที่ 1

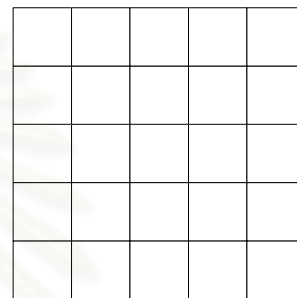
จากผลการปรับขนาดทัศนศึกษาที่ 1 เมื่อทำการปรับขนาดจนครบจำนวน 4 ครั้งแล้ว พบว่าเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ปรับขนาดมีค่าน้อยกว่า 1 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งในกรณีนี้หากกำหนดให้เงื่อนไขการปรับขนาด คือ หยุดทำการปรับขนาดเมื่อพื้นที่ปรับขนาดมีค่าน้อยกว่า 1 เปอร์เซ็นต์ การปรับขนาดจะสิ้นสุดที่รอบที่ 4 และจากการสังเกตค่า NR ซึ่งมีค่า 0.0092 พบว่าความผิดพลาดเทียบกับผลเฉลยแม่นยำมีค่า 0.0742 °C ซึ่งค่าเฉลี่ยนี้อยู่ในระดับที่น่าพอใจ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าหากกำหนดให้หยุดการปรับขนาดเมื่อค่า NR มีค่าน้อยกว่า 0.01 กระบวนการปรับขนาดจะสิ้นสุดที่ 4 รอบ เป็นต้น และจากผลค่าบ่งชี้ต่างๆ ที่ได้ จะเห็นว่าในรอบของการปรับขนาดแต่ละครั้งนั้น ค่าความผิดพลาดเฉลี่ยเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำจะมีค่าลดลง และค่าความผิดพลาดตกค้างเฉลี่ยมีค่าลดลง อีกทั้งส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างๆ มีค่าลดลงด้วย ซึ่งเป็นตัวบ่งชี้ว่าหลังการปรับขนาดปริมาตรควบคุมแล้ว ผลการคำนวณที่ได้นั้นมีความถูกต้องแม่นยำขึ้น

6.4.2 การทดสอบการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 2

ในส่วนนี้จะทำการทดสอบโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม โดยพิจารณาปัญหาการนำความร้อนกรณีศึกษาที่ 2 ในหัวข้อ 6.2.2 มาทำการทดสอบ ลักษณะของปัญหาเป็นดังรูป 6.30 (ก) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้นมีขนาด 5×5 ดังรูป 6.30 (ข)



(ก) ลักษณะของปัญหา



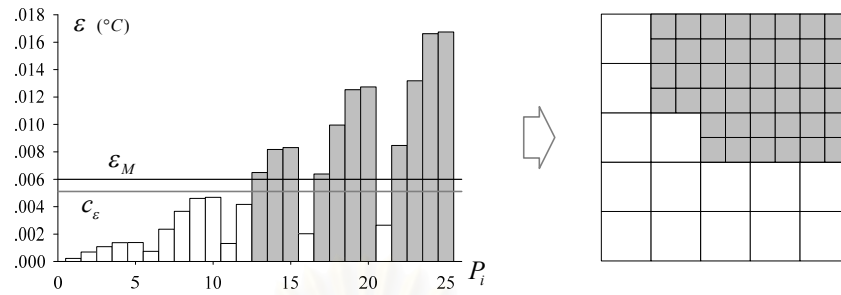
(ข) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้นที่ใช้

รูป 6.30 ลักษณะปัญหาและการกระจายของอุณหภูมิ กรณีศึกษาที่ 2

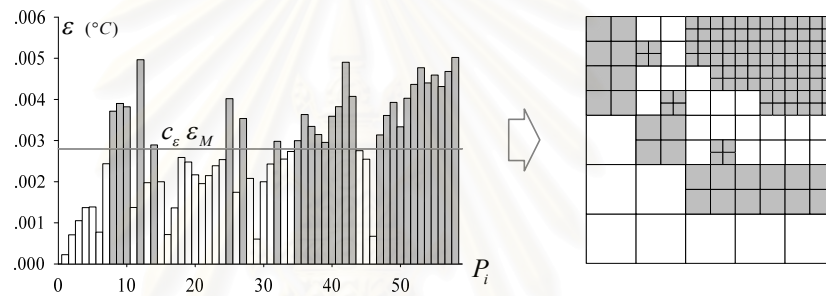
เงื่อนไขสำหรับพิจารณาหยุดการปรับขนาด คือ เมื่อทำการปรับขนาดครบ 4 รอบให้หยุดทำการปรับขนาดเช่นเดียวกับในกรณีศึกษาที่ 1 เนื่องจากต้องการทราบแนวโน้มของ เปอร์เซนต์พื้นที่ที่ปรับขนาด และความผิดพลาดตกค้างเพื่อหยุดการปรับขนาด NR เพื่อหาค่า NR เหมาะสมสำหรับนำไปใช้กับปัญหาที่ไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรงต่อไป

ผลการคำนวณปริมาตรควบคุมที่ต้องทำการปรับขนาด ของการปรับขนาดครั้งที่ 1, 2, 3 และ 4 แสดงดังรูป 6.31 (ก), (ข), (ค) และ (ง) ตามลำดับได้ดังนี้

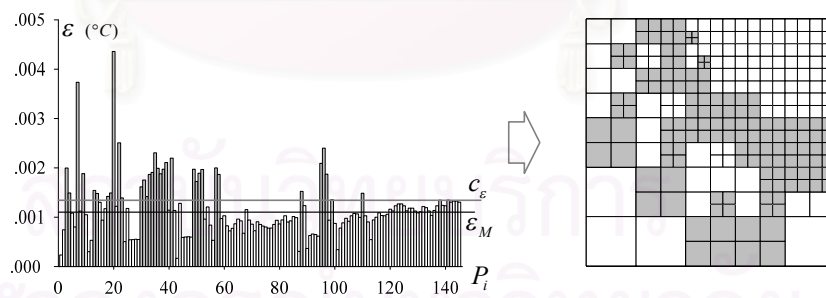
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



(ก) ตัวบ่งชี้การปรับขนาดและปริมาณควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 1

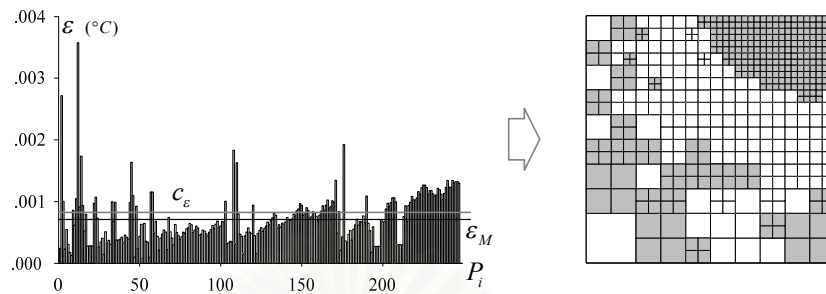


(ข) ตัวบ่งชี้การปรับขนาดและปริมาณควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 2



(ค) ตัวบ่งชี้การปรับขนาดและปริมาณควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 3

รูป 6.31 ผลการทดสอบการปรับขนาดปริมาณควบคุมกรณีศึกษาที่ 2



(ง) ตัวอย่างการปรับขนาดและปริมาณควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 4

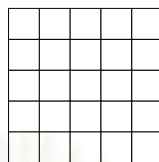
รูป 6.31 ผลการทดสอบการปรับขนาดปริมาณควบคุมกรณีศึกษาที่ 2 (ต่อ)

ค่าบ่งชี้ต่างๆ ที่ได้จากการปรับขนาดปริมาณควบคุมกรณีศึกษาที่ 2 แสดงดังตาราง 6.5

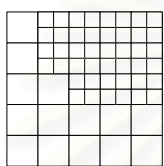
ตาราง 6.5 ค่าบ่งชี้ต่างๆ จากผลการปรับขนาดปริมาณควบคุม กรณีศึกษาที่ 2

ค่าบ่งชี้	การปรับขนาด				
	เริ่มต้น	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4
จำนวนปริมาณควบคุม	25	58	145	247	493
ปริมาณควบคุมที่ปรับขนาด	-	11	29	34	82
บริเวณที่ปรับขนาด %	-	44	47	44.5	46.75
ค่า err_{Exact} มากที่สุด (C°)	0.00916	0.00355	0.00209	0.00189	0.00126
ค่า $\bar{\varepsilon}^{Exact}$ (C°)	0.00249	0.00073	0.00036	0.00028	0.00017
ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน SD_{Exact}	1.03E-4	1.07E-5	3.62E-6	1.96E-6	8.69E-7
ค่า $\bar{\varepsilon}_P$ มากที่สุด (C°)	0.01674	0.00502	0.00435	0.00357	0.00290
ค่า $\bar{\varepsilon}^P$ (C°)	0.00601	0.00283	0.00117	0.00071	0.00037
ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน $SD_{\bar{\varepsilon}_P}$	2.05E-4	4.49E-5	2.10E-5	1.18E-5	5.50E-6
ค่า NR	0.00601	0.00283	0.00117	0.00071	0.00037
แฟกเตอร์การปรับขนาด	1	1	1.15	1.15	-

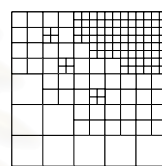
สรุปลักษณะปริมาตรควบคุมที่ได้จากการปรับขนาดและใช้ในการคำนวณแต่ละรอบของการปรับขนาด กรณีศึกษาที่ 2 นั้น สามารถสรุปได้ดังรูป 6.31



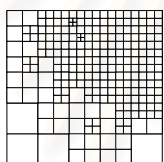
(ก) ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น



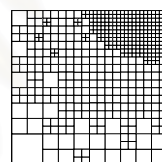
(ข) ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 1



(ค) ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 2



(ง) ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 3



(จ) ปริมาตรควบคุมหลังปรับขนาดครั้งที่ 4

รูป 6.32 ปริมาตรควบคุมที่ได้จากการปรับขนาดปริมาตรควบคุม กรณีศึกษาที่ 2

จากผลการปรับขนาดถึงครั้งที่ 4 พบว่า เนื่องจากลักษณะการกระจายของผลการคำนวณ กรณีศึกษาที่ 2 เป็นแบบสม่ำเสมอ ไม่มีจุดที่ผลการคำนวณมีการเปลี่ยนแปลงอย่างกะทันหันเช่นในกรณีศึกษาที่ 1 ทำให้ในการปรับขนาดแต่ละครั้งนั้น เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ที่ปรับขนาดจึงมีจำนวนมากกว่ากรณีศึกษาที่ 1 ซึ่งลักษณะปัญหาเช่นนี้การกำหนดหยุดการปรับขนาดโดยใช้เงื่อนไขของพื้นที่อาจไม่เหมาะสม ส่วนค่าหยุดการปรับขนาดในรอบที่ 4 มีค่า 0.00037 ซึ่งมีค่าน้อยและค่าความผิดพลาดเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำมีค่าเพียง 0.00017 °C ดังนั้นหากความผิดพลาดที่ยอมรับได้มีค่ามากกว่าค่านี้อาจกำหนดค่า NR ให้มีค่ามากกว่านี้ได้เช่น NR มีค่า 0.005 จะหยุดทำการปรับขนาดในรอบที่ 1 หรือ NR มีค่า 0.001 จะหยุดทำการปรับขนาดในรอบที่ 3 เป็นต้น

จากผลการตรวจสอบคุณภาพของผลการคำนวณหลังการปรับขนาดที่ได้ของทั้ง 2 กรณีศึกษา จะเห็นได้ว่า หลังจากทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมแล้ว ผลที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น อีกทั้งค่า บ่งชี้การปรับขนาด สามารถบ่งชี้บริเวณที่ต้องทำการปรับขนาดได้อย่างเหมาะสม และ โปรแกรม แบ่งย่อยปริมาตรควบคุม สามารถทำงานได้อย่างสอดคล้องกันได้เป็นอย่างดี

6.5 สรุป

จากผลของการทดสอบ ทั้งตัวบ่งชี้การปรับขนาดและโปรแกรมที่ใช้แบ่งย่อยปริมาตรควบคุม จะเห็นได้ว่าให้ผลการคำนวณที่น่าพอใจ แม้ว่าปัญหาที่นำมาพิจารณาจะเป็นการพิจารณาจากตัวแปร เดียว คือ อุณหภูมิ สำหรับปัญหาที่มีมากกว่าหนึ่งตัวแปร เช่น ความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ ที่ต้อง คำนวณค่า อุณหภูมิ และ ระยะกระจัดต่างๆ ยังคงสามารถนำหลักการเดียวกันนี้มาคำนวณเพื่อหาผล เฉลยได้เช่นกัน โดยจะพิจารณาในบทต่อไป

สำหรับเงื่อนไขที่นำมาพิจารณาเพื่อหยุดการปรับขนาดนั้น อาจพิจารณาได้จาก บริเวณที่ปรับ ขนาด เช่น กรณีศึกษาที่ 1 จากผลเฉลยแม่นยำตรงจะมีบริเวณที่ผลเฉลยเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันที่มุม ของแผ่นโลหะ ดังแสดงในผลเฉลย ปัญหาลักษณะนี้ สามารถพิจารณาเปอร์เซ็นต์ของพื้นที่ปรับขนาด เป็นเงื่อนไขหยุดการปรับขนาดได้ ส่วนในปัญหาทดสอบที่ 2 นั้น ลักษณะของปัญหานี้อาจพิจารณา หยุดปรับขนาดเนื่องจากค่า บ่งชี้การปรับขนาด หรืออาจนำทั้งสองเงื่อนไขที่ได้กล่าวมานี้มาพิจารณา เป็นเงื่อนไขปรับขนาดร่วมกันได้

ในส่วนต่อไปจะเป็นการนำโปรแกรมบ่งชี้การปรับขนาดและการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมนี้ มาใช้คำนวณเพื่อหาค่าความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ โดยจะนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณ ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีความน่าเชื่อถือ ต่อไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 7

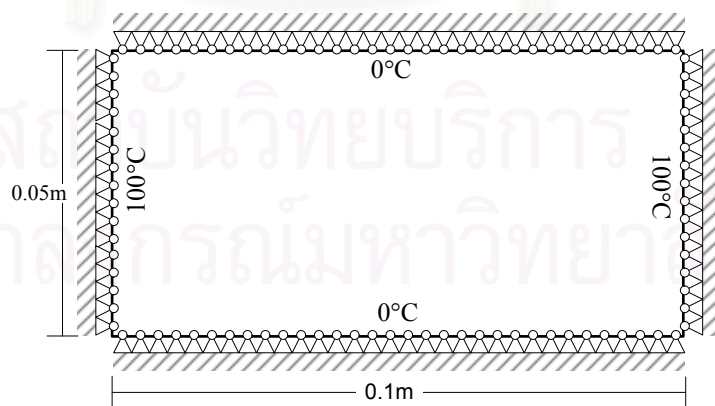
ความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

7.1 บทนำ

จากเงื่อนไขที่ใช้พิจารณาปรับขนาดปริมาตรควบคุมและการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมสำหรับปัญหาการนำความร้อนดังที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น ได้นำโปรแกรมที่พัฒนามาแก้ปัญหาคความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ โดยเงื่อนไขที่นำมาพิจารณาในการปรับขนาดจะมีลักษณะมากกว่า 1 ตัวแปร และเมื่อนำผลการบ่งชี้การปรับขนาดที่ได้มาแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมใหม่ แล้วทำการคำนวณผลในลักษณะการวนซ้ำ โดยผลที่ได้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับ โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีความน่าเชื่อถือ เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง ดังมีรายละเอียดดังนี้

7.2 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิที่นำมาพิจารณา มีลักษณะเป็นการนำความร้อนบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยมีการกำหนดอุณหภูมิของและลักษณะเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ดังรูป 7.1



รูป 7.1 ลักษณะปัญหาและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

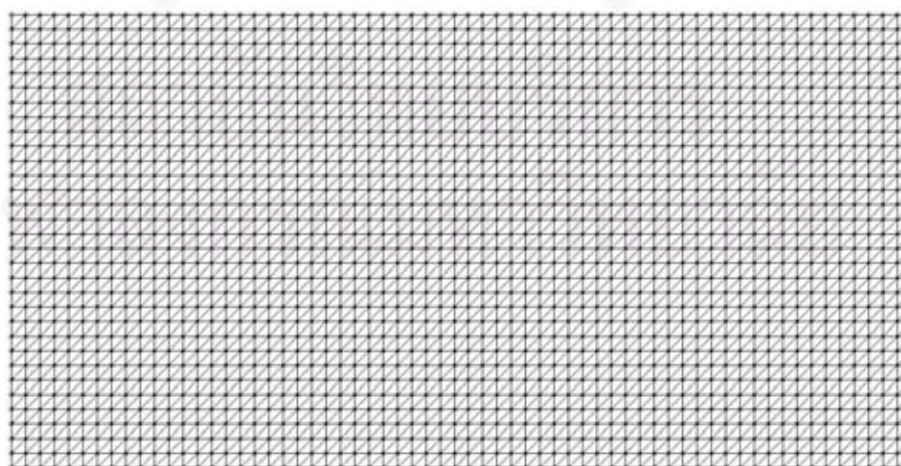
ขอบของโดเมนทั้ง 4 ด้านถูกยึดแน่นไม่ให้เกิดการเคลื่อนที่ กำหนดคุณสมบัติของโลหะประกอบด้วย $E = 1.0 \text{ GPa}$, $\nu = 0.25$ และสัมประสิทธิ์ขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ $\alpha = 1.0 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

ในการหาผลเฉลยกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิที่นำมาพิจารณานี้ ผลของการคำนวณที่ได้จะอยู่ในรูปของการกระจายของอุณหภูมิ (T) ระยะกระจัดในแนวนอน (U) และระยะกระจัดในแนวตั้ง (V)

7.3 โปรแกรม Easy FEM

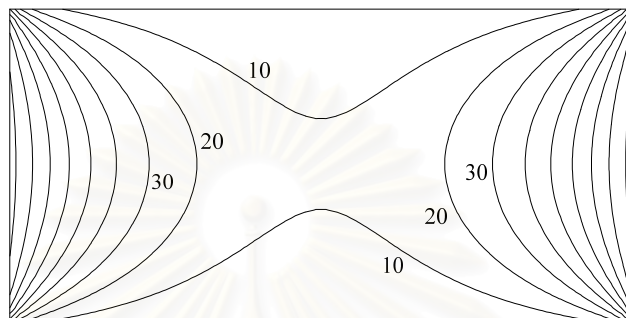
ก่อนนำโปรแกรมไปทำการปรับขนาดและหาผลเฉลยกรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมินั้น ได้นำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับโปรแกรม Easy FEM รุ่น 1.0.135 ซึ่งเป็นโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาใน 2 มิติ ที่ถูกพัฒนาขึ้นโดย ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เฉชะอำไพ และ นายสุทธิศักดิ์ พงษ์ธนาพานิช ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ซึ่งเป็นโปรแกรมที่มีความถูกต้องแม่นยำสูง ทั้งยังสามารถนำมาแก้ไขปัญหาทางวิศวกรรมได้อย่างหลากหลาย การใช้งานโปรแกรมสามารถใช้งานง่ายและมีการแสดงผลการคำนวณได้อย่างชัดเจน

ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม ได้ทำการคำนวณภาระที่เกิดขึ้นบนแผ่นโลหะโดยใช้โปรแกรม Easy FEM เพื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้กับโปรแกรมที่ได้พัฒนาขึ้น ก่อนนำไปคำนวณและทำการปรับขนาดต่อไป โดยได้แบ่งย่อยโดเมนของปัญหาเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังรูป 7.2

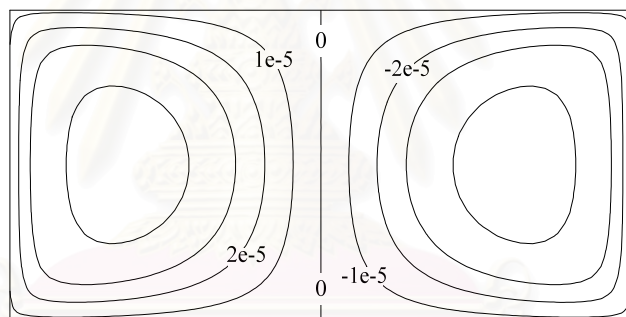


รูป 7.2 ลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์โดเมนของปัญหาสำหรับหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม Easy FEM

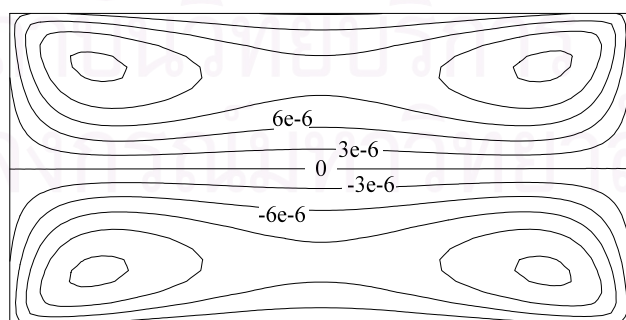
ปริมาตรควบคุมที่ใช้มีลักษณะเป็นเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีขนาดเท่ากันสม่ำเสมอ จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้มีจำนวน 3906 เอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อ 2048 จุด ผลการคำนวณอุณหภูมิ ระยะกระจัดแนวนอน และระยะกระจัดแนวตั้ง ได้ผลดังรูป 7.3 รูป 7.4 และ รูป 7.5 ตามลำดับ



รูป 7.3 ผลการกระจายอุณหภูมิ ($^{\circ}\text{C}$) จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



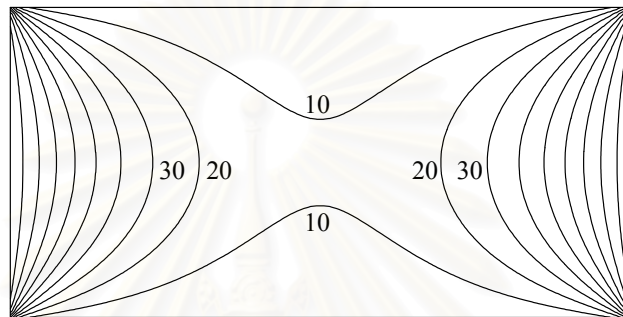
รูป 7.4 ผลการกระจายระยะกระจัดแนวนอน (U, m) จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



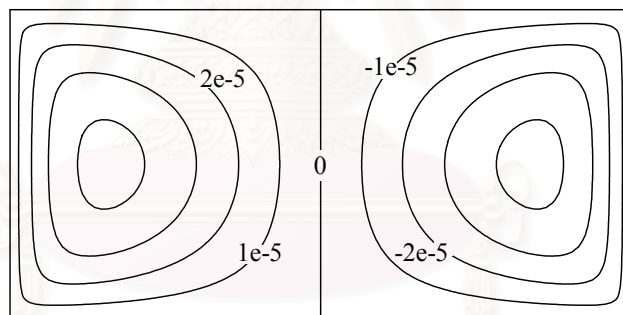
รูป 7.5 ผลการกระจายระยะกระจัดแนวตั้ง (V, m) จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

7.4 โปรแกรมไฟในท่อลม

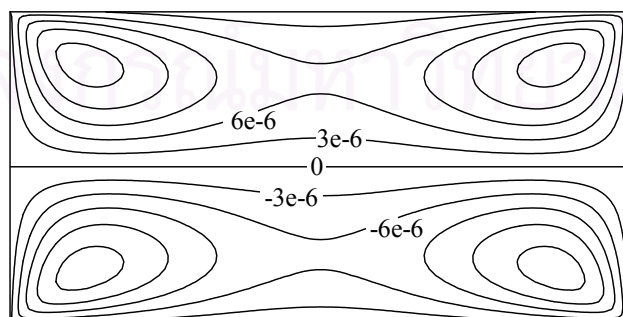
เมื่อพิจารณาปัญหา รูป 7.1 ด้วยโปรแกรมไฟในท่อลมที่พัฒนาขึ้น โดยแบ่งปริมาตรควบคุม เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนาด 45×90 ปริมาตรควบคุม (4050 ปริมาตรควบคุม) ผลการคำนวณค่าอุณหภูมิ ระยะกระจัดแนวนอน และระยะกระจัดแนวตั้ง แสดงผลดังรูป 7.6 รูป 7.7 และรูป 7.8 ตามลำดับ



รูป 7.6 ผลการกระจายอุณหภูมิ ($^{\circ}\text{C}$) จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟในท่อลม



รูป 7.7 ผลการกระจายระยะกระจัดแนวนอน (U, m) จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟในท่อลม



รูป 7.8 ผลการกระจายระยะกระจัดแนวตั้ง (V, m) จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟในท่อลม

จากผลการคำนวณด้วยโปรแกรมทั้งสอง จะเห็นได้ว่าการที่กระจายบนแผ่นโลหะมีขนาดและลักษณะการกระจายตัวในลักษณะเดียวกัน ซึ่งสามารถยืนยันได้ว่าโปรแกรมไฟไนต์วอลุ่มที่สร้างขึ้นมา มีความถูกต้องในระดับที่น่าพอใจ

ในส่วนต่อไปจะเป็นการนำโปรแกรมคำนวณตัวบ่งชี้การปรับขนาด และโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมมาใช้ในการคำนวณ โดยจะนำผลการคำนวณของบริเวณที่ปรับขนาดมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอที่มีขนาดเล็ก การเลือกปริมาตรควบคุมขนาดเล็กที่นำมาเปรียบเทียบนั้น พิจารณาโดยเลือกจำนวนปริมาตรควบคุมที่ทำให้ได้กลุ่มของจุดต่อที่มีพิสัยเดียวกัน ซึ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบและอ้างอิงค่าความเปลี่ยนแปลงหลังการปรับขนาดปริมาตรควบคุมได้

7.5 การปรับขนาดปริมาตรสำหรับปัญหาเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

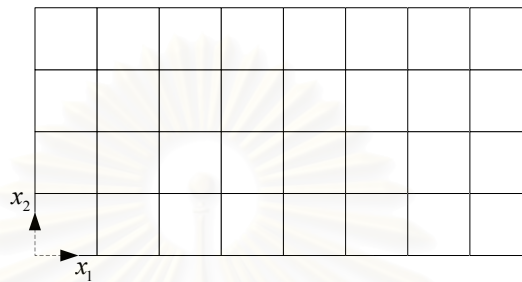
การคำนวณค่าความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ ในโครงการวิจัยนี้ได้เลือกทำการคำนวณในลักษณะของการเสีรูปที่เกิดขึ้น โดยคำนวณมาจากสมการการเสีรูปแบบน้อยในรูปของการอนุรักษ์โมเมนตัมที่แสดงใน หัวข้อ 4.6 ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

การปรับขนาดปริมาตรควบคุม จะพิจารณาโดยใช้ตัวบ่งชี้การปรับขนาด โดยคำนวณจากค่าความคลาดเคลื่อนตักข้างของ อุณหภูมิ (T) ระยะกระจัดแนวอน (U) และระยะกระจัดแนวตั้ง (V) โดยแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมเริ่มต้นออกเป็น 4×8 ปริมาตรควบคุม และทำการแบ่งปริมาตรควบคุมจนถึงเงื่อนไขหยุดการปรับขนาดตามที่กำหนด

โดยจากผลการทดสอบโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมในปัญหาการนำความร้อนกรณีศึกษาที่ 1 และ 2 ที่ผ่านมา พบว่าในกรณีศึกษาที่ 1 ค่า NR_T ของการปรับขนาดรอบที่ 4 มีค่า 0.0092 ซึ่งมีความผิดพลาดกับผลเฉลยแม่นยำเฉลี่ย 0.0742 °C ส่วนกรณีศึกษาที่ 2 ค่า NR_T ของการปรับขนาดรอบที่ 2 มีค่า 0.0025 มีความผิดพลาดกับผลเฉลยแม่นยำเฉลี่ย 0.00073 °C จากผลที่ได้จึงพิจารณาให้หยุดทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมเมื่อ 2 ใน 3 ของค่า NR_T , NR_U และ NR_V มีค่าน้อยกว่า 0.005 ซึ่งผลการคำนวณที่ได้เป็นดังนี้

7.5.1 การคำนวณปริมาตรควบคุมเริ่มต้น

เมื่อเริ่มต้นการคำนวณได้กำหนดให้ปริมาตรควบคุมเริ่มต้นถูกแบ่งอย่างสม่ำเสมอ มีขนาดเป็น 4×8 ปริมาตรควบคุม มีลักษณะดังรูป 7.9



รูป 7.9 ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

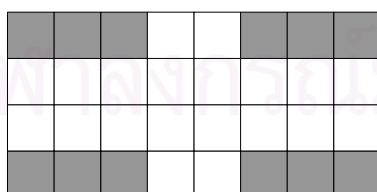
ผลการปรับขนาดเนื่องจากอุณหภูมิ ระยะเวลาจัด U และระยะเวลาจัด V ที่ได้แสดงดังรูป 7.10 (ก), (ข) และ (ค) ตามลำดับ ส่วนปริมาตรควบคุมที่ต้องทำการปรับขนาดจริงเป็นปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากรวมทุกเงื่อนไข แสดงดังรูป 7.10 (ง) แสดงรูปตามลำดับได้ดังนี้



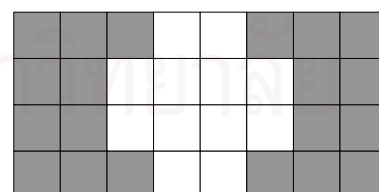
(ก) อุณหภูมิ



(ข) ระยะเวลาจัดแนวนอน



(ค) ระยะเวลาจัดแนวตั้ง



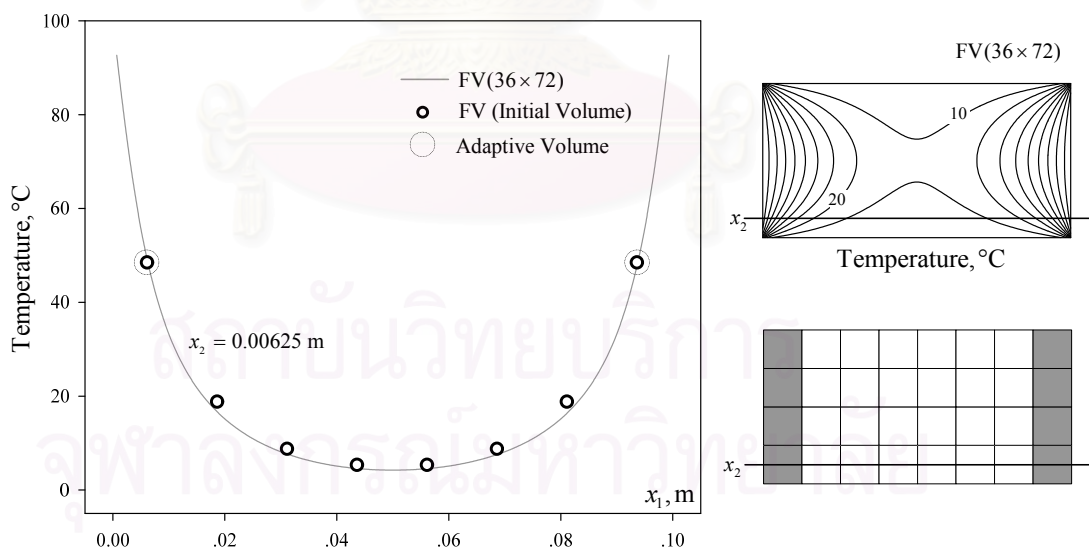
(ง) รวมทุกเงื่อนไข

รูป 7.10 บริเวณปรับขนาดจากปริมาตรควบคุมเริ่มต้น กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

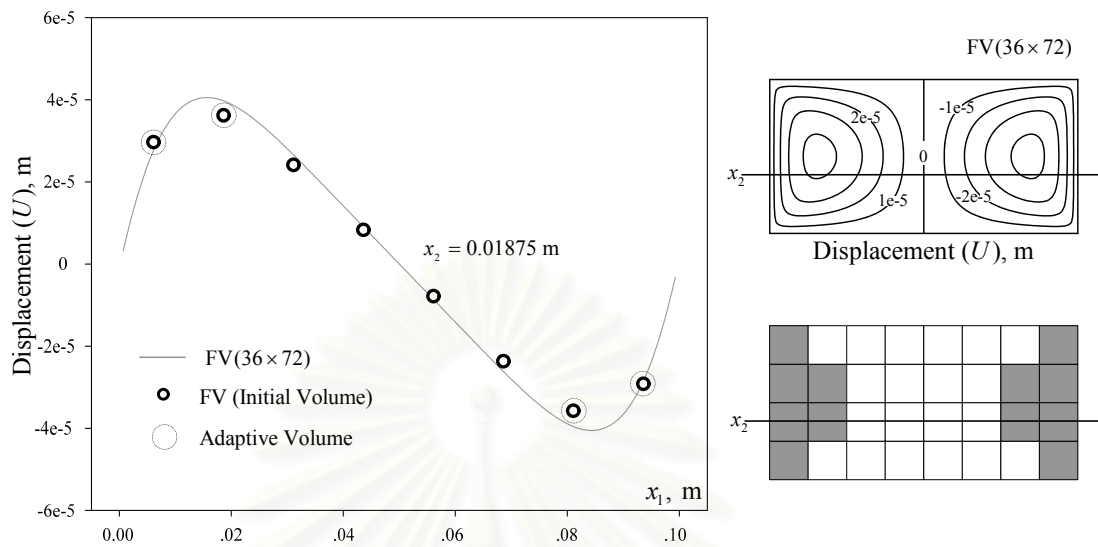
หลังทำการคำนวณ จะนำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณ ซึ่งในการคำนวณเพื่อหาปริมาตรควบคุมที่ทำให้คำตอบที่ได้ไม่ขึ้นกับขนาดของปริมาตรควบคุมนั้น พบว่าเมื่อแบ่งย่อยโดเมนออกเป็นปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอจำนวน 25×50 ผลการคำนวณที่ได้จะมีลักษณะไม่เป็นแปลงเมื่อเพิ่มขนาดปริมาตรควบคุมให้มากกว่าจำนวนนี้

ดังนั้นในการเปรียบเทียบผลจึงได้นำผลการคำนวณที่ทำการปรับขนาดมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณเมื่อคำตอบไม่ขึ้นกับขนาดปริมาตรควบคุม สำหรับการเปรียบเทียบผลกรณีการคำนวณปริมาตรควบคุมเริ่มต้น ได้เลือกใช้ปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอขนาด 36×72 ปริมาตรควบคุมเนื่องจากปริมาตรควบคุมนี้จะมีช่วงพิคคของตำแหน่งบางช่วงที่เป็นจุดเดียวกันกับปริมาตรควบคุมเริ่มต้น ซึ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ตำแหน่งเดียวกัน แต่จำนวนปริมาตรควบคุมที่ใช้แตกต่างกันได้

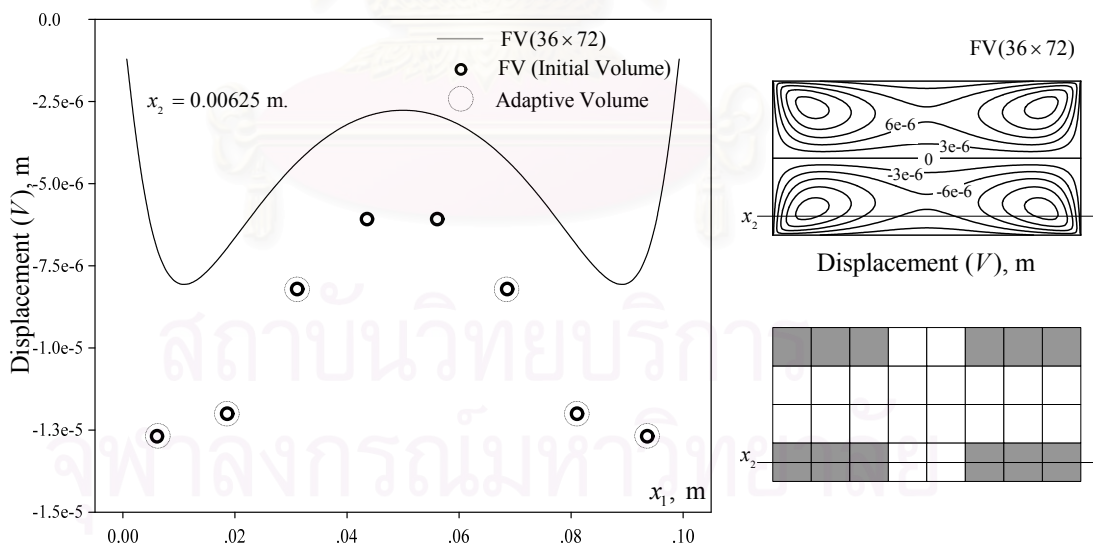
การแสดงผลการคำนวณที่ได้ทั้ง อุณหภูมิ ระยะกระจัดแนวนอน และระยะกระจัดแนวตั้ง โดยได้เลือกช่วงที่มีการกำหนดให้ปรับขนาดมาแสดงผล ซึ่งผลของการคำนวณอุณหภูมิแสดงดังรูป 7.11 ผลการคำนวณระยะกระจัดแนวตั้งแสดงดังรูป 7.12 และระยะกระจัดแนวนอนดังรูป 7.13 ตามลำดับ



รูป 7.11 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากอุณหภูมิ ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ



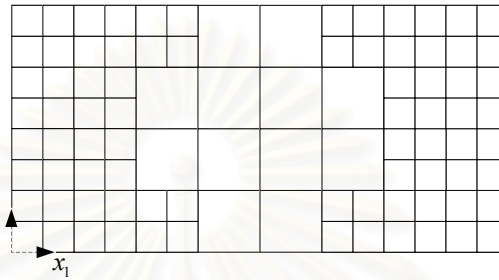
รูป 7.12 การเปรียบเทียบค่า U และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด U
 ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ



รูป 7.13 การเปรียบเทียบค่า V และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด V
 ปริมาตรควบคุมเริ่มต้น กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

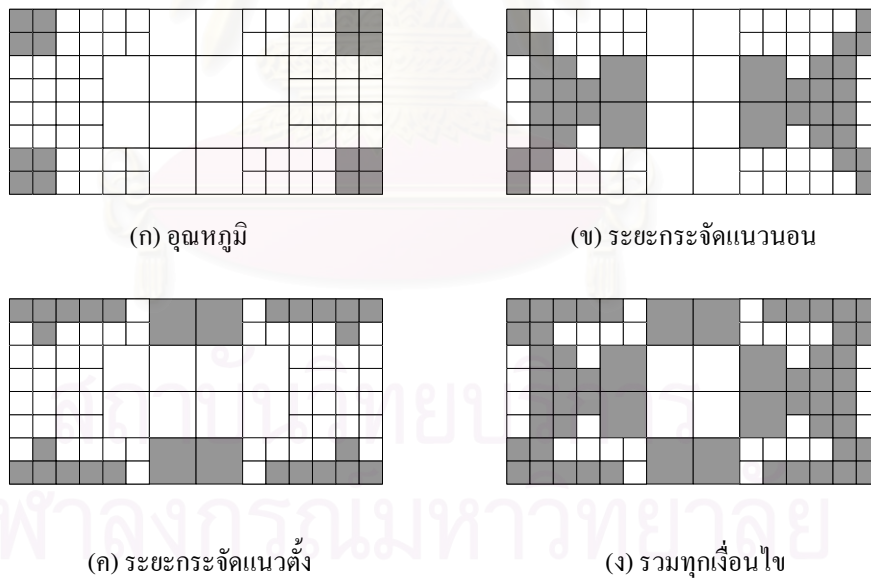
7.5.2 การคำนวณหลังปรับขนาดครั้งที่ 1

หลังทำการคำนวณค่า T , U , V และทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมครั้งที่ 1 แล้วจะได้ ปริมาตรควบคุมใหม่ที่ใช้ในการคำนวณครั้งต่อไป มีลักษณะดังรูป 7.14



รูป 7.14 ปริมาตรควบคุมหลังทำการปรับขนาดครั้งที่ 1 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

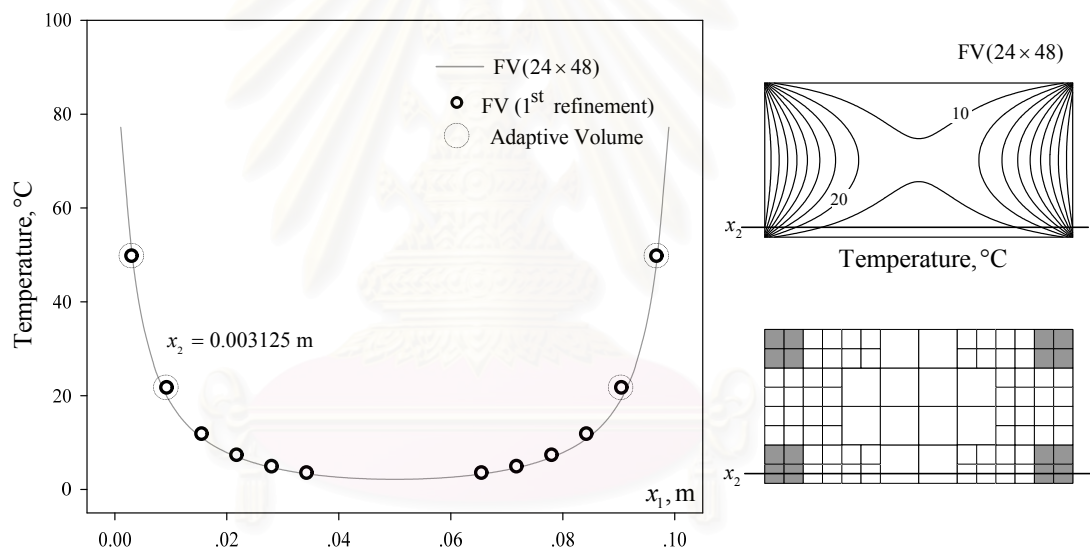
ผลการคำนวณบริเวณที่ปรับขนาดโดยเงื่อนไขต่างๆ เป็นดังรูป 7.15



รูป 7.15 บริเวณปรับขนาดจากปริมาตรควบคุมหลังทำการปรับขนาดครั้งที่ 1 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

ผลการคำนวณที่ได้เมื่อทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม 1 ครั้ง จะนำไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณโดยใช้ปริมาตรควบคุมสม่ำเสมอขนาด 24×48 ปริมาตรควบคุม เนื่องจากปริมาตรควบคุมนี้จะมีช่วงพิคคของตำแหน่งบางช่วงที่เป็นจุดเดียวกันกับปริมาตรควบคุมเริ่มต้นและมีลักษณะคำตอบที่ไม่ขึ้นกับขนาดปริมาตรควบคุม ซึ่งสามารถนำมาเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ตำแหน่งเดียวกัน แต่จำนวนปริมาตรควบคุมที่ใช้แตกต่างกันได้

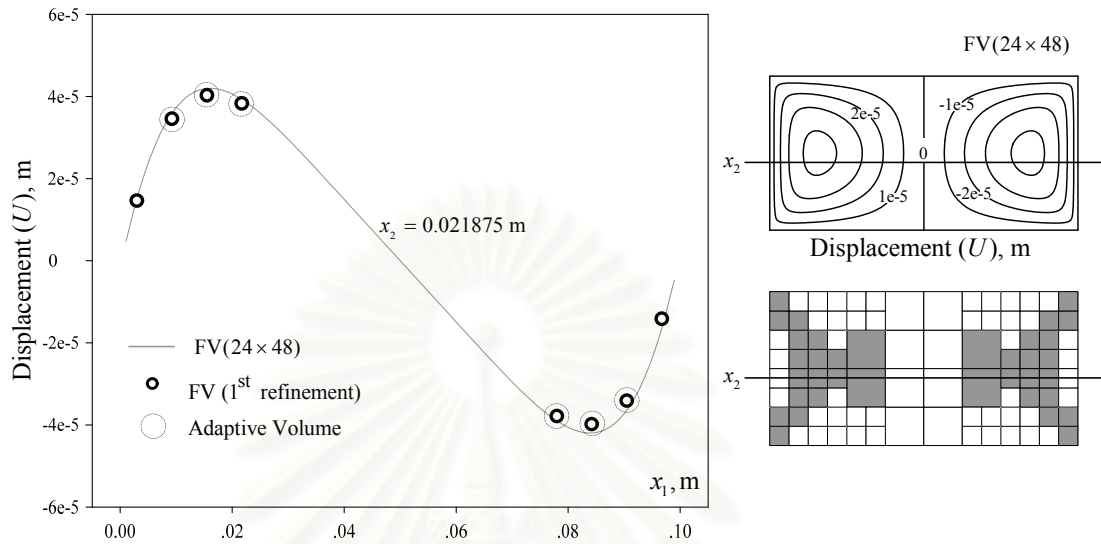
การแสดงผลการคำนวณที่ได้ทั้ง อุณหภูมิ ระยะเวลาจัดแนวอน และระยะเวลาจัดแนวตั้ง โดยได้เลือกแสดงช่วงที่มีการกำหนดให้ปรับขนาด ผลการคำนวณของอุณหภูมิแสดงดังรูป 7.16 ผลการคำนวณระยะเวลาจัดแนวตั้งแสดงดังรูป 7.17 และระยะเวลาจัดแนวอนดังรูป 7.18 ตามลำดับดังนี้



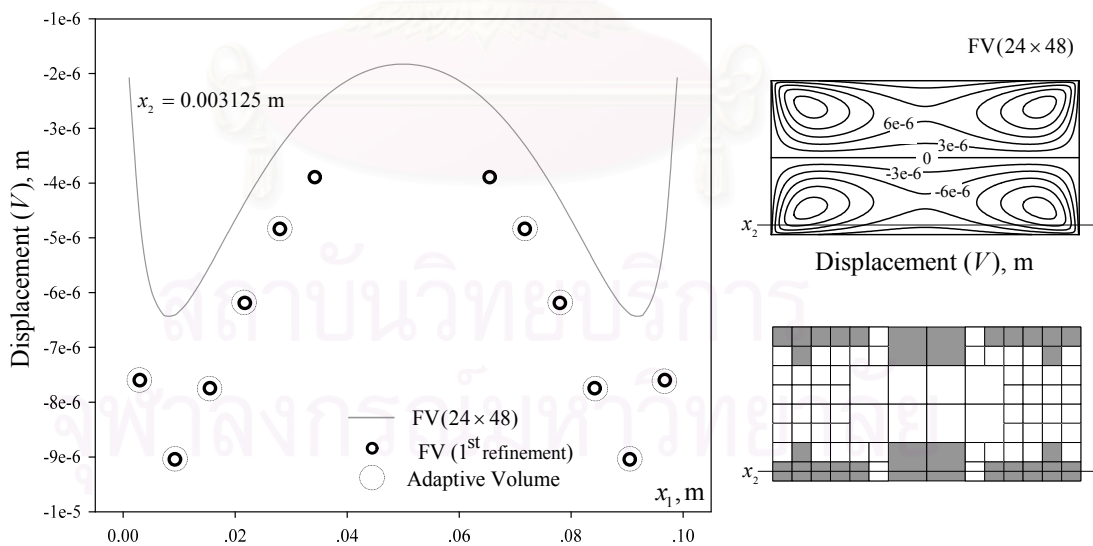
7.16 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากอุณหภูมิ

หลังปรับขนาดครั้งที่ 1 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



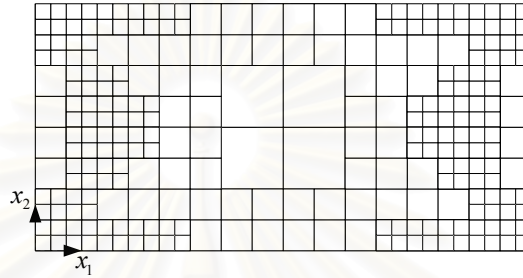
รูป 7.17 การเปรียบเทียบค่า U และปริมาตรควมคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด U หลังปรับขนาดครั้งที่ 1 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ



รูป 7.18 การเปรียบเทียบค่า V และปริมาตรควมคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด V หลังปรับขนาดครั้งที่ 1 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

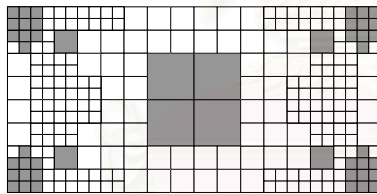
7.5.3 การคำนวณหลังปรับขนาดครั้งที่ 2

หลังทำการคำนวณค่า T , U และ V จากปริมาตรควบคุมที่ทำการปรับขนาด 1 ครั้ง แล้วทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมอีก เป็นครั้งที่ 2 แล้ว จะได้ปริมาตรควบคุมใหม่ที่ใช้ในการคำนวณครั้งต่อไป มีลักษณะดังรูป 7.19

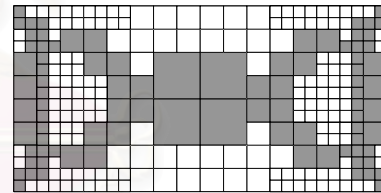


รูป 7.19 ปริมาตรควบคุมหลังทำการปรับขนาดครั้งที่ 2 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

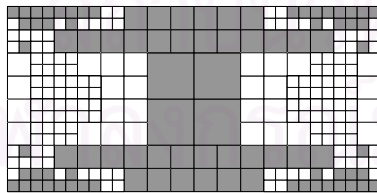
ผลการคำนวณบริเวณที่ต้องทำการปรับขนาดโดยเงื่อนไขต่างๆ เป็นดังรูป 7.20



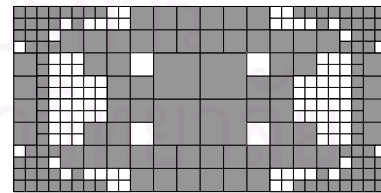
(ก) อุณหภูมิ



(ข) ระยะเวลาจัดแนวอน



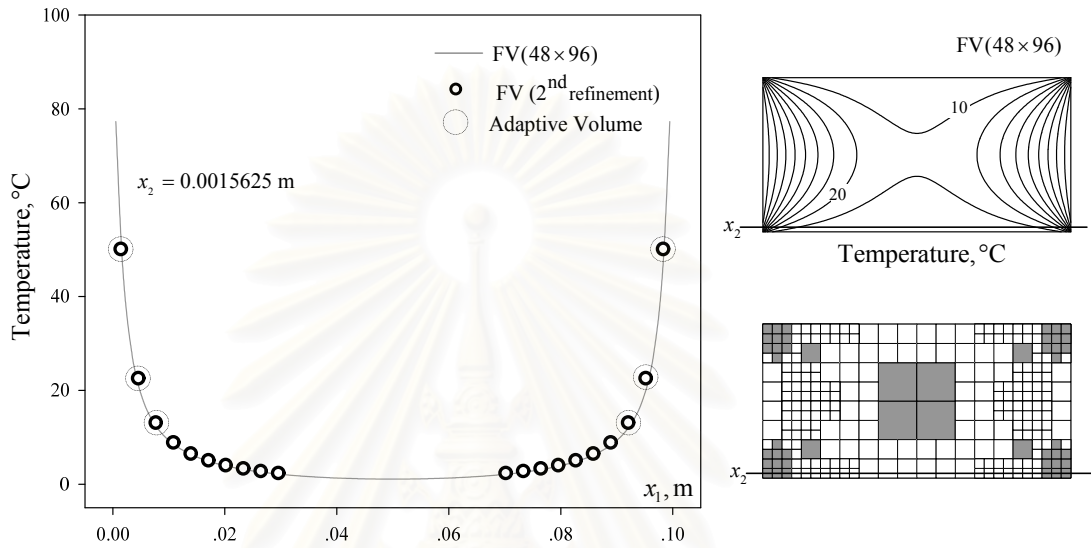
(ค) ระยะเวลาจัดแนวตั้ง



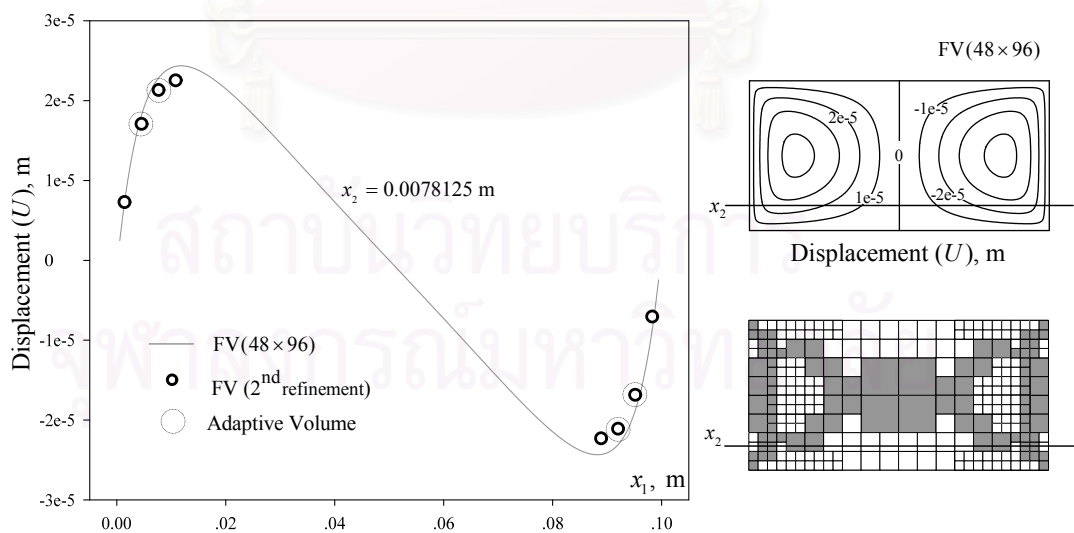
(ง) รวมทุกเงื่อนไข

รูป 7.20 บริเวณปรับขนาดจากปริมาตรควบคุม
หลังทำการปรับขนาดครั้งที่ 2 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

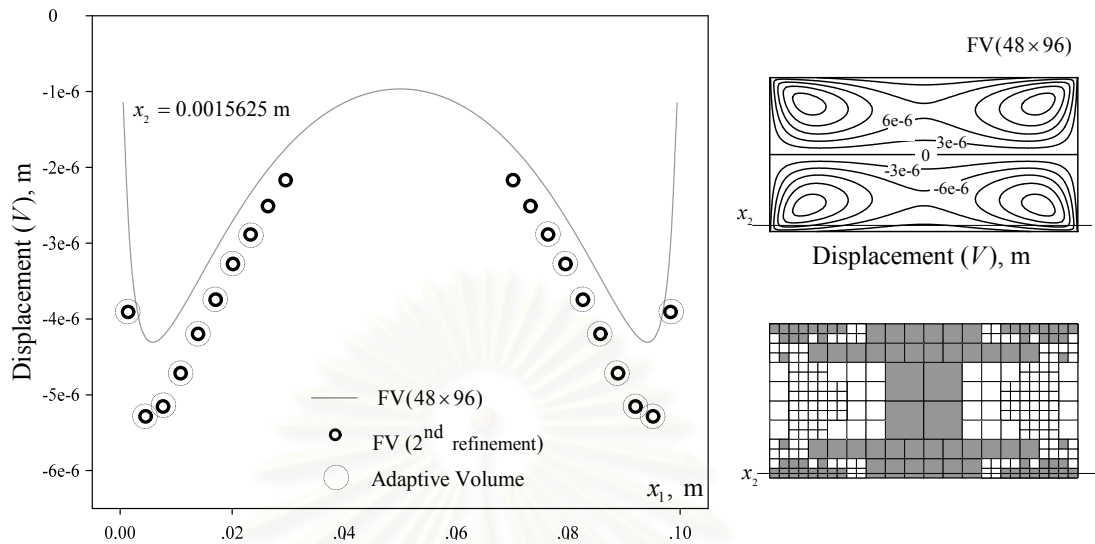
เมื่อนำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยปริมาตรควบคุม 48×96 ผลที่ได้เป็นดังรูป 7.21 ผลการคำนวณระยะกระจัดแนวตั้งแสดงดังรูป 7.22 และระยะกระจัดแนวนอนดังรูป 7.23



7.21 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากอุณหภูมิ หลังปรับขนาดครั้งที่ 2 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ



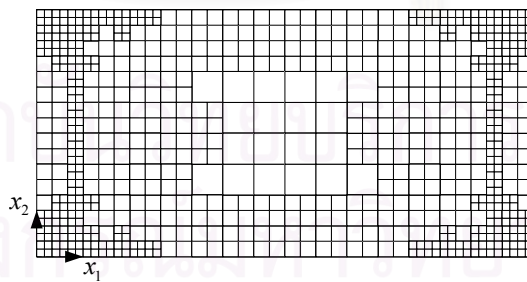
รูป 7.22 การเปรียบเทียบค่า U และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด U หลังปรับขนาดครั้งที่ 2 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ



รูป 7.23 การเปรียบเทียบค่า V และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด V หลังปรับขนาดครั้งที่ 2 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

7.5.4 ผลการคำนวณครั้งสุดท้าย

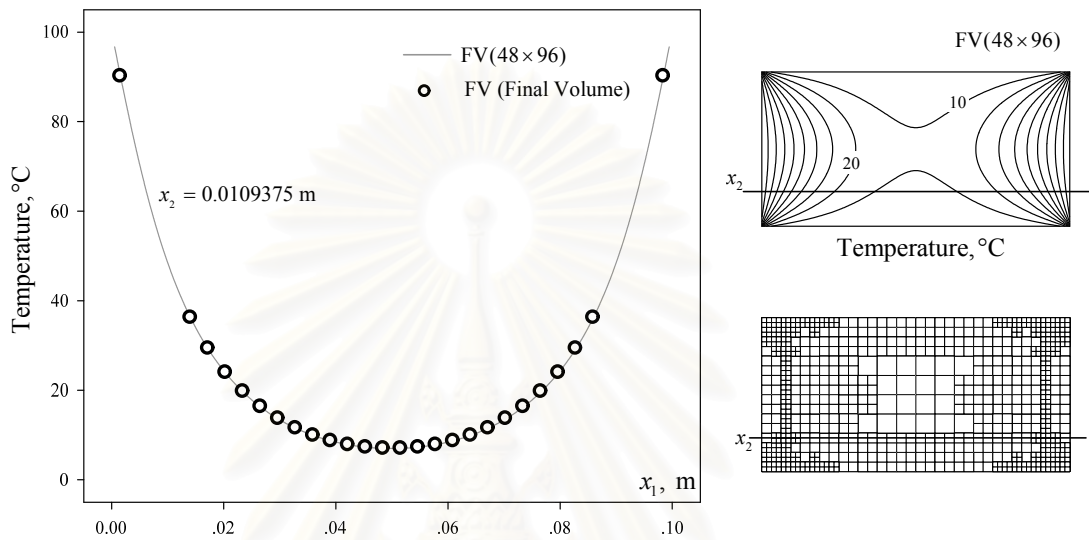
หลังทำการคำนวณค่า T , U และ V จากปริมาตรควบคุมที่ทำการปรับขนาด 2 ครั้ง แล้วทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมอีกเป็นครั้งที่ 3 จะได้ปริมาตรควบคุมที่ใช้ในการคำนวณ ที่มีลักษณะดังรูป 7.24



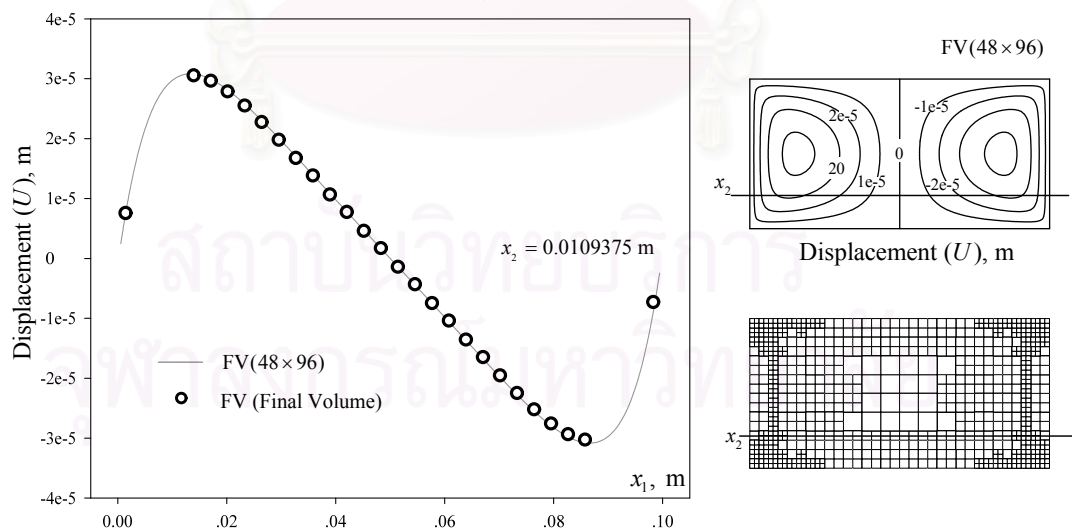
รูป 7.24 ปริมาตรควบคุมหลังทำการปรับขนาดครั้งที่ 3 กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

หลังทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมครั้งที่ 3 ผลจากการคำนวณตัวบ่งชี้ต่างๆ ดังแสดงในตาราง 7.1 ซึ่งเงื่อนไขค่า NR ของตัวแปร 2 ใน 3 มีค่าน้อยกว่า 0.005 ตรงกับเงื่อนไขในหยุดการปรับขนาด จึงถือว่าผลการคำนวณที่ได้จากปริมาตรควบคุมนี้ เป็นการปรับขนาดครั้งสุดท้ายของการคำนวณ

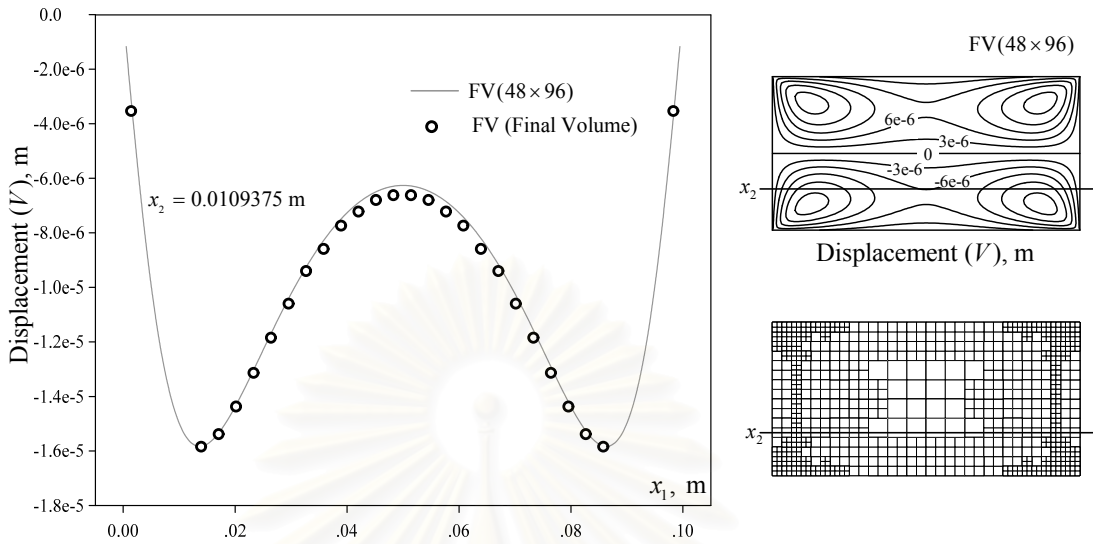
เมื่อนำผลการคำนวณที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณด้วยปริมาตรควบคุม
 สม่ำเสมอขนาด 48×96 ปริมาตรควบคุม โดยได้แสดงผลการเปรียบเทียบบริเวณความสูงขอบล่าง
 ($x_2 = 0.0109375$ m) และบริเวณความสูงช่วงกลาง ($x_2 = 0.032185$ m) ของโดเมน ได้ผลดังนี้



7.25 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากอุณหภูมิ
 หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงล่างของโดเมน กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

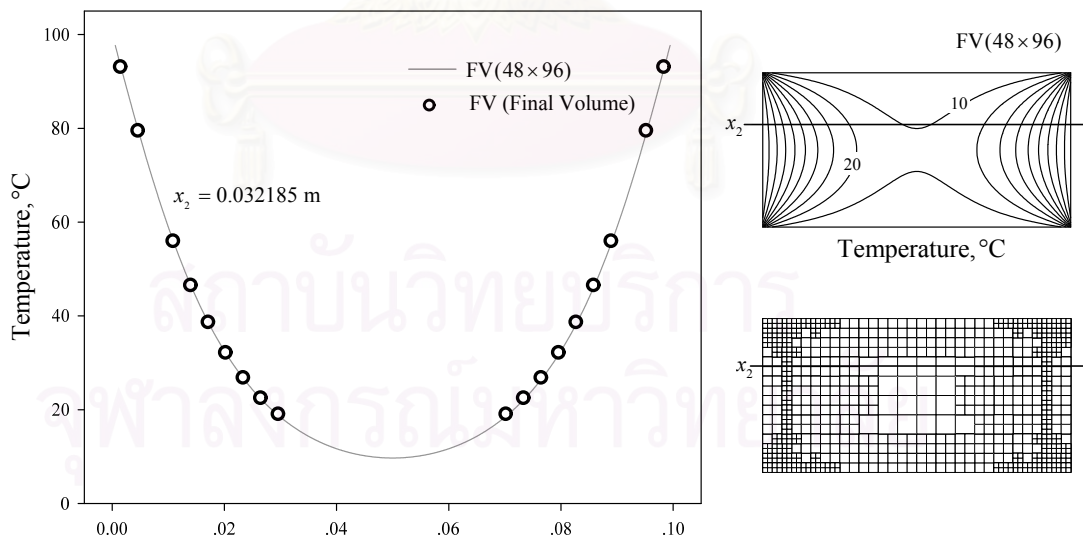


รูป 7.26 การเปรียบเทียบค่า U และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากกระแจะกระจัด U
 หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงล่างของโดเมน กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

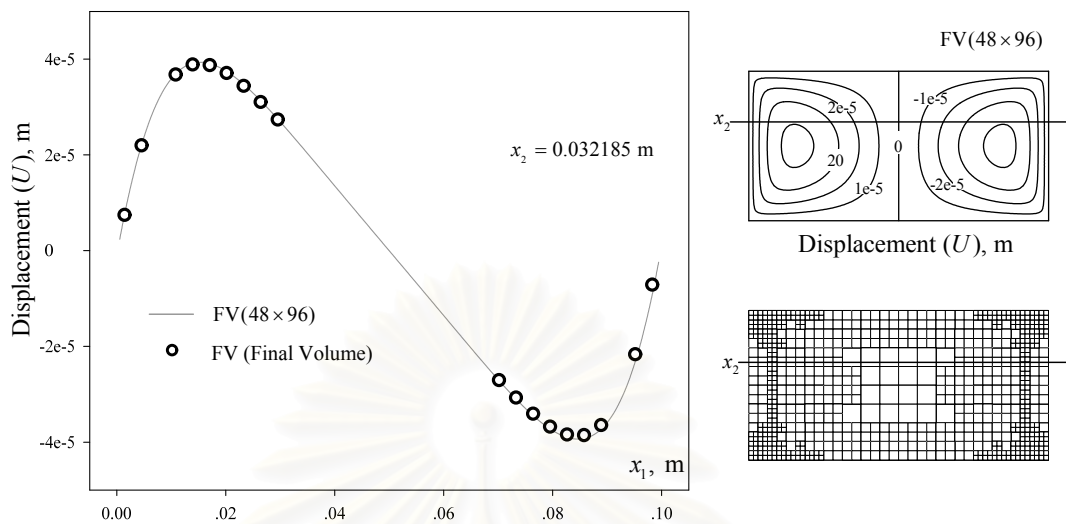


รูป 7.27 การเปรียบเทียบค่า V และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด V หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงล่างของโดเมน กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

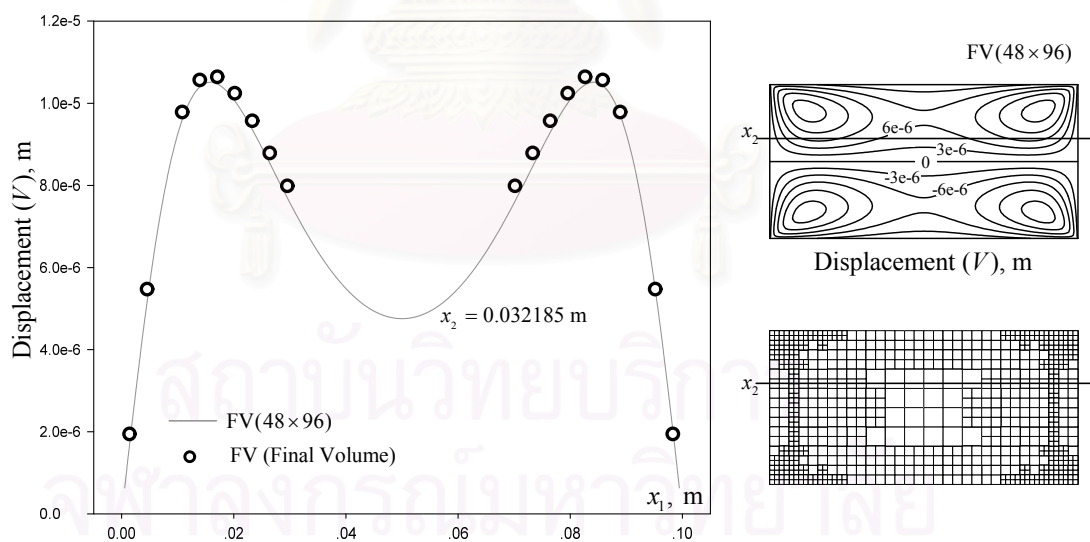
อีกช่วงของผลการคำนวณที่นำมาแสดงคือ บริเวณช่วงกลางของโดเมน ($x_2 = 0.032185$ m) ผลการคำนวณที่ได้เป็นดังนี้



7.28 การเปรียบเทียบค่าอุณหภูมิและปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากอุณหภูมิ หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงกลางของโดเมน กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ



รูป 7.29 การเปรียบเทียบค่า U และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด U หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงกลางของโดเมน กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ



รูป 7.30 การเปรียบเทียบค่า V และปริมาตรควบคุมที่ปรับขนาดเนื่องจากระยะกระจัด V หลังปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณช่วงกลางของโดเมน กรณีศึกษาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ

เมื่อนำจำนวนปริมาตรควบคุมและค่าบ่งชี้ต่างๆ ที่ได้จากระบวนการปรับขนาดปริมาตรควบคุม ในแต่ละรอบของการคำนวณ สามารถได้ดังแสดงตาราง 7.1

ตาราง 7.1 ค่าบ่งชี้ที่ได้จากระบวนการปรับขนาดปริมาตรควบคุม

ค่าบ่งชี้	การปรับขนาด			
	เริ่มต้น	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3
จำนวนปริมาตรควบคุม	32	92	260	728
ปริมาตรควบคุมปรับที่ขนาด	-	20	56	156
ตัวบ่งชี้ปรับขนาด $\overline{\varepsilon}_T$, (C°)	4.51553	2.03940	0.88777	0.37980
ตัวบ่งชี้ปรับขนาด $\overline{\varepsilon}_U$, (m.)	3.1326e-06	1.2873e-06	4.8227e-07	1.8019e-07
ตัวบ่งชี้ปรับขนาด $\overline{\varepsilon}_V$, (m.)	4.2346e-06	1.5549e-06	6.1755e-07	2.2036e-07
ค่าหยุดการปรับขนาด NR_T	0.04515	0.02039	0.00888	0.00380
ค่าหยุดการปรับขนาด NR_U	0.04355	0.01607	0.00594	0.00213
ค่าหยุดการปรับขนาด NR_V	0.083227	0.04139	0.01700	0.00654
พื้นที่ปรับขนาดจาก T , (%)	-	25	12.5	23.43
พื้นที่ปรับขนาดจาก U , (%)	-	37.50	37.50	47.65
พื้นที่ปรับขนาดจาก V , (%)	-	37.50	31.50	50.78
พื้นที่ปรับขนาดรวม	-	62.5	62.5	77.34
แฟกเตอร์ปรับขนาด	1	1	1.15	-

จากผลการปรับขนาดที่ได้แสดง จะเห็นได้ว่าตัวบ่งชี้การปรับขนาดสามารถระบุบริเวณที่ปรับขนาดโดยส่วนใหญ่เป็นบริเวณที่ตัวแปรมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงมากกว่าบริเวณอื่น อีกทั้งหลังทำการปรับขนาดแล้ว ผลการที่คำนวณได้มีค่าเข้าใกล้ผลจากการคำนวณด้วยปริมาตรควบคุมอ้างอิงที่คำตอบมีลักษณะไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อลดขนาดของปริมาตรควบคุมลง ซึ่งมีปริมาตรควบคุมจำนวนมากกว่าหลายเท่า อีกทั้งเมื่อทำการปรับขนาดในครั้งที่ 3 ค่า NR_T และ NR_U มีค่าน้อยกว่า 0.005 ซึ่งเป็นเงื่อนไขหยุดการปรับขนาดที่กำหนดไว้ก่อนการคำนวณ ดังนั้นจึงถือว่าคำตอบที่ได้หลังการปรับขนาดครั้งที่ 3 เป็นคำตอบของการคำนวณกรณีศึกษา

ในส่วนของการแสดงผลการเปรียบเทียบค่า T , U และ V จะเห็นได้ว่า รูปการแสดงผลของค่า T และ U จะมีค่าใกล้เคียงกับผลของปริมาตรควบคุมอ้างอิงที่มาเปรียบเทียบมาก ในส่วนของรูปการแสดงผลระยะกระจัด V จะเห็นว่าโดยส่วนใหญ่จะไม่วางตัวอยู่บนแนวเดียวกับผลจากปริมาตรควบคุมอ้างอิง เนื่องจากค่าสเกลที่ใช้แสดงผลของค่าระยะกระจัดมีค่าน้อยกว่ารูปแสดงผลของ U มาก กรณีที่แสดงรูปโดยใช้สเกลเดียวกับรูป U รูปแสดงผลของ V ที่ได้จะมีลักษณะใกล้เคียงกับปริมาตรอ้างอิงเช่นกัน แต่เนื่องจากต้องการแสดงผลที่ชัดเจนจึงได้เลือกใช้สเกลที่เหมาะสมกับการแสดงผล ดังที่ได้แสดงไว้

7.6 สรุป

จากผลการคำนวณและการปรับขนาดปริมาตรควบคุม สำหรับปัญหาความเค้นที่เกิดขึ้นเนื่องจากอุณหภูมิในรูปของระยะกระจัดที่ได้แสดงนั้น จะเห็นได้ว่าบริเวณที่ถูกกำหนดให้ปรับขนาดเป็นบริเวณที่ควรปรับขนาดจริง ซึ่งจะเห็นได้จากการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของปริมาตรควบคุมอ้างอิงของแต่ละตัวแปร อีกทั้งผลการคำนวณหาค่าความเค้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Unstructured Grids ที่ได้นั้น ให้ผลการคำนวณที่มีความถูกต้อง โดยนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ Easy FEM แล้วได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

การพิจารณาปรับขนาดในปัญหาที่ได้แสดงนี้ ได้กำหนดให้น้ำหนักของการปรับขนาดของแต่ละตัวแปรมีขนาดเท่ากัน โดยกำหนดให้แฟกเตอร์ปรับขนาดของแต่ละตัวแปรมีค่าเท่ากัน ในการคำนวณนั้น หากเข้าใจพฤติกรรมของผลเฉลยที่จะได้ สามารถกำหนดแฟกเตอร์การปรับขนาดที่ต่างกันได้ หรืออาจหยุดการปรับขนาดของบางตัวแปรได้ เช่นในปัญหาที่นำมาแสดง จะเห็นได้ว่าหลังจากทำการปรับขนาดในช่วงแรก เมื่อปรับขนาดครั้งต่อไปอาจไม่ใช้เงื่อนไขของอุณหภูมิมาทำการปรับขนาดได้ โดยพิจารณาการปรับขนาดเฉพาะเงื่อนไขของ U และ V เท่านั้น เป็นต้น

บทที่ 8

การออกแบบทอพอโลยี

8.1 บทนำ

เนื่องจากการประดิษฐ์โปรแกรมการสร้างปริมาตรควบคุม ได้ออกแบบไว้เพื่อให้สามารถนำมาใช้ออกแบบทอพอโลยีได้ โดยการกำหนดลักษณะโครงสร้างในรูปของตัวเลขฐานสอง ซึ่งเมื่อนำลักษณะโครงสร้างที่ได้จากการออกแบบทอพอโลยี มาทำการปรับขนาดโดยใช้ตัวบ่งชี้การปรับขนาด และโปรแกรมสร้างปริมาตรควบคุมใหม่ดังที่ได้กล่าวมา จะช่วยให้ผลที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้นด้วย โดยจะกล่าวถึง ทฤษฎีเบื้องต้นขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม โปรแกรมการสร้างโครงสร้างโดยการเข้ารหัสโครโมโซม การออกแบบปัญหาการนำความร้อน โดยอ้างอิงผลจากงานวิจัยเรื่อง A Preliminary Study on the Multi - Objective Topology Design by Genetic Algorithm and Finite Volume Method (Boonlong, K. and Maneeratana, K., 2003) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

8.2 ทฤษฎีเบื้องต้นของขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม

ขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรมเป็นการค้นหาผลเฉลยแบบสุ่ม หรือเป็นเทคนิคการหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งกระบวนการค้นหาจะอิงแนวคิดของดาร์วิน (Charles Darwin) ในเรื่องของการอยู่รอดของผู้ที่มีความเหมาะสมหรือผู้ที่แข็งแรงที่สุดในสภาวะแวดล้อมที่เหมือนกัน โดยคำตอบที่ได้รุ่นหนึ่งจะผ่านการแปลงเพื่อนำไปสู่คำตอบที่ดีขึ้นในรุ่นถัดไป ภายในประชากร 1 รุ่น จะมีการคัดเลือกประชากรที่มีลักษณะดีเพื่อเป็นต้นแบบสำหรับถ่ายทอดคุณลักษณะที่ดีให้ประชากรรุ่นต่อไป เพื่อให้ได้สมาชิกของประชากรที่ดีที่สุดต่อไป

กระบวนการออกแบบโดยอาศัยขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรมนั้นสามารถแบ่งเป็น 3 ส่วน ได้แก่ การแปลงปัญหาที่ต้องการออกแบบเป็นรหัสโครโมโซม จากนั้นจะเป็นกระบวนการในการคัดเลือกเพื่อหากกลุ่มสมาชิกที่มีคุณสมบัติ และขั้นตอนในการสลับสายพันธุ์เพื่อให้ได้สมาชิกรุ่นใหม่ต่อไป โดยแต่ละส่วนมีรายละเอียดดังนี้

8.2.1 การเข้ารหัสโครโมโซม

การเข้ารหัสโครโมโซมเป็นขั้นตอนเริ่มต้นของขั้นตอนเชิงพันธุกรรม การเข้ารหัสแบบเลขฐานสองเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในการเข้ารหัส โดยโครงสร้างโครโมโซมประกอบด้วยเลข 0 และ 1 กลุ่มของเลขฐานสองจะถูกกำหนดขึ้นเพื่อแทนค่าลักษณะของประชากร รูปแบบของโครโมโซมที่เข้ารหัสแบบเลขฐานสองแสดงดังรูป 8.1

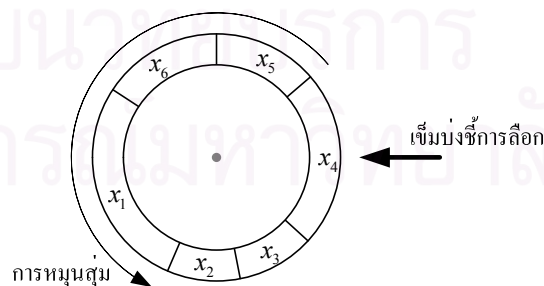
$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \downarrow & & & & & \downarrow & & & & & \downarrow & \\
 x_1 & & & & & x_2 & & & & & x_3 &
 \end{array}$$

รูป 8.1 รูปแบบโครโมโซมที่เข้ารหัสแบบเลขฐานสอง

รูปแบบของโครโมโซมที่ได้จะแทนคุณสมบัติของประชากรนั้นๆ ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ที่ต้องการ เช่น การออกแบบโครงสร้าง แต่ละโครโมโซมจะแทนแต่ละลักษณะของโครงสร้าง เป็นต้น

8.2.2 การคัดเลือก

เมื่อได้ประชากรจากการเข้ารหัสโครโมโซมแล้ว ในส่วนต่อไปจะเป็นการคัดเลือกเพื่อเก็บประชากรที่มีลักษณะดีไว้ และคัดประชากรที่มีลักษณะที่ไม่ดีออกโดยมีเทคนิควิธีที่ต่างกันหลายวิธี เช่น วิธีการคัดเลือกอย่างง่ายแบบวงล้อ โดยจะมีลักษณะเป็นการแบ่งวงล้อออกเป็นส่วนๆ โดยมีขนาดตามอัตราส่วนคุณสมบัติของสมาชิกแต่ละตัว ดังรูป 8.2

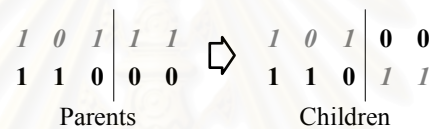


รูป 8.2 การสุ่มเลือกประชากรที่มีคุณสมบัติดี ด้วยวิธแบบวงล้อ

จากลักษณะการคัดเลือกด้วยวงล้อดังที่แสดงในรูป 8.2 จะเห็นได้ว่าประชากรที่มีคุณสมบัติดีจะมีโอกาสที่ถูกเลือกมากกว่าประชากรที่มีคุณสมบัติไม่ดี จากนั้นกลุ่มของประชากรที่ถูกเลือกจะถูกนำไปสลับสายพันธุ์เพื่อให้ได้ประชากรรุ่นต่อไป

8.2.3 การสลับสายพันธุ์

หลังจากทำการคัดเลือกประชากรที่ดีแล้ว ในส่วนต่อไปจะนำลักษณะโครโมโซมของประชากรที่ได้มาทำการสลับสายพันธุ์ โดยวิธีการสุ่มเลือกประชากรที่ถูกคัดเลือกแล้วจำนวน 2 ตัว และกำหนดให้เป็นสมาชิกรุ่นพ่อแม่ (Parents) จากนั้นจะทำการแลกเปลี่ยนยีนระหว่างพ่อและแม่ เพื่อให้เกิดสมาชิกรุ่นลูก (Children) ขึ้นมา 2 ตัว ลักษณะดังรูป 8.3



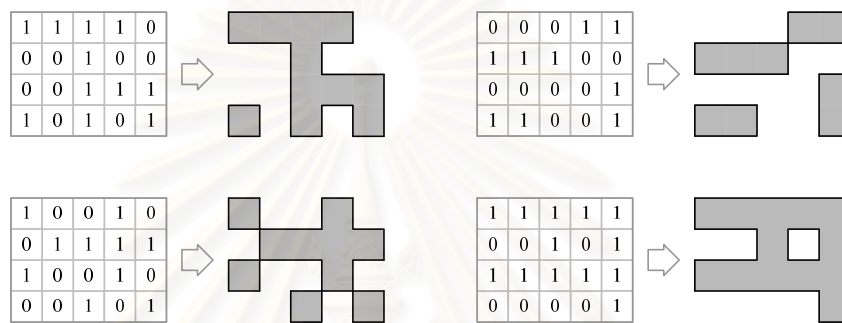
รูป 8.3 การสลับสายพันธุ์ แบบ 1 จุดแลกเปลี่ยน

เทคนิคการสลับสายพันธุ์มีอยู่หลายวิธี เช่น การสลับสายพันธุ์แบบ 1 จุดแลกเปลี่ยน การสลับสายพันธุ์แบบ 2 จุดแลกเปลี่ยน หรือการสลับสายพันธุ์แบบต่อเนื่องเป็นต้น ซึ่งหลังจากทำการสลับสายพันธุ์แล้วสิ่งที่คาดหวังจากประชากรรุ่นลูกคือประชากรที่ได้นั้น ควรจะเป็นประชากรที่มีคุณสมบัติดี เนื่องจากประชากรรุ่นใหม่ที่ได้นี้เกิดมาจากประชากรรุ่นพ่อแม่ที่ผ่านการคัดเลือกมาแล้ว

กระบวนการขั้นตอนที่ได้กล่าวมา เป็นขั้นตอนเบื้องต้นของการออกแบบโดยใช้ขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม ซึ่งโปรแกรมการคำนวณไฟในตัวอย่างที่ได้พัฒนาขึ้นได้ออกแบบไว้เพื่อให้สามารถนำมาประยุกต์ออกแบบโครงสร้างทอพอโลยีด้วยวิธีขั้นตอนทางพันธุกรรมได้ ในส่วนต่อไปจะกล่าวการสร้างปริมาตรควบคุมเมื่อรับค่าโครโมโซม

8.3 การกำหนดลักษณะโครงสร้าง

การออกแบบทอพอโลยีแบบต่อเนื่องด้วยขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม จะมีการเข้ารหัสโครงสร้างเป็นโครโมโซมเลขฐานสอง โดยทำการสร้างปริมาตรควบคุมด้วยการแทนค่าตัวเลขในแต่ละปริมาตรควบคุม กำหนดให้ 1 แทนบริเวณที่มีวัสดุ และ 0 แทนบริเวณที่ไม่มีวัสดุ ซึ่งมีลักษณะการเก็บค่าตัวเลขและลักษณะโครงสร้าง แสดงดังรูป 8.4

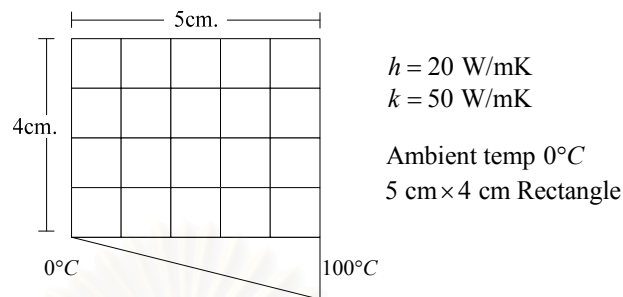


รูป 8.4 ลักษณะ โครงสร้างตามตัวเลขที่เก็บในแต่ละปริมาตรควบคุม

ลักษณะของโครงสร้างจะเปลี่ยนแปลงตามลักษณะของโครโมโซมที่ได้รับค่ามา ภายในขอบเขตของโดเมนที่กำหนด โดยแต่ละโครงสร้างจะมีคุณสมบัติและความสามารถในการรับภาระที่ต่างกััน ตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการของแต่ละปัญหา

8.4 การออกแบบปัญหาการถ่ายเทความร้อน

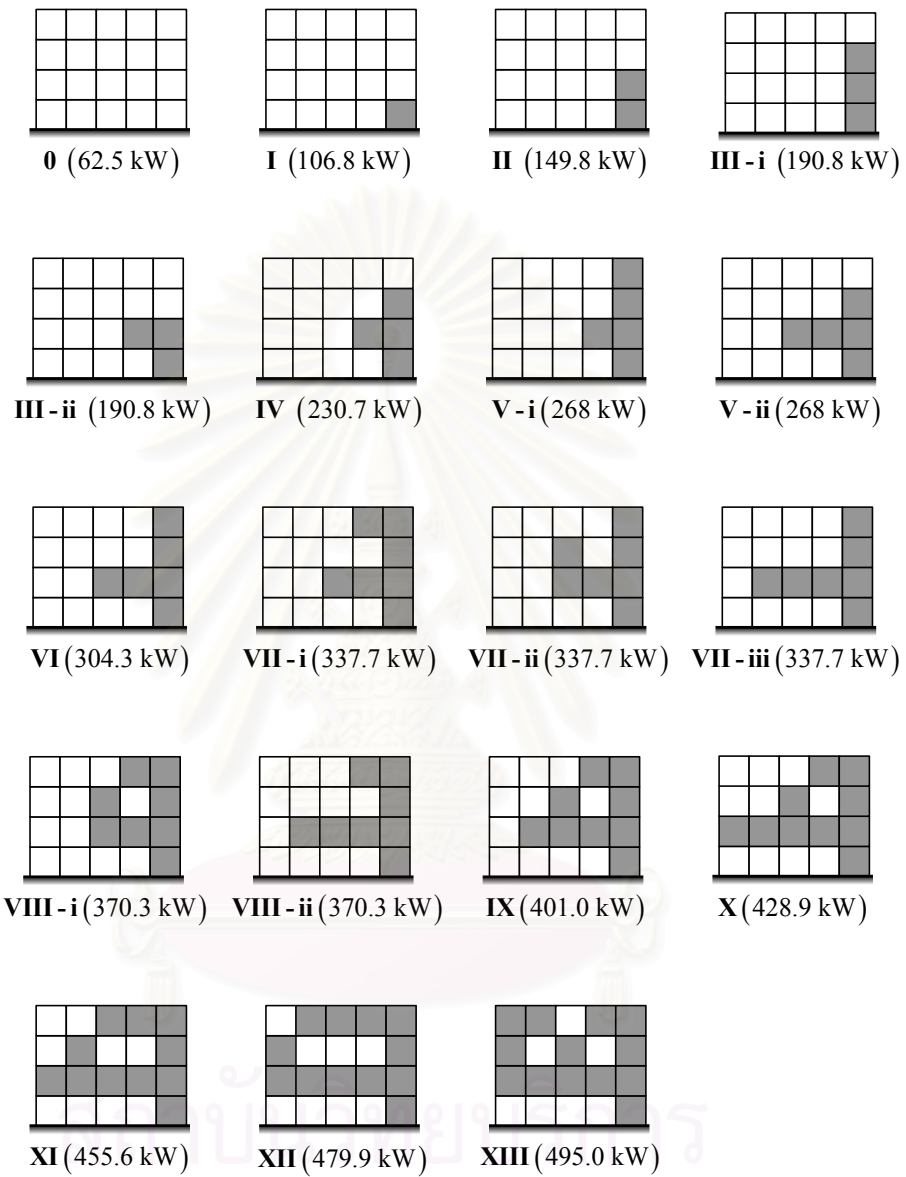
ในส่วนนี้จะเป็นการนำผลที่ได้จากการออกแบบทอพอโลยี ของปัญหาการถ่ายเทความร้อน (Boonlong, K. and Maneeratana, K., 2003) เพื่อให้ได้โครงสร้างที่มีมวลน้อยและสามารถถ่ายเทความร้อนได้ดี โดยมีลักษณะของปัญหาเป็นการถ่ายเทความร้อนจากแหล่งความร้อนซึ่งมีการกระจายตัวของอุณหภูมิแบบเชิงเส้นบนผนังจาก 0°C จนถึง 100°C โดยมีการถ่ายเทความร้อนให้แก่วัตถุซึ่งสามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างในลักษณะของการออกแบบทอพอโลยี ในช่วงของโดเมนขนาด 5×4 เซนติเมตร และมีค่าการนำความร้อน (Thermal Conductivity, k) $50\text{Wm}\cdot\text{K}$ กำหนดอุณหภูมิของสภาพแวดล้อมมีค่า 0°C และค่าการพาความร้อน (Convection Heat Transfer Coefficient, h) $20\text{Wm}\cdot\text{K}$ ลักษณะของปัญหาแสดงดังรูป 8.5



รูป 8.5 ลักษณะและเงื่อนไขของปัญหาที่พิจารณา

ในการออกแบบปัญหาได้กำหนดวัตถุประสงค์ คือ หาโครงสร้างที่สามารถถ่ายเทความร้อนออกจากผนังได้มากที่สุด และให้จำนวนมวลที่ใช้ให้น้อยที่สุด โดยกำหนดให้ 1 ช่องแทนมวล 1 หน่วย จากนั้นทำการหาโครงสร้างที่นำความร้อนได้ดีที่สุดในแต่ละชุดตามจำนวนมวล โดยเริ่มจากมวลเป็น 0 และเพิ่มขึ้นเป็นมวล 1 หน่วย เมื่อได้ลักษณะที่ดีที่สุดแล้ว จะทำการหาโครงสร้างที่ดีที่สุดเมื่อมวลเป็น 2 หน่วย จากนั้นทำการเพิ่มมวลทีละ 1 หน่วยและทำลักษณะเดียวกันนี้จนมวลครบ 20 หน่วย

จากผลการคำนวณในงานวิจัยนี้พบว่า สามารถหาโครงสร้างที่นำความร้อนได้ดีที่สุดของแต่ละชุดตามจำนวนมวล โดยในช่วงแรกพบว่าเมื่อเพิ่มจำนวนมวลเพิ่มขึ้นความสามารถในการนำความร้อนของโครงสร้างที่ดีที่สุดของแต่ละชุดจะเพิ่มขึ้นด้วย จนกระทั่งทำการเพิ่มมวลของโครงสร้างตั้งแต่ 14 ขึ้นไป พบว่าโครงสร้างที่ดีที่สุดของแต่ละชุดสามารถถ่ายเทความร้อนได้น้อยกว่า โครงสร้างที่ดีที่สุดของกรณีมวล 13 หน่วย ดังนั้นโครงสร้างที่ดีที่สุดของโครงสร้างมวล 13 หน่วยจึงเป็นโครงสร้างที่มีมวลมากที่สุดที่นำความร้อนได้ดีที่สุด ลักษณะของแต่ละโครงสร้างตามจำนวนมวลและค่าการถ่ายเทความร้อนที่ได้ มีรายละเอียดดังรูป 8.6



รูป 8.6 ลักษณะ โครงสร้างและค่าความสามารถการถ่ายเทความร้อน จากผลการออกแบบทอพอโลยี

จากผลการคำนวณพบว่าในกรณีโครงสร้างที่มีมวล 3 หน่วย 5 หน่วย 7 หน่วย และ 8 หน่วย ได้ผลการออกแบบมากกว่า 1 โครงสร้าง ซึ่งผลการวิจัยเดิมบ่งชี้ได้ว่าเป็นโครงสร้างมีคุณสมบัติที่ดีที่สุดเท่าเทียมกัน แต่เมื่อพิจารณาปริมาณควบคุมที่ใช้ในการออกแบบ จะเห็นได้ว่าจำนวนปริมาณควบคุมที่ใช้อาจมีจำนวนน้อยเกินไป แต่หากใช้ปริมาณควบคุมที่มีความละเอียดจะมีผลทำให้รูปแบบที่เปลี่ยนแปลงได้เพิ่มขึ้นเป็นจำนวนมากเช่นกัน

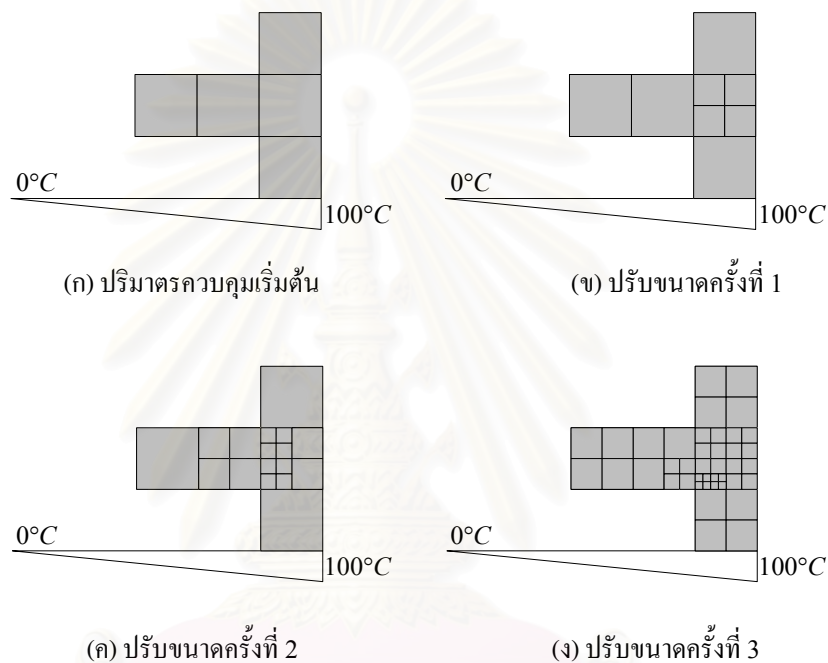
ดังนั้นเพื่อให้ผลการประมาณค่าที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำขึ้น จึงได้นำวิธีการปรับขนาดปริมาณควบคุมเฉพาะบริเวณเข้ามามีส่วนร่วมในการออกแบบ เนื่องจากการแบ่งย่อยปริมาณควบคุมเฉพาะบริเวณทำให้ได้ปริมาณควบคุมที่มีความละเอียด และจำนวนปริมาณควบคุมที่เพิ่มมากขึ้น โดยลักษณะของโครงสร้างไม่เปลี่ยนแปลง อีกทั้งในกรณีที่ลักษณะของโครงสร้างที่ได้จากการออกแบบเมื่อมวลเท่ากันมีคำตอบมากกว่า 1 โครงสร้าง เมื่อนำมาทำปรับขนาดอาจสามารถบ่งชี้เฉพาะได้ว่าโครงสร้างใดที่เป็นโครงสร้างที่ดีที่สุดจริงๆ ได้

ในการออกแบบทอพอโลยีด้วยขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรมนั้น จำนวนโครงสร้างที่ถูกหุ้มนำมาทำการคำนวณนั้นจะมีจำนวนมาก เช่น ในปัญหาการนำความร้อนที่นำมาพิจารณารูปแบบที่เปลี่ยนแปลงได้สามารถมีได้ถึง 2^{20} หรือ 1,048,576 ซึ่งหากทุกโครงสร้างต้องทำการปรับขนาดจะทำให้ภาระในการคำนวณเพิ่มขึ้นอย่างมาก อีกทั้งยังต้องทำการปรับขนาดโครงสร้างไม่มีคุณสมบัติตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการอีกด้วย

ดังนั้นในการปรับขนาดปริมาณควบคุมของโครงสร้างทอพอโลยี จะทำการปรับขนาดโดยนำผลจากการออกแบบด้วยวิธีปกติแล้วเลือกปรับเฉพาะปริมาณควบคุมที่ต้องการเท่านั้น สำหรับโปรแกรมปรับขนาดปริมาณควบคุมสำหรับการออกแบบทอพอโลยีที่สร้างขึ้น จะรับค่าโครโมโซมของโครงสร้างและทำการคำนวณพร้อมทั้งการปรับขนาดปริมาตร ในส่วนต่อไปจะแสดงการคำนวณการนำความร้อนของโครงสร้างจากค่าโครโมโซมตัวอย่าง 3 ค่า จากนั้นจะแสดงผลการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นเมื่อนำผลการออกแบบทอพอโลยีด้วยวิธีปกติดังรูป 8.6 ไปทำการปรับขนาด โดยกำหนดเงื่อนไขทำการปรับขนาด 3 ครั้ง ผลที่ได้ในแต่ละส่วนตามลำดับเป็นดังนี้

8.4.1 การปรับขนาดตัวอย่างโครงสร้างตัวอย่างที่ 1

โครงสร้างตัวอย่างที่ 1 เป็นโครงสร้างที่สามารถถ่ายเทความร้อนได้ดีที่สุดเมื่อมวลเท่า 5 หน่วย โดยมีลักษณะโครโมโซมเป็น 00001 00111 00001 00000 เมื่อทำการคำนวณและปรับขนาดปริมาตรควบคุม 3 ครั้ง ลักษณะของปริมาตรควบคุมที่ได้เป็นดังรูป 8.7 และรายละเอียดตัวบ่งชี้จากผลการคำนวณที่ได้ของโครงสร้างที่ 1 เป็นดังตาราง 8.1 แสดงตามลำดับได้ดังนี้



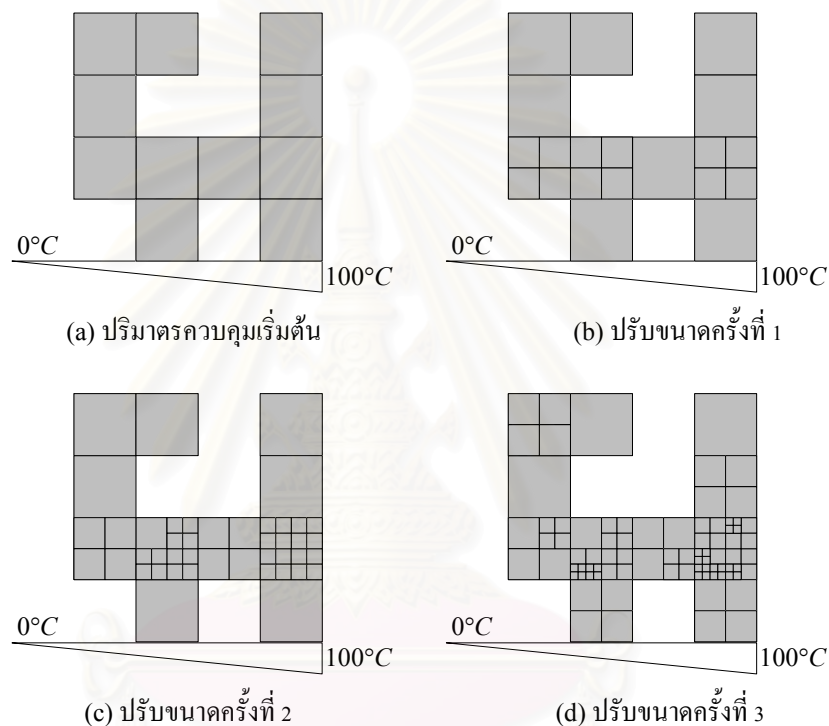
รูป 8.7 ลักษณะการปรับขนาดและปริมาตรควบคุมที่ใช้คำนวณโครงสร้างที่ 1

ตาราง 8.1 ค่าบ่งชี้จากการปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 1

ปริมาตรควบคุม	จำนวนปริมาตรควบคุม	การนำความร้อน (kW)	ε_M	f_{ε_M}	พื้นที่ปรับขนาด
เริ่มต้น	5	268	0.22635	0.85	-
ปรับขนาดครั้งที่ 1	8	267.02	0.15759	1	20 %
ปรับขนาดครั้งที่ 2	17	265.58	0.07475	1.15	30 %
ปรับขนาดครั้งที่ 3	41	265.45	-	-	77.5 %

8.4.2 การปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 2

โครงสร้างตัวอย่างที่ 2 เป็นโครงสร้างที่มีมวลเท่ากับ 11 หน่วย โดยกำหนดให้โปรแกรมรับค่าโครโมโซม 00101 01111 01001 01101 เมื่อทำการคำนวณและปรับขนาดปริมาตรควบคุม 3 ครั้ง ลักษณะของปริมาตรควบคุมที่ได้เป็นดังรูป 8.8 และรายละเอียดตัวบ่งชี้จากผลการคำนวณที่ได้ของโครงสร้างตัวอย่างที่ 2 เป็นดังตาราง 8.2



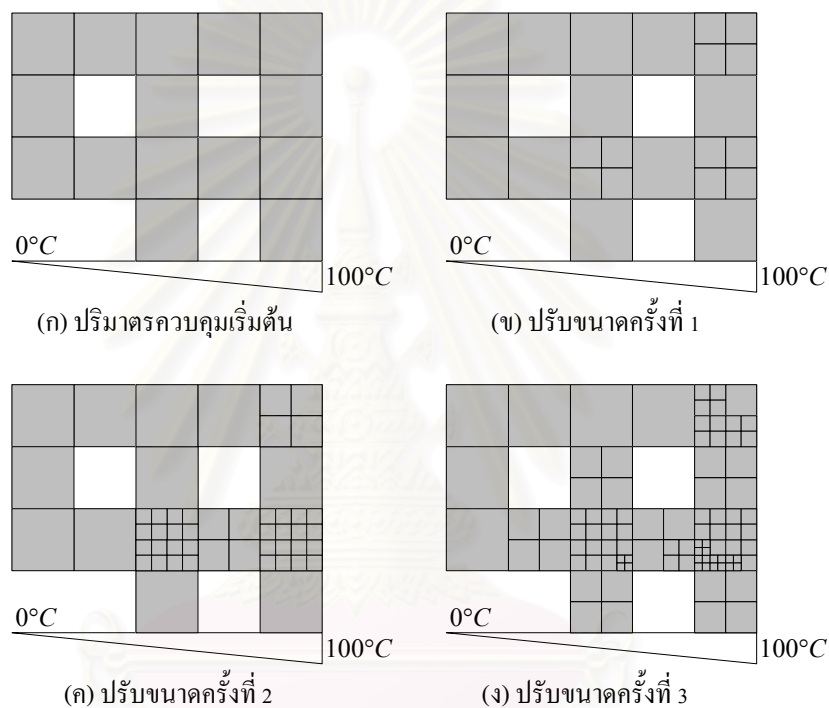
รูป 8.8 ลักษณะการปรับขนาดและปริมาตรควบคุมที่ใช้คำนวณโครงสร้างที่ 2

ตาราง 8.2 ค่าบ่งชี้จากการปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 2

ปริมาตรควบคุม	จำนวนปริมาตรควบคุม	การนำความร้อน (kW)	ε_M	f_{ε_M}	พื้นที่ปรับขนาด
เริ่มต้น	11	368.04	0.42721	0.85	-
ปรับขนาดครั้งที่ 1	20	365.07	0.32746	1	27.27 %
ปรับขนาดครั้งที่ 2	44	357.42	0.17005	1.15	25 %
ปรับขนาดครั้งที่ 3	83	356.93	-	-	44.88%

8.4.3 การปรับขนาดตัวอย่างโครงสร้างที่ 3

โครงสร้างตัวอย่างที่ 3 เป็นโครงสร้างที่มีมวลเท่ากับ 15 หน่วย โดยกำหนดให้โปรแกรมรับค่าโครโมโซม 00101 11111 10101 11111 เมื่อทำการคำนวณและปรับขนาดปริมาตรควบคุม 3 ครั้ง ลักษณะของปริมาตรควบคุมที่ได้เป็นดังรูป 8. และรายละเอียดตัวบ่งชี้จากผลการคำนวณที่ได้ของโครงสร้างตัวอย่างที่ 3 เป็นดังตาราง 8.3



รูป 8.9 ลักษณะการปรับขนาดและปริมาตรควบคุมที่ใช้คำนวณ โครงสร้างที่ 3

ตาราง 8.3 ค่าบ่งชี้จากการปรับขนาดโครงสร้างตัวอย่างที่ 3

ปริมาตรควบคุม	จำนวนปริมาตรควบคุม	การนำความร้อน (kW)	ε_M	f_{ε_M}	พื้นที่ปรับขนาด
เริ่มต้น	15	424.38	0.34785	0.85	-
ปรับขนาดครั้งที่ 1	20	418.31	0.32746	1	20 %
ปรับขนาดครั้งที่ 2	44	411.58	0.17005	1.15	20 %
ปรับขนาดครั้งที่ 3	83	411.98	-	-	42.08%

8.4.4 การปรับขนาดโครงสร้างจากการออกแบบทอพอโลยี

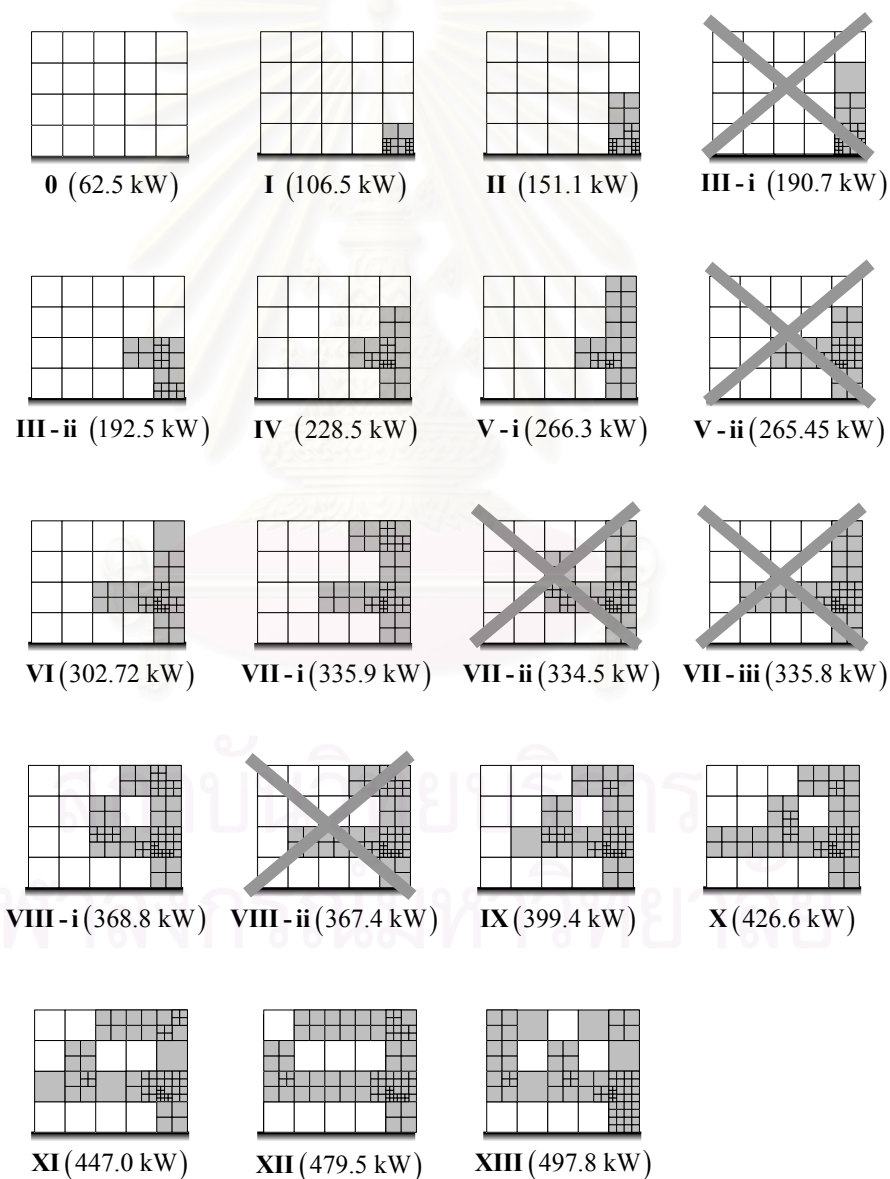
ภายใต้เงื่อนไขการปรับขนาดเดียวกันนี้ ได้นำไปปรับขนาดโครงสร้างที่ได้จากการออกแบบทอพอโลยีด้วยวิธีขั้นตอนทางพันธุศาสตร์ตามโครงสร้างในรูป 8.6 ค่าการถ่ายเทความร้อนของแต่ละโครงสร้างที่ได้ แสดงดังตาราง 8.4

ตาราง 8.4 การเปรียบเทียบค่าการถ่ายเทความร้อน
หลังปรับขนาดโครงสร้างจากผลการออกแบบทอพอโลยี

โครงสร้างหมายเลข	ก่อนปรับขนาด (kW)	หลังปรับขนาด (kW)	เปลี่ยนแปลง (kW)
0	62.50	62.50	0
I	106.83	106.52	-0.31
II	149.87	151.10	1.23
III-i	190.86	190.75	-0.11
III-ii	190.86	192.55	1.69
IV	230.71	228.59	-2.12
V-i	268.00	266.34	-2.55
V-ii	268.00	265.45	-1.6
VI	304.32	302.72	-2.55
VII-i	337.73	335.98	-1.6
VII-ii	337.73	334.58	-1.75
VII-iii	337.73	335.84	-3.15
VIII-i	370.36	368.84	-1.89
VIII-ii	370.36	367.41	-1.52
IX	401.05	399.47	-2.95
X	428.91	426.63	-1.58
XI	455.63	447.04	-2.28
XII	479.96	479.55	-8.59
XIII	495.07	497.80	2.73

จากการเปรียบเทียบผลการปรับขนาดของโครงสร้างตัวอย่างทั้ง 3 โครงสร้าง และโครงสร้างจากการออกแบบทอพอโลยีที่อ้างอิง จะพบว่าส่วนใหญ่ค่าความสามารถการถ่ายเทความร้อนจะลดลงเล็กน้อย

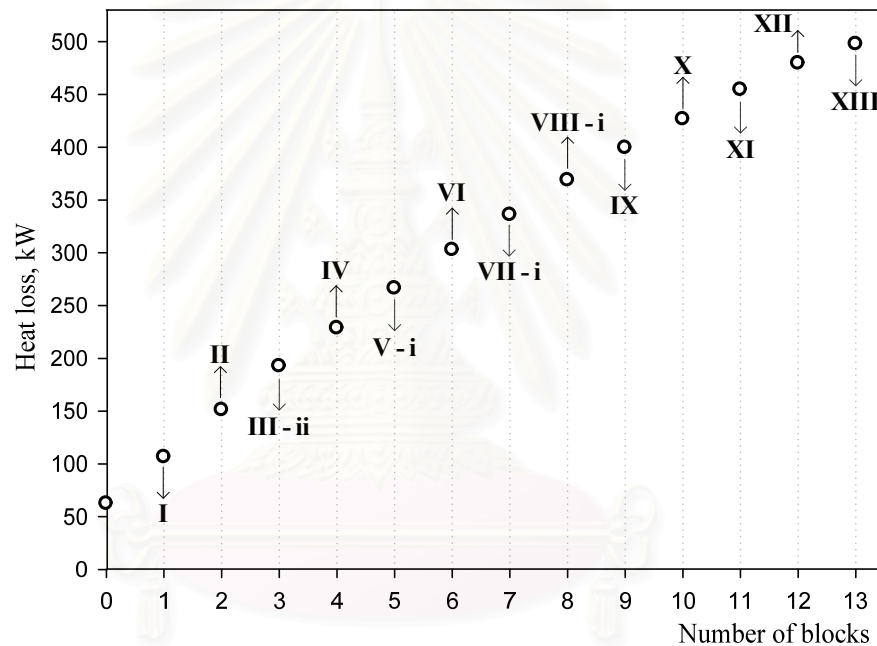
จากตารางแสดงผลจะเห็นได้ว่า กรณีที่มวลเท่ากันมีค่าตอบของโครงสร้างมากกว่า 1 ค่า หลังทำการปรับขนาดแล้วจะเห็นว่ามีการตัดคำตอบบางค่าทิ้ง เราสามารถหาคำตอบที่ดีที่สุดของกรณีที่มีโครงสร้างมากกว่า 1 แบบได้ ลักษณะปริมาตรควบคุมและการนำความร้อนของกลุ่มคำตอบใหม่ที่ได้แสดงดังรูป 8.11



รูป 8.11 ปริมาตรควบคุมและการนำความร้อนของชุดคำตอบใหม่ หลังทำการปรับขนาด

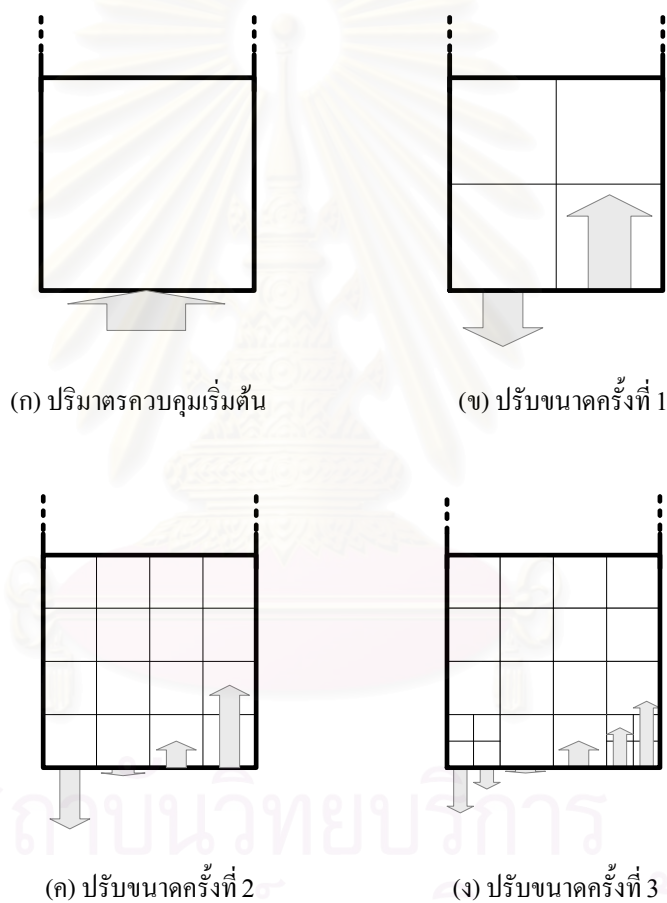
8.5 การวิเคราะห์โครงสร้างหลังการปรับขนาด

หลังจากทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมโครงสร้างที่ได้จากการออกแบบทอพอโลยีแล้ว จะเห็นว่ากรณีที่มีมวลเท่ากันและมีความสามารถในการถ่ายเทความร้อนเท่ากัน ซึ่งประกอบด้วยโครงสร้างมวล 3 หน่วย 5 หน่วย 7 หน่วย และ 8 หน่วย ซึ่งหลังทำการปรับขนาดแล้ว สามารถระบุโครงสร้างที่ดีที่สุดของในแต่ละมวลได้ ซึ่งทำให้คำตอบบางโครงสร้างไม่อยู่ในชุดคำตอบอีกต่อไป ความสัมพันธ์ระหว่างการถ่ายเทความร้อนและโครงสร้างที่นำความร้อนดีที่สุดของแต่ละมวล แสดงได้ดังรูป 8.12



รูป 8.12 ชุดคำตอบและการนำความร้อนหลังปรับขนาดปริมาตรควบคุม

แม้ว่าหลังจากทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมของโครงสร้างจะให้ค่าการนำความร้อนที่ไม่เปลี่ยนแปลงจากค่าตอบเดิมไม่มากนัก แต่หลังทำการปรับขนาดสามารถทำให้มองเห็นการกระจายของอุณหภูมิได้ดีขึ้น โดยเฉพาะบริเวณผิวสัมผัสระหว่างโครงสร้างและแหล่งความร้อนพบว่าเมื่อทำการปรับขนาดจะสังเกตเห็นว่าเกิดการถ่ายเทความร้อนย้อนกลับไปยังแหล่งความร้อนด้วย ตัวอย่างเช่น โครงสร้าง III-i ลักษณะการถ่ายเทความร้อนบริเวณผิวสัมผัสที่เกิดขึ้นหลังการปรับขนาดเป็นดังรูป 8.12



รูป 8.12 การถ่ายเทความร้อนบริเวณผิวสัมผัสแหล่งความร้อนของโครงสร้าง III-i

จากลักษณะการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นนี้อาจเป็นเหตุผลที่ทำให้หลังทำการปรับขนาด ปริมาตรควบคุมแล้วโดยส่วนใหญ่ความสามารถในการนำความร้อนมีค่าลดลง เนื่องจากก่อนการ คำนวณการถ่ายเทความร้อนจะมีเฉพาะทิศทางเดียวไม่มีการถ่ายเทความร้อนย้อนกลับ อีกทั้งลักษณะ การถ่ายเทความร้อนที่ สังเกตได้ดีขึ้น เช่น ลักษณะการถ่ายความร้อน รูป 8.12 หากทำการออกแบบ ลักษณะผิวสัมผัสเพื่อให้มีการถ่ายเทความร้อนย้อนกลับมาให้น้อยลง อาจสามารถถ่ายความร้อนได้ มากขึ้น เป็นต้น

8.5 สรุป

จากที่ได้้นำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมมาใช้ร่วมกับการออกแบบทอพอโลยี จะเห็นได้ว่า สำหรับในกรณีปัญหาที่ได้นำมาพิจารณา ค่าการถ่ายเทความร้อนที่ได้แม้จะไม่แตกต่างกันมากนัก แต่ ทำให้สามารถเห็นลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ และลักษณะการถ่ายความร้อนระหว่างผิวสัมผัส ได้ชัดเจนขึ้น

ผลที่ได้เมื่อทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม จะพบว่าความสามารถในการถ่ายเทความร้อน โดยส่วนใหญ่จะให้ค่าลดลงเล็กน้อย อาจเนื่องมาจากก่อนทำการปรับขนาด การถ่ายเทความร้อนมี เฉพาะในทิศทางเดียวเท่านั้น แต่เมื่อปรับขนาดจะพบพฤติกรรมของการถ่ายเทความร้อนย้อนกลับมา ซึ่งอาจมีผลทำให้ความสามารถในการถ่ายเทความร้อนลดลง

ในการออกแบบทอพอโลยีนั้น เนื่องจากลักษณะรูปแบบของ โครงสร้างสามารถเปลี่ยนแปลง ได้มากมายหลายรูปแบบ หากนำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมไปกับการออกแบบทอพอโลยี ด้วยวิธีทางพันธุศาสตร์โดยตรง อาจทำให้ต้องทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมที่ไม่เป็นไปตาม วัตถุประสงค์ที่ต้องการเป็นจำนวนมาก และเนื่องจากกระบวนการในการปรับขนาดมีทั้งการหาค่า ความคลาดเคลื่อนตกร้าง ตัวบ่งชี้การปรับขนาด และกระบวนการสร้างปริมาตรควบคุมใหม่ ซึ่ง กระบวนการต่างๆ เหล่านี้จะทำให้ภาระในการคำนวณจะเพิ่มขึ้นเป็นอย่างมาก ดังนั้นในที่สุดจึงได้เลือก ลักษณะการออกแบบ โดยเลือกจากกลุ่มของ โครงสร้างที่มีลักษณะตรงตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ ที่ได้ จากการออกแบบทอพอโลยีด้วยวิธีปกติก่อน เพื่อหลีกเลี่ยงการปรับขนาดปริมาตรควบคุมที่ไม่พึง ประสงค์ แล้วจึงปรับขนาดปริมาตรควบคุมเฉพาะที่ต้องการเท่านั้น หลังปรับขนาดปริมาตรควบคุม แล้วสามารถนำผลที่ได้เป็นแนวทางโดยสังเขป เพื่อสร้าง โครงสร้างสำหรับการใช้งานจริง

นอกจากนี้พบว่าในการออกแบบโดยใช้วัตถุประสงค์เป็นค่าคงที่ เช่น ใช้ค่าการนำความร้อน
คงที่ค่าหนึ่งเป็นเกณฑ์ เมื่อทำการออกแบบทอพอโลยีโดยไม่มีการปรับขนาดปริมาตรควบคุมจนได้ชุด
คำตอบตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการแล้ว มีความเป็นไปได้ว่าหากทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมของ
ชุดคำตอบที่ได้ อาจทำให้คำตอบบางค่าไม่เป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด ทำให้คำตอบบางค่าหายไป
ดังนั้นจึงต้องเพิ่มความระมัดระวังในการกำหนดวัตถุประสงค์ให้เหมาะสมเพื่อใช้ในการออกแบบ
ต่อไป



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 9

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

เนื่องจากได้มีการอภิปรายผลพร้อมๆ กับแสดงผลการเปรียบเทียบถึงกระบวนการ และผลการคำนวณ ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น ในบทนี้จึงเป็นการสรุปผลโดยรวมของผลการศึกษาที่ได้ และให้ข้อเสนอแนะสำหรับขยายผลการศึกษาต่อไป

9.1 สรุปผลการวิจัย

ในการวิจัยนี้วัตถุประสงค์ คือ การทำการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม เพื่อให้ผลการคำนวณมีความถูกต้องมากขึ้น และสามารถนำกระบวนการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมมาใช้ในการออกแบบท่อพอลิเอสเตอร์ได้

การประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปสมการพีชคณิต ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Structured Grids เป็นระเบียบวิธีการประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพวิธีหนึ่ง โดยมีข้อดีคือ ความง่ายในการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมและการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แต่มีข้อจำกัดโดยสามารถแก้ปัญหาได้เฉพาะปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาดสม่ำเสมอ

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบ Unstructured Grids แม้จะมีการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ซับซ้อนกว่า แต่สามารถคำนวณค่าเมื่อปริมาตรควบคุมที่ใช้มีรูปร่างใดๆ นอกเหนือจากปริมาตรควบคุมสี่เหลี่ยมแบบสม่ำเสมอได้ ซึ่งเมื่อทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมแล้วยังคงสามารถหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มนี้ต่อไปได้ ซึ่งจะเห็นได้ว่าการทดสอบตัวบ่งชี้การปรับขนาด ได้ทำการคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนด้วยปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เพื่อแสดงให้เห็นความสามารถในการคำนวณเมื่อปริมาตรควบคุมไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และเมื่อนำไปคำนวณค่าหลังทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุมซึ่งปริมาตรควบคุมใหม่จะมีลักษณะไม่สม่ำเสมอ แต่ประสิทธิภาพในการคำนวณยังสามารถคำนวณค่าได้เป็นอย่างดี เช่นเดิม

ตัวบ่งชี้การปรับขนาดที่ได้นำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ ใช้หลักการคำนวณที่ไม่ซับซ้อนและสามารถเข้าใจได้ง่าย เนื่องจากการเปรียบเทียบค่าที่ง่ายและไม่ซับซ้อน อีกทั้งผลของการบ่งชี้การปรับขนาดเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง จะเห็นได้ว่าบริเวณที่ถูกบ่งชี้ขึ้นเป็นบริเวณที่ควรทำการปรับขนาดจริง สำหรับในบางจุดต่อที่ผลการคำนวณมีความถูกต้องแล้ว แต่ยังคงถูกบ่งชี้ให้ปรับขนาดอยู่ เนื่องจากแม้ค่าของตัวแปรนั้นจะถูกต้องแต่เมื่อพิจารณาค่าอนุพันธ์ของจุดต่อที่ยังคงไม่แม่นยำพอ โดยสามารถสังเกตได้ว่าจุดต่อที่เกิดลักษณะนี้ ปริมาตรควบคุมข้างเคียงจะเป็นปริมาตรที่มีความคลาดเคลื่อนสูง ด้วยเหตุผลนี้ปริมาตรควบคุมนี้จึงถูกกำหนดให้ทำการปรับขนาดด้วย

ในส่วนของโปรแกรมการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม กระบวนการที่มีความซับซ้อนของส่วนนี้คือ การพิจารณาปริมาตรควบคุมข้างเคียง เนื่องจากความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นหลังการปรับขนาด การพิจารณาปริมาตรควบคุมข้างเคียงโดยใช้เงื่อนไขของทิศทางเชื่อมต่อและการเหลื่อมล้ำของปริมาตรควบคุม มาพิจารณาการเชื่อมต่อสามารถทำการปรับขนาดได้เป็นอย่างดี

การปรับขนาดปริมาตรควบคุมสำหรับปัญหาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ จะเห็นได้ว่าเงื่อนไขของการปรับขนาดนั้นจะพิจารณาจากเงื่อนไขของ อุณหภูมิ ระยะกระจัดแนวอน และระยะกระจัดแนวตั้ง โดยพิจารณาการปรับขนาดจากตัวแปรแต่ละตัว แล้วนำผลที่ได้ทั้งหมดมารวมกัน ปริมาตรควบคุมใหม่ที่ได้หลังการคำนวณ จึงครอบคลุมทุกตัวแปร ผลการคำนวณและการปรับขนาดของปัญหาที่นำมาพิจารณา ให้ผลการคำนวณและบ่งชี้บริเวณปรับขนาดได้เป็นอย่างดี โดยในตัวอย่างที่นำมาพิจารณาได้ให้น้ำหนักของแต่ละตัวแปรในการปรับขนาดนั้นมีความสำคัญในระดับเดียวกัน ในการคำนวณนั้นหากมีความเข้าใจถึงลักษณะของผลเฉลยที่จะได้ อาจกำหนดเงื่อนไขการปรับขนาดและเงื่อนไขการหยุดการปรับขนาดของแต่ละตัวแปรต่อไปได้ ซึ่งจะเป็นการควบคุมจำนวนปริมาตรควบคุมให้มีจำนวนน้อยแต่ให้ผลการคำนวณที่ถูกต้อง ได้ดีขึ้น

การนำวิธีแบ่งย่อยปริมาตรควบคุม มาใช้ร่วมกับการออกแบบทอพอโลยีสามารถนำมาใช้งานร่วมกันได้เป็นสอดคล้องกัน โดยโปรแกรมสร้างปริมาตรควบคุมเริ่มต้นออกแบบให้สามารถรองรับค่าโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงตามที่กำหนดให้ได้ ในส่วนของการปรับขนาดนั้น ได้อ้างอิงผลที่ได้จากการออกแบบของปัญหาการนำความร้อน โดยพิจารณาเงื่อนไขของมวลที่ใช้และความสามารถในการถ่ายเทความร้อน ซึ่งผลที่ได้ส่วนใหญ่จะมีค่าลดลงเล็กน้อย ในส่วนของโครงสร้างที่มีจำนวนมวลและความสามารถในการถ่ายเทความร้อนเท่ากัน เมื่อทำการปรับขนาดปริมาตรควบคุม มีผลทำให้ค่าการนำความร้อนไม่เท่ากันได้ แม้ค่าที่ได้หลังการปรับขนาดจะเปลี่ยนแปลงไม่มากนัก แต่หลังการแบ่งย่อย

แล้วสามารถเห็นถึงการกระจายของภาระที่เกิดขึ้นได้อย่างชัดเจนขึ้น เช่น การถ่ายเทความร้อนที่บริเวณฐานรอยต่อ ที่เกิดลักษณะการถ่ายเทความร้อนย้อนกลับ เป็นต้น นอกจากนี้พบว่า การปรับขนาดยังทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่ได้ด้วย

9.2 ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะสำหรับการขยายผลของงานวิจัย แบ่งเป็นหัวข้อตามลำดับได้ดังนี้

9.2.1 ตัวบ่งชี้การปรับขนาด

ตัวบ่งชี้การปรับขนาดที่นำมาใช้แม้จะให้ผลเป็นที่น่าพอใจ แต่เมื่อพิจารณาถึงขนาดของปริมาตรควบคุมซึ่งไม่ได้นำมาคำนวณร่วมอยู่ด้วย เมื่อนำมาพิจารณาร่วมกับค่าความผิดพลาดตกค้าง อาจทำให้ผลการคำนวณที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น

ในส่วนของตำแหน่งที่พิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนตกค้างที่เกิดขึ้นระหว่างแต่ละจุดต่อนั้น พิจารณาที่ตำแหน่งกึ่งกลางระหว่างทั้ง 2 จุดต่อ ซึ่งระยะทางของจุดต่อมีขนาดไม่เท่ากัน เมื่อพิจารณาถึงระยะห่างระหว่างจุดต่อ หากปริมาตรควบคุมที่ผลการคำนวณมีความถูกต้องแต่มีระยะห่างกันมาก จะทำให้ค่าความผิดพลาดส่วนเกินของมาก แต่ในส่วนของปริมาตรควบคุมที่อยู่ใกล้กันแม้มีความคลาดเคลื่อนมาก แต่ค่าความคลาดเคลื่อนส่วนเกินอาจมีค่าน้อยกว่าในกรณีแรกได้ ซึ่งหากนำระยะห่างของจุดต่อมาร่วมพิจารณา ในลักษณะของผลหารระหว่างค่าความผิดพลาดตกค้างและระยะห่าง ซึ่งมีลักษณะเป็นความชันของค่าความผิดพลาดตกค้าง จะสามารถแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นดังกล่าวมาได้

9.2.2 ลักษณะการปรับขนาด

การแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมรูปสี่เหลี่ยมออกเป็น 4 ส่วนเท่ากัน ในการขยายผลการศึกษานั้นควรมีการปรับขนาดปริมาตรควบคุมให้มีลักษณะที่หลากหลายขึ้น เช่น ปริมาตรควบคุมรูปสามเหลี่ยม เป็นต้น หรืออาจทำการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมในลักษณะอื่น เช่น การแบ่งทีละด้าน การแบ่งย่อยจากเส้นทแยงมุม เป็นต้น โดยยังคงอาศัยทิศทางการเชื่อมต่อและการเหลื่อมล้ำของปริมาตรควบคุม มาพิจารณาปริมาตรควบคุมข้างเคียงได้ เช่นเดิม

9.2.3 โปรแกรมการปรับขนาดการออกแบบทอพอโลยี

การปรับขนาดปริมาตรโครงสร้างทอพอโลยี ที่ได้นำมาวิเคราะห์หานั้น เป็นการนำผลในขั้นสุดท้ายของการคำนวณมาทำการปรับขนาด ซึ่งเป็นเพียงการเพิ่มความถูกต้องของการคำนวณโครงสร้างที่ได้แล้วเท่านั้น แต่หากใช้วิธีการปรับขนาดเข้าไปใช้ในระหว่างกระบวนการออกแบบทอพอโลยีด้วยวิธีการคำนวณทางพันธุกรรมโดยตรง ลักษณะโครงสร้างคำตอบอาจเปลี่ยนแปลงไปจากผลที่ได้จากการคำนวณโดยไม่ทำการปรับขนาดได้ ดังจะเห็นได้จากในกรณีที่บางโครงสร้างมีมวลและความสามารถในการนำความร้อนเท่ากัน แต่เมื่อทำการปรับขนาดใหม่จะเห็นได้ว่าสามารถหาโครงสร้างที่ถ่ายเทความร้อนได้ดีที่สุดได้

เนื่องจากในการออกแบบทอพอโลยี มีการเปลี่ยนแปลงลักษณะของโครงสร้างในการคำนวณอย่างมาก การปรับขนาดทุกปริมาตรควบคุมจะมีผลทำให้ภาระการคำนวณทั้งหมดเพิ่มขึ้นสูงมาก ดังนั้นในการแบ่งย่อยปริมาตรควบคุมนั้น ควรทำการปรับขนาดหลังจากได้กลุ่มของโครงสร้างที่ตรงตามวัตถุประสงค์ในจำนวนโครงสร้างที่เหมาะสมเท่านั้น เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงการปรับขนาดปริมาตรควบคุมที่ไม่จำเป็น

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

- วารสารรัตน จันทสาโร, อัครพล มีสิทธิ์, สะอาด สุกฤษณ์, เอกชัย จันทสาโร และ จักษ์ อีสวานันท์. (2546) วิธี Adaptive Mesh Refinement สำหรับการไหลในชั้นผิว. การประชุมเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 17. 15-17 ตุลาคม 2546.
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. 2542. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. 2544. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพานิช. 2548. ไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างง่ายพร้อมซอฟต์แวร์. กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาษาอังกฤษ

- Anne, B., Bennett, V., and Smooke., M.D. 1999. Local rectangular refinement with application to nonreaction and reacting fluid flow Problems. Journal of Computational Physics. 151: 684-727.
- Becker, R. and Braack, M. 2001. Solution of a stationary benchmark problem for natural convection with large temperature difference. International Journal of Thermal Sciences. 41: 428-439.
- Boonlong, K. And Maneeratana, K. 2003. A Preliminary Study on the Multi-Objective Topology Design by Genetic Algorithm and Finite Volume Method. The 16 th Conference Mechanical Engineering Network of Thailand.2003
- Coelho, P.L. and Arjain, J. 1997. A Local grid refinement technique based upon Richardson extrapolation. Appl. Math. Modelling. 21: 427-436.
- Core, X., Angot, P. and Latche, J. 2003. A multilevel local mesh refinement projection method for low Mach number flows. Mathematical and Computers in Simulation. 61: 477-488.

- Durbin, P.A. and Iaccarino G. 2002 An Approach to local refinement of structured grids. Journal of Computational Physics. 181: 639-653.
- Dermirdzic, I. and Muzaferija, S. 1994. Finite Volume Stress Analysis Manual. Mechanical Engineering Department, University of Sarajevo, Bosnia and Herzezegovina.
- Edwards, G.M. 1996 Elimination of adaptive grid Interface error in the discrete cell center pressure equation. Journal of Computational Physics. 126: 356-372.
- Jasak, H. 1996. Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows. Ph.D Thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, University of London.
- Jasak, H. and Gosman A.D. 2003 Element Residual Error Estimate for The Finite Volume Method. Computers & Fluid 32 : 223-248
- Ham, F.E., Lien, F.S. and Strong, A.B. 2002. A Cartesian grid method with transient anisotropic adaptation. Journal of Computational Physics. 179: 469-494.
- Holman, J.R., 2001 Heat Transfer. McGraw Hill.
- Kim, C. and Jameson, A. 1998 A robust and accurate LED-BGK solver on unstructured adaptive mesh. Journal of Computational Physics. 143: 598-627.
- Kobsak, S. 2004. Stress intensity factor calculation by domain integral method and adaptive FEM remeshing technique. The 18 th Conference Mechanical Engineering Network of Thailand.2004
- Lan, C.W., Liu, C.C. and Hsu, C.M. 2001. An adaptive finite volume method for incompressible heat flow problem in solidification. Journal of Computational Physics. 178: 464-497.
- Lertsurayut, T. and Maneeratana, K. 2002. The utilisation of delaunay triangulation in finite volume. The 16 th Conference Mechanical Engineering Network of Thailand.2002: 262-267.
- Li, G. and Modest, F.M., 2001 An effective particle tracing scheme on structured / unstructured grids in hybrid finite volume / PDE Monte Carlo Methods. Journal of Computational Physics. 173: 187-207.

- Maneeratana, K. 2000. Development of the Finite Volume Method for non-linear structured application. Ph.D Thesis Department of Mechanical Engineering, Imperial College, University of London.
- Maneeratana, K. 2004. An Overview of the finite volume method. Journal of Research in Engineering and Technology. 1: 205-216.
- Muzaferija, S. 1994. Adaptive Finite Volume Method for flow prediction using unstructured mesh and multigrid approach. Ph.D Thesis Department of Mechanical Engineering, Imperial College, University of London.
- Patankar, S. 1980 Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
- Provatas, N., Goldenfeld, N. and Dantzig, J. 1998. Adaptive mesh refinement computation of solidification microstructures using dynamic data structured. Journal of Computational Physics. 148: 265-290.
- Steinbach, O. 1998. Adaptive finite element-boundary element solution of boundary value problem. Journal of Computational and Applied Mathematics. 106: 307-316.
- Versteeg, H.M. and Malalasekera, W. 1995 An Introduction to Computational Fluid Dynamic: Finite Volume Methods. England: Longman Scientific & Technical.
- Verweij, R.L., Twerda R. and Peeters T.W.J. 1998 Parallel computing for reacting flow using adaptive grid refinement. Contemporary Mathematics. 218: 538-546.
- Wattananukulcai, W. and Maneeratana, K. 2004. Local grid refinement by residual error estimation for heat conduction simulation with finite volume. Mechanical Engineering Network of Thailand The 18 th. Conference.2004
- Zegeling, P.E. 2003. Tensor-product adaptive grids based on coordinate transformations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 166: 343-360
- Ziegler, U. 1997 An Adaptive mesh refinement code for gas dynamics and MHD Computer Physics Communications 109: 111-134.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายวิชา วัฒนนุกุลชัย เกิดเมื่อวันที่ 21 ตุลาคม 2522 ที่จังหวัดอุดรธานี สำเร็จการศึกษา
ระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากคณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยขอนแก่น ในปี พ.ศ. 2545 หลังจากนั้นได้เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโท
วิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2545



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย