การวิเคราะห์การโก่งของแผ่นบางด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยม
แบบดีสครีตเคอร์ชอฟฟ์ที่ปรับขนาดได้

นายพิชเญนทร์ โพธิคุณ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2552

PLATE BENDING ANALYSIS USING ADAPTIVE DISCRETE KIRCHHOFF TRIANGULAR ELEMENT

Mr. Pichayen Bhothikhun

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic year 2009

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์การโก่งของแผ่นบางด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีสครีตเคอร์ชอฟฟ์ที่ปรับขนาดได้
โดย	นายพิชเญนทร์ โพธิคุณ
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(อาจารย์ ดร.สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช)

พิชเญนทร์ โพธิคุณ : การวิเคราะห์การโก่งของแผ่นบางด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีสครีตเคอร์ชอฟฟ์ที่ปรับขนาดได้. (PLATE BENDING ANALYSIS USING ADAPTIVE DISCRETE KIRCHHOFF TRIANGULAR ELEMENT)
อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 131 หน้า.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำทางกล และภาระทางความร้อน โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีสครีตเคอร์ชอฟฟ์ (ดีเคที) ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อที่ให้ความแม่นยำของผลลัพธ์สูงเมื่อเทียบกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอื่นๆ และได้ถูกนำมาประยุกต์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงมากขึ้นและสามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะที่ซับซ้อนได้

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา หลักการและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น รวมไปถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติได้ถูกแสดงไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินี้จะปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีความเปลี่ยนแปลงของความชันของคำตอบสูง และปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น ๆ ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำสูงมากขึ้น อีกทั้งยังลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลง

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์นั้นไปเปรียบเทียบกับปัญหาเบื้องต้นที่ทราบผลเฉลยแม่นตรง จากนั้นจึงนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น โดยผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางต่าง ๆ ในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีสครีตเคอร์ชอฟฟ์ที่ปรับขนาดได้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางที่มีลักษณะซับซ้อนได้ดี

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต พิชเญนทร์ โพธิคุณ
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
ปีการศึกษา 2552

4970473621 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS : PLATE BENDING / DKT / FINITE ELEMENT METHOD / ADAPTIVE MESH

PICHAYEN BHOTHIKHUN : PLATE BENDING ANALYSIS USING ADAPTIVE DISCRETE KIRCHHOFF TRIANGULAR ELEMENT. THESIS ADVISOR : PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D., 131 pp.

In this thesis, a finite element method for analyzing plate bending problems under both mechanical and thermal loadings by the Discrete Kirchhoff Triangle (DKT) element is presented. The DKT element provides higher solution accuracy as compared to other standard triangular elements. The element is also combined with an adaptive meshing technique to improve solution accuracy for analyzing complex problems.

The governing differential equations, finite element method concepts and procedures, finite element matrices and basic idea of the adaptive meshing technique are presented. The adaptive meshing technique generates small clustered elements in the regions of high stress gradients to provide higher solution accuracy. At the same time, larger elements are generated in the other regions to reduce the total numbers of unknowns and the computational time.

A corresponding finite element computer program is developed and verified against examples that have exact solutions. The effectiveness of the DKT element combined with the adaptive meshing technique is evaluated by several complex problems. Results demonstrate that the combined method can improve the solution accuracy and reduce the computational effort.

Department : Mechanical Engineering Student's Signature : Pichayen Bhothikhun

Field of Study : Mechanical Engineering Advisor's Signature : Pramote Dechaumphai

Academic Year : 2009

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดและประสบการณ์ที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ ประธานกรรมการ อาจารย์ ดร.สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ กรรมการ ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้

ขอขอบคุณทุน 90 ปี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กองทุนรัชดาภิเษกสมโภช ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยนี้

ขอขอบคุณ คุณพัชรี ธีระเอก คุณสุธี ไตรวิวัฒนา คุณปริญญา บุญมาเลิศ คุณอธิพงษ์ มาลาทิพย์ และคุณสุทธิคมน์ พันธิมากรกิจ ซึ่งเป็นผู้ร่วมงานในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ สำหรับคำแนะนำและความช่วยเหลือต่าง ๆ ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ และขอขอบคุณ คุณธนิสรา เรืองเดช ผู้ที่คอยให้กำลังใจแก่ข้าพเจ้าในการทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอดจนสำเร็จลุล่วง อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ จ
กิตติกรรมประกาศ ฉ
สารบัญ ช
สารบัญภาพ ญ
คำอธิบายสัญลักษณ์ ต

บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์ 1
1.2 ผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง 2
1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ 4
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์ 4
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์ 4
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากวิทยานิพนธ์ 5

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์ 6
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวดิ่ง 6
2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบ 10

บทที่ 3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 13
3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 13
3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์ และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวดิ่ง 16
3.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่ และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบ 21

บทที่ 4 ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง **25**

4.1 ขั้นตอนการคำนวณ 25

4.2 รายละเอียดของโปรแกรม 26

4.3 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า 26

4.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม PLATEDKT 29

บทที่ 5 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ **32**

5.1 ปัญหาการโก่งของแผ่นบางเนื่องจากแรงกระทำทางกล 32

5.1.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่ถูกแรงกระจายกระทำตลอดทั้งแผ่น 32

5.1.2 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่ถูกแรงเดี่ยวกระทำที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น 36

5.1.3 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่ถูกแรงกระจายกระทำเพียงบางส่วน 39

5.1.4 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน 42

5.1.5 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง 46

5.2 ปัญหาการโก่งของแผ่นบางเนื่องจากภาระทางความร้อน 51

5.2.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่ถูกปล่อยอิสระ 51

5.2.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับด้วยลิ่ม 54

5.2.1 ปัญหาแผ่นบางวงกลมที่มีการรองรับด้วยลิ่ม 56

6.3 บทสรุป 58

บทที่ 6 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ **59**

6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ 59

6.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับประยุกต์การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ 63

6.3 ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ 64

6.4 ตัวอย่างการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง 65

บทที่ 7 ตัวอย่างปัญหาการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ **74**

7.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง 74

7.2 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีร่องตรงกลาง 79

7.3 ปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอล 83

7.4 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางโครงสร้างรูปหลังคาอยู่ด้านบน 87

7.5 ปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลาง 92

7.6 ปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุด 96

7.7 บทสรุป 100

บทที่ 8 บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ **101**

8.1 บทสรุป 101

8.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์ 102

8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต 102

รายการอ้างอิง **103**

ภาคผนวก **105**

ภาคผนวก ก รายละเอียดของโปรแกรม PLATEDKT 106

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ **131**

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1.1	การแบ่งรูปร่างของปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม	2
2.1	แผ่นบางในแนวระนาบ x-y ที่มีแรงกระทำในแนวแกน z	6
2.2	ความเค้นย่อยต่าง ๆ ผ่านความหนาของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่ยาว dx กว้าง dy และหนา t	7
2.3	โมเมนต์และแรงเฉือนย่อยตามขอบของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่ยาว dx กว้าง dy และหนา t	9
2.4	ความเค้นบนเอลิเมนต์เล็กใด ๆ ใน 2 มิติ ที่มีความยาวและความกว้าง dx และ dy	11
3.1	การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์	14
3.2	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ	14
3.3	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที	17
3.4	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ ภายใต้พิกัดธรรมชาติ	17
3.5	ลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u และ v บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ	22
4.1	ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม PLATEDKT	27
4.2	ปัญหาตัวอย่างแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบทั้งสี่รองรับด้วยลิ่ม ภายใต้แรงกระจาย	29
4.3	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่าง	30
4.4	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า 'TEST1.DAT'	30
4.5	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ 'TEST1.OUT'	31
5.1	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบทั้งสี่รองรับด้วยลิ่ม ภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง	32
5.2	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง	33
5.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง	34
5.4	การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์	35

ภาพที่		หน้า
5.5	การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์	35
5.6	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางภายใต้แรงกระจาย	35
5.7	ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงสุดของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง	36
5.8	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบทั้งสี่รองรับด้วยลิ่ม ถูกแรงเดี่ยวกระทำที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น	36
5.9	การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงเดี่ยวในแนวดิ่ง โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์	38
5.10	การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงเดี่ยวในแนวดิ่ง โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์	38
5.11	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางภายใต้แรงเดี่ยว	38
5.12	ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงสุดของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงเดี่ยวในแนวดิ่ง	39
5.13	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบทั้งสี่รองรับด้วยลิ่ม ถูกแรงกระจายกระทำเพียงบางส่วน	39
5.14	การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายเพียงบางส่วน โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์	41
5.15	การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายเพียงบางส่วน โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์	41
5.16	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายเพียงบางส่วน	42
5.17	ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงสุดของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงกระจายเพียงบางส่วน	42

ภาพที่ หน้า

5.18 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบรองรับด้วยลิ่มสามด้าน และถูกยึดตรึงกับผนังหนึ่งด้านภายใต้แรงกระจาย 43

5.19 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน 43

5.20 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน 44

5.21 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกันโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ 45

5.22 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกันโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์ 45

5.23 ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน 45

5.24 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่มีรูกลมตรงภายใต้แรงกระจาย 46

5.25 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 1/6 47

5.26 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 2/6 47

5.27 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 3/6 47

5.28 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 4/6 48

5.29 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 1/6 โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ 48

5.30 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 2/6 โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ 49

5.31 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 3/6 โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ 49

5.32 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 4/6 โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ 49

ภาพที่		หน้า
5.33	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาดต่าง ๆ	50
5.34	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่งแบบไร้มิติตลอดขอบของรูกลมของแผ่นบางภายใต้แรงกระจาย	50
5.35	ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ของค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมขนาดต่าง ๆ	51
5.36	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ถูกปล่อยอิสระและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น	52
5.37	การเสียรูปของแผ่นบางอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์	52
5.38	การเสียรูปของแผ่นบางอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์	53
5.39	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น	53
5.40	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวที่ตำแหน่ง $x = 1$ ของแผ่นบางอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น	53
5.41	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น	54
5.42	การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์	55
5.43	การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์	55
5.44	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบสี่ด้าน มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น	56
5.45	แผ่นวงกลมบางที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น	56

ภาพที่		หน้า
5.46	การเสียรูปของแผ่นบางวงกลมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบด้านนอก และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้นโดยใช้ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์	57
5.47	ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางวงกลม ที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบด้านนอกและมีการกระจายของอุณหภูมิ ตลอดความหนาแบบเชิงเส้น	58
6.1	รูปแสดงหลักการการหาค่าในแนวแกนหลัก	60
6.2	ค่าอนุพันธ์ของจุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์	61
6.3	ลักษณะของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มุมด้านหนึ่งถูกตัดและมีแรง กระทำในแนวแกนดิ่ง	65
6.4	ตัวอย่างข้อมูลในไฟล์ “testx.dat”	67
6.5	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม BUILT พร้อมคำอธิบาย	68
6.6	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาตัวอย่าง	69
6.7	ตัวอย่างไฟล์ข้อมูลในไฟล์ชื่อ “vonmis1.in”	69
6.8	การกระจายตัวของค่าความเค้นวอนมิเซสสำหรับแบบจำลอง ไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น	70
6.9	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม SPACE	70
6.10	ตัวอย่างข้อมูลภายในไฟล์ “testx.ref1”	71
6.11	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ขณะใช้โปรแกรม BUILT เพื่อการปรับขนาดเอลิเมนต์ใหม่	71
6.12	รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ของปัญหาตัวอย่าง	72
6.13	การกระจายตัวของค่าความเค้นวอนมิเซสสำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่ปรับขนาดครั้งที่ 1	72
7.1	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่มีรูกลมตรงภายใต้แรงกระจายโดยมีอัตราส่วน R/b = 1/6	74
7.2	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง โดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน	75

ภาพที่		หน้า
7.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	76
7.4	การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน	77
7.5	การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3	77
7.6	ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดสม่ำเสมอ และเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดโดยอัตโนมัติ	78
7.7	ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน	78
7.8	ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3	78
7.9	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่อง	79
7.10	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่องด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	80
7.11	การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่องโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3	81
7.12	ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่องโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3	81
7.13	ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางสี่เหลี่ยมบริเวณปลายของแนวร่องที่ถูกตัด	82
7.14	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณปลายของแนวร่องที่ถูกตัด	82
7.15	การลู่เข้าของค่าความเค้นวอนมิเซสสูงสุดของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่องด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	82
7.16	แผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น	83
7.17	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น	84

ภาพที่		หน้า
7.18	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	84
7.19	การเสียรูปของแผ่นบางแผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4	85
7.20	ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4	85
7.21	ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางรูปตัวแอลบริเวณมุมโค้งด้านในบริเวณกึ่งกลางแผ่นโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4	86
7.22	เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4 ที่บริเวณมุมโค้งด้านในบริเวณกึ่งกลางแผ่นบาง	86
7.23	การลู่เข้าของค่าความเค้นวอนมิเซสสูงสุดของแผ่นบางรูปตัวแอลที่ตำแหน่งกึ่งกลางของส่วนโค้งด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ	87
7.24	แผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางโครงสร้างรูปหลังคาอยู่ด้านบนที่ถูกแรงกระทำในแนวดิ่ง	87
7.25	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด	88
7.26	การเสียรูปแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด	88
7.27	ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด	89
7.28	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบน	89
7.29	ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น	90
7.30	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบน	90
7.31	ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว	91

ภาพที่ หน้า

7.32 การเสียรูปแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว 91
7.33 แผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลางที่ถูกแรงกระทำในแนวดิ่ง 92
7.34 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด 93
7.35 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด 93
7.36 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลาง 94
7.37 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น 94
7.38 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลาง 95
7.39 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว 95
7.40 แผ่นบางโครงสร้างที่เกิดจากแผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้ามาประกอบตั้งฉากกัน 96
7.41 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นบางโครงสร้าง 97
7.42 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุดโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด 97
7.43 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุดโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด 98
7.44 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุด 98
7.45 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุดโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น 99
7.46 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุด 99
7.47 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุดโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว 100

คำอธิบายสัญลักษณ์

A	พื้นที่
a_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
b_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
c_i	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
D	ค่าความโก่งแข็งเกร็ง
E	ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น
h	ขนาดโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์
L_i	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในรูปแบบพิกัดพื้นที่
M_x	โมเมนต์รอบแกน x
M_y	โมเมนต์รอบแกน y
M_{xy}	โมเมนต์เฉือน
M_T	โมเมนต์ความร้อน
N_i	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
p	แรงภายนอกที่มากระทำ
Q_x	แรงเฉือนในแนวแกน x
Q_x	แรงเฉือนในแนวแกน y
R	เศษตกค้าง
r	รัศมี
T	อุณหภูมิ
T_0	อุณหภูมิอ้างอิงที่วัสดุไม่เกิดความเค้น
ΔT	ผลต่างของอุณหภูมิ
t	ความหนาแผ่นบาง, ความหนาของเอลิเมนต์
u	ระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน x
v	ระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน y
W_i	ฟังก์ชันน้ำหนัก
w	ระยะการเคลื่อนตัวในแนวแกน z
x	ระยะในแนวแกน x
y	ระยะในแนวแกน y

z	ระยะในแนวแกน z
ϕ	ตัวแปรตามไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์
$\bar{\phi}$	ตัวแปรตามแม่นตรง
Γ	พื้นที่ผิวหรือขอบเขตของปัญหา
Ω	โดเมน
σ_x	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x
σ_y	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน y
$\sigma_{Von\ Mises}$	ความเค้นวอนมิเซส
τ_{xy}	ความเค้นเฉือน
ε_x	ความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x
ε_y	ความเครียดตั้งฉากในแนวแกน y
ε_0	ความเครียดอันเป็นผลมาจากอุณหภูมิ
γ_{xy}	ความเครียดเฉือน
θ_x	มุมบิดรอบแกน x
θ_y	มุมบิดรอบแกน y
ν	อัตราส่วนปัวซงส์
λ	ตัวแปรในการปรับขนาดเอลิเมนต์
α	สัมประสิทธิ์การกระจายตัวเนื่องจากความร้อน
ξ	แกนนอนในพิกัดธรรมชาติ
η	แกนตั้งในพิกัดธรรมชาติ

บทที่ 1

บทนำ

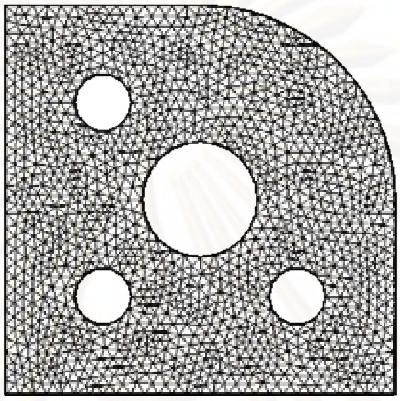
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ในปัจจุบันความรู้วิธีการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง (plate bending analysis) ได้ถูกนำมาใช้ในงานทางวิศวกรรมจำนวนมาก ตัวอย่างเช่น การเกิดรอยร้าว หรือการโก่งของกระจกบนอาคารสูง ซึ่งเป็นผลมาจากแรงดันลมและภาระความร้อนอันเกิดจากอุณหภูมิที่ต่างกันของพื้นผิวด้านในและด้านนอกอาคาร หรือโครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างต่าง ๆ เป็นต้น ซึ่งปัญหาเหล่านี้ล้วนเป็นปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ที่ซับซ้อน การแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลลัพธ์ของปัญหาดังกล่าวให้อยู่รูปในของผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) นั้นทำได้ยากหรืออาจไม่สามารถหาได้เลย ดังนั้นการนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยหาคำตอบที่อยู่ในรูปของผลเฉลยโดยประมาณจึงมีบทบาทสำคัญที่จะนำมาใช้หาผลลัพธ์ของปัญหาดังกล่าว ซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างที่มีลักษณะรูปร้างที่ซับซ้อนวิธีหนึ่ง คือระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) [1]

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ขั้นตอนแรกเริ่มต้นจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ซึ่งโดยทั่วไปเอลิเมนต์ที่นิยมใช้กันคือเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ เนื่องจากสามารถวางตัวอยู่บนรูปร่างของปัญหาที่มีความซับซ้อนได้เป็นอย่างดีดังแสดงในรูปที่ 1.1 แต่ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางนั้น การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงน้อยกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ [2] อย่างไรก็ตาม เอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้นยังคงเป็นที่ต้องการ เนื่องจากมีความยืดหยุ่นและเหมาะสมกับปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างที่ซับซ้อน และสามารถนำไปใช้ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) [3] ได้เป็นอย่างดี

เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้น เอลิเมนต์รูปแบบต่าง ๆ จึงได้ถูกพัฒนาขึ้นอย่างต่อเนื่องในช่วงหลายสิบปีที่ผ่านมา [4] โดยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อชนิดหนึ่งที่ได้ถูกพัฒนาและให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงนั้นมีชื่อว่า เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีสครีตเคอร์ชอฟฟ์ (Discrete Kirchhoff Triangle) หรือเรียกกันโดยทั่วไปว่า เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที (DKT) ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ที่มีการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องดีกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อชนิดอื่น ๆ [5-7] และยังสามารถนำไปประยุกต์เข้ากับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดย

อัตโนมัติ โดยจะปรับเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของผลลัพธ์สูง เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงมากขึ้น และปรับเอลิเมนต์ให้มีขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นเพื่อลดจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าลง ทำให้ลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลง



รูปที่ 1.1 การแบ่งรูปร่างของปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงขอนำเสนอ การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์แผ่นบางโก่งบนโครงสร้าง 3 มิติ (built-up structures) ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พร้อมทั้งนำเอาเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้เพื่อเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ อีกทั้งยังช่วยลดเวลาในการคำนวณและลดปริมาณหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ต้องใช้ในการคำนวณด้วย

1.2 ผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง

1.2.1 Stricklin, J. A., Haisler, W. E., Tisdale, P. R., and Gunderson, R. [5] ได้นำเสนอการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อชนิดใหม่ (เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที) ที่ประกอบไปด้วย 9 ระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง ซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องได้อย่างรวดเร็วเมื่อลดขนาดของเอลิเมนต์ลง

1.2.2 Batoz, J. L., Bathe, K. J., and Ho, L. W. [6] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางโดยละเอียด และได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของเอลิเมนต์ชนิดนี้กับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอื่น ๆ ที่ประกอบไปด้วย 9 ระดับขั้นความเสรี พบว่าเอลิเมนต์

สามเหลี่ยมแบบดีเคทีเป็นเอลิเมนต์ที่มีประสิทธิภาพสูงในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

1.2.3 Batoz, J. L. [7] ได้นำเสนอการประดิษฐ์เมทริกซ์ความแข็งเกร็ง (stiffness matrix) ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในพิกัดย่อย (local coordinates) และได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของเอลิเมนต์ชนิดนี้กับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอื่น ๆ ซึ่งพบว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นมีประสิทธิภาพดีกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอื่น ๆ ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

1.2.4 Hrabok, M. M. and Hrudey T. M. [4] ได้กล่าวโดยสรุปถึงเอลิเมนต์ชนิดต่าง ๆ ที่ได้ถูกพัฒนาตลอดจนแนวทางในการวิจัยและพัฒนาในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในช่วงหลายปีที่ผ่านมา

1.2.5 Jeyachandrabose, C., Kirkhope J., and Babu C. R. [8] ได้นำเสนอการประดิษฐ์เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในพิกัดรวม (global coordinates) ทำให้ลดเวลาและความซับซ้อน รวมไปถึงความผิดพลาดในการคำนวณที่อาจเกิดขึ้นจากการแปลงเมทริกซ์ความแข็งเกร็งจากพิกัดย่อยไปสู่พิกัดรวมในขั้นตอนการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าสู่ระบบสมการรวม และสามารถนำเมทริกซ์ไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

1.2.6 Dechaumphai, P. [2] ได้นำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน โดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของผลลัพธ์สูง เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ และใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของผลลัพธ์ต่ำ เพื่อลดหน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

1.2.7 Dechaumphai, P. [9] ได้นำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบ ซึ่งทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงมากขึ้น โดยใช้จำนวนเอลิเมนต์เวลาในการคำนวณน้อยลง

1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.3.1 ศึกษาพฤติกรรมและทฤษฎีของปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

1.3.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที

1.3.3 ศึกษาและประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางใน 3 มิติ

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.4.1 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และเอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับปัญหาโครงสร้างแผ่นบางใน 3 มิติ

1.4.2 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางใน 3 มิติ

1.4.3 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของผลลัพธ์ในการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางใน 3 มิติ

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

1.5.1 ศึกษาทฤษฎีและสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

1.5.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที

1.5.3 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที

1.5.4 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาอย่างง่ายที่ทราบผลเฉลยแม่นตรง

1.5.5 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น

1.5.6 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปใช้แก้ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างซับซ้อน

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากวิทยานิพนธ์

1.6.1 มีความเข้าใจในการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1.6.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างซับซ้อนใน 3 มิติได้

1.6.3 เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางต่อไปในอนาคต

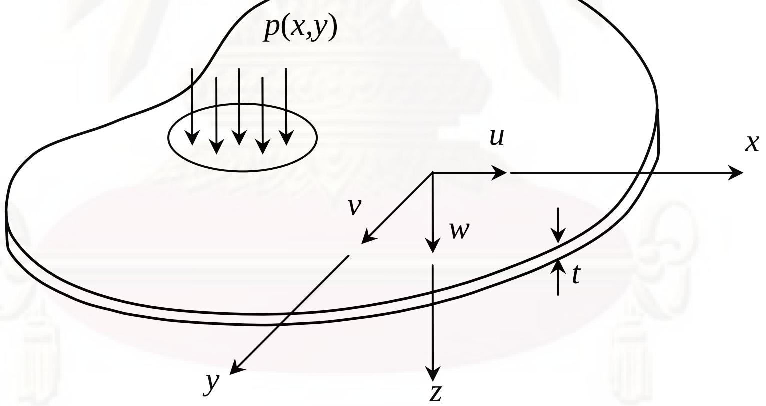
บทที่ 2

สมการเชิงอนุพันธ์

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การทำความเข้าใจในการหาลักษณะการโก่งตัวและความเค้นอันเนื่องมาจากแรงกระทำทางกลและภาระทางความร้อนของโครงสร้างแผ่นบาง จะต้องอาศัยทฤษฎีทางกลศาสตร์ของแข็งเป็นสำคัญ ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีทางกลศาสตร์ของแข็ง เพื่อนำมาสู่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำทางกลและภาระทางความร้อนทั้งในแนวดิ่งและในแนวระนาบ

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวดิ่ง

แผ่นบางรูปร่างลักษณะใด ๆ ซึ่งมีความหนา t และวางตัวอยู่ในแนวระนาบ x-y ที่กึ่งกลางความหนาของแผ่นบาง ถูกแรงแบบกระจาย (distributed load) มีค่า $p(x,y)$ มากระทำในแนวแกนดิ่ง z ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แผ่นบางในแนวระนาบ x-y ที่มีแรงกระทำในแนวแกน z

สมมุติฐานพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง [1] คือ ระนาบหน้าตัดที่ตั้งฉากผ่านความหนาของแผ่นบางนั้นยังคงเป็นระนาบที่ตั้งฉากเช่นเดิมหลังจากที่แผ่นบางเกิดการโก่งตัวไปแล้ว ซึ่งสมมุติฐานนี้ก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างค่าเคลื่อนตัว u และ v ในแนวระนาบ x และ y กับค่าการเคลื่อนตัว w ในแนวแกนดิ่ง z คือ

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{และ} \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.1}$$

ดังนั้นค่าความเครียด (strain) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าการเคลื่อนตัวในแนวดิ่ง w ได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2.2ก}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2.2ข}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.2ค}$$

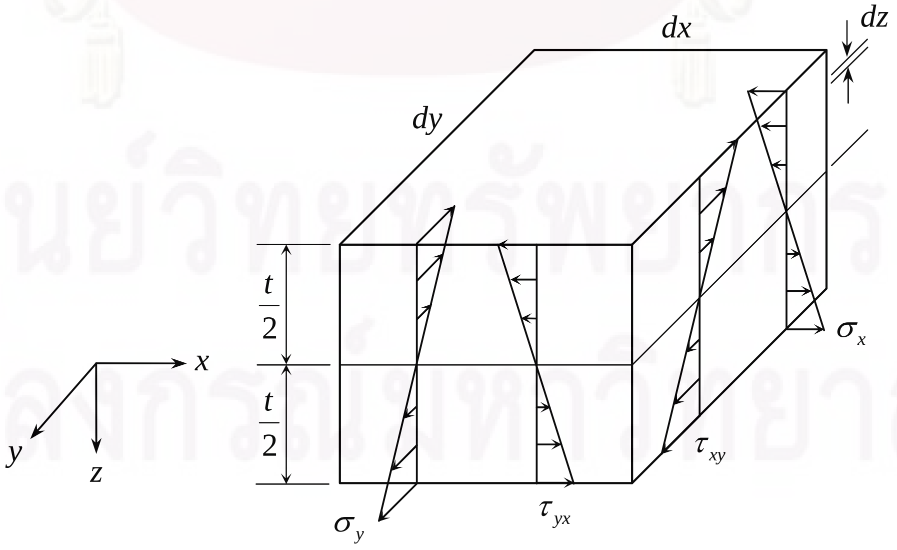
จากความสัมพันธ์ตามกฎของฮุค (Hooke's law) [10] สามารถเขียนค่าความเค้น (stress) ในรูปแบบของค่าการเคลื่อนตัวในแนวดิ่ง w ได้เป็น

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right) = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)z \tag{2.3ก}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right) = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)z \tag{2.3ข}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = -\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)z \tag{2.3ค}$$

ค่าความเค้นเหล่านี้ก่อให้เกิดโมเมนต์ย่อยและแรงเฉือนต่าง ๆ ตามมา รูปที่ 2.2 แสดงความเค้นตามขอบของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่มีความยาว dx และ dy ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ



รูปที่ 2.2 ความเค้นย่อยต่าง ๆ ผ่านความหนาของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่ยาว dx กว้าง dy และหนา t

โมเมนต์ย่อยต่าง ๆ ได้แก่

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \int_{-t/2}^{t/2} -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)z^2 dz$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (2.4)$$

โดย $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ (2.5)

คือ ค่าความแข็งเกร็งของการโก่ง (flexural rigidity) และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (2.6)$$

$$M_{xy} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.7)$$

$$M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = -M_{xy} \quad (2.8)$$

ส่วนแรงเฉือนต่าง ๆ นั้น ได้แก่

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad (2.9)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \quad (2.10)$$

ซึ่งลักษณะและทิศทางของโมเมนต์และแรงที่เกิดขึ้นแสดงไว้ดังรูปที่ 2.3

หลังจากแผ่นบางเกิดการโก่งตัวและอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium condition) ผลรวมของแรงในแนวแกนดิ่งต้องเท่ากับศูนย์ดังสมการ (2.11)

$$\sum F_z = 0 \ ; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p = 0 \quad (2.11)$$

และผลรวมของโมเมนต์รอบแกน y และ x ต้องเท่ากับศูนย์เช่นกัน ดังสมการ (2.12) และ (2.13)

$$\sum M_y = 0 \ ; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}-Q_x = 0 \quad (2.12)$$

$$\sum M_x = 0; \qquad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \tag{2.13}$$

จากสมการ (2.12) และ (2.13) จะได้ว่า

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \tag{2.14}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \tag{2.15}$$

จากนั้น แทนค่า Q_x และ Q_y ลงในสมการ (2.11) จะได้

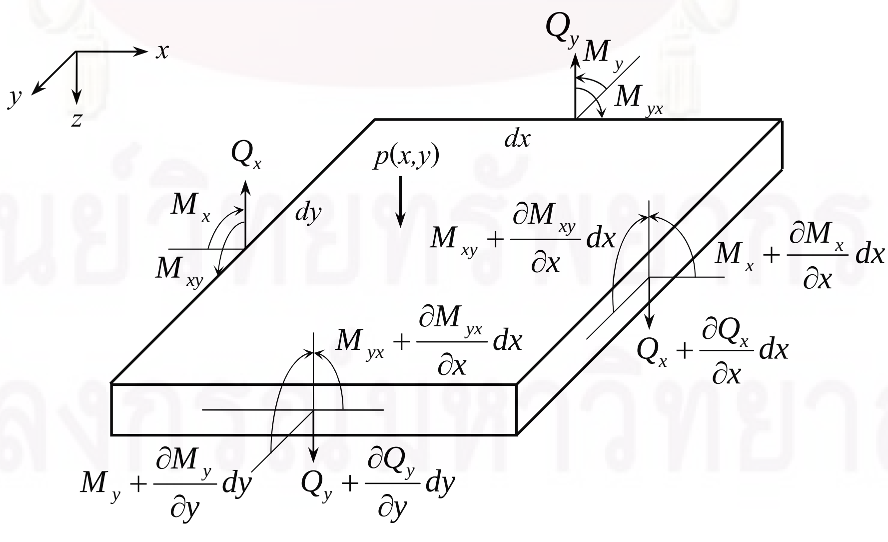
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p = 0 \tag{2.16}$$

แทนค่า M_x, M_y และ M_{xy} จากสมการ (2.4), (2.6) และ (2.7) ลงในสมการ (2.16) ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบาง นั่นคือ

$$-D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right) - D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right) - 2D(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -p(x,y)$$

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = p(x,y) \tag{2.17}$$



รูปที่ 2.3 โมเมนต์และแรงเฉือนย่อยตามขอบของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่ยาว dx กว้าง dy และหนา t

โดยสมการ (2.17) นี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในกรณีที่มีเฉพาะแรงกระทำในแนวดิ่ง หากเราพิจารณารวมถึงการโก่งอันเกิดจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาซึ่งก่อให้เกิดความเค้นเนื่องจากความร้อน (thermal stress) ค่าโมเมนต์ย่อย M_x และ M_y ในสมการ (2.4) และ (2.6) จะเปลี่ยนเป็น [11]

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{1-\nu} M_T \tag{2.18}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{1-\nu} M_T \tag{2.19}$$

โดยที่

$$M_T = E\alpha \int_{-t/2}^{t/2} T(z) z dz \tag{2.20}$$

และเรียก M_T ว่า โมเมนต์ความร้อน (thermal moment) ส่วน $T(z)$ คือ การกระจายตัวของอุณหภูมิตลอดความหนาของแผ่นบาง

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่มีแรงกระทำในแนวดิ่ง และมีผลจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2.21)

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2}\right) + p(x,y) \tag{2.21}$$

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบ

พิจารณาความเค้นบนเอลิเมนต์เล็กใด ๆ ใน 2 มิติ ที่มีความยาวและความกว้าง dx และ dy ในแนวแกน x และ y ที่มีความหนาหนึ่งหน่วย โดยไม่คิดน้ำหนักของตัวเอง ดังแสดงในรูปที่ 2.4

ในสภาวะสมดุล (equilibrium condition) ผลรวมของโมเมนต์รอบแกนดิ่งต้องเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

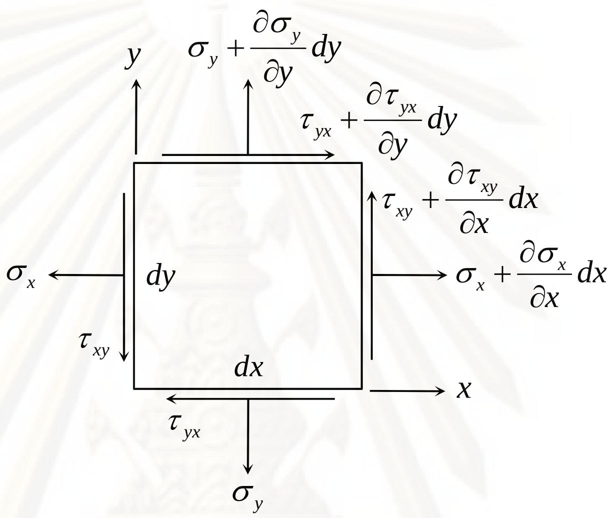
$$\sum M_z = 0 \; ; \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{2.22}$$

และผลรวมของแรงในแนวแกน x และ y ต้องเท่ากับศูนย์ จึงนำมาสู่สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบ คือ

$$\sum F_x = 0 \;; \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{2.23}$$

$$\sum F_y = 0 \;; \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{2.24}$$

โดย σ_x, σ_y แทนค่าความเค้นฉาก (normal stress) ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ส่วน τ_{xy} แทนค่าความเค้นเฉือน (shearing stress)



รูปที่ 2.4 ความเค้นบนเอลิเมนต์เล็กใด ๆ ใน 2 มิติ ที่มีความยาวและความกว้าง dx และ dy

โดยค่าความเค้นต่าง ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าความเครียดได้จาก ความสัมพันธ์ตามกฎของฮุค (Hooke's law) [10] ดังนี้

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - \frac{E}{1-\nu}\alpha\left(T(x,y) - T_0\right) \tag{2.25ก}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - \frac{E}{1-\nu}\alpha\left(T(x,y) - T_0\right) \tag{2.25ข}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{2.25ค}$$

โดย E แทนค่าโมดูลัสของยังส์ (Young's modulus) และ ν แทนค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง (Poisson's ratio) ส่วน $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ แทนค่าความเครียดฉาก (normal strain) ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ, γ_{xy} แทนค่าความเครียดเฉือน, α แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (coefficient of thermal expansion), $T(x,y)$ แทนการกระจายตัวของอุณหภูมิของแผ่นบางใน

แนวระนาบ x และ y และ T_0 แทนอุณหภูมิอ้างอิงที่วัสดุไม่เกิดความเค้น (reference temperature for zero stress) เช่นที่อุณหภูมิห้อง

ค่าความเครียดเหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของระยะการเคลื่อนตัว u และ v ในแนวแกน x และ y ได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.26ก}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.26ข}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.26ค}$$

ดังนั้น สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบ ตัวแปรไม่ทราบค่าจะมีเพียง 2 ค่าเท่านั้น คือ u และ v เมื่อเราทราบค่า u และ v แล้วจึงสามารถนำไปคำนวณหาค่าความเครียดและความเค้นย่อยต่าง ๆ ได้ตามลำดับ

บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ในบทนี้จะแสดงการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำทางกลและภาระทางความร้อน โดยจะเริ่มต้นด้วยขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์หรือเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวดิ่ง สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวดิ่งที่ประดิษฐ์ขึ้นจากการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที รวมไปถึงสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่ ซึ่งไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์เหล่านี้สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลัก [1] ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่1 แบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ เช่น แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.1 จากนั้นทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$$D(\bar{\phi}) = 0 \tag{3.1}$$

โดยที่ D คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator)

$\bar{\phi}$ คือ ตัวแปรตามแม่นตรง

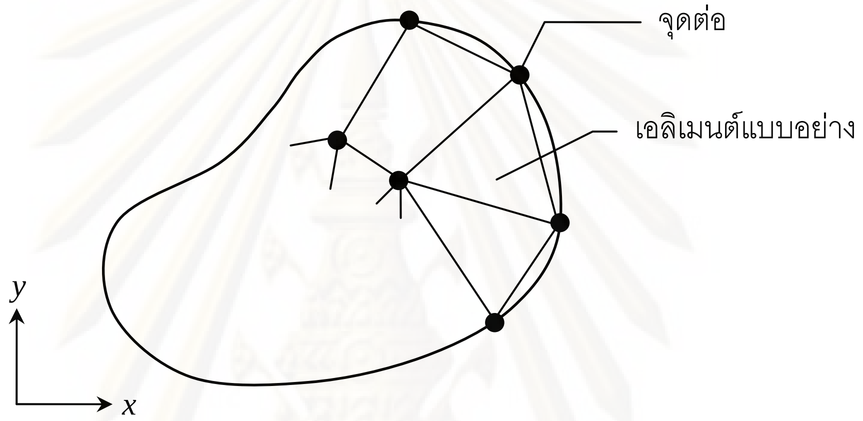
ขั้นตอนที่ 2 เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation function) ยกตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบไปด้วย 3 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยที่จุดเหล่านี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่ทราบค่า (nodal unknowns) ซึ่งในที่นี้คือ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อดังแสดงในสมการ (3.2)

$$\phi \quad = \quad \phi(x,y) \quad = \quad \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

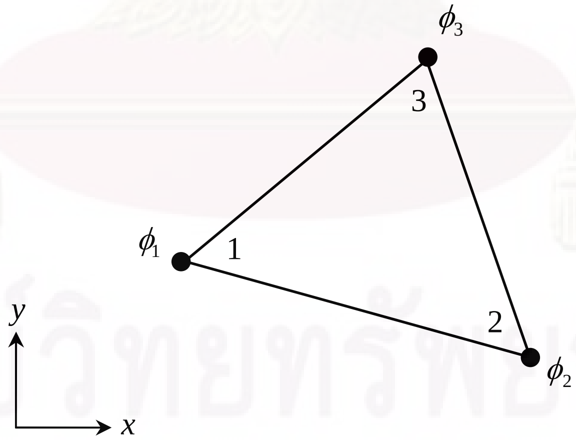
$$\phi(x,y) \quad = \quad \underset{(1\times3)}{\lfloor N \rfloor} \underset{(3\times1)}{\{\phi\}} \tag{3.2}$$

โดยที่ $\lfloor N \rfloor$ คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์



รูปที่ 3.1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ (element equations) ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residual) โดยเริ่มต้นจากการนำผลเฉลยโดยประมาณในสมการ (3.2) มาแทนลงในสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำลังพิจารณา ซึ่งในที่นี้คือสมการ (3.1) จะพบเศษตกค้าง (Residual) เกิดขึ้นดังแสดงในสมการ (3.3)

$$R \quad = \quad D(\phi) \quad = \quad D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) \tag{3.3}$$

โดยที่ R คือ เศษตกค้าง

m คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์

จากนั้นจึงทำการลดความผิดพลาดให้น้อยที่สุดด้วยวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin) โดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighted function) W จากนั้นทำการอินทิเกรทตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งคือ

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega \quad = \quad 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m \tag{3.4}$$

ถ้าเราเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักโดยให้ $W_i = N_i$ จะเรียกว่าวิธีบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) แต่หากเลือก $W_i \neq N_i$ จะเรียกว่าวิธีเพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 อินทิเกรททีละส่วน (integrate by part) ซึ่งจะทำการแทนสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.4) แล้วอินทิเกรททีละส่วนจะได้

$$\int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad = \quad \int_{\Omega^{(e)}} W_i D\left(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i\right) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} W_i R d\Omega \quad = \quad \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} \left(W_i, N_i, \phi_i\right) d\Omega}_{\substack{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน} \\ \text{ของเอลิเมนต์, } \Omega^{(e)}}} \quad + \quad \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} \left(W_i, N_i, \phi_i\right) d\Gamma}_{\substack{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต} \\ \text{ของเอลิเมนต์, } \Gamma^{(e)}}} \tag{3.5}$$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ ด้วยสภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหาที่พิจารณา

ขั้นตอนที่ 6 เขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ นั่นคือ

$$\underset{(m\times m)}{\left[K\right]} \quad \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} \quad = \quad \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \tag{3.6}$$

โดยที่ $\left[K\right]$ คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง (element stiffness matrix)

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (vector of nodal unknown)

$\{F\}$ คือ โหลดเวกเตอร์ที่จุดต่อ (vector of nodal load)

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.6) จึงทำการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันอันก่อให้เกิดสมการระบบรวม จากนั้นจึงทำการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ ต่อไป

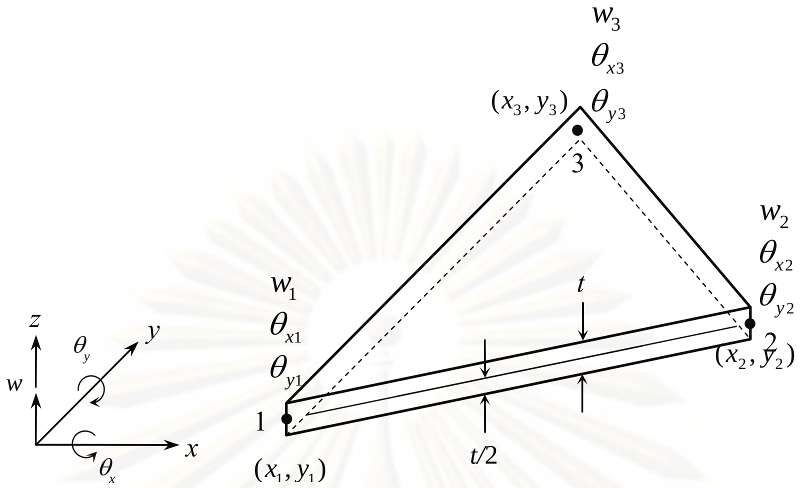
3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์ และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวดิ่ง

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์ (Discrete Kirchhoff Triangle) หรือเรียกกันโดยทั่วไปว่า เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที (DKT) ได้ถูกนำเสนอครั้งแรกในเอกสารอ้างอิง [5] ว่าเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งสามารถให้ผลลัพธ์ซึ่งลู่เข้าสู่ผลลัพธ์แม่นตรงได้เร็วเมื่อลดขนาดของเอลิเมนต์ลง หลังจากนั้นเอกสารอ้างอิง [6] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของเอลิเมนต์ชนิดนี้โดยละเอียดและเปรียบเทียบประสิทธิภาพของเอลิเมนต์ชนิดนี้กับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอื่น ๆ โดยพบว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนี้เป็นเอลิเมนต์ที่มีประสิทธิภาพสูงในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

เหตุผลเบื้องหลังที่เอลิเมนต์ชนิดนี้สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง เพราะว่าขั้นตอนของการประดิษฐ์นั้นเริ่มจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขหลาย ๆ ประการเพื่อลดจำนวนตัวไม่รู้ค่าทำให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อนี้ลดรูปลงเป็นเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ โดยแต่ละจุดต่อประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า 3 ค่านั่นคือ ค่าของการเคลื่อนตัวในแนวดิ่ง w และค่ามุมบิด θ_x และ θ_y ที่บิดไปรอบแกน x และ y สำหรับ จึงมีจำนวนตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด 9 ค่าต่อหนึ่งเอลิเมนต์เท่ากับจำนวนตัวไม่รู้ค่าของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแผ่นบางทั่วไป

เงื่อนไขหลาย ๆ ประการที่ใช้ในการประดิษฐ์เอลิเมนต์ชนิดนี้ซึ่งได้นำเสนอโดยละเอียดในเอกสารอ้างอิง [6] ประกอบด้วย : (1) การสมมุติลักษณะการกระจายของมุมบิดในรูปแบบกำลังสอง (quadratic) บนเอลิเมนต์ (2) การกำหนดให้ความเครียดเฉือนย่อยในแนวดิ่ง (transverse shears) มีค่าเป็นศูนย์ที่จุดต่อทั้งสาม (3) การกำหนดให้ลักษณะการเคลื่อนตัวในแนวดิ่ง w แปรผันในรูปกำลังสาม (cubic) ตลอดด้านทั้งสามของเอลิเมนต์ และ (4) การกำหนดให้ค่ามุมบิดที่ตั้งฉากกับด้านทั้งสามของเอลิเมนต์มีการกระจายแบบเชิงเส้น (linear)

รูปที่ 3.3 แสดงลักษณะของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีซึ่งประกอบด้วย 3 จุดต่อวางตัวในแนวระนาบ x-y โดยแต่ละจุดต่อประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า คือ ค่าการเคลื่อนตัว w ในแนวแกนดิ่ง z และค่ามุมบิด θ_x และ θ_y ที่บิดไปรอบแกน x และ y ตามลำดับ



รูปที่ 3.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที

ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น การประดิษฐ์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีแบบ 3 จุดต่อนี้เริ่มจากการกำหนดให้การกระจายของค่ามุมบิดในรูปแบบกำลังสองบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 3.4 ซึ่งมีฟังก์ชันการประมาณภายในอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ (natural coordinates) คือ

$$N_1 = 2(1-\xi-\eta)(\frac{1}{2}-\xi-\eta) \quad (3.7ก)$$

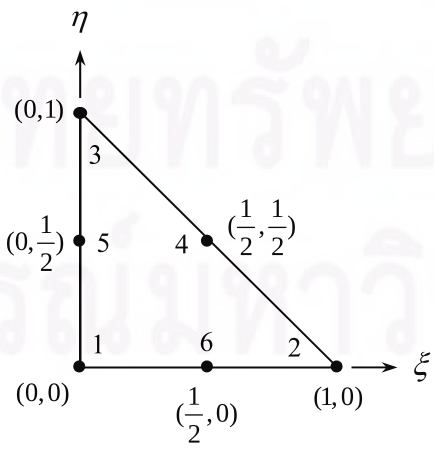
$$N_2 = \xi(2\xi-1) \quad (3.7ข)$$

$$N_3 = \eta(2\eta-1) \quad (3.7ค)$$

$$N_4 = 4\xi\eta \quad (3.7ง)$$

$$N_5 = 4\eta(1-\xi-\eta) \quad (3.7จ)$$

$$N_6 = 4\xi(1-\xi-\eta) \quad (3.7ฉ)$$



รูปที่ 3.4 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ ภายใต้พิกัดธรรมชาติ

และด้วยสมมติฐานต่าง ๆ ที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ค่ามุมบิดดังกล่าวในแนวแกน x และ y ที่จุดต่อทั้งหมด 12 ค่านั้นสามารถแปลงให้อยู่ในรูปของค่าการเคลื่อนตัวในแนวดิ่ง w และค่าความชัน $\frac{\partial w}{\partial x}$ และ $\frac{\partial w}{\partial y}$ ที่จุดยอดมุมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมทั้งสาม และเนื่องจาก $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ และ $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ดังนั้นตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์จึงลดรูปลงเหลือ 9 ค่า อันได้แก่ค่าการเคลื่อนตัวในแนวดิ่ง w และค่ามุมบิด θ_x และ θ_y รอบแกน x และ y ตามลำดับที่จุดต่อทั้งสามของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ จากนั้นจึงประยุกต์วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในสมการ (2.21) ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถนำไปใช้ประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ คือ

$$\underset{(9\times9)}{[K]}\underset{(9\times1)}{\{\delta\}} = \underset{(9\times1)}{\{F_p\}} + \underset{(9\times1)}{\{F_T\}} \tag{3.8}$$

โดยโหลดเวกเตอร์ $\{F_p\}$ ทางด้านขวาของสมการนี้ประกอบด้วยแรงที่จุดต่ออันเนื่องมาจากแรงเดี่ยวภายนอก (concentrated load) หรือแรงแบบกระจาย (distributed load) และ $\{F_T\}$ คือโหลดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา ส่วนเมทริกซ์ของความแข็งเกร็งทางด้านซ้ายของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ

$$\underset{(9\times9)}{[K]} = 2A\int_0^1\int_0^{1-\eta} \underset{(9\times3)}{[B]^T}\underset{(3\times3)}{[D]}\underset{(3\times9)}{[B]}\, d\xi d\eta \tag{3.9}$$

โดยที่

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

และ

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{31}\left[\frac{\partial H_x}{\partial \xi}\right] + y_{12}\left[\frac{\partial H_x}{\partial \eta}\right] \\ -x_{31}\left[\frac{\partial H_y}{\partial \xi}\right] - x_{12}\left[\frac{\partial H_y}{\partial \eta}\right] \\ -x_{31}\left[\frac{\partial H_x}{\partial \xi}\right] - x_{12}\left[\frac{\partial H_x}{\partial \eta}\right] + y_{31}\left[\frac{\partial H_y}{\partial \xi}\right] + y_{12}\left[\frac{\partial H_y}{\partial \eta}\right] \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

และพื้นที่ A ของเอลิเมนต์ คำนวณได้จาก $(x_{31}y_{12} - x_{12}y_{31})/2$ ซึ่งในที่นี้ x_{ij} และ y_{ij} หมายถึง

$$x_{ij} = x_i - x_j \qquad \text{และ} \qquad y_{ij} = y_i - y_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.12}$$

ส่วน H_x และ H_y ในเมทริกซ์ทางด้านขวาของสมการ (3.11) แทนฟังก์ชันการประมาณภายในที่ใช้สมมุติลักษณะการกระจายของมุมบิดรอบแกน x และ y ตามลำดับ ค่าฟังก์ชันเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ H_x และ H_y เมื่อเทียบกับ ξ และ η สามารถเขียนขึ้นเป็นสมการได้โดยตรง [6] ดังนี้

$$\left\{\frac{\partial H_x}{\partial \xi}\right\} = \begin{Bmatrix} p_6(1-2\xi)+\eta(p_5-p_6) \\ q_6(1-2\xi)-\eta(q_5+q_6) \\ -4+6(\xi+\eta)+r_6(1-2\xi)-\eta(r_5+r_6) \\ -p_6(1-2\xi)+\eta(p_4+p_6) \\ q_6(1-2\xi)+\eta(q_4-q_6) \\ -2+6\xi+r_6(1-2\xi)+\eta(r_4-r_6) \\ -\eta(p_4+p_5) \\ \eta(q_4-q_5) \\ \eta(r_4-r_5) \end{Bmatrix} \tag{3.13ก}$$

$$\left\{\frac{\partial H_y}{\partial \xi}\right\} = \begin{Bmatrix} t_6(1-2\xi)+\eta(t_5-t_6) \\ 1+r_6(1-2\xi)-\eta(r_5+r_6) \\ -q_6(1-2\xi)+\eta(q_5+q_6) \\ -t_6(1-2\xi)+\eta(t_4+t_6) \\ -1+r_6(1-2\xi)+\eta(r_4-r_6) \\ -q_6(1-2\xi)-\eta(q_4-q_6) \\ -\eta(t_4+t_5) \\ \eta(r_4-r_5) \\ -\eta(q_4-q_5) \end{Bmatrix} \tag{3.13ข}$$

$$\left\{\frac{\partial H_x}{\partial \eta}\right\} = \begin{Bmatrix} -p_5(1-2\eta)+\xi(p_5-p_6) \\ q_5(1-2\eta)-\xi(q_5+q_6) \\ -4+6(\xi+\eta)+r_5(1-2\eta)-\xi(r_5+r_6) \\ \xi(p_4+p_6) \\ \xi(q_4-q_6) \\ \xi(r_4-r_6) \\ p_5(1-2\eta)-\xi(p_4+p_5) \\ q_5(1-2\eta)+\xi(q_4-q_5) \\ -2+6\eta+r_5(1-2\eta)+\xi(r_4-r_5) \end{Bmatrix} \tag{3.13ค}$$

$$\left\{\frac{\partial H_y}{\partial \eta}\right\} = \left\{\begin{matrix} -t_5(1-2\eta)+\xi(t_5-t_6) \\ 1+r_5(1-2\eta)-\xi(r_5+r_6) \\ -q_5(1-2\eta)+\xi(q_5+q_6) \\ \xi(t_4+t_6) \\ \xi(r_4-r_6) \\ -\xi(q_4-q_6) \\ t_5(1-2\eta)-\xi(t_4+t_5) \\ -1+r_5(1-2\eta)+\xi(r_4-r_5) \\ -q_5(1-2\eta)-\xi(q_4-q_5) \end{matrix}\right\} \qquad (3.13ง)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในสมการ (3.13ก-ง) นั้น คำนวณได้จาก

$$p_k = -6x_{ij} / \ell_{ij}^2 \qquad (3.14ก)$$

$$q_k = 3x_{ij}y_{ij} / \ell_{ij}^2 \qquad (3.14ข)$$

$$t_k = -6y_{ij} / \ell_{ij}^2 \qquad (3.14ค)$$

$$r_k = 3y_{ij}^2 / \ell_{ij}^2 \qquad (3.14ง)$$

โดย k = 4, 5, 6 เมื่อ ij = 23, 31, 12 ตามลำดับ และ $\ell = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}$

ดังนั้น เมทริกซ์ความแข็งเกร็งตามสมการ (3.9) สำหรับแต่ละเอลิเมนต์จึงสามารถคำนวณได้โดยใช้การอินทิเกรทเชิงตัวเลข (numerical integration) อย่างไรก็ตามในเวลาต่อมาเอกสารอ้างอิง [8] ได้นำเสนอการคำนวณเมทริกซ์ความแข็งเกร็งนี้โดยประดิษฐ์ขึ้นเป็นสมการในรูปแบบปิด (closed-form expression) ทำให้ช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงไปได้มาก อีกทั้งยังช่วยหลีกเลี่ยงความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากการอินทิเกรทเชิงตัวเลขได้อีกด้วย

โหลดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา $\{F_T\}$ นั้น คำนวณได้จาก

$$\{F_T\} = \int_A [B]^T \{M\}\, dA \qquad (3.15)$$

$$\{M\}^T = \lfloor M_T \quad M_T \quad 0 \rfloor \qquad (3.16)$$

โดย M_T คือ โมเมนต์ความร้อน (thermal moment) ดังแสดงไว้ในสมการ (2.20)

ซึ่งหลังจากการอินทิเกรทพจน์ของโหลดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบปิดสำหรับเอลิเมนต์ที่ค่าอุณหภูมิเปลี่ยนแปลงตลอดความหนา $T = T(z)$ ได้ดังนี้

$$\{F_T\} = M_T[G]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

$$[G] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} y_{31}\lfloor G_{11}\rfloor + y_{12}\lfloor G_{12}\rfloor \\ -x_{31}\lfloor G_{21}\rfloor - x_{12}\lfloor G_{22}\rfloor \\ -x_{31}\lfloor G_{11}\rfloor - x_{12}\lfloor G_{12}\rfloor + y_{31}\lfloor G_{21}\rfloor + y_{12}\lfloor G_{22}\rfloor \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

โดยที่เมทริกซ์แนวนอน $\lfloor G_{ij}\rfloor$ และ i, j = 1, 2 นั้น มีรายละเอียดดังนี้

$$\lfloor G_{11}\rfloor = \lfloor p_5 \quad -q_5 \quad -r_5 \quad p_4 \quad q_4 \quad r_4 \quad (-p_4 - p_5) \quad (q_4 - q_5) \quad (r_4 - r_5)\rfloor$$

$$\lfloor G_{12}\rfloor = \lfloor -p_6 \quad -q_6 \quad -r_6 \quad (p_4 + p_6) \quad (q_4 - q_6) \quad (r_4 - r_6) \quad -p_4 \quad q_4 \quad r_4\rfloor \quad (3.19)$$

$$\lfloor G_{21}\rfloor = \lfloor t_5 \quad (3 - r_5) \quad q_5 \quad t_4 \quad (-3 + r_4) \quad -q_4 \quad (-t_4 - t_5) \quad (r_4 - r_5) \quad (-q_4 + q_5)\rfloor$$

$$\lfloor G_{22}\rfloor = \lfloor -t_6 \quad (3 - r_6) \quad q_6 \quad (t_4 + t_6) \quad (r_4 - r_6) \quad (-q_4 + q_6) \quad -t_4 \quad (-3 + r_4) \quad -q_4\rfloor$$

3.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบ

พิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อใด ๆ ที่มีลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u และ v ในแนวแกน x และ y ตลอดทั้งเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงแผ่นเรียบ (flat plane) ดังแสดงในรูปที่ 3.5 โดยลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u และ v นี้บนเอลิเมนต์เป็นดังสมการ (3.20)

$$\{\bar{\delta}_m\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.20ก)$$

$$= [N]\{\delta_m\} \quad (3.20ข)$$

โดยที่ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ N_i หาได้จากสมการ

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

โดย A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งคำนวณได้จากพิกัดของจุดต่อที่มุมทั้งสาม คือ

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

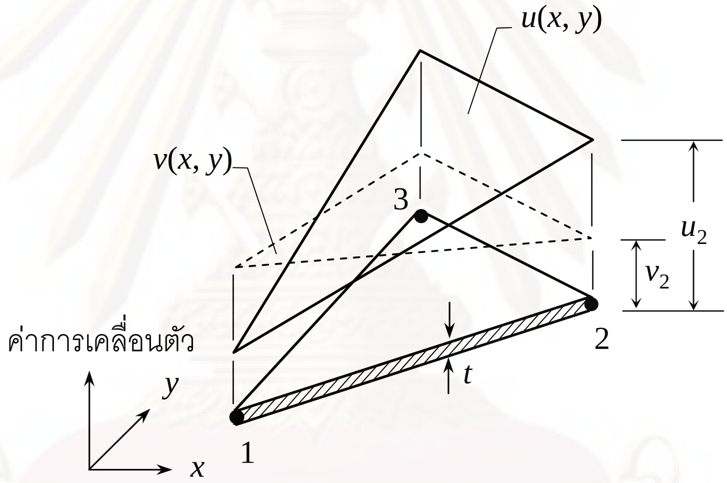
$$A = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3-y_1)+x_1(y_2-y_3)+x_3(y_1-y_2)\right] \qquad (3.22)$$

และสัมประสิทธิ์ a_i, b_i, c_i ; i = 1, 2, 3 ในสมการ (3.21) คือ

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \qquad b_1 = y_2 - y_3 \qquad c_1 = x_3 - x_2 \qquad (3.23ก)$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1 \qquad c_2 = x_1 - x_3 \qquad (3.23ข)$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2 \qquad c_3 = x_2 - x_1 \qquad (3.23ค)$$



รูปที่ 3.5 ลักษณะการกระจายของค่าการเคลื่อนตัว u และ v บนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ

จากความสัมพันธ์ของค่าความเครียดและค่าการเคลื่อนตัวในสมการ (2.26) จึงสามารถเขียนค่าเวกเตอร์ของความเครียด $\{\varepsilon\}$ ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ของค่าการเคลื่อนตัวในแนวระนาบ $\{\delta_m\}$ ได้ดังนี้

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad (3.24ก)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.24ข)$$

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.24ค)$$

$$\{\varepsilon\} = [B_m]\{\delta_m\} \qquad (3.24ง)$$

จากความสัมพันธ์ตามกฎของฮุค (Hooke's law) ในสมการ (2.25) สามารถเขียนเวกเตอร์ของค่าความเค้น $\{\sigma\}$ ให้อยู่ในรูปของค่าเวกเตอร์ความเครียด $\{\varepsilon\}$ ได้โดย

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha\left(T(x,y)-T_0\right) \\ \varepsilon_y - \alpha\left(T(x,y)-T_0\right) \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (3.25ก)$$

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [C]\{\varepsilon_0\} \qquad (3.25ข)$$

แทนค่าเวกเตอร์ของความเครียด $\{\varepsilon\}$ จากสมการ (3.24) จะได้

$$\{\sigma\} = [C][B_m]\{\delta_m\} - [C]\{\varepsilon_0\} \qquad (3.26)$$

ในที่นี้ $\{\varepsilon_0\}$ คือเวกเตอร์ของค่าความเครียดชั้นต้นซึ่งเป็นผลมาจากอุณหภูมิ ดังแสดงในสมการ

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha\}\left(T(x,y)-T_0\right) \qquad (3.27)$$

โดยที่

$$\{\alpha\}^T = \lfloor \alpha \quad \alpha \quad 0 \rfloor \qquad (3.28)$$

ทำการแทนค่าสมการ (3.26) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบสมการ (2.23) และ (2.24) และทำการประยุกต์วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบ [12] คือ

$$\underset{(6\times6)}{[K_m]}\underset{(6\times1)}{\{\delta_m\}} = \underset{(6\times1)}{\{F_b\}} + \underset{(6\times1)}{\{F_0\}} \qquad (3.29)$$

โดยที่เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง $\left[K_m\right]$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการคูณกันของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\left[K_m\right] \quad = \quad \left[B_m\right]^T \left[C\right]\left[B_m\right] t A \qquad (3.30)$$

ส่วน $\{F_b\}$ คือโหลดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากแรงภายนอกกระทำที่จุดต่อในระนาบ x-y และ $\{F_0\}$ คือโหลดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปซึ่งแสดงไว้ดังสมการ (3.31)

$$\{F_0\} \quad = \quad \left[B_m\right]^T \left[C\right](T - T_0) t A \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3.31)$$

โดยในที่นี้ อุณหภูมิ $T(x,y)$ ถูกสมมุติให้คงที่ตลอดทั้งเอลิเมนต์ ซึ่งหากอุณหภูมิบนเอลิเมนต์นั้นแปรผันในลักษณะแผ่นเรียบ ค่า T ในโหลดเวกเตอร์นี้จะเป็นค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิที่จุดต่อทั้งสาม

จะเห็นได้ว่า เมทริกซ์ $\left[B_m\right]$ ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเครียดและค่าการเคลื่อนตัวที่แสดงในสมการ (3.24) นั้น เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าความเครียดคงตัวโดยมีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดต่อทั้งสาม เอลิเมนต์นี้จึงถูกเรียกว่า เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่ (constant strain triangle - CST) โดยเอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ ของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในแนวระนาบโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีค่าความเครียดคงที่นั้นอยู่ในรูปแบบปิด และสามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

บทที่ 4

ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับ
การวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง

จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 จะถูกนำมาประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง โปรแกรมดังกล่าวนี้ถูกประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) โดยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีชื่อว่า PLATEDKT รายละเอียดต่าง ๆ ของโปรแกรมดังกล่าวมีดังนี้

4.1 ขั้นตอนการคำนวณ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ PLATEDKT ประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และโปรแกรมย่อย (subroutine) ต่าง ๆ โดยมีรายละเอียดและขั้นตอนการคำนวณดังนี้

4.1.1. เริ่มต้นทำงานภายในโปรแกรมหลักโดยการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้า (input file) ของปัญหา ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหา เช่น จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ของปัญหา ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของแผ่นบาง ตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ อุณหภูมิที่จุดต่อต่าง ๆ แรงที่กระทำที่จุดต่อต่าง ๆ เป็นต้น

4.1.2. ทำการคำนวณแบบทำซ้ำโดยการเรียกโปรแกรมย่อย [TRI] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการเสียรูปของแผ่นบางในแนวดิ่งและแนวระนาบ โดยจะมีการเรียกโปรแกรมย่อยต่างๆ ได้แก่ โปรแกรมย่อย [KRCST], [KDKT], [RDKT], [VECTOR] และ [CROSS] เพื่อทำการประดิษฐ์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้อง โปรแกรมย่อย [TRFORM] เพื่อทำการแปลงเอลิเมนต์เมทริกซ์จากโคออร์ดิเนตย่อยสู่โคออร์ดิเนตรวม และโปรแกรมย่อย [ASSMBLE] เพื่อทำการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม

4.1.3. หลังจากที่ได้ระบบสมการรวมแล้ว ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตเข้ากับระบบสมการรวมโดยการเรียกโปรแกรมย่อย [APPLYBC]

4.1.4. จากนั้นจึงเรียกโปรแกรมย่อย [SOLVE] เพื่อทำการแก้ระบบสมการรวมเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ต่าง ๆ ได้แก่ ค่าระยะการเคลื่อนตัว u, v และ w ในแนวแกน x, y และ z และค่ามุมบิดรอบแกน θ_x , θ_y และ θ_z ที่จุดต่อต่าง ๆ

4.1.5. คำนวณหาค่าความเค้นต่าง ๆ โดยการเรียกโปรแกรมย่อย [STRESS]

4.1.6. ทำการเขียนผลลัพธ์ที่คำนวณได้ ซึ่งได้แก่ ค่าระยะการเคลื่อนตัว u, v และ w ในแนวแกน x, y และ z ค่ามุมบิดรอบแกน θ_x , θ_y และ θ_z และค่าความเค้นวอนมิเซสลงไปในไฟล์ผลลัพธ์ที่กำหนดไว้เพื่อนำไปใช้แสดงผลต่อไป

ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสามารถสรุปได้โดยใช้แผนภูมิการทำงาน (flow chart) ดังแสดงในรูปที่ 4.1

4.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรม PLATEDKT ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

4.3 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้กับโปรแกรม PLATEDKT ประกอบไปด้วย 6 ส่วนย่อยดังนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป ประโยคต่าง ๆ ที่อธิบายลักษณะของไฟล์ที่มีจำนวนบรรทัดตามที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น:

```
2
Simply supported square plate under uniform
distributed load (element 4x4)
```

ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา พร้อมค่าต่าง ๆ ที่จะใช้ในการคำนวณ

บรรทัดแรก คำระบุจำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อ และจำนวนจุดต่อที่มีแรงกระทำ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขจำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อ และจำนวนจุดต่อที่มีแรงกระทำ

ตัวอย่างเช่น:

```
NPOIN    NELEM    NFORCE
   32       25         1
```

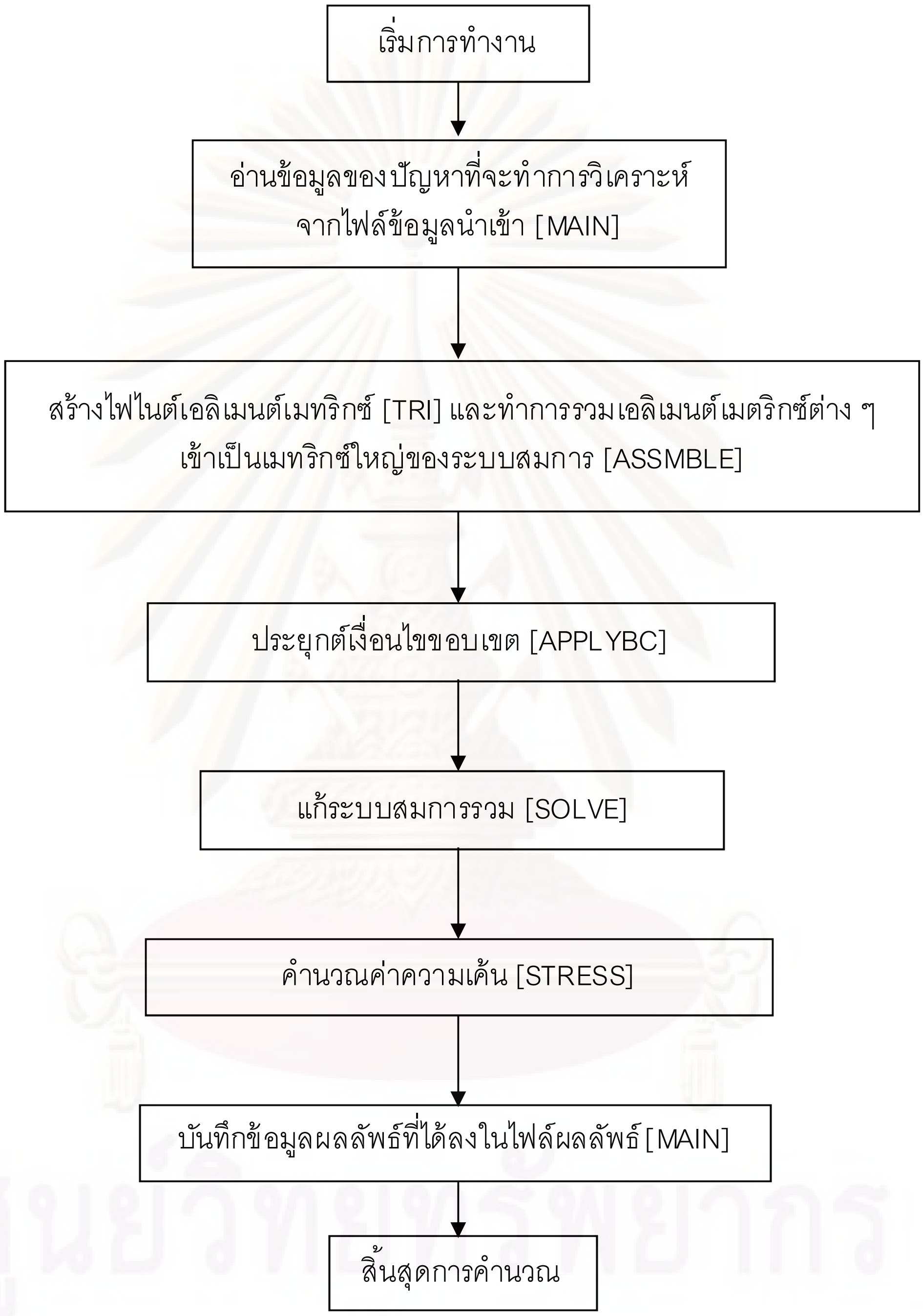
ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุโครงสร้างแผ่นบาง

บรรทัดแรก คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ และค่าอุณหภูมิอ้างอิงที่วัสดุไม่เกิดความเค้น ตามลำดับ

ตัวอย่างเช่น:

```
      E      PR     ALPHA      TREF
7.2E+10    0.25        0.        0.
```



รูปที่ 4.1 ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม PLATEDKT

<u>ส่วนที่ 4</u> ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขของจุดต่อทั้งสามในทิศทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์ ค่าความหนาของเอลิเมนต์ และแรงกระจายที่กระทำในแนวดิ่งบนเอลิเมนต์

ตัวอย่างเช่น:

ELE	I	J	K	TH	FDZ
1	1	17	16	0.01	-1200.
2	1	2	17	0.01	-1200.
3	2	18	17	0.01	-1200.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
31	25	9	10	0.01	-1200.
32	25	8	9	0.01	-1200.

<u>ส่วนที่ 5</u> ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดต่อ ๆ ไป ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกน x, y และ z พร้อมกับเงื่อนไขขอบเขตของค่ามุมบิดรอบแกน x, y และ z ตำแหน่งของจุดต่อบนแกน x, y และ z และค่าอุณหภูมิที่ผิวบนและผิวล่างของจุดต่อ ตามลำดับ

ตัวอย่างเช่น:

NODE	IUX	IUY	IUZ	IRX	IRY	IRZ	X	Y	Z	TT	TB
1	1	1	0	1	1	1	0.00	0.00	0.00	0.	0.
2	1	1	0	1	0	1	0.25	0.00	0.00	0.	0.
3	1	1	0	1	0	1	0.50	0.00	0.00	0.	0.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	1	1	0	0	0	1	0.50	0.75	0.00	0.	0.
25	1	1	0	0	0	1	0.75	0.75	0.00	0.	0.

หมายเหตุ: ค่าเงื่อนไขขอบเขตใน IUX, IUY, IUZ, IRX, IRY, IRZ คือค่าเงื่อนไขขอบเขตของ u, v, w, θ_x , θ_y และ θ_z ที่จุดต่อ ซึ่งมีความหมายดังนี้

1 คือ ค่าที่จุดต่อนั้นถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0

0 คือ ให้ทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

โดยในกรณีที่ 1.) ขอบรองรับด้วยลิ่ม (simply support) ค่า IUX, IUY, IUZ = 1

2.) ขอบถูกยึดแน่น (clamped) ค่า IUX, IUY, IUZ, IRX, IRY, IRZ = 1

3.) ขอบถูกปล่อยอิสระ (free support) ค่า IUX, IUY, IUZ, IRX, IRY, IRZ = 0

และในกรณีแก้ปัญหาแผ่นบางใน 2 มิติบนระนาบ x และ y ค่า IUX, IUY, IRZ = 1 โดยถ้าขอบสมมาตรในแนวแกน x ค่า IRX = 1 และขอบสมมาตรในแนวแกน y ค่า IRY = 1

<u>ส่วนที่</u> <u>6</u> ลักษณะของแรงกระทำที่จุดต่อ

บรรทัดแรก คำระบุจุดต่อและแนวแรงที่กระทำ

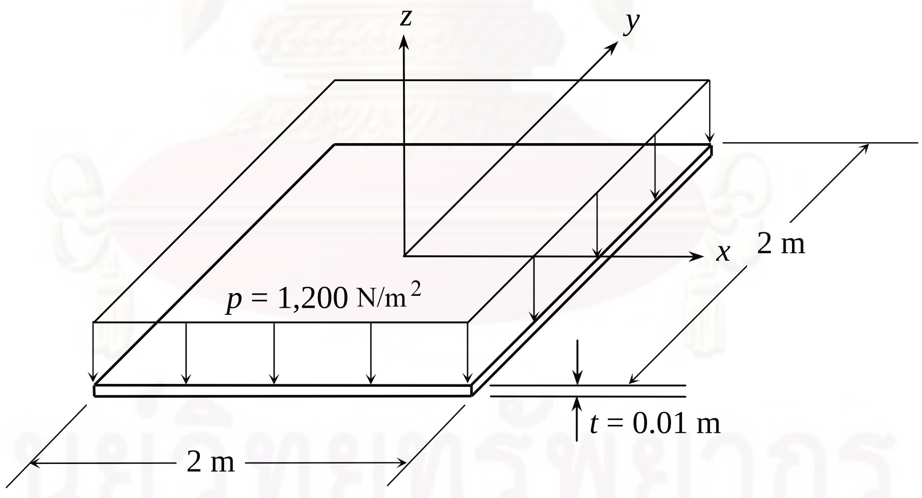
บรรทัดต่อ ๆ ไป หมายเลขของจุดต่อ และแรงที่กระทำที่จุดต่อในแนวแกนต่าง ๆ

ตัวอย่างเช่น:

```
NODE   FX   FY   FZ
   1   0.   0.   0.
```

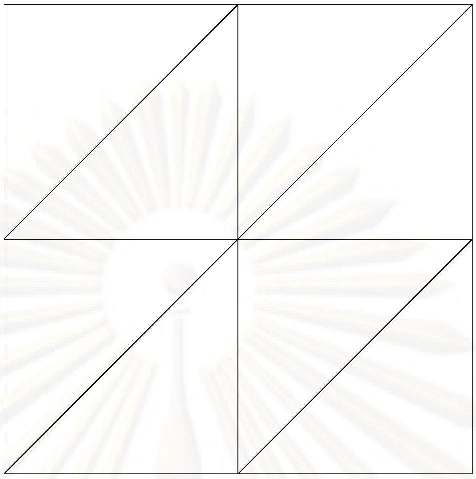
4.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม PLATEDKT

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการใช้โปรแกรม PLATEDKT ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่รองลับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบทั้งสี่ด้าน ภายใต้แรงกระทำแบบกระจายดังแสดงในรูปที่ 4.2 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (modulus of elasticity, E) เป็น 72 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ (Poisson's ratio, ν) เป็น 0.25



รูปที่ 4.2 ปัญหาตัวอย่างแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบทั้งสี่รองรับด้วยลิ่มภายใต้แรงกระจาย

เนื่องจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตร จึงนำเพียงหนึ่งในสี่ของแผ่นบางด้านบนขวามาทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ PLATEDKT โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 4.3 ซึ่งประกอบไปด้วย 25 จุดต่อ 32 เอลิเมนต์ ซึ่งลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่มีชื่อว่า 'TEST1.DAT' มีรายละเอียดดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.3 แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่าง

```
2
Simply supported square plate under uniform
distributed load (element 2x2)
   NELEM     NPOIN     NFORCE
       8         9          1
       E        PR      ALPHA        TREF
 7.2E+10      0.25         0.          0.
ELE     I    J    K     TH     FDZ
 1      1    9    8    0.01  -1200.
 2      1    2    9    0.01  -1200.
 3      2    4    9    0.01  -1200.
 4      2    3    4    0.01  -1200.
 5      8    6    7    0.01  -1200.
 6      8    9    6    0.01  -1200.
 7      9    5    6    0.01  -1200.
 8      9    4    5    0.01  -1200.
NODE   IUX  IUY  IUZ  IRX  IRY  IRZ    X      Y     Z     TT   TB
 1      1    1    0    1    1    1    0.0    0.0   0.0   0.  0.
 2      0    1    0    1    0    1    0.5    0.0   0.0   0.  0.
 3      0    1    1    1    0    1    1.0    0.0   0.0   0.  0.
 4      0    0    1    0    0    1    1.0    0.5   0.0   0.  0.
 5      0    0    1    0    0    1    1.0    1.0   0.0   0.  0.
 6      0    0    1    0    0    1    0.5    1.0   0.0   0.  0.
 7      1    0    1    0    1    1    0.0    1.0   0.0   0.  0.
 8      1    0    0    0    1    1    0.0    0.5   0.0   0.  0.
 9      0    0    0    0    0    1    0.5    0.5   0.0   0.  0.
NODE    FX   FY   FZ
 1      0.   0.   0.
```

รูปที่ 4.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า ‘TEST1.DAT’

เมื่อผู้ใช้เริ่มทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม PLATEDKT โปรแกรมจะทำการคำนวณไปตามขั้นตอนดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 4.1 โดยเมื่อการคำนวณเสร็จสิ้น ผลลัพธ์ที่ได้จะถูกบรรจุอยู่ในไฟล์ 'TEST1.OUT' ดังแสดงในรูปที่ 4.5

```
NODAL DISPLACEMENTS AND ROTATIONS

NODE   U           V           W         THETA-X    THETA-Y    THETA-Z

1  0.0000E+0  0.0000E+0 -0.1225E-1  0.0000E+0  0.0000E+0  0.0000E+0
2  0.0000E+0  0.0000E+0 -0.8800E-2  0.0000E+0 -0.1332E-1  0.0000E+0
3  0.0000E+0  0.0000E+0  0.0000E+0  0.0000E+0 -0.1946E-1  0.0000E+0
4  0.0000E+0  0.0000E+0  0.0000E+0  0.9569E-3 -0.1415E-1  0.0000E+0
5  0.0000E+0  0.0000E+0  0.0000E+0  0.2726E-3 -0.2726E-3  0.0000E+0
6  0.0000E+0  0.0000E+0  0.0000E+0  0.1415E-1 -0.9569E-3  0.0000E+0
7  0.0000E+0  0.0000E+0  0.0000E+0  0.1946E-1  0.0000E+0  0.0000E+0
8  0.0000E+0  0.0000E+0 -0.8800E-2  0.1332E-1  0.0000E+0  0.0000E+0
9  0.0000E+0  0.0000E+0 -0.6428E-2  0.9846E-2 -0.9846E-2  0.0000E+0

NODAL STRESSES [9]:

NODE   V-M STRESS

  1   0.114490E+08
  2   0.846132E+07
  3   0.545924E+07
  4   0.882731E+07
  5   0.125469E+08
  6   0.882731E+07
  7   0.545924E+07
  8   0.846132E+07
  9   0.108239E+08
```

รูปที่ 4.5 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ 'TEST1.OUT'

บทที่ 5

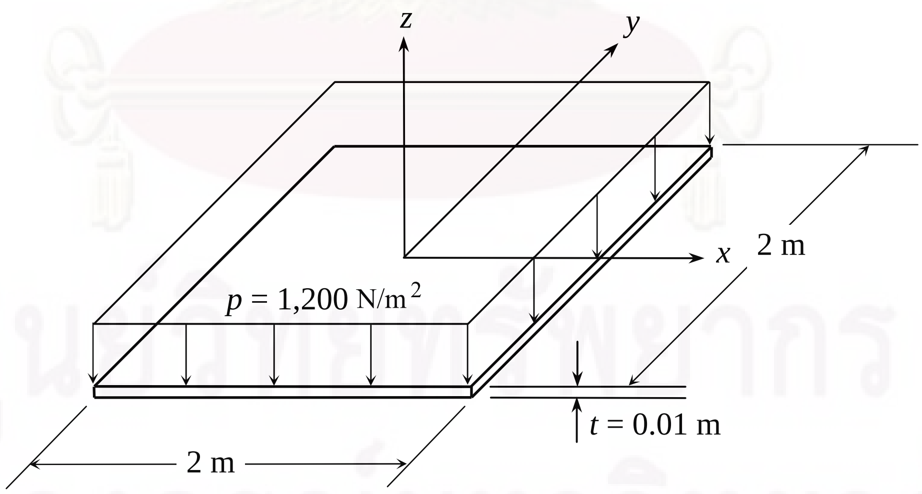
การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้น จะถูกนำมาตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาที่เราทราบผลเฉลยแม่นตรง หรือผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีอื่นรวมไปถึงเปรียบเทียบกับการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ ทั้งปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำทางกล (mechanical loading) และภาระทางความร้อน (thermal loading) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

5.1 ปัญหาการโก่งของแผ่นบางเนื่องจากแรงกระทำทางกล

5.1.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่ถูกแรงกระจายกระทำตลอดทั้งแผ่น

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด 2×2 m^2 หนา 0.01 m รองรับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบทั้งสี่ด้าน ภายใต้แรงกระจาย (distributed load) ในแนวดิ่งขนาดคงที่ p = 1,200 N/m^2 กระทำตลอดทั้งแผ่นดังแสดงในรูปที่ 5.1 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (modulus of elasticity, E) เป็น 72 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ (Poisson's ratio, ν) เป็น 0.25



รูปที่ 5.1 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบทั้งสี่รองรับด้วยลิ่ม ภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง

ผลเฉลยแม่นตรงของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ ใดๆ ภายใต้แรงกระจายกระทำในแนวดิ่งขนาดคงที่ p [13] คือ

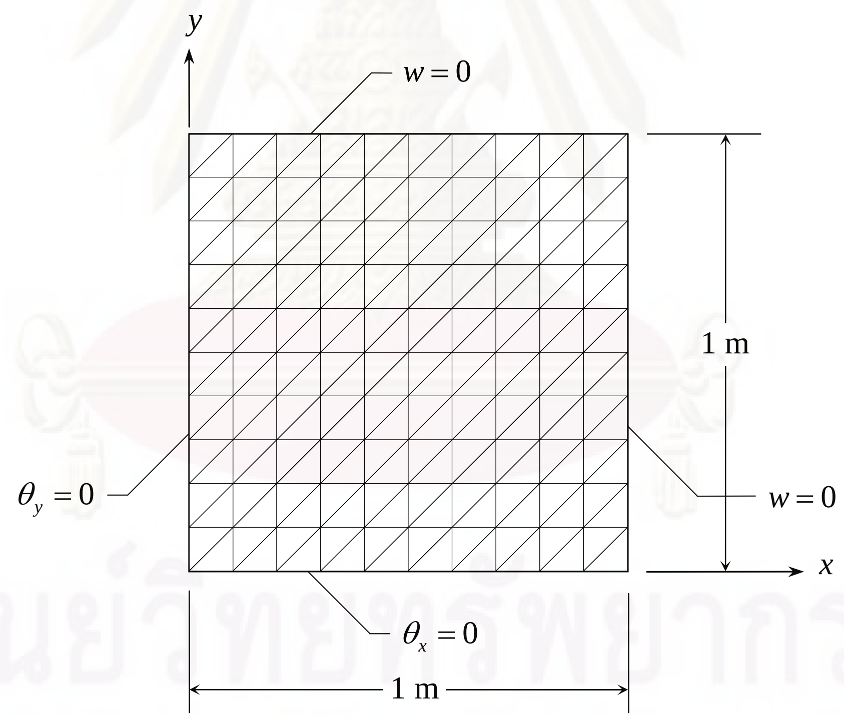
$$w(x,y) = \frac{16pa^4}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{mn(m^2+n^2)^2} \tag{5.1}$$

โดยที่ a คือ ความกว้างของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบาง

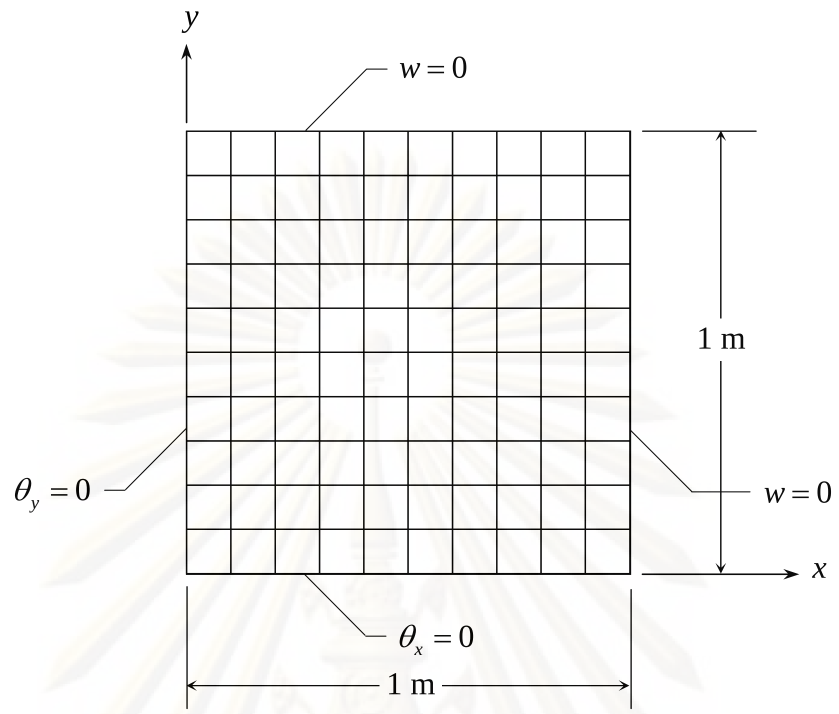
D คือ ค่าความแข็งเกร็งของการโก่ง (flexural rigidity) ดังแสดงในสมการ (2.5)

และ $0 \le x \le a$; $0 \le y \le a$

เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ และเนื่องจากลักษณะของปัญหานี้มีความสมมาตรจึงนำเพียงพื้นที่หนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.1 มาใช้ในการคำนวณ โดยทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ รูปที่ 5.2 และ 5.3 แสดงถึงลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมที่มีจำนวนจุดต่อที่เท่ากัน คือ 121 จุดต่อ และเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหา

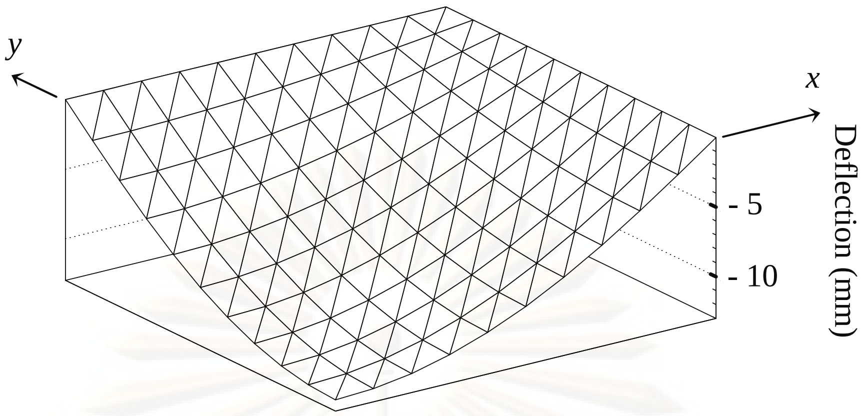


รูปที่ 5.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเงื่อนไขขอบเขต
ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง

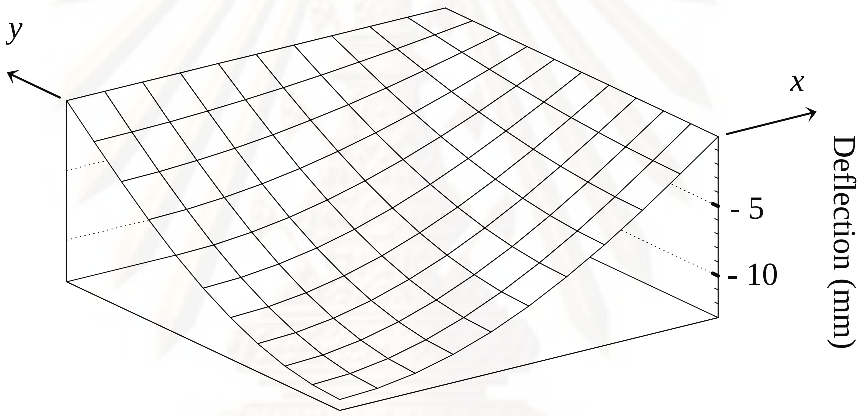


รูปที่ 5.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง

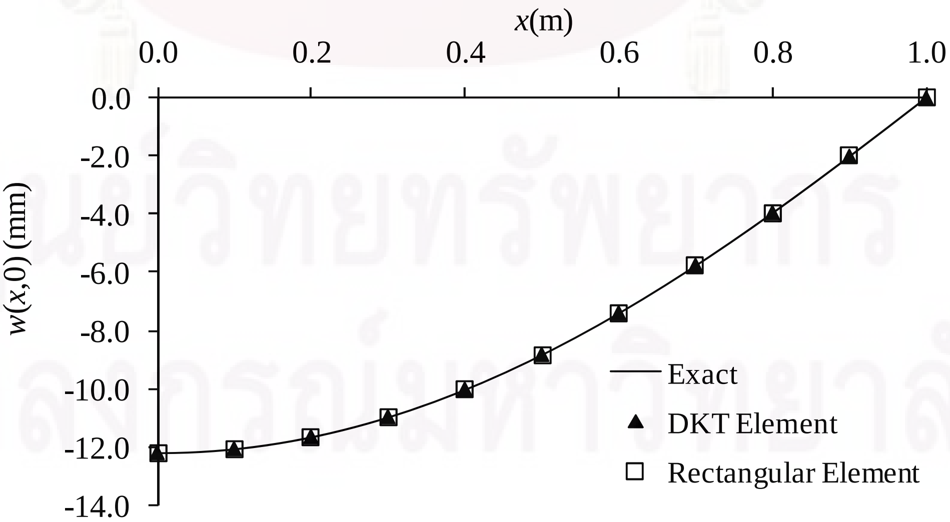
ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมนี้ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อนั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 5.4 และ 5.5 โดยแผ่นบางมีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่น รูปที่ 5.6 แสดงค่าผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบโดยใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากันคือ 121 จุดต่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง โดยจะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์ทั้งสองแบบนั้นต่างให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง และเมื่อพิจารณาเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางที่มีค่าการเสียรูปสูงสุดพบว่า การคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน และด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 5.7 นั่นคือ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นจะลู่เข้าสู่คำตอบได้รวดเร็วกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้น



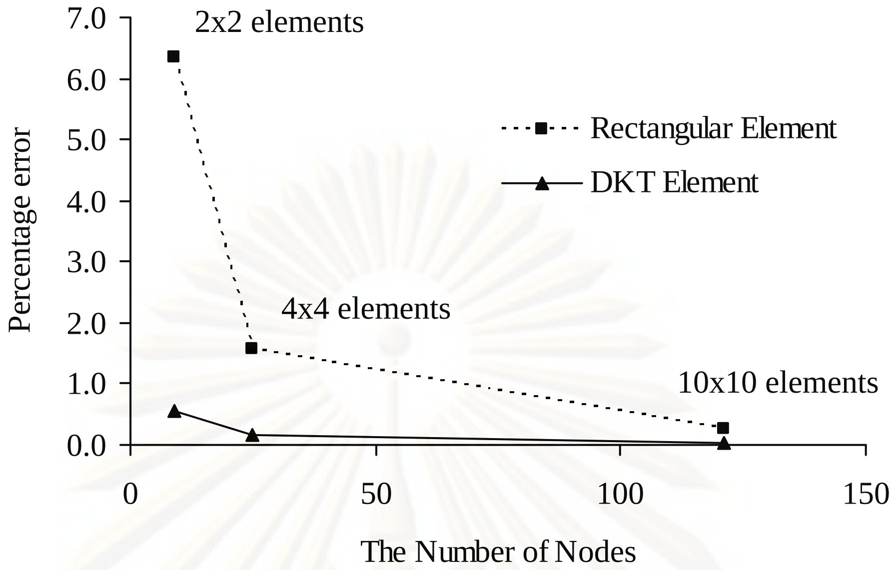
รูปที่ 5.4 การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.5 การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์



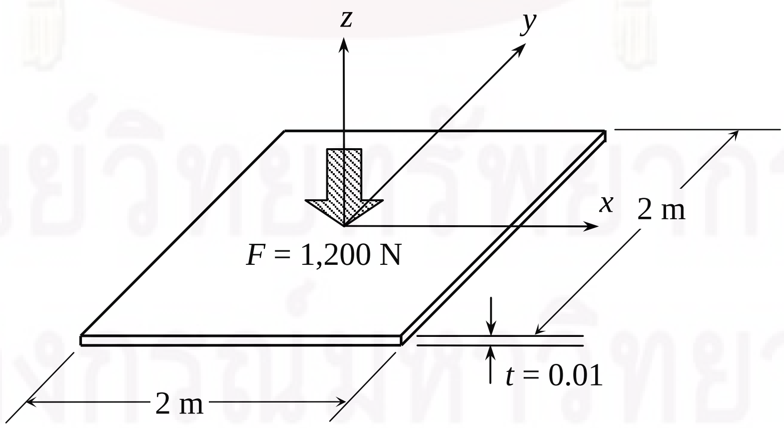
รูปที่ 5.6 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง *w* ตลอดแนวแกน *x* ของแผ่นบางภายใต้แรงกระจาย



รูปที่ 5.7 ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบ ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงสุด ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงกระจายในแนวดิ่ง

5.1.2 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่ถูกแรงเดี่ยวกระทำที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด 2×2 m^2 หนา 0.01 m รองรับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบทั้งสี่ด้าน ภายใต้แรงเดี่ยวกระทำที่จุดกึ่งกลางแผ่น F = 1,200 N ดังแสดงในรูปที่ 5.8 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 72 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.25



รูปที่ 5.8 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบทั้งสี่รองรับด้วยลิ่ม ถูกแรงเดี่ยวกระทำที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น

ผลเฉลยแม่นตรงของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ ใดๆ ภายใต้แรงเดี่ยวกระทำในแนวดิ่ง F ที่ตำแหน่งกึ่งกลาง [13] คือ

$$w(x,y) = \frac{4Fa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)}{(m^2+n^2)^2} \tag{5.2}$$

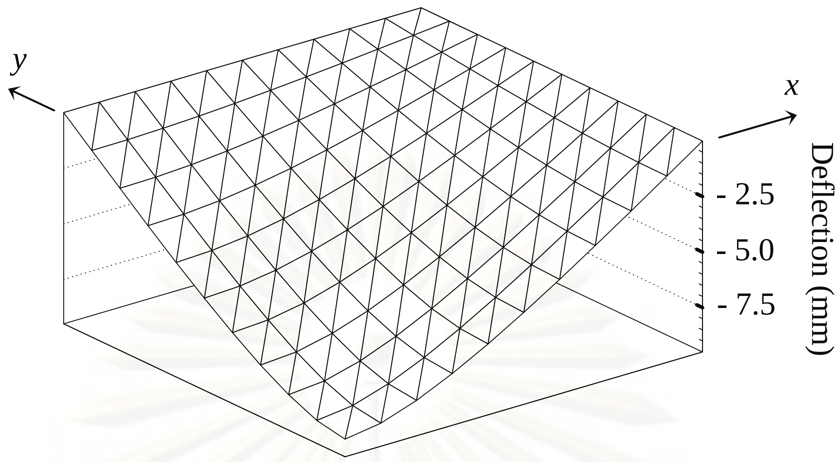
โดยที่ a คือ ความกว้างของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบาง

D คือ ค่าความแข็งเกร็งของการโก่ง

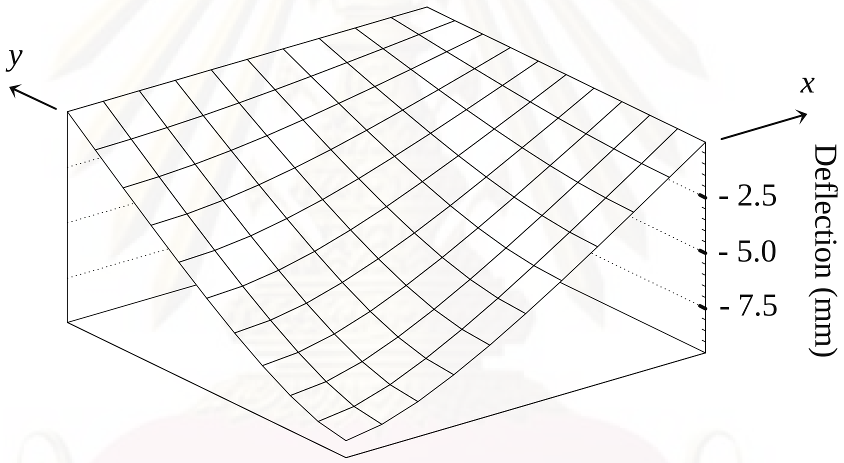
และ $0 \le x \le a \quad ; \quad 0 \le y \le a$

เนื่องจากลักษณะของปัญหานี้มีความสมมาตรจึงนำเพียงพื้นที่หนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.8 มาใช้ในการคำนวณ จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อโดยใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากันคือ 121 จุดต่อ ลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาทั้งแบบเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมรวมไปถึงเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานั้นมีลักษณะเช่นเดียวกันกับปัญหาแรกดังแสดงในรูปที่ 5.2 และ 5.3

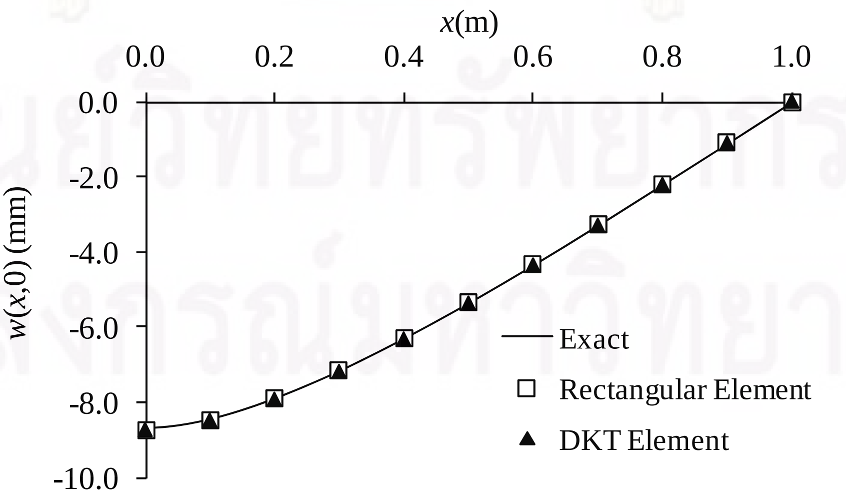
รูปที่ 5.9 และ 5.10 แสดงถึงลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางนี้ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นบางมีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่น ส่วนรูปที่ 5.11 แสดงถึงค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบโดยใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน คือ 121 จุดต่อเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง โดยจะเห็นว่าเอลิเมนต์ทั้งสองแบบนั้นต่างให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง จากนั้นเมื่อเราพิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสองแบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นที่มีค่าการเสียรูปสูงสุดพบว่า การคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน และเมื่อเพิ่มจำนวนจุดต่อให้มากขึ้นพบว่า เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 5.12 กล่าวคือ การคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นจะให้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้าสู่คำตอบได้รวดเร็วกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้น



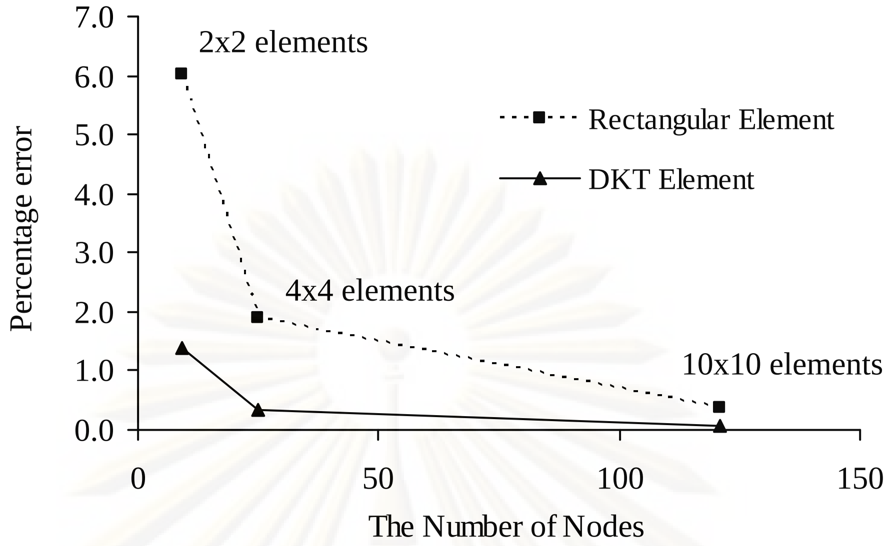
รูปที่ 5.9 การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงเดี่ยวในแนวดิ่ง
โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.10 การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงเดี่ยวในแนวดิ่ง
โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์



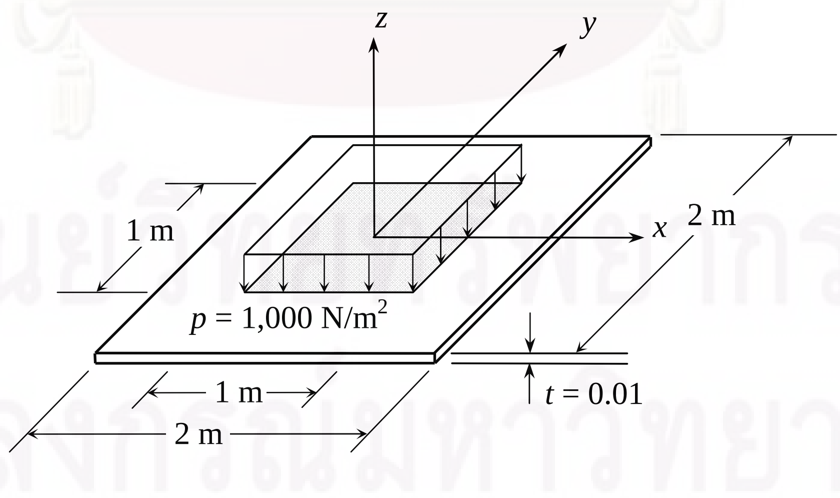
รูปที่ 5.11 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางภายใต้แรงเดี่ยว



รูปที่ 5.12 ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบ ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงสุด ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงเดี่ยวในแนวดิ่ง

5.1.3 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่ถูกแรงกระจายกระทำเพียงบางส่วน

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด 2×2 m^2 หนา 0.01 m รองรับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบทั้งสี่ด้าน ภายใต้แรงกระจาย p ขนาด 1 kN/m^2 กระทำเพียงบางส่วนที่บริเวณส่วนกลางของแผ่นดังแสดงในรูปที่ 5.13 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 72 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.25



รูปที่ 5.13 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบทั้งสี่รองรับด้วยลิ่ม ถูกแรงกระจายกระทำเพียงบางส่วน

ผลเฉลยแม่นตรงของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ ใดๆ ภายใต้แรงกระจายกระทำเพียงบางส่วน P [13] คือ

$$w(x,y)=\frac{4pa^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5}\sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right)\left\{1-\frac{\cosh\frac{m\pi y}{a}}{\cosh\alpha_m}\left[\cosh\left(\alpha_m-2\gamma_m\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma_m\sinh\left(\alpha_m-2\gamma_m\right)+\alpha_m\frac{\sinh 2\gamma_m}{2\cosh\alpha_m}\right]+\frac{\cosh\left(\alpha_m-2\gamma_m\right)}{2\cosh\alpha_m}\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a} \quad (5.3)$$

โดยที่ a คือ ความกว้างของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบาง

D คือ ค่าความแข็งเกร็งของการโก่ง

u คือ ความกว้างของบริเวณแรงกระจายในแนวแกน x

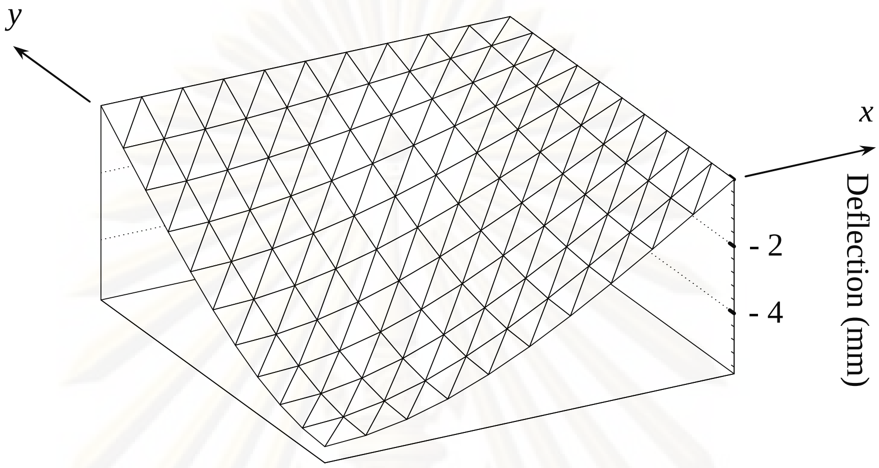
v คือ ความกว้างของบริเวณแรงกระจายในแนวแกน y

$\alpha_m=\frac{m\pi}{2}$; $\gamma_m=\frac{m\pi v}{4a}$ และ $0\le x\le a$; $-b/2\le y\le b/2$

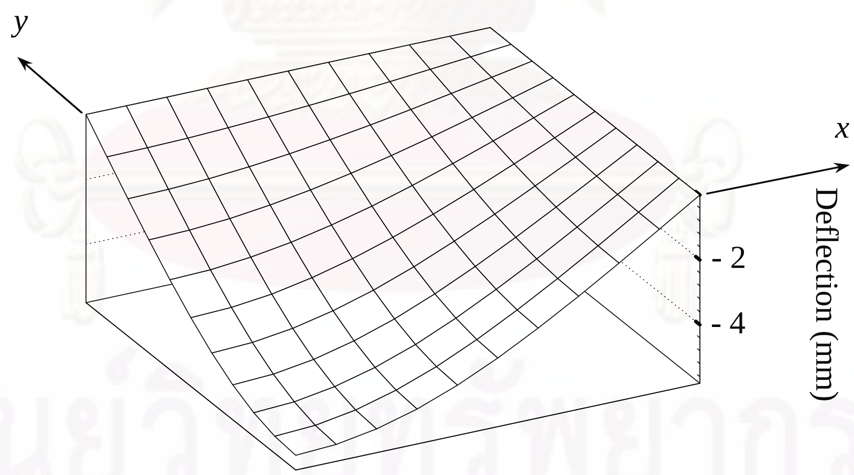
เนื่องจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตรจึงนำพื้นที่หนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.13 มาใช้ในการคำนวณ จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อโดยใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากันคือ 121 จุดต่อ ลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ทั้งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมรวมไปถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานั้นมีลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาแรกดังแสดงในรูปที่ 5.2 และ 5.3

ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางนี้ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสองแบบแสดงไว้ดังรูปที่ 5.14 และ 5.15 โดยจะเห็นได้ว่าแผ่นบางมีการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่น ค่าผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงนั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 5.16 ซึ่งจะเห็นว่าเอลิเมนต์ทั้งสองแบบนั้นต่างให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง เมื่อพิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสองแบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นที่มีค่าการเสียรูปสูงสุดพบว่า การคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน และด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 5.17

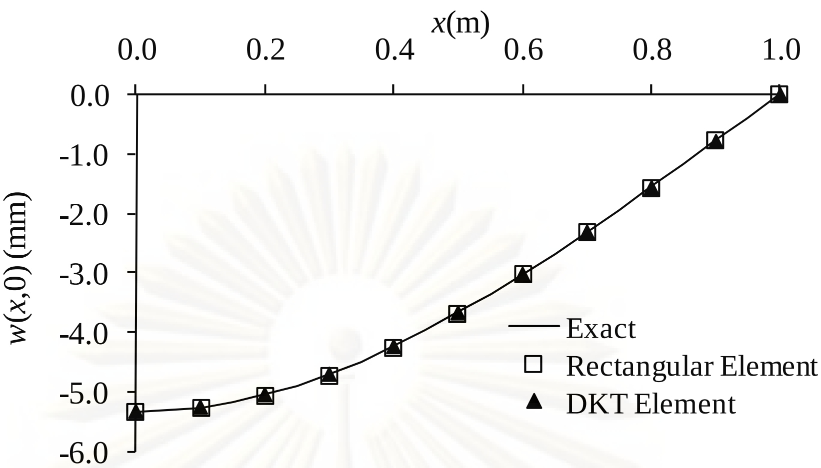
กล่าวคือ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นให้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้าสู่คำตอบได้รวดเร็วกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้น



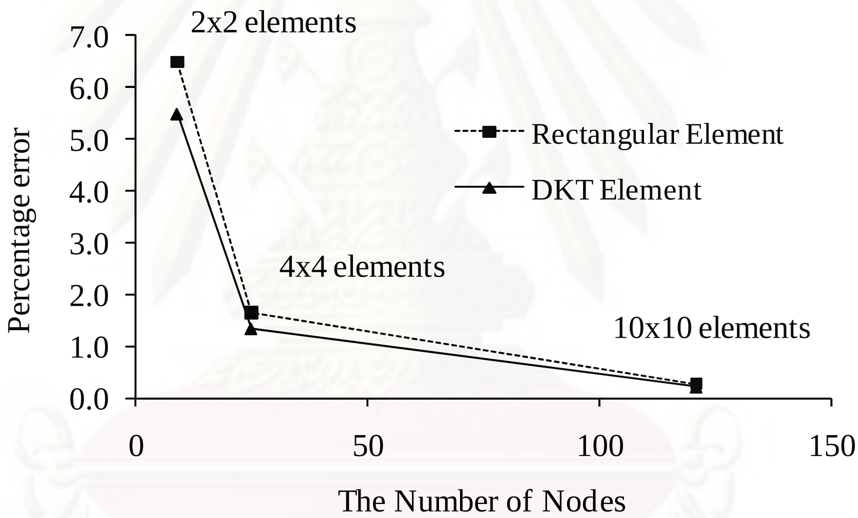
รูปที่ 5.14 การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายเพียงบางส่วน โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.15 การเสียรูปของแผ่นบางภายใต้แรงกระจายเพียงบางส่วน โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์



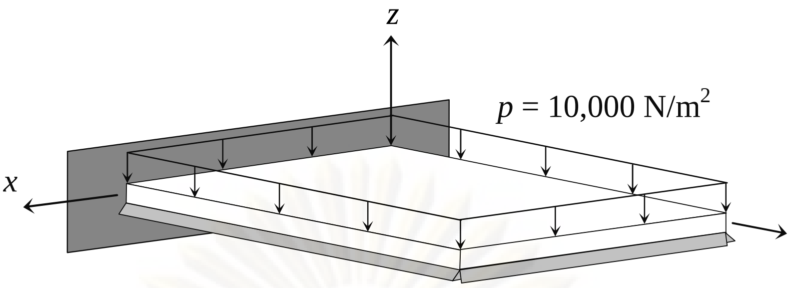
รูปที่ 5.16 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบาง ภายใต้แรงกระจายเพียงบางส่วน



รูปที่ 5.17 ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบ ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงสุด ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมภายใต้แรงกระจายเพียงบางส่วน

5.1.4 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด 1×1 m^2 หนา 0.01 m ภายใต้แรงกระทำแบบกระจายในแนวดิ่งคงที่ p = 10,000 N/m^2 กระทำตลอดทั้งแผ่น โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 190 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.3 แผ่นบางนี้รองรับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบสามด้านที่ x = 0, x = 1 และ y = 1 และถูกยึดตรึงกับผนังตลอดแนวแกน x หรือที่ y = 0 ดังแสดงในรูปที่ 5.18

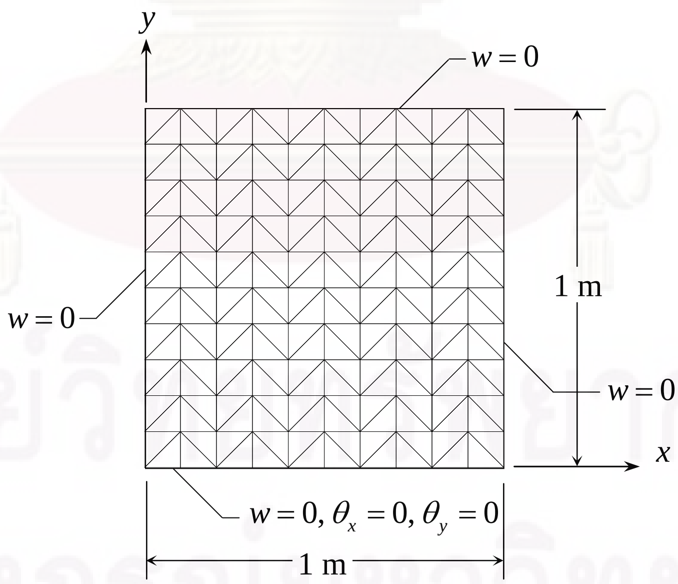


รูปที่ 5.18 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ขอบรองรับด้วยลิ่มสามด้าน
และถูกยึดตรึงกับผนังหนึ่งด้านภายใต้แรงกระจาย

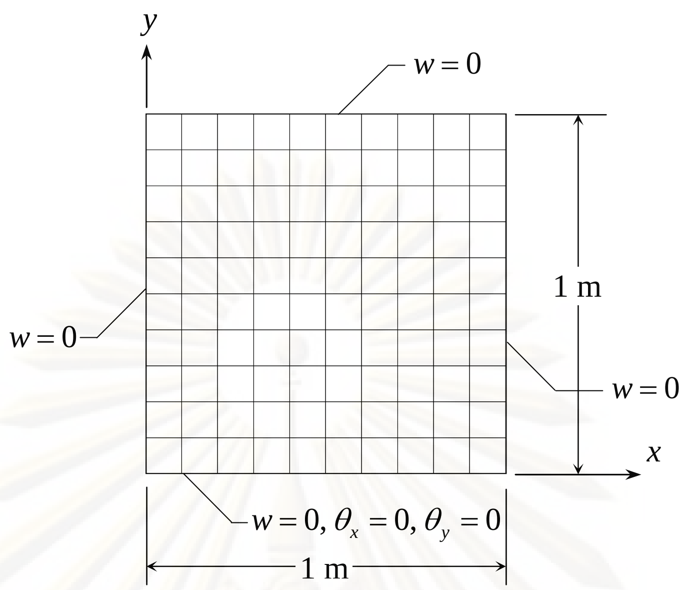
ผลเฉลยแม่นตรงของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด $a \times a$ ใดๆ ที่มีการรองรับที่ขอบต่างกันภายใต้แรงกระจาย p [13] คือ

$$w = 0.00279 \frac{pa^2}{D} \tag{5.4}$$

ทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อโดยใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากันคือ 121 จุดต่อ ลักษณะการแบ่งโดเมนทั้งสองแบบของปัญหารวมไปถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานั้นแสดงไว้ในรูปที่ 5.19 และ 5.20

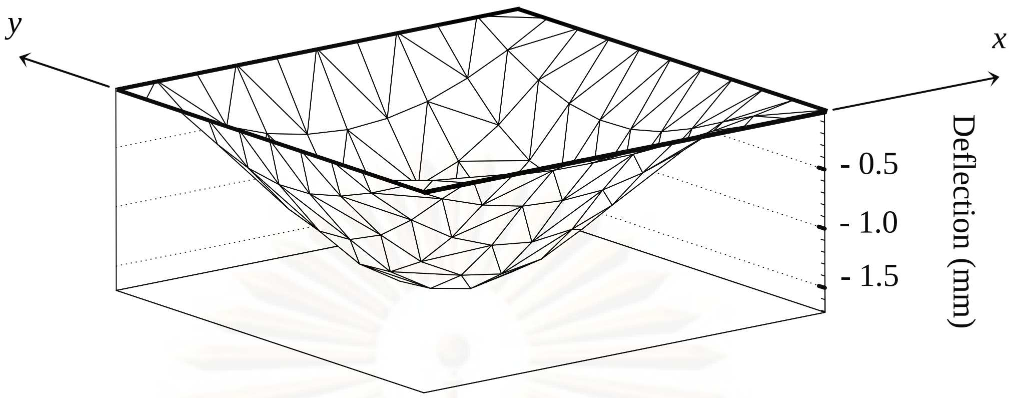


รูปที่ 5.19 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเงื่อนไขขอบเขต
ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน

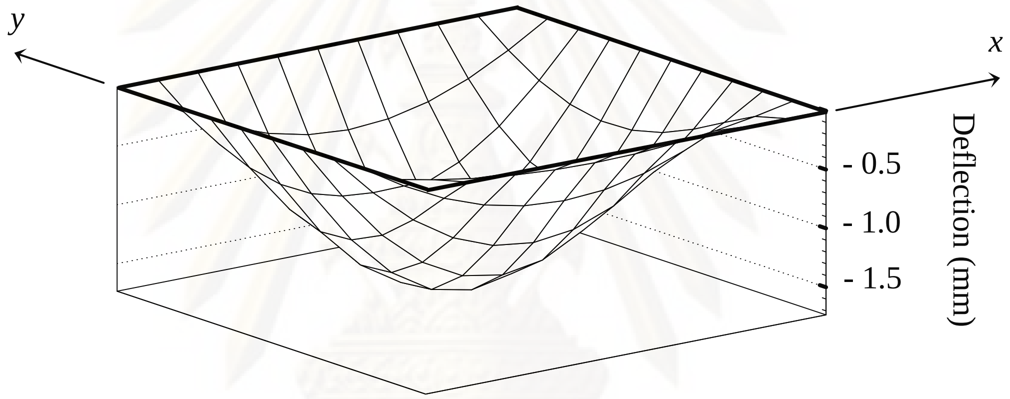


รูปที่ 5.20 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน

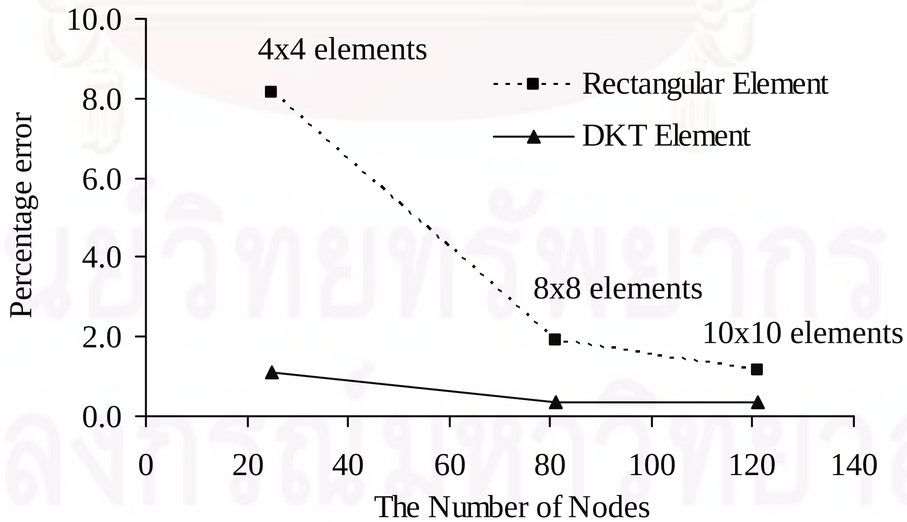
รูปที่ 5.21 และ 5.22 แสดงถึงลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางนี้ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ โดยแผ่นบางจะมีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่น และเมื่อพิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสองแบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นเทียบกับผลเฉลยแม่งตรงในรูปที่ 5.23 พบว่า การคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน และด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ กล่าวคือ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้นจะลู่เข้าสู่คำตอบได้รวดเร็วกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้น



รูปที่ 5.21 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



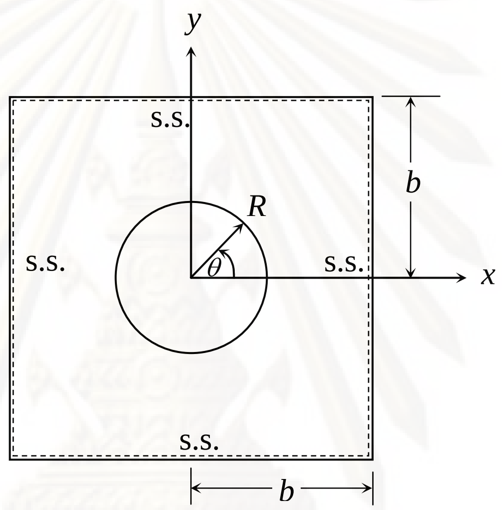
รูปที่ 5.22 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.23 ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบ ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน

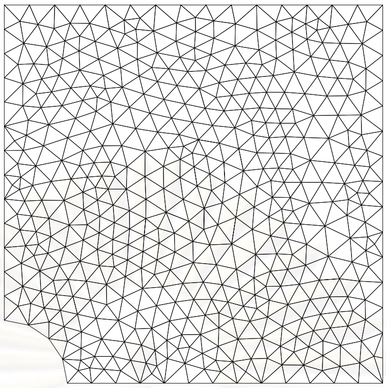
5.1.5 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด $2b \times 2b$ (3×3 m^2) หนา 0.01 m มีรูกลมตรงกลาง รัศมี R ภายใต้แรงกระทำแบบกระจายในแนวดิ่งคงที่ p = 1,000 N/m^2 กระทำตลอดทั้งแผ่น โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 190 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.3 แผ่นบางนี้รองรับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบทั้งสี่ด้านดังแสดงในรูปที่ 5.24 โดยขนาดรัศมีของรูกลมตรงกลางของแผ่นบาง R ที่ทำการวิเคราะห์นั้น ได้แบ่งออกเป็น 4 ขนาดด้วยกัน นั่นคือ อัตราส่วน R/b = 1/6, 2/6, 3/6 และ 4/6 ตามลำดับ

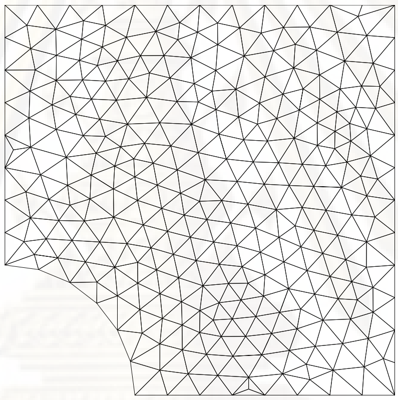


รูปที่ 5.24 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่มีรูกลมตรงภายใต้แรงกระจาย

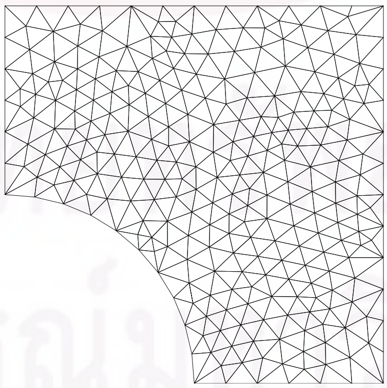
เนื่องจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตรจึงนำพื้นที่เพียงหนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.24 มาใช้ในการคำนวณ จากนั้นจึงการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีที่ไม่เป็นระเบียบ (unstructured mesh) ลักษณะการแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมของปัญหาที่มีรัศมีรูกลมตรงกลางขนาดต่าง ๆ นั้นแสดงไว้ในรูปที่ 5.25-5.28 โดยปัญหาแผ่นบางที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 1/6 แบ่งโดเมนออกเป็น 910 เอลิเมนต์ 486 จุดต่อ ปัญหาแผ่นบางที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 2/6 แบ่งโดเมนออกเป็น 522 เอลิเมนต์ 285 จุดต่อ ปัญหาแผ่นบางที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 3/6 แบ่งโดเมนออกเป็น 504 เอลิเมนต์ 276 จุดต่อ และปัญหาแผ่นบางที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 4/6 แบ่งโดเมนออกเป็น 361 เอลิเมนต์ 204 จุดต่อ



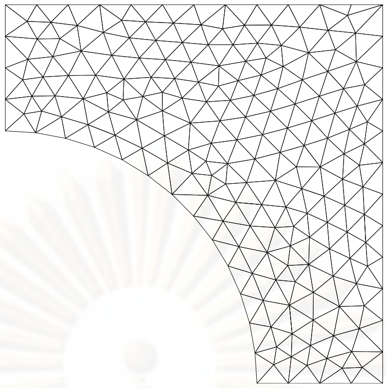
รูปที่ 5.25 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 1/6



รูปที่ 5.26 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 2/6

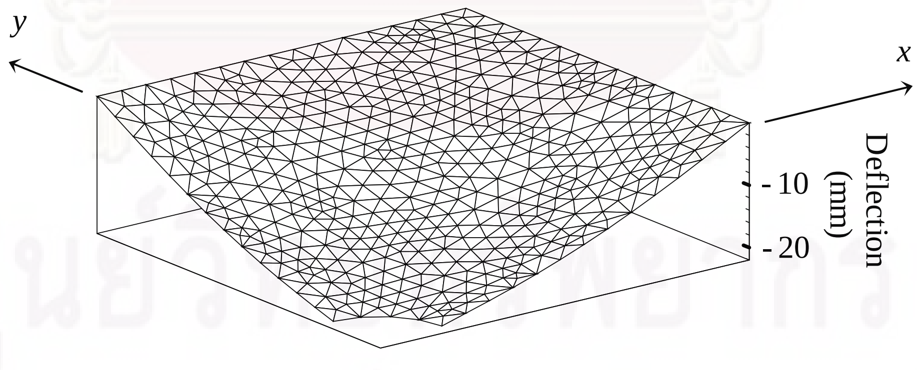


รูปที่ 5.27 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 3/6

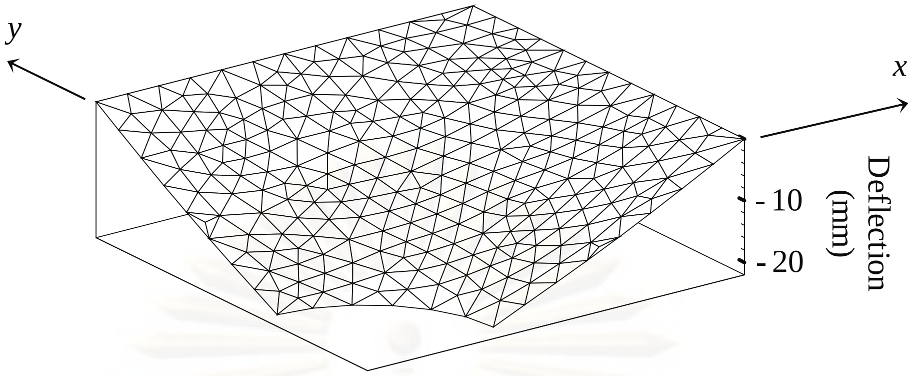


รูปที่ 5.28 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 4/6

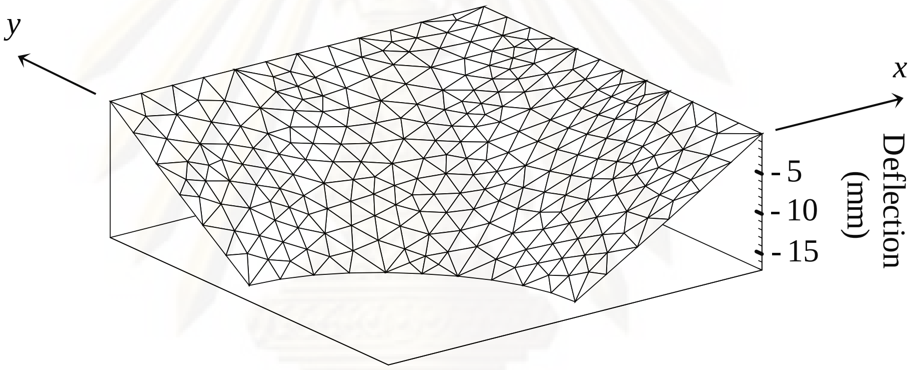
รูปที่ 5.29-5.32 แสดงลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางที่คำนวณได้ ซึ่งจะมีการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงที่บริเวณขอบของรูกลม โดยค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางนั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 5.33 ส่วนรูปที่ 5.34 แสดงค่าผลลัพธ์ของการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่งแบบไร้มิติ (dimensionless) ตลอดแนวโค้งของรูกลมของแผ่นบางขนาดต่าง ๆ ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยของ Lo และ Leissa [14] ซึ่งจะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้นั้นสอดคล้องกัน และเมื่อพิจารณาที่ตำแหน่งที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงสุดของแผ่นบางที่มีรูกลมขนาดต่าง ๆ พบว่า ด้วยการแบ่งเอลิเมนต์ให้ละเอียดมากขึ้น มีจำนวนจุดต่อเพิ่มมากขึ้น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยมากยิ่งขึ้นดังแสดงในรูปที่ 5.35



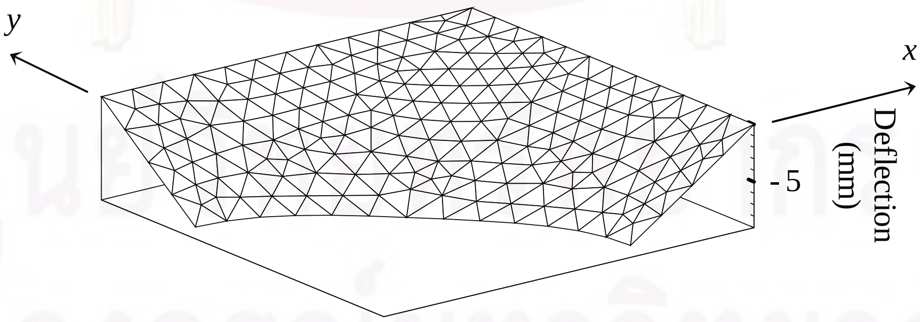
รูปที่ 5.29 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 1/6 โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



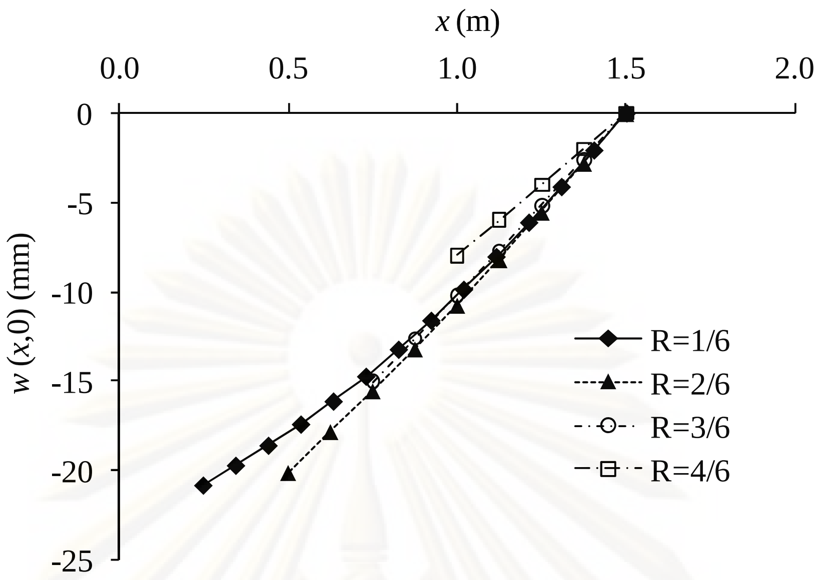
รูปที่ 5.30 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 2/6 โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



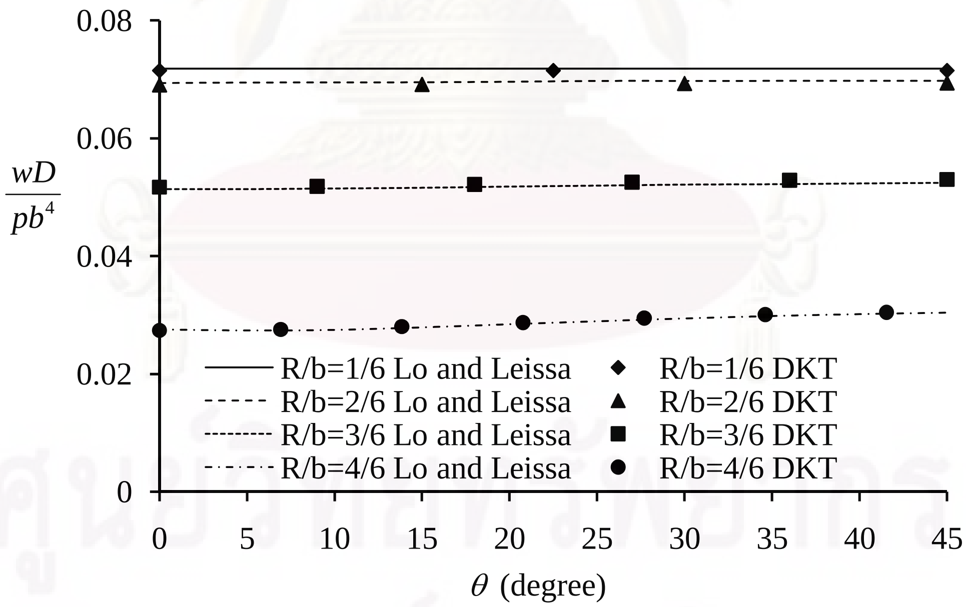
รูปที่ 5.31 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 3/6 โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



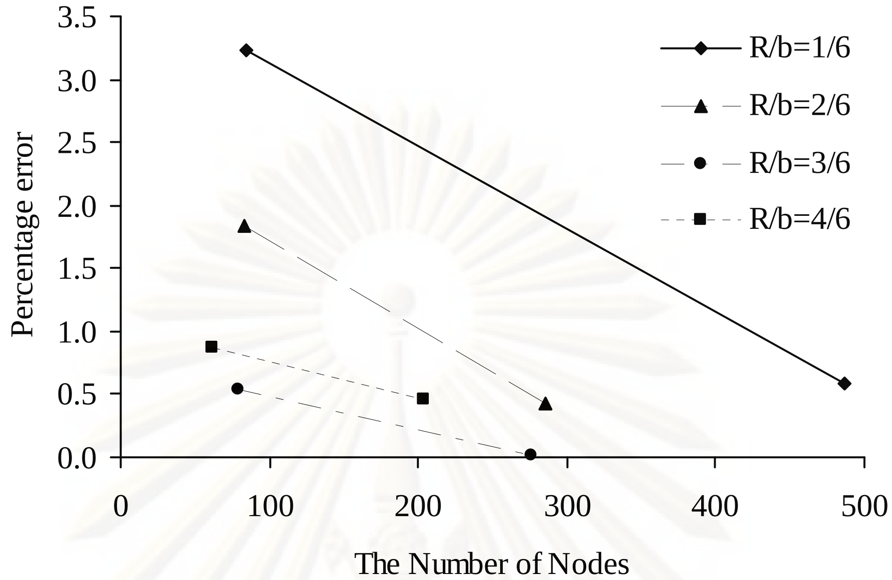
รูปที่ 5.32 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาด R/b = 4/6 โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.33 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางขนาดต่าง ๆ



รูปที่ 5.34 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่งแบบไร้มิติตลอดขอบของรูกลมของแผ่นบางภายใต้แรงกระจาย



รูปที่ 5.35 ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ของค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมขนาดต่าง ๆ

5.2 ปัญหาการโก่งของแผ่นบางเนื่องจากภาระทางความร้อน

5.2.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่ถูกปล่อยอิสระ

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด 2×2 m^2 หนา 0.01 m ถูกปล่อยอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น โดยอุณหภูมิตลอดผิวด้านบนเป็น 100 °C และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่างเป็น 25 °C ดังแสดงในรูปที่ 5.36 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน (the coefficient of thermal expansion, α) เป็น 2.3×10^{-7} /°C ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 72 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.33

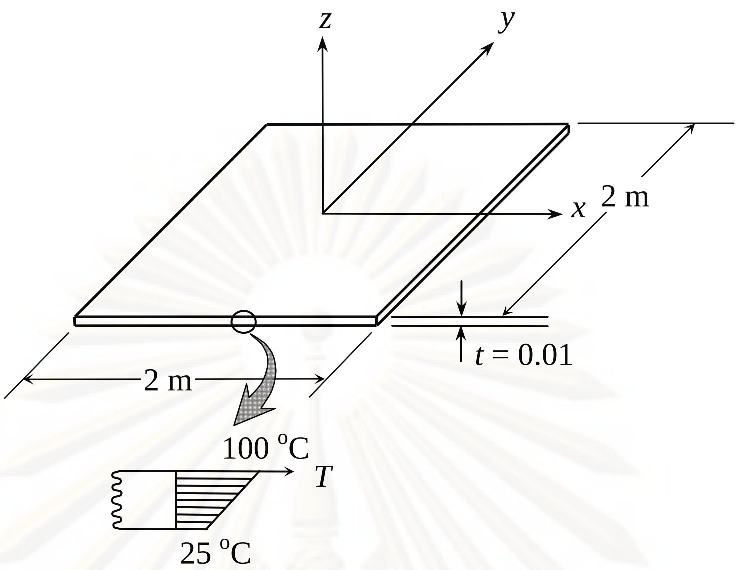
ผลเฉลยแม่นตรงของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น [15] คือ

$$w(x,y) \quad = \quad -\frac{\alpha\Delta T}{2t}(x^2+y^2) \tag{5.5}$$

โดยที่ α คือ ค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน

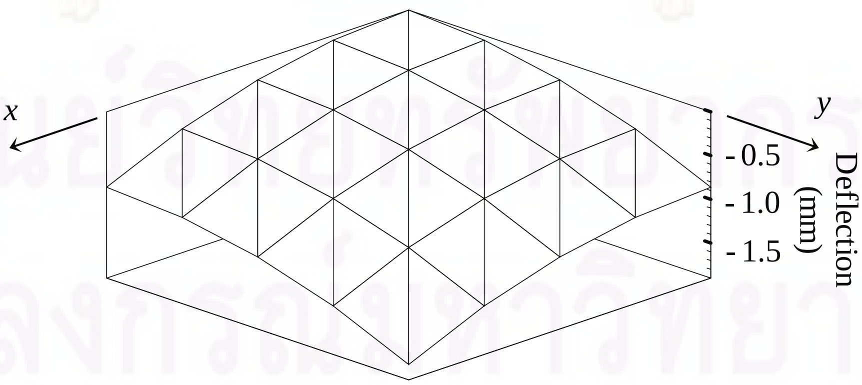
t คือ ค่าความหนาของแผ่นบาง

และ ΔT คือ ค่าผลต่างของอุณหภูมิระหว่างผิวบนและผิวล่าง

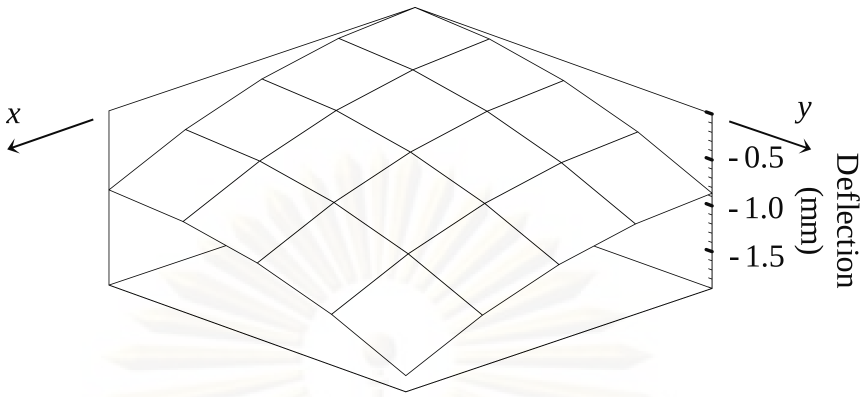


รูปที่ 5.36 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่ถูกปล่อยอิสระและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

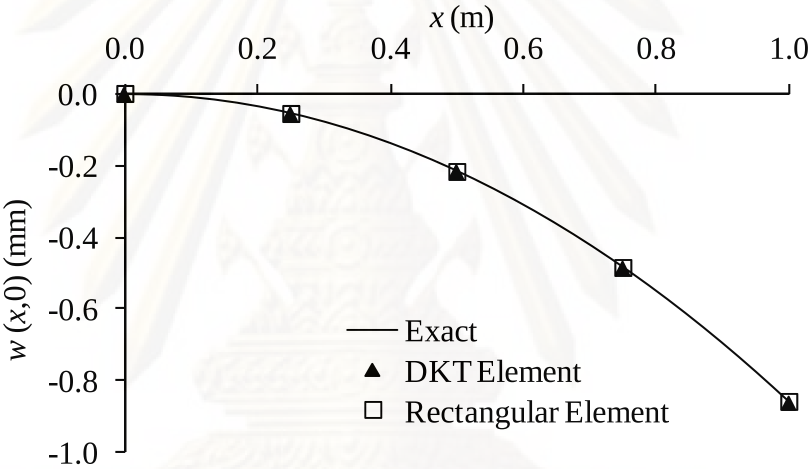
เนื่องมาจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตร พื้นที่หนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.36 จึงถูกนำมาใช้ในการคำนวณ ทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อโดยใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากันคือ 25 จุดต่อ โดยลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางนี้แสดงไว้ดังรูปที่ 5.37 และ 5.38 โดยจะมีค่าการเสียรูปสูงสุดที่ตำแหน่งมุมของแผ่นบาง รูปที่ 5.39 และ 5.40 แสดงค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่งตลอดแนวแกน x (ที่ $y = 0$) และค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่งตลอดแนวที่ตำแหน่ง $x = 1$ ที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง โดยเอลิเมนต์ทั้งสองแบบนั้นต่างให้ผลลัพธ์ที่เท่ากับผลเฉลยแม่นตรง



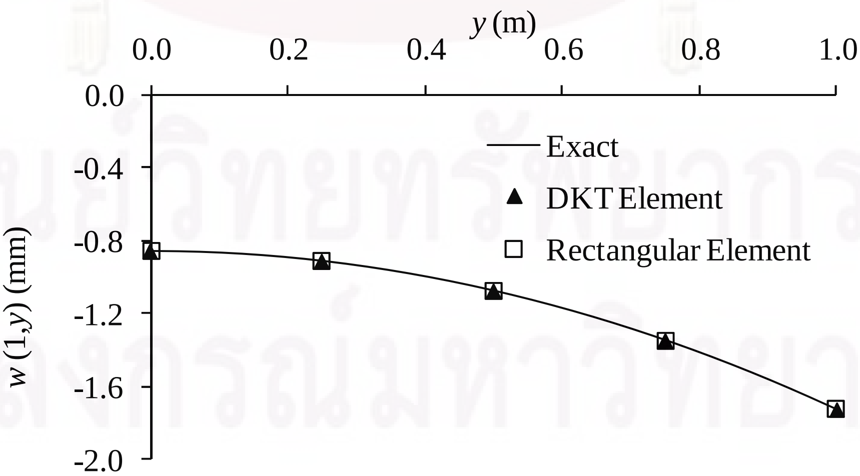
รูปที่ 5.37 การเสียรูปของแผ่นบางอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.38 การเสียรูปของแผ่นบางอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์



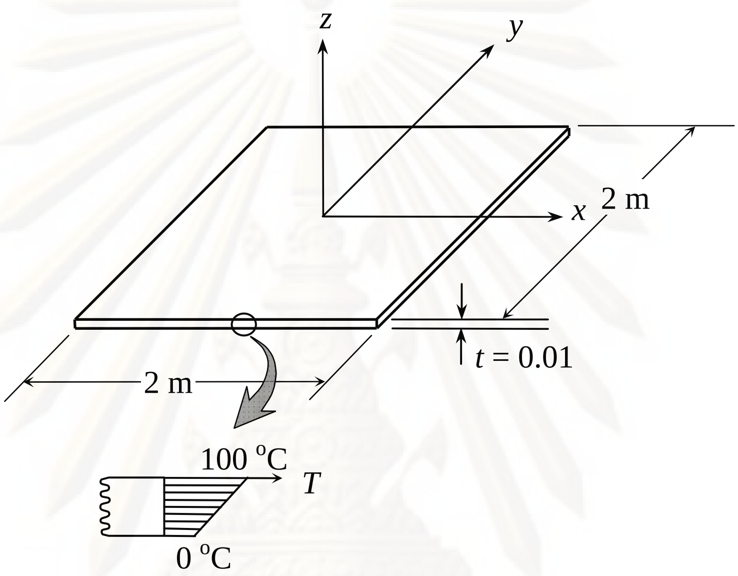
รูปที่ 5.39 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น



รูปที่ 5.40 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวที่ตำแหน่ง x = 1 ของแผ่นบางอิสระที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น

5.2.2 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีการรองรับด้วยลิ่ม

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด 2×2 m^2 หนา 0.01 m รองรับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบทั้งสี่ด้าน มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น โดยอุณหภูมิตลอดผิวด้านบนเป็น 100 °C และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่างเป็น 0 °C ดังแสดงในรูปที่ 5.41 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน α เป็น 2.3×10^{-7} /°C ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 72 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.33



รูปที่ 5.41 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

ผลเฉลยแม่นตรงของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น [15] คือ

$$w(x,y) \quad = \quad \frac{4\alpha\Delta T(1+\nu)a^2}{\pi^3 t}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{m^3}\sin\frac{m\pi x}{a}\left[1-\frac{\cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)}\right] \qquad (5.6)$$

โดยที่ a คือ ความกว้างในแนวแกน x ของแผ่นสี่เหลี่ยมบาง

b คือ ความกว้างในแนวแกน y ของแผ่นสี่เหลี่ยมบาง

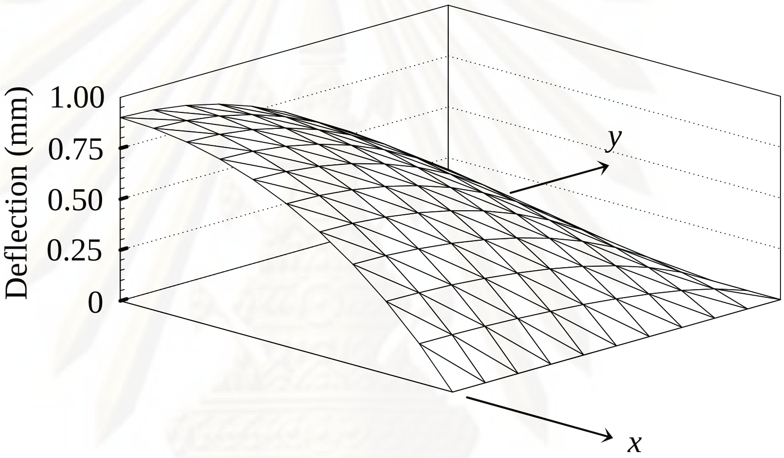
α คือ ค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน

t คือ ค่าความหนาของแผ่นบาง

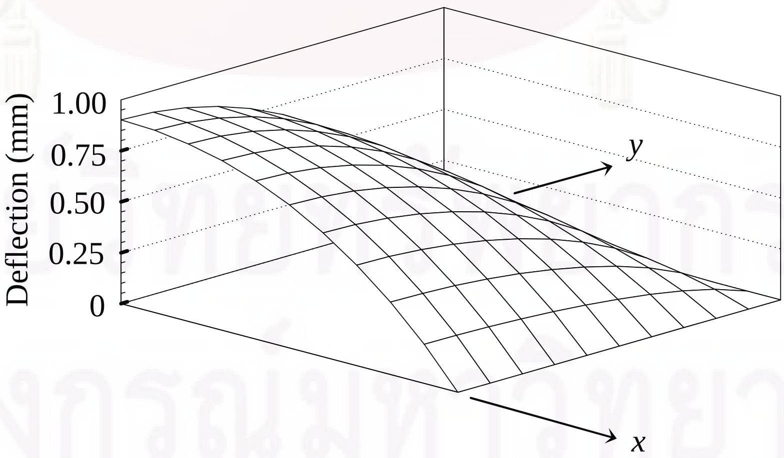
ΔT คือ ค่าผลต่างของอุณหภูมิระหว่างผิวบนและผิวล่าง

และ $0 \le x \le a \quad ; \quad -b/2 \le y \le b/2$

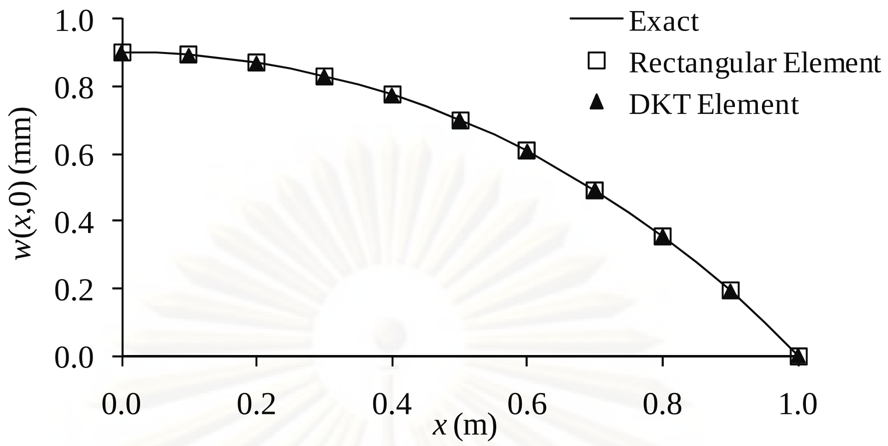
จากลักษณะของปัญหาที่มีความสมมาตรจึงนำพื้นที่เพียงหนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.41 มาทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีและเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ โดยใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน คือ 121 จุดต่อ ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางนี้แสดงไว้ดังรูปที่ 5.42 และ 5.43 ซึ่งจะมีค่าการเสียรูปสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบาง ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบโดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงนั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 5.44 ซึ่งเอลิเมนต์ทั้งสองแบบนั้นให้ผลลัพธ์ที่เท่ากับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 5.42 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



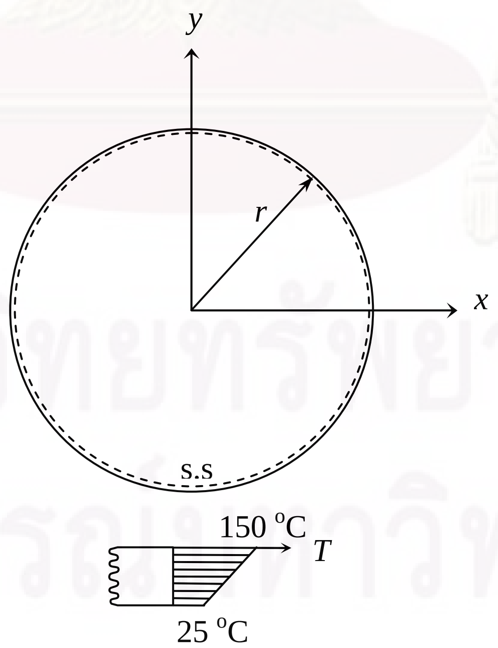
รูปที่ 5.43 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.44 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบสี่ด้าน มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

5.2.3 ปัญหาแผ่นบางวงกลมที่มีการรองรับด้วยลิ่ม

แผ่นวงกลมบางมีรัศมี r ขนาด 1 m หนา 0.01 m รองรับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบด้านนอก มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น โดยอุณหภูมิตลอดผิวด้านบนเป็น 150 °C และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่างเป็น 25 °C ดังแสดงในรูปที่ 5.45 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน α เป็น 2.3×10^{-7} /°C ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 72 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.33



รูปที่ 5.45 แผ่นวงกลมบางที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

ผลเฉลยแม่นตรงของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ของแผ่นวงกลมบางที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้านและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น [15] คือ

$$w(x,y) \quad = \quad \frac{\alpha \Delta T}{2t}(r^2 - x^2 - y^2) \tag{5.7}$$

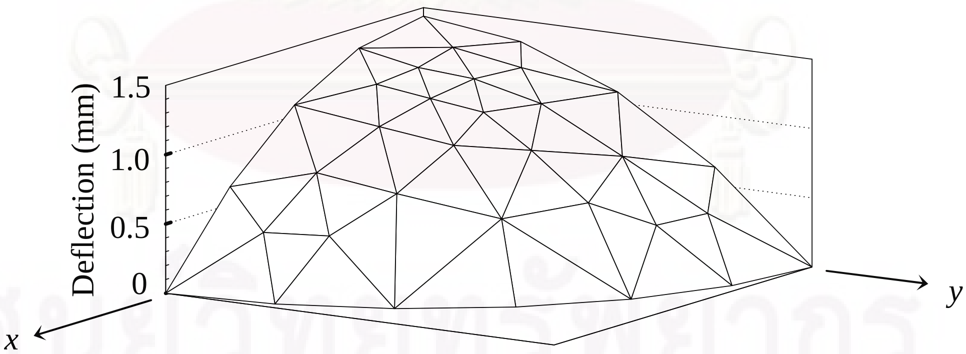
โดยที่ r คือ รัศมีของแผ่นวงกลมบาง

α คือ ค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน

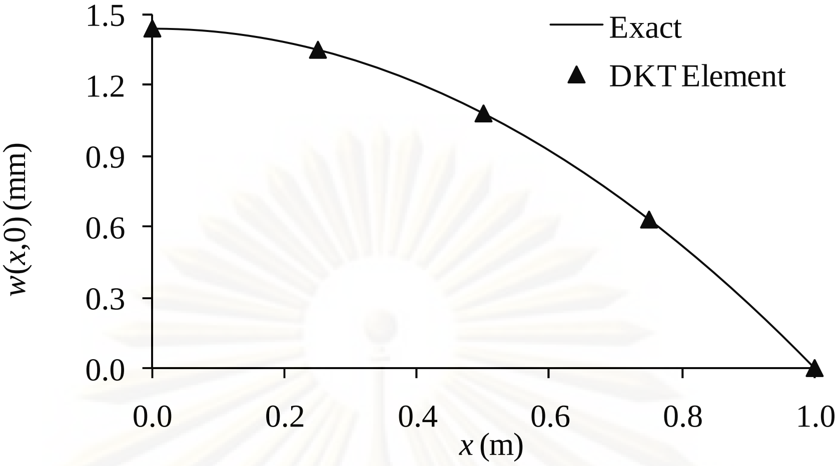
t คือ ค่าความหนาของแผ่นบาง

ΔT คือ ค่าผลต่างของอุณหภูมิระหว่างผิวบนและผิวล่าง

จากลักษณะของปัญหาที่มีความสมมาตรจึงนำพื้นที่เพียงหนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.45 มาใช้ในการคำนวณ โดยทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีที่มีจำนวน 52 เอลิเมนต์ 34 จุดต่อ โดยลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางนี้แสดงไว้ดังรูปที่ 5.46 โดยมีค่าการเสียรูปสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบาง ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงแสดงไว้ดังรูปที่ 5.47 ซึ่งผลลัพธ์ที่คำนวณได้นั้นมีค่าเท่ากับผลเฉลยแม่นตรง



รูปที่ 5.46 การเสียรูปของแผ่นบางวงกลมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบด้านนอก และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.47 ค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนดิ่ง w ตลอดแนวแกน x ของแผ่นบางวงกลมที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบด้านนอก และมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

5.3 บทสรุป

ในบทนี้ได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม PLATEDKT ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที โดยนำมาทดสอบกับปัญหาพื้นฐานที่เราทราบผลเฉลยแม่นตรงรวมไปถึงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ทั้งปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงทางกลและภาระทางความร้อน ซึ่งพบว่าให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ และเห็นได้ชัดว่า เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีนั้น ให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อ และให้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้าสู่คำตอบได้รวดเร็วกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อเมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้น จากตัวอย่างปัญหาต่าง ๆ ที่นำมาวิเคราะห์ได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของโปรแกรม PLATEDKT และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง ซึ่งจะได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้นโดยจะทำงานร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในบทที่ 6 ต่อไป

บทที่ 6

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ขั้นตอนแรกจะเริ่มต้นโดยการแบ่งพื้นที่ภายในโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แล้วทำการคำนวณหาค่าตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ๆ ดังนั้นหากเราต้องการความแม่นยำของคำตอบเชิงตัวเลขที่สูงมากขึ้น เราจะต้องแบ่งโดเมนของปัญหานั้นออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดเล็กลงมาก ๆ ตลอดทั้งโดเมนของปัญหา ซึ่งทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและใช้หน่วยความจำเป็นจำนวนมาก และอาจทำให้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยความจำที่จำกัดนั้นไม่สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้ ดังนั้นหากเราสามารถเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะในบริเวณที่เหมาะสมก็จะทำให้ลดจำนวนจุดต่อหรือตัวไม่รู้ค่าที่ต้องทำการคำนวณลง แต่ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยทั่ว ๆ ไปนั้นเราไม่สามารถที่จะทราบผลเฉลยแม่นตรงก่อนล่วงหน้าได้ ทำให้ไม่อาจทราบว่าในบริเวณใดควรใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็ก และในบริเวณใดที่สามารถใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้ จึงต้องอาศัยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ[2] เพื่อใช้ในการปรับขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดที่เหมาะสมดังกล่าว ซึ่งในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) และขั้นตอนในการนำไปประยุกต์ใช้กับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง

6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ คือ จะทำการปรับใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของค่าความชันของคำตอบสูงและปรับใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น โดยหลักการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ดังกล่าวนั้นจะอาศัยหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stress) [16] ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) คือ ทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมซึ่งประกอบไปด้วย $\dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}$ และ $\dfrac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}$ ซึ่งค่าต่าง ๆ เหล่านี้จะนำมาคำนวณหาค่าในแนวแกนหลักดังแสดงในรูปที่ 6.1 โดย ϕ แทนคำตอบของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์และตัวห้อย i แทนจุดต่อที่ i

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 \\ 0 & \sigma_Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix}$$

รูปที่ 6.1 รูปแสดงหลักการการหาค่าในแนวแกนหลัก

เราเริ่มต้นโดยสมมุติลักษณะการกระจายของคำตอบบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่ออยู่ให้อยู่ในรูปของ

$$\phi_e(x,y) \;=\; N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 \tag{6.1}$$

โดยที่ N_i , i = 1, 2, 3 คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ϕ_i , i = 1, 2, 3 คือ ค่าคำตอบที่จุดต่อของเอลิเมนต์

ซึ่งฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์หาได้จากสมการ

$$N_i(x,y) \;=\; \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad ; i = 1, 2, 3 \tag{6.2}$$

โดยที่ค่า a_i, b_i, c_i มีค่าดังนี้

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \qquad b_1 = y_2 - y_3 \qquad c_1 = x_3 - x_2 \tag{6.3ก}$$

$$a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \qquad b_2 = y_3 - y_1 \qquad c_2 = x_1 - x_3 \tag{6.3ข}$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \qquad b_3 = y_1 - y_2 \qquad c_3 = x_2 - x_1 \tag{6.3ค}$$

และ A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ที่เราพิจารณาซึ่งหาได้จาก

$$A \;=\; \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right] \tag{6.4}$$

จากสมการ (6.1) ทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของเอลิเมนต์ใด ๆ เทียบกับ x ได้ดังสมการ

$$\frac{\partial\phi_e}{\partial x} \;=\; \frac{\partial N_1}{\partial x}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\phi_3 \tag{6.5}$$

ซึ่งจากสมการ (6.2) จะได้ว่า

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{b_1}{2A}, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{b_2}{2A}, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{b_3}{2A} \tag{6.6}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = \frac{1}{2A}(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3) \tag{6.7}$$

หรือ

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left[(y_2 - y_3)\phi_1 + (y_3 - y_1)\phi_2 + (y_1 - y_2)\phi_3\right] \tag{6.8}$$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial y} = \frac{1}{2A}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3) \tag{6.9}$$

หรือ

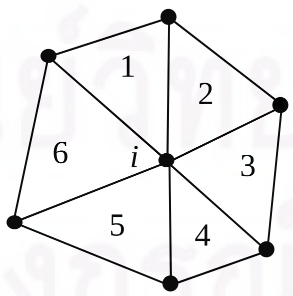
$$\frac{\partial \phi_e}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left[(x_3 - x_2)\phi_1 + (x_1 - x_3)\phi_2 + (x_2 - x_1)\phi_3\right] \tag{6.10}$$

แต่สิ่งที่เราต้องการทราบคือค่าอนุพันธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ ดังนั้นเราจึงต้องทำการกระจายค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ที่หาได้นี้ไปสู่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งทำได้โดย

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \dfrac{\partial \phi_{en}}{\partial x}}{n} \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \dfrac{\partial \phi_{en}}{\partial y}}{n} \tag{6.12}$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์ ตัวอย่างเช่น จุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์ ค่า $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial y}$ จะเป็นการนำเอาค่าอนุพันธ์จากทั้ง 6 เอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อนั้นมาทำการเฉลี่ยกันดังแสดงในรูปที่ 6.2



$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \dfrac{\partial \phi_{e6}}{\partial x}}{6}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \dfrac{\partial \phi_{e6}}{\partial y}}{6}$$

รูปที่ 6.2 ค่าอนุพันธ์ของจุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์

จากนั้น ทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของเอลิเมนต์ใด ๆ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2A}(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3)\right)$$

$$= \frac{1}{2A}\left(b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x}\right) \qquad (6.13)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2A}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3)\right)$$

$$= \frac{1}{2A}\left(c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right) \qquad (6.14)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2A}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3)\right)$$

$$= \frac{1}{2A}\left(c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x}\right) \qquad (6.15)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2A}(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3)\right)$$

$$= \frac{1}{2A}\left(b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right) \qquad (6.16)$$

โดยที่ $\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x}$

และทำการกระจายค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ไปสู่จุดต่อต่าง ๆ เช่นเดียวกับการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่จุดต่อต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมา ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial x^2}}{n} \qquad (6.17)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial y^2}}{n} \qquad (6.18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial x} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial x \partial y} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial x \partial y}}{n} \qquad (6.19)$$

เมื่อจุดต่อที่ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ n เอลิเมนต์

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของ ϕ_i ทั้งหมดแล้ว จึงนำค่าต่าง ๆ ดังกล่าวไปหาค่าในแนวแกนหลัก (principal values) โดยใช้ความสัมพันธ์ดังในสมการ (6.20) และ (6.21) [16]

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\right)^2} \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\right)^2} \quad (6.21)$$

เมื่อได้ค่าในแนวแกนหลัก $\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}$ และ $\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}$ ออกมา ค่าที่มากที่สุดของทั้งสองค่าดังกล่าวจะถูกเลือกออกมาโดย

$$\lambda_i = \max\left(\left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}\right|,\left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}\right|\right) \quad (6.22)$$

ค่าที่ถูกเลือก λ_i จะถูกนำมาใช้ในการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ต่อไป โดย

$$h_i^2\lambda_i = \text{ค่าคงที่} = h_{\min}^2\lambda_{\max} \quad (6.23)$$

โดย ค่า $h_{\min}$ คือ ค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดที่ยอมให้ได้ และค่า $\lambda_{\max}$ คือ ค่าในแนวแกนหลัก (principal values) ที่มีค่ามากที่สุดของทั้งปัญหา

อนึ่ง สำหรับปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางนี้ ตัวบ่งชี้ที่ใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม หรือค่า ϕ ที่ได้กล่าวมาข้างต้นนั้นคือ ค่าความเค้นวอนมิเซส (Von Mises stress) [17] ซึ่งคำนวณได้จาก

$$\sigma_{Von\ Mises} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\sigma_x^2+\sigma_y^2+6\tau_{xy}^2} \quad (6.24)$$

6.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับประยุกต์การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางจะมีโปรแกรมที่เกี่ยวข้อง 3 โปรแกรมด้วยกัน ดังต่อไปนี้

1. โปรแกรม BUILT

โปรแกรม BUILT เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ซึ่งจะรับข้อมูลที่กำหนดค่าพื้นผิวและขอบเขตของปัญหารวมทั้งขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสำหรับปัญหาจากโปรแกรม SPACE

2. โปรแกรม PLATEDKT

โปรแกรม PLATEDKT เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปของค่าการเคลื่อนตัวในแนวระนาบ ค่าการเคลื่อนตัวในแนวดิ่ง ค่ามุมบิดรอบแกน และค่าความเค้นชนิดต่าง ๆ โดยข้อมูลของค่าความเค้นวอนมิเซสที่คำนวณได้จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยโปรแกรม SPACE

3. โปรแกรม SPACE

โปรแกรม SPACE เป็นโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมบนโดเมนของปัญหาดังที่ได้อธิบายไปในหัวข้อ 6.1 โดยการรับข้อมูลทั้งจากผู้ใช้ซึ่งจะกำหนดค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่จำเป็น และข้อมูลที่คำนวณได้จากข้อ 2 จากนั้นผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรมจะถูกใช้เป็นข้อมูลนำเข้าโปรแกรม BUILT เพื่อสร้างและปรับขนาดเอลิเมนต์ของปัญหาต่อไป

รายละเอียดของโปรแกรม BUILT และ SPACE ที่อยู่ในรูปแบบภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) รวมไปถึงขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมย่อยต่าง ๆ สามารถศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิง [18,19]

6.3 ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

การประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางโดยใช้โปรแกรมทั้ง 3 ที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 6.2 มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ทำการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดของเอลิเมนต์เท่า ๆ กัน และกระจายตัวกันอย่างสม่ำเสมอตลอดโดเมนของปัญหาโดยใช้โปรแกรม BUILT

2. ใช้โปรแกรม PLATEDKT เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางโดยใช้แบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม BUILT ในขั้นตอนที่ 1

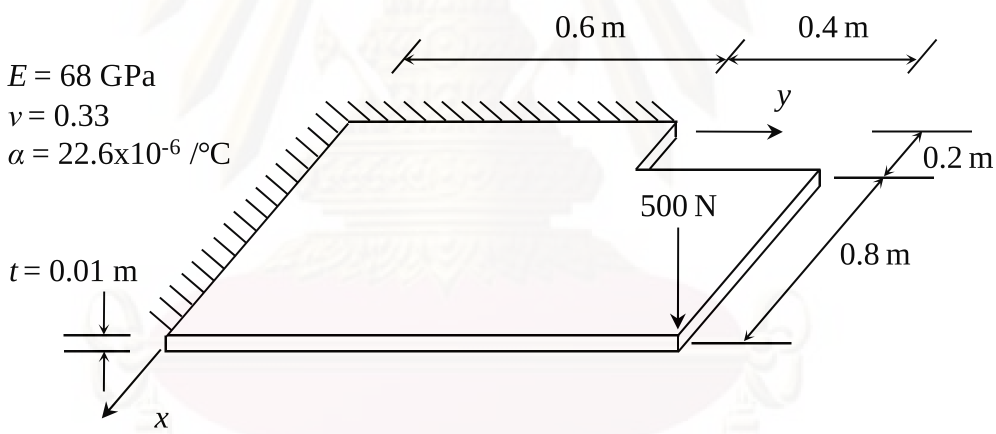
3. ใช้โปรแกรม SPACE ในการหาขนาดของเอลิเมนต์ใหม่ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยใช้ผลของค่าความเค้นวอนมิเซสที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 2 เป็นตัวกำหนด

4. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์อีกครั้งโดยใช้ผลของขนาดเอลิเมนต์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 แล้วทำการวิเคราะห์ปัญหาใหม่อีกครั้งโดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ที่ผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมจากครั้งแรกมาแล้ว

5. นำผลที่ได้ในขั้นตอนที่ 4 มาเปรียบเทียบกับผลที่ได้ในครั้งก่อนหน้าว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความแตกต่างหรือมีการเปลี่ยนแปลงไปมากน้อยเพียงใด หากมีความแตกต่างกันมากแสดงว่าขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้นี้ยังไม่เหมาะสม และจะต้องนำคำตอบที่คำนวณได้จากครั้งหลังนี้ไปใช้หาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมใหม่ในขั้นตอนที่ 3 ต่อไป ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนการเปลี่ยนแปลงของคำตอบที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากหรือไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเปรียบเทียบกับผลคำตอบที่ได้จากครั้งก่อน

6.4 ตัวอย่างการนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง

ในหัวข้อนี้จะนำตัวอย่างการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มุมด้านหนึ่งถูกตัด มีแรงกระทำในแนวแกนดิ่งที่มุมอีกด้านหนึ่ง ดังแสดงในรูปที่ 6.3 โดยการวิเคราะห์ปัญหานั้นจะใช้โปรแกรม PLATEDKT ร่วมกับโปรแกรม BUILT และโปรแกรม SPACE ซึ่งมีลำดับขั้นตอนในการวิเคราะห์ดังนี้



รูปที่ 6.3 ลักษณะของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มุมด้านหนึ่งถูกตัดและมีแรงกระทำในแนวแกนดิ่ง

1. <u>การใช้โปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดสม่ำเสมอ</u>

   1.1 <u>ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้า (input file) สำหรับโปรแกรม BUILT</u>

ไฟล์นำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT จะเป็นข้อมูลที่ใช้สร้างขอบเขตของปัญหาเพื่อที่จะให้โปรแกรมทำการแบ่งเอลิเมนต์ภายในขอบเขตนั้น ๆ โดยส่วนประกอบของข้อมูลนำเข้าสามารถจำแนกออกเป็น 4 ส่วนย่อย ๆ ดังนี้

<u>ส่วนที่ 1</u> ข้อมูลแสดงจำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดแรก คำอธิบายจำนวนขอบและจำนวนพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 จำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา

ตัวอย่างเช่น :

```
nis   nsf
8     1
```

<u>ส่วนที่ 2</u> ข้อมูลองค์ประกอบของเส้นขอบ

บรรทัดแรก คำอธิบายคำจำกัดความของขอบของปัญหา

บรรทัดที่ 2 ประกอบด้วยตัวเลขสองตัว ตัวแรกคือหมายเลขประจำขอบ ส่วนตัวเลขตัวที่สองคือจำนวนจุดที่ใช้ในการสร้างขอบนั้น ๆ

บรรทัดต่อ ๆ ไป ตำแหน่งพิกัดของจุดที่ใช้สร้างขอบนั้น ๆ ซึ่งจะมีจำนวนเท่ากับตัวเลขตัวที่สองในบรรทัดที่ 2

ตัวอย่างเช่น :

```
edge definition
1     2
1.    0.    0.
1.    0.6   0.
```

หมายเหตุ : จากตัวอย่างที่แสดงข้างต้นคือ ขอบที่ 1 เป็นเส้นตรงซึ่งใช้จุดสองจุดในการสร้างขอบ โดยพิกัดของจุดสองจุดดังกล่าวคือ จุด (1,0) และจุด (1,0.6) แต่ในกรณีที่ขอบเป็นเส้นโค้ง ขอบดังกล่าวจำเป็นต้องใช้จุดพิกัดที่มากขึ้นเพื่อที่จะสร้างขอบดังกล่าวให้สมบูรณ์

<u>ส่วนที่ 3</u> ข้อมูลจุดพิกัดที่มุมของบริเวณที่สามารถล้อมรอบพื้นผิวทั้งหมดของปัญหาได้

บรรทัดแรก คำอธิบายจุดพิกัดที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดที่ 2 เลขประจำพื้นผิวของปัญหาและจำนวนจุดพิกัดที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดต่อ ๆ ไป เป็นตำแหน่งพิกัดของจุดที่มุมของพื้นที่ที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

ตัวอย่างเช่น :

```
surface support points
1     3     3
1.    0.    0.
1.    0.6   0.
1.    1.    0.
0.2   0.    0.
0.2   0.6   0.
0.2   1.    0.
0.    0.    0.
0.    0.6   0.
0.    1.    0.
```

ส่วนที่ 4 ข้อมูลการเรียงลำดับของขอบที่จะประกอบเป็นพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดแรก คำอธิบายลำดับของขอบที่ประกอบเป็นพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 เลขตัวแรกระบุหมายเลขประจำพื้นผิว เลขตัวหลังระบุจำนวนขอบที่จะประกอบเป็นพื้นผิวนั้น

บรรทัดที่ 3 ลำดับหมายเลขประจำขอบที่เรียงกันแล้วก่อให้เกิดพื้นผิวของปัญหา

ตัวอย่างเช่น :

```
face boundaries
1     8
1   2  -5  -3  -8  -4   6   7
```

สำหรับลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่โปรแกรม BUILT ต้องการและสอดคล้องกับปัญหาตัวอย่างในหัวข้อนี้บรรจุอยู่ในไฟล์ชื่อ “testx.dat” ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

```
nis   nsf
8     1
edge definition
1     2
1.    0.    0.
1.    0.6   0.
2     2
1.    0.6   0.
1.    1.    0.
:     :     :
:     :     :
8     2
0.    0.6   0.
0.2   0.6   0.
surface support points
1     3     3
1.    0.    0.
1.    0.6   0.
:     :     :
:     :     :
0.    0.6   0.
0.    1.    0.
face boundaries
1     8
1   2  -5  -3  -8  -4   6   7
```

รูปที่ 6.4 ตัวอย่างข้อมูลในไฟล์ “testx.dat”

1.2 <u>การป้อนข้อมูลนำเข้าผ่านโปรแกรม BUILT</u>

หลังจากที่ได้ข้อมูลที่บอกรายละเอียดของขอบเขตของปัญหาที่ต้องการแล้ว ก็จะเริ่มทำการใช้โปรแกรม BUILT ในการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหา โดยโปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูลนำเข้ารวมไปถึงข้อมูลบางส่วนที่โปรแกรมต้องการซึ่งผู้ใช้จะต้อง

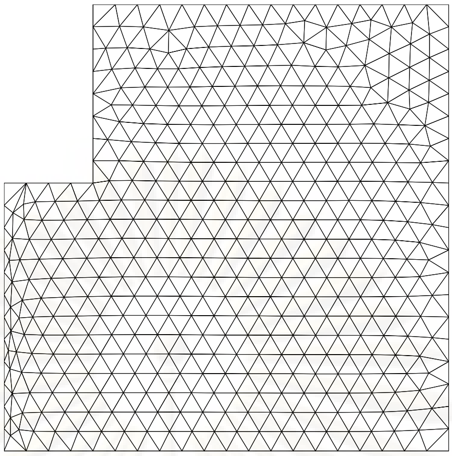
ตอบกลับไป ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 6.5 โดยตัวเอียงหนาคือส่วนที่ผู้ใช้ต้องเป็นผู้พิมพ์ด้วยตนเอง

```
         ************************************
         ***        B  U  I  L  T        ***
         ***     surface triangulator     ***
         ***   for built-up structures    ***
         ************************************

  *** mesh generation ***
      0.- initial mesh
      1.- remeshing

         Option ?: 0  (เลือก 0 สำหรับการสร้างแบบจำลองครั้งแรก)

Enter problem name: testx (ชื่อไฟล์ของปัญหา ซึ่งจะใช้ชื่อเดียวกันนี้ทุกการปรับขนาดเอลิเมนต์)
Enter current version number: 1 (หมายเลขระบุชุดของแบบจำลอง)

  *** initial mesh ***
      element size ?: 0.05 (ขนาดเอลิเมนต์เริ่มต้น)
```

รูปที่ 6.5 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม BUILT พร้อมคำอธิบาย

1.3 <u>ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ (output file) ที่ได้จากโปรแกรม BUILT</u>

ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม BUILT มีอยู่หลายไฟล์ด้วยกัน ซึ่งส่วนใหญ่จะถูกนำมาใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ในรอบต่อไป ชื่อของไฟล์ผลลัพธ์นี้จะเหมือนกับชื่อไฟล์ที่ผู้ใช้ระบุให้โปรแกรมทำการอ่านข้อมูล และในส่วนของนามสกุลของไฟล์ผลลัพธ์นั้นจะมีหมายเลขชุดที่ผู้ใช้เป็นผู้กำหนดเพื่อให้แยกกันชัดเจนสำหรับไฟล์ผลลัพธ์ในรอบต่าง ๆ ของการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ ข้อมูลที่สำคัญที่จะใช้นำไปเป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม PLATEDKT เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างของแผ่นบางคือข้อมูลที่เก็บพิกัดของจุดต่อต่าง ๆ และการจัดเรียงจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ โดยข้อมูลดังกล่าวจะเก็บไว้ในไฟล์ที่มีนามสกุล *.tri_ โดยที่เครื่องหมาย _ คือหมายเลขที่ระบุชุดของการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ ซึ่งในที่นี้ ไฟล์ดังกลาวคือ testx.tri1 สำหรับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นสำหรับปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มุมด้านหนึ่งถูกตัดที่สร้างจากโปรแกรม BUILT ได้แสดงในรูปที่ 6.6 ซึ่งประกอบไปด้วย 467 จุดต่อ และ 852 เอลิเมนต์



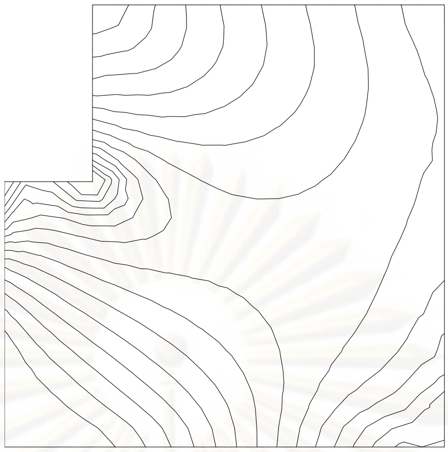
รูปที่ 6.6 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาตัวอย่าง

2. <u>การใช้โปรแกรม PLATEDKT เพื่อหาผลลัพธ์จากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น</u>

นำไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 1.3 มาสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าพร้อมทั้งกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 4 เมื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวด้วยโปรแกรม PLATEDKT โดยจะได้ผลลัพธ์อยู่ในรูปของค่าการเคลื่อนตัวในแนวระนาบและแนวดิ่ง มุมบิดรอบแกน และค่าความเค้นวอนมิเซส ซึ่งค่าความเค้นวอนมิเซสนี้จะถูกนำมาใช้เป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม SPACE เพื่อทำการหาขนาดเอลิเมนต์ใหม่ที่เหมาะสมต่อไป โดยข้อมูลของค่าความเค้นวอนมิเซสจะเก็บอยู่ในไฟล์ชื่อ “vonmis1.in” ซึ่งตัวอย่างข้อมูลภายในไฟล์ดังกล่าวแสดงไว้ดังรูปที่ 6.7 ส่วนผลการกระจายตัวของค่าความเค้นวอนมิเซสสำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหานั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 6.8

```
467
   1  0.353039E+08
   2  0.232095E+08
   3  0.244006E+08
   4  0.405367E+08
   5  0.263745E+07
   :        :
   :        :
 464  0.928856E+07
 465  0.715440E+07
 466  0.268588E+08
 467  0.672334E+07
```

รูปที่ 6.7 ตัวอย่างไฟล์ข้อมูลในไฟล์ชื่อ “vonmis1.in”



รูปที่ 6.8 การกระจายตัวของค่าความเค้นวอนมิเซสสำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

3. การใช้โปรแกรม SPACE เพื่อหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

3.1 ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม SPACE

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม SPACE จะมีด้วยกัน 4 ไฟล์ ประกอบไปด้วยไฟล์ที่อยู่ในรูปของนามสกุล *.nod_, *.ele_, *.dim_ และ vonmis_.in ซึ่ง 3 ไฟล์แรกนั้นได้มาจากโปรแกรม BUILT ส่วนไฟล์สุดท้ายได้มาจากข้อ 2

3.2 การป้อนข้อมูลผ่านโปรแกรม SPACE

หลังจากได้ไฟล์ต่าง ๆ ครบแล้ว จึงเริ่มการใช้งานโปรแกรม SPACE โดยไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับใช้ปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นจะถูกกำหนดไว้ภายในโปรแกรม ขั้นตอนในการระบุขนาดของเอลิเมนต์ที่จะปรับขนาดที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์นั้นแสดงไว้ในรูปที่ 6.9 โดยตัวเอียงหนาคือส่วนที่ผู้ใช้ต้องเป็นผู้พิมพ์ด้วยตนเอง

```
PLEASE INPUT THE MINIMUM & MAXIMUM SPACINGS
0.01     0.2
```

รูปที่ 6.9 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม SPACE

3.3 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

ตัวโปรแกรมจะสร้างไฟล์ผลลัพธ์เพื่อเก็บข้อมูลขนาดของเอลิเมนต์ใหม่ที่เหมาะสมไว้ในไฟล์ที่มีนามสกุล *.ref_ โดยในที่ไฟล์ดังกล่าวคือ “testx.ref1” ซึ่งตัวอย่างข้อมูลภายในไฟล์ดังกล่าวแสดงไว้ดังรูปที่ 6.10

```
467
   1      0.21525883E-01
   2      0.81668249E-01
   3      0.41757102E-01
   4      0.10000000E-01
   :            :
   :            :
 465      0.32650942E-01
 466      0.42601297E-01
 467      0.40730179E-01
```

รูปที่ 6.10 ตัวอย่างข้อมูลภายในไฟล์ “testx.ref1”

4. <u>การใช้โปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ที่ได้ปรับขนาดแล้ว</u>

4.1 <u>ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT</u>

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้ในขั้นตอนนี้ได้ถูกสร้างไว้แล้วในขั้นตอนที่ 1 รวมกับไฟล์ “testx.ref1” ที่ได้สร้างไว้ในขั้นตอนที่ 3

4.2 <u>การป้อนข้อมูลผ่านโปรแกรม BUILT</u>

หลังจากได้ไฟล์ต่าง ๆ ครบแล้ว จึงเริ่มการใช้งานโปรแกรม BUILT โดยโปรแกรมจะถามชื่อไฟล์ข้อมูลของปัญหาและข้อมูลต่าง ๆ สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ ขั้นตอนดังกล่าวจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 6.11 โดยตัวเอียงหนาคือส่วนที่ผู้ใช้ต้องเป็นผู้พิมพ์ด้วยตนเอง

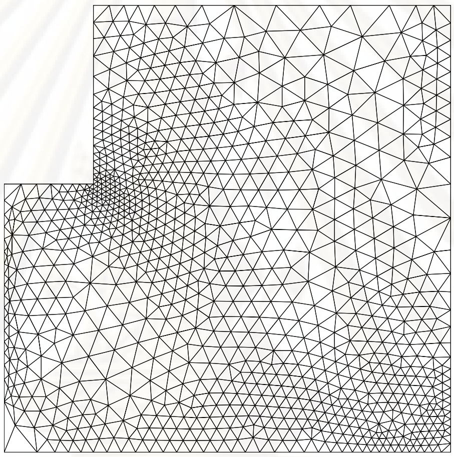
```
          ************************************
          ***         B  U  I  L  T        ***
          ***     surface triangulator     ***
          ***   for built-up structures    ***
          ************************************

  *** mesh generation ***
      0.- initial mesh
      1.- remeshing

          Option ?: 1  (เลือก 1 สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์)

Enter problem name: testx  (ชื่อไฟล์ของปัญหา)
Enter current version number: 2  (หมายเลขระบุชุดของการปรับขนาดครั้งใหม่)
Enter previous version number: 1  (หมายเลขระบุชุดของการปรับขนาดครั้งก่อน)
```

รูปที่ 6.11 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ขณะใช้โปรแกรม BUILT เพื่อการปรับขนาดเอลิเมนต์ใหม่

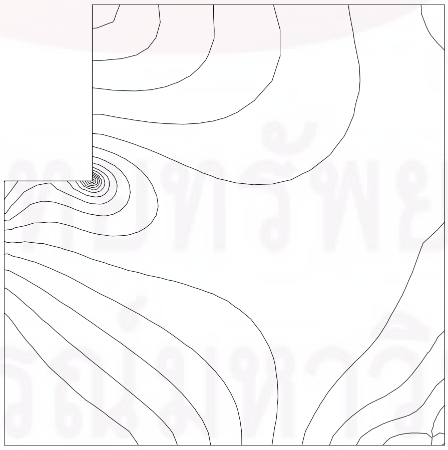
4.3 <u>ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์</u>

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จะมีลักษณะเช่นเดียวกับในข้อ 1.3 ซึ่งเป็นไฟล์ที่บรรจุข้อมูลของตำแหน่งจุดต่อและหมายเลขจุดต่อสำหรับแต่ละเอลิเมนต์โดยในที่นี้ข้อมูลดังกล่าวจะถูกเก็บไว้ในไฟล์ชื่อ “testx.tri2” สำหรับรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ได้แสดงในรูปที่ 6.12 ซึ่งประกอบไปด้วย 1006 จุดต่อและ 1889 เอลิเมนต์

หลังจากนั้นนำแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ผ่านการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 มาทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม PLATEDKT โดยผลการวิเคราะห์ในรูปที่ 6.13 แสดงให้เห็นว่าลักษณะการกระจายตัวของค่าความเค้นวอนมิเซสในบริเวณมุมมีความชัดเจนมากยิ่งขึ้น



รูปที่ 6.12 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ของปัญหาตัวอย่าง



รูปที่ 6.13 การกระจายตัวของค่าความเค้นวอนมิเซสสำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 1

จากตัวอย่างที่ได้นำเสนอข้างต้นจะเห็นได้ว่า การนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาประยุกต์กับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้เป็นผลทำให้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น อีกทั้งการที่ปรับให้เอลิเมนต์มีขนาดเล็กในบริเวณที่จำเป็นเท่านั้นทำให้ช่วยประหยัดหน่วยความจำและเวลาที่จะต้องใช้ในการคำนวณอีกด้วย

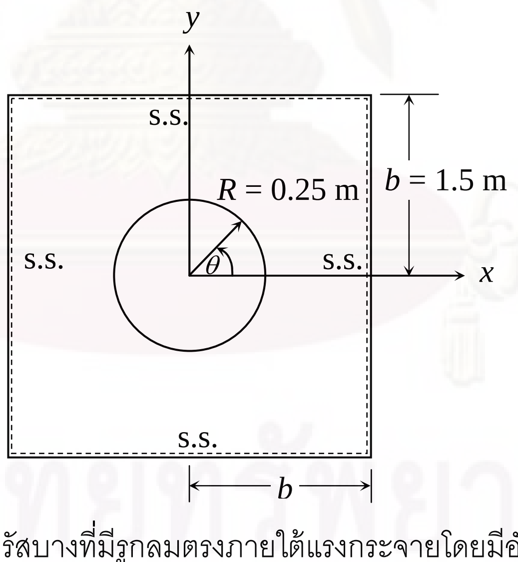
บทที่ 7

ตัวอย่างปัญหาการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในบทนี้จะนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่ได้กล่าวไว้ในบทที่แล้วมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีเพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ รวมไปถึงลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลงในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความซับซ้อน โดยประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นจะถูกนำมาทดสอบด้วยปัญหาต่าง ๆ ดังนี้

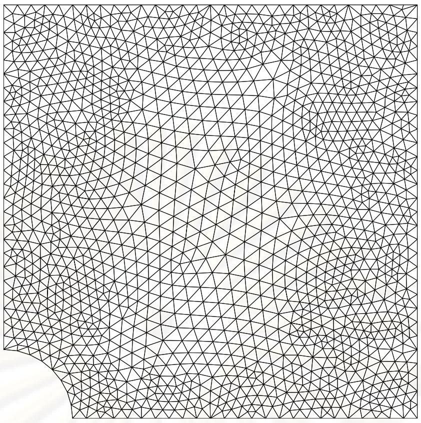
7.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด 3×3 m^2 หนา 0.01 m มีรูกลมตรงกลางรัศมี R = 0.25 m ภายใต้แรงกระทำแบบกระจายในแนวดิ่งคงที่ p = 1,000 N/m^2 กระทำตลอดทั้งแผ่น โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 190 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.3 โดยแผ่นบางนี้มีการรองรับด้วยลิ่ม (simply support) ตลอดขอบทั้งสี่ด้าน ดังแสดงในรูปที่ 7.1 ซึ่งเป็นปัญหาเดียวกันกับปัญหาในหัวข้อ 5.1.5 ในกรณีที่อัตราส่วน R/b = 1/6



รูปที่ 7.1 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่มีรูกลมตรงภายใต้แรงกระจายโดยมีอัตราส่วน R/b = 1/6

เนื่องจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตร เราจึงนำพื้นที่เพียงหนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 7.1 มาใช้ในการคำนวณ เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีขนาดเล็กสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนที่ประกอบไปด้วย 2,922 เอลิเมนต์ 1,521 จุดต่อ โดยลักษณะการแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมนนั้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.2

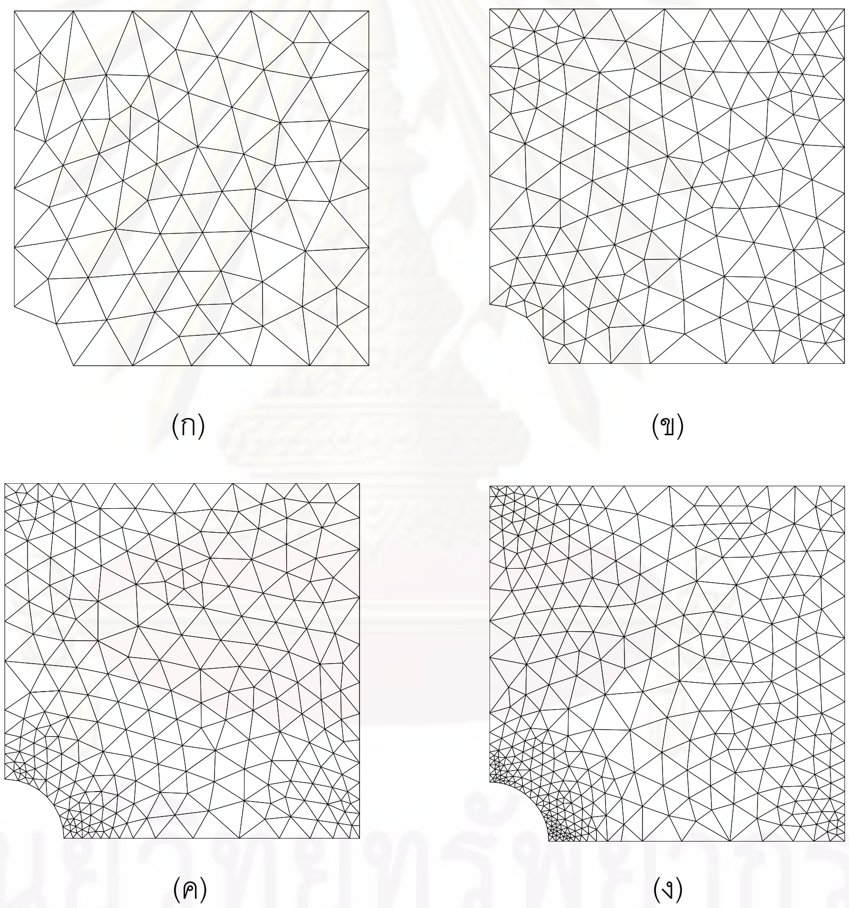


รูปที่ 7.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยม
ที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน

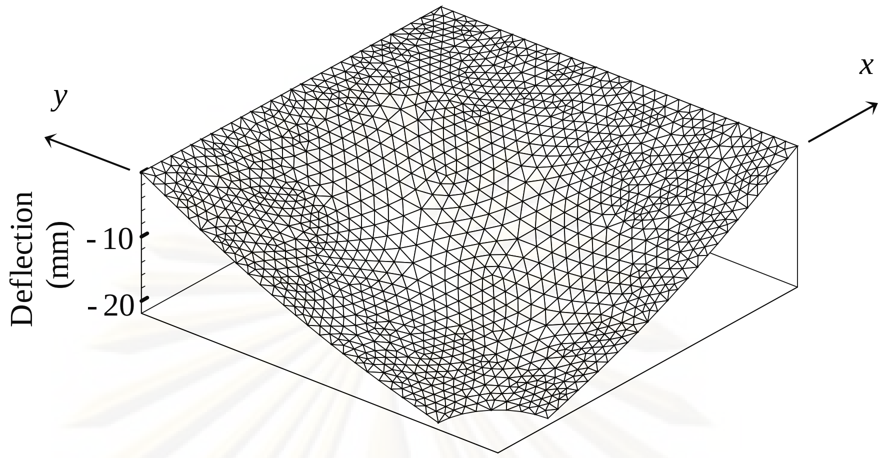
จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ โดยเริ่มต้นด้วยการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีแบบหยาบตลอดทั้งโดเมน ดังแสดงในรูปที่ 7.3(ก) ที่ประกอบไปด้วย 142 เอลิเมนต์ 84 จุดต่อ และนำค่าความเค้นวอนมิเซสที่คำนวณได้นำไปหาค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม จากนั้นทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งแรกนำมาสู่ลักษณะของการแบ่งโดเมนดังรูปที่ 7.3(ข) ที่ประกอบไปด้วย 268 เอลิเมนต์ 155 จุดต่อ โดยลักษณะของเอลิเมนต์โดยรวมจะมีความละเอียดมากขึ้น หลังจากนั้นจึงทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติครั้งที่ 2 และครั้งที่ 3 โดยมีลักษณะของเอลิเมนต์ดังแสดงไว้ในรูปที่ 7.3(ค) และ 7.3(ง) ซึ่งประกอบไปด้วย 471 เอลิเมนต์ 267 จุดต่อ และ 694 เอลิเมนต์ 388 จุดต่อตามลำดับ โดยเอลิเมนต์จะมีความละเอียดมากขึ้นบริเวณขอบของรูกลมซึ่งเป็นบริเวณที่มีความเข้มของความเค้นสูง

ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมนแสดงไว้ดังรูปที่ 7.4 ส่วนลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติโดยทำการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่ 3 แสดงไว้ดังรูปที่ 7.5 ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นบางมีการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงที่บริเวณตลอดขอบของรูกลม และเมื่อพิจารณาที่ตำแหน่งที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง w สูงสุดพบว่า สำหรับการใช้เอลิเมนต์ขนาดสม่ำเสมอที่มีความละเอียดมากขึ้นผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของ Lo และ Leissa [14] มากยิ่งขึ้นหรือลู่เข้าสู่คำตอบ และด้วยการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะเห็นได้ว่า เมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ในแต่ละครั้งจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ลู่เข้าสู่คำตอบมากยิ่งขึ้นดังแสดงในรูปที่ 7.6 และเมื่อพิจารณาจำนวนจุดต่อโดยรวมของการคำนวณโดยประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดย

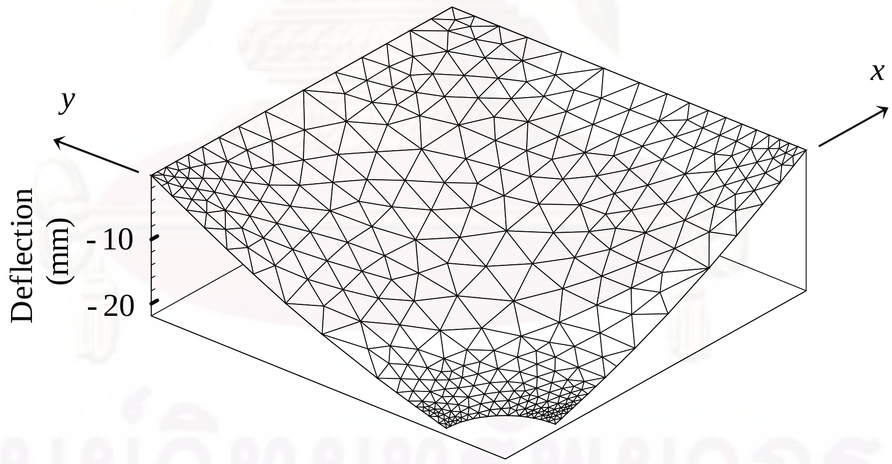
อัตโนมัติด้วยนั้น จะเห็นได้ว่าใช้จำนวนจุดต่อทั้งหมดเพียง 894 จุดต่อ ซึ่งทำให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำที่ใกล้เคียงกับการใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน ซึ่งใช้จำนวนจุดต่อถึง 1,521 จุดต่อ แสดงว่าด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นจะทำให้ลดจำนวนจุดต่อหรือจำนวนตัวไม่ทราบค่าที่ใช้ในการคำนวณลง และให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่เราทราบ โดยเอลิเมนต์จะถูกปรับให้มีขนาดเล็กลงในบริเวณที่มีความเข้มของความเค้นวอนมิเซสสูง และจะถูกปรับให้มีขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น ๆ โดยที่เราไม่ต้องทราบลักษณะของผลเฉลยมาก่อน ลักษณะการกระจายของความเค้นวอนมิเซสของปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน และโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3 แสดงไว้ดังรูปที่ 7.7 และ 7.8



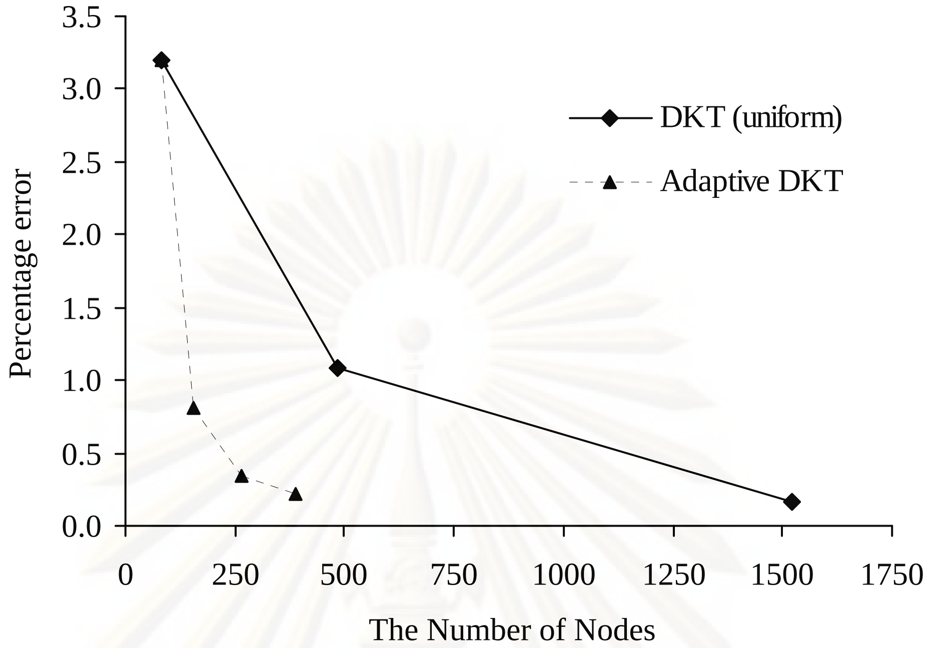
รูปที่ 7.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ



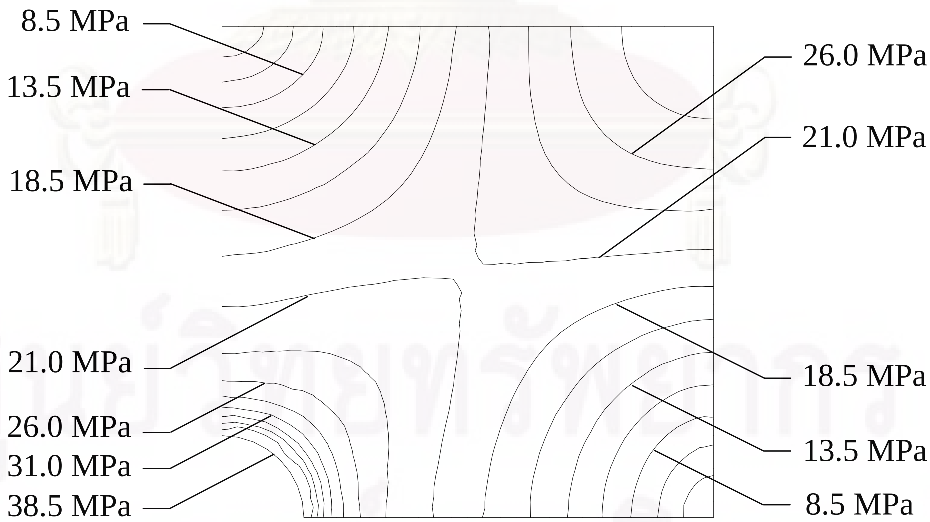
รูปที่ 7.4 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง
โดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน



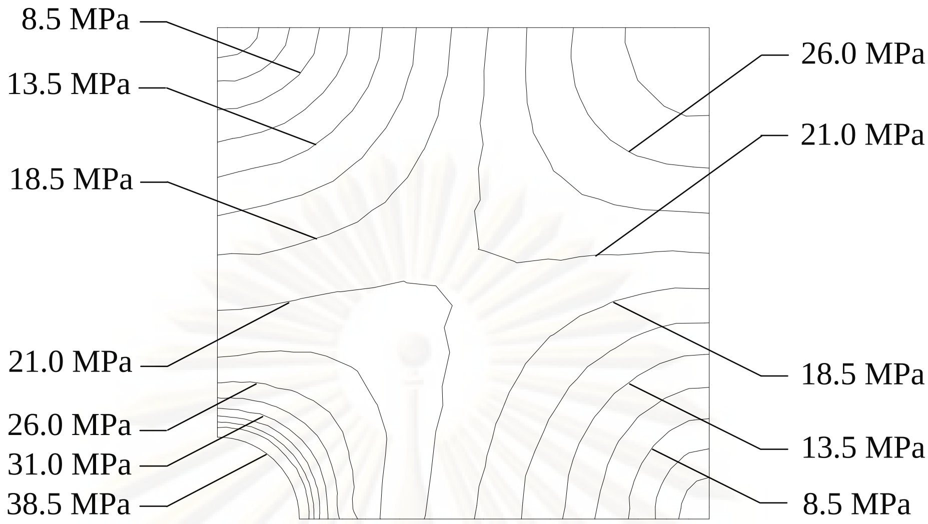
รูปที่ 7.5 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง
โดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3



รูปที่ 7.6 ค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุด ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ ขนาดสม่ำเสมอและเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดโดยอัตโนมัติ



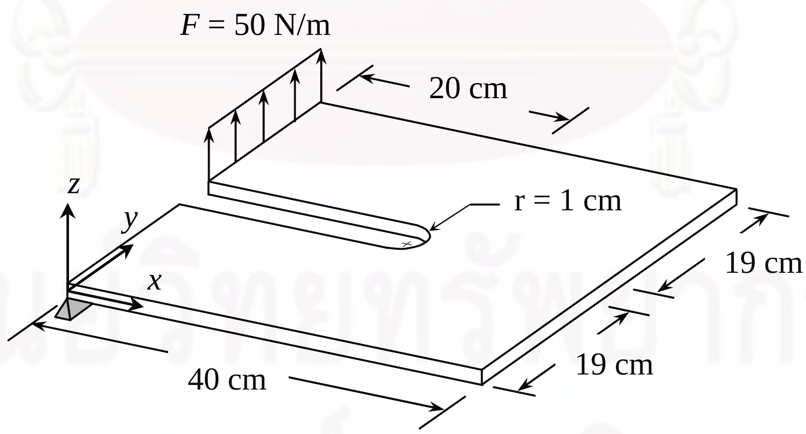
รูปที่ 7.7 ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง โดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กตลอดทั้งโดเมน



รูปที่ 7.8 ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง โดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3

7.2 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีร่องตรงกลาง

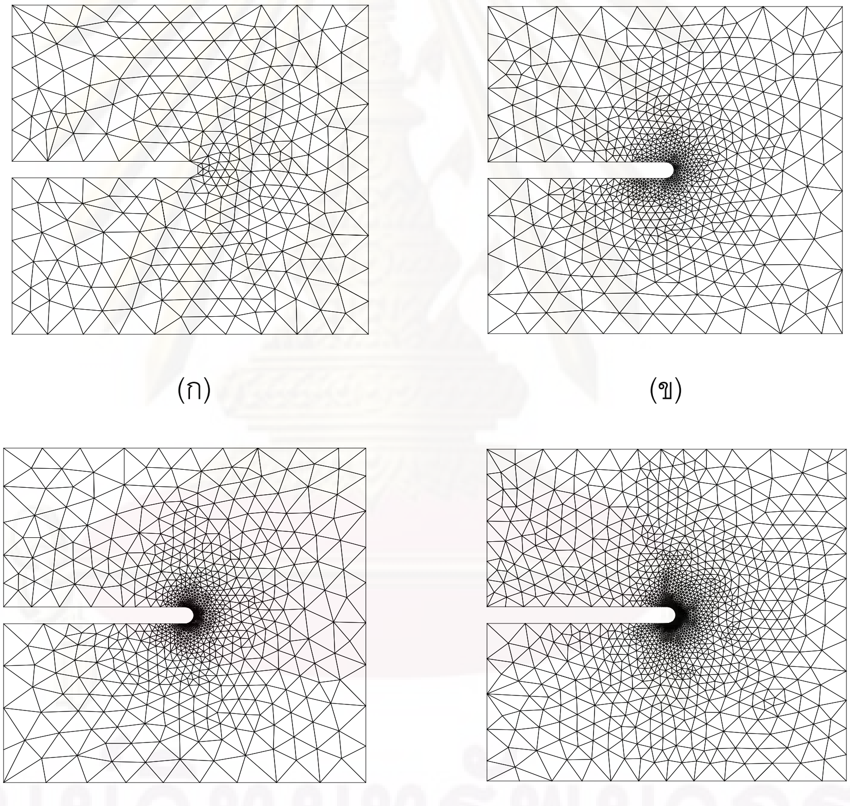
แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด 40×40 cm^2 หนา 2 mm แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่อง มีแรงขนาดสม่ำเสมอในแนวดิ่ง F = 50 N/m กระทำที่ปลายขอบด้านหนึ่ง และรองรับด้วยลิ่ม (simply support) ที่ปลายขอบอีกฝั่งหนึ่งดังแสดงในรูปที่ 7.9 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 190 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.3



รูปที่ 7.9 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่อง

เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีแบบหยาบที่ประกอบไปด้วย 543 เอลิเมนต์ 299 จุดต่อ โดยมีลักษณะการแบ่งโดเมนแสดงไว้ในรูปที่ 7.10(ก) จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ของค่าความเค้นวอนมิเซสที่คำนวณได้มาทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดย

ลักษณะของเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งแรกแสดงไว้ดังรูปที่ 7.10(ข) โดยประกอบไปด้วย 1,604 เอลิเมนต์ 849 จุดต่อ ซึ่งจะเห็นได้ว่า เอลิเมนต์จะมีขนาดเล็กลงที่บริเวณปลายของแนวร่องที่ถูกตัดที่มีค่าความชันของค่าความเค้นวอนมิเซสที่ใช้เป็นตัวชี้วัดในการปรับขนาดเอลิเมนต์สูง เพื่อที่จะเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงมากในบริเวณดังกล่าว หลังจากนั้นจึงทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และครั้งที่ 3 โดยประกอบไปด้วย 2,846 เอลิเมนต์ 1,493 จุดต่อ และ 3,734 เอลิเมนต์ 1,953 จุดต่อ ตามลำดับ โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2 และครั้งที่ 3 นั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 7.10(ค) และ 7.10(ง) ตามลำดับ ซึ่งเอลิเมนต์จะมีความละเอียดมากยิ่งขึ้นบริเวณปลายของแนวร่องที่ถูกตัดซึ่งเป็นบริเวณที่มีความเข้มของความเค้นสูง

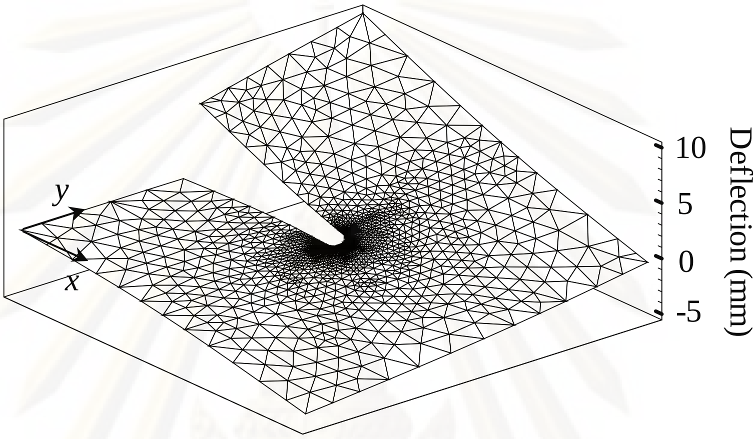


(ก) (ข) (ค) (ง)

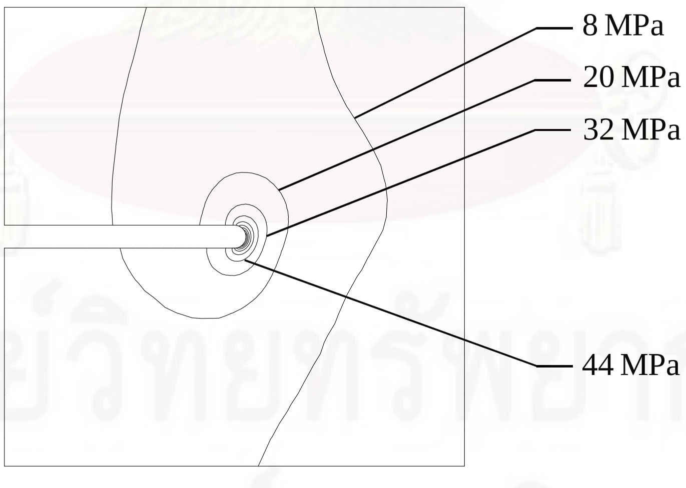
รูปที่ 7.10 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่องด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติโดยทำการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่ 3 แสดงไว้ดังรูปที่ 7.11 ส่วนลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสนั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 7.12 โดยจะเห็นได้ว่ามีความเข้มของค่าความเค้นมากที่ปลายของแนวร่องที่ถูกตัดบริเวณกึ่งกลางของแผ่นบาง รูปที่ 7.13 และ 7.14 แสดงถึงลักษณะการ

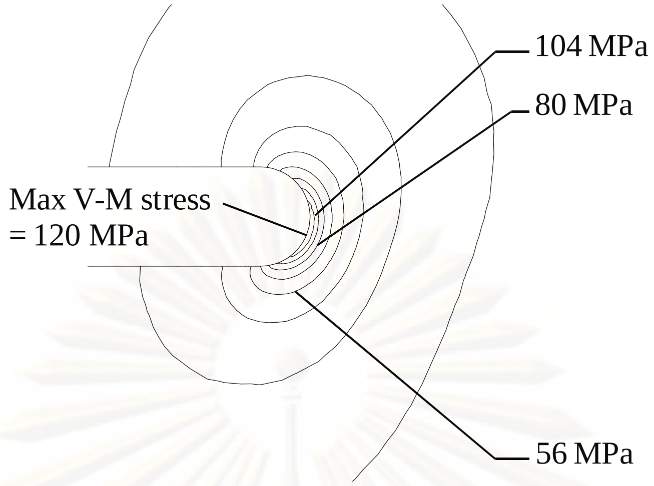
กระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสและเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3 ที่ปลายของแนวร่องที่ถูกตัดบริเวณกึ่งกลางของแผ่นบางตามลำดับ และเมื่อพิจารณาค่าความเค้นวอนมิเซสสูงสุดที่ปลายของแนวร่องที่ถูกตัดบริเวณกึ่งกลางของแผ่นบางในแต่ละครั้งของการคำนวณจะพบว่า ค่าความเค้นวอนมิเซสจะลู่เข้าตามการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้นในบริเวณดังกล่าว โดยค่าความเค้นวอนมิเซสสูงสุดจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 3 ที่คำนวณได้คือ 120 MPa ดังแสดงในรูปที่ 7.15



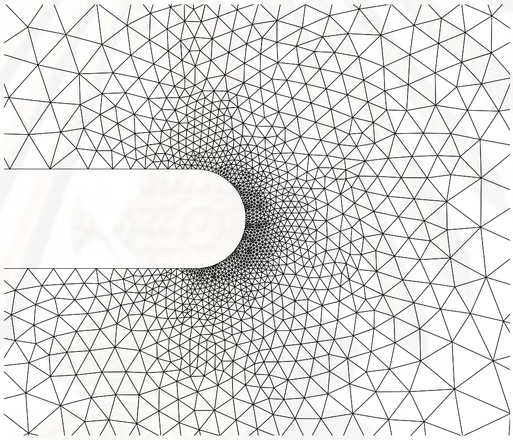
รูปที่ 7.11 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่อง โดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3



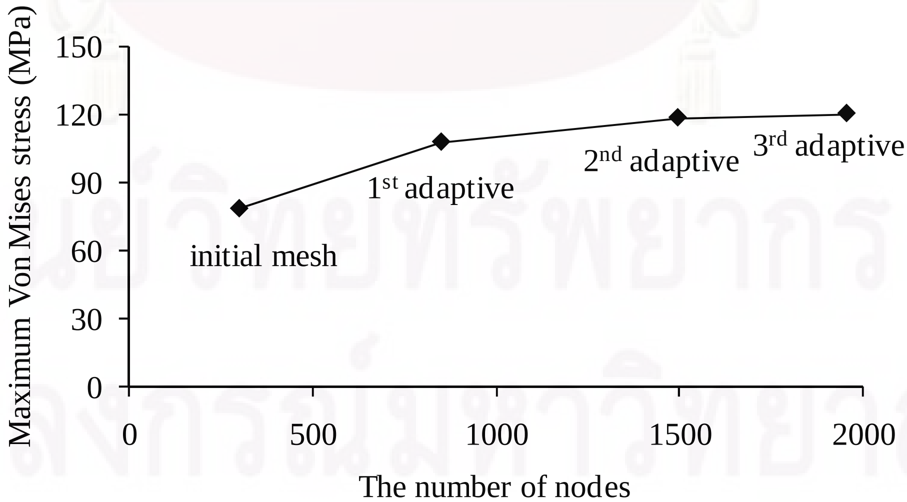
รูปที่ 7.12 ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่องโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3



รูปที่ 7.13 ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางสี่เหลี่ยมบริเวณปลายของแนวร่องที่ถูกตัด



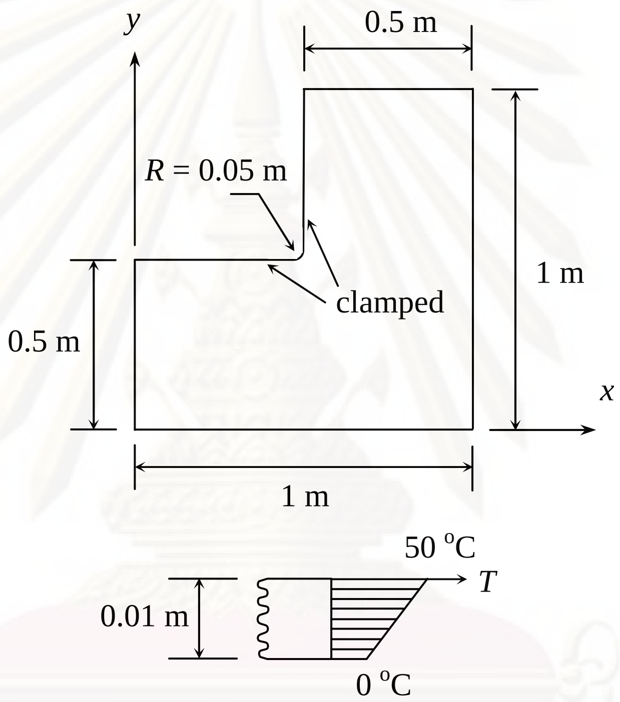
รูปที่ 7.14 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3 บริเวณปลายของแนวร่องที่ถูกตัด



รูปที่ 7.15 การลู่เข้าของค่าความเค้นวอนมิเซสสูงสุดของแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่แนวตรงกลางถูกตัดเป็นร่องด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

7.3 ปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอล

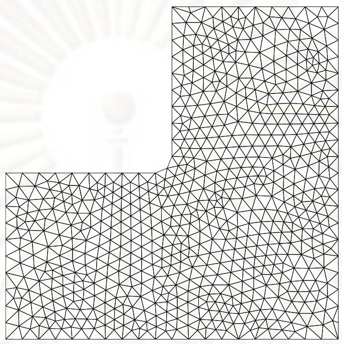
แผ่นบางรูปตัวแอล (L-shaped plate) ที่มุมด้านในเป็นส่วนโค้งรัศมี 0.05 m โดยมีความหนา 0.01 m และถูกยึดแน่นกับผนังตลอดขอบด้านใน มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยมีอุณหภูมิตลอดผิวด้านบนเป็น 50 °C และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่างเป็น 0 °C โดยลักษณะของปัญหานี้แสดงไว้ดังรูปที่ 7.16 แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 68 GPa มีค่าอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.33 และมีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน α เป็น 22.6×10^{-6} /°C



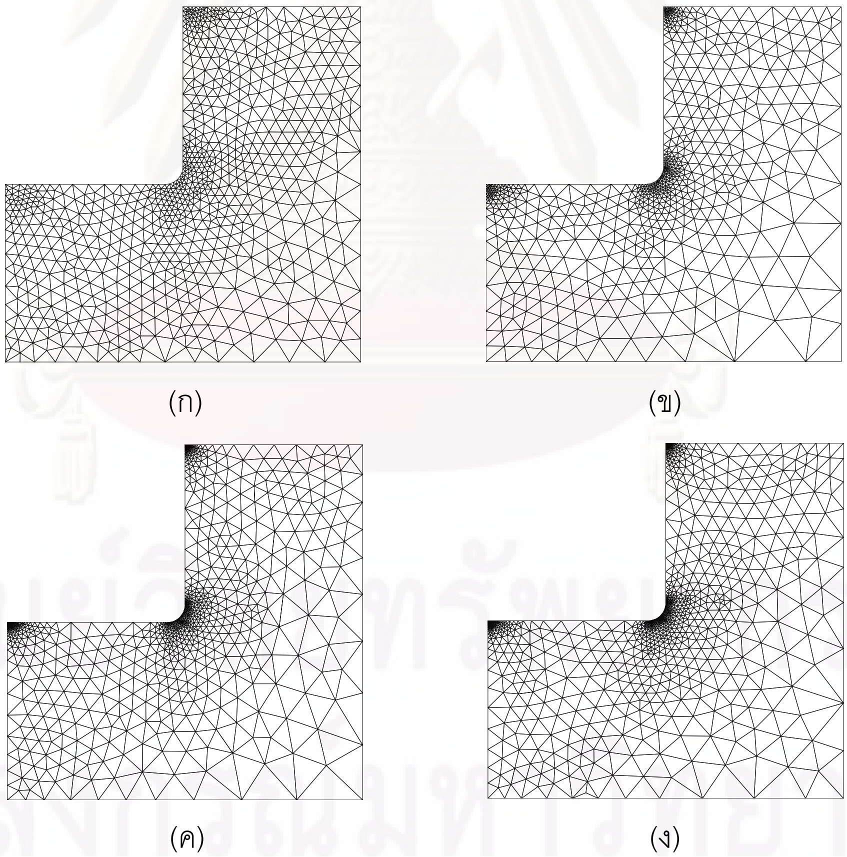
รูปที่ 7.16 แผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น

เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีที่ประกอบไปด้วย 1,322 เอลิเมนต์ 702 จุดต่อ โดยมีลักษณะการแบ่งโดเมนแสดงไว้ในรูปที่ 7.17 จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ของค่าความเค้นวอนมิเซสที่คำนวณได้มาทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งแรกแสดงไว้ดังรูปที่ 7.18(ก) ซึ่งประกอบไปด้วย 1,538 เอลิเมนต์ 822 จุดต่อ ซึ่งจะเห็นได้ว่า เอลิเมนต์จะมีขนาดเล็กลงที่บริเวณมุมโค้งด้านใน และที่มุมของแผ่นบางด้านที่ถูกยึดแน่น ซึ่งเป็นบริเวณที่มีค่าความชันของค่าความเค้นวอนมิเซสที่ใช้เป็นตัวชี้วัดในการปรับขนาดเอลิเมนต์สูง หลังจากนั้นจึงทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2, ครั้งที่ 3 และครั้งที่ 4 ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า เอลิเมนต์จะมีขนาดเล็กลงอย่างมากที่บริเวณมุมโค้งด้านใน และที่มุมของแผ่นบางด้านที่ถูกยึดแน่นเพื่อที่จะเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงมากในบริเวณ

ดังกล่าว ในขณะเดียวกันเอลิเมนต์จะมีขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นเพื่อลดจำนวนตัวไม่ทราบค่าที่จะต้องคำนวณลง โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2, ครั้งที่ 3 และครั้งที่ 4 นั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 7.18(ข), 7.18(ค) และ 7.18(ง) ตามลำดับ ซึ่งประกอบไปด้วย 1,310 เอลิเมนต์ 714 จุดต่อ 1,781 เอลิเมนต์ 967 จุดต่อ และ 2,213 เอลิเมนต์ 1,200 จุดต่อตามลำดับ

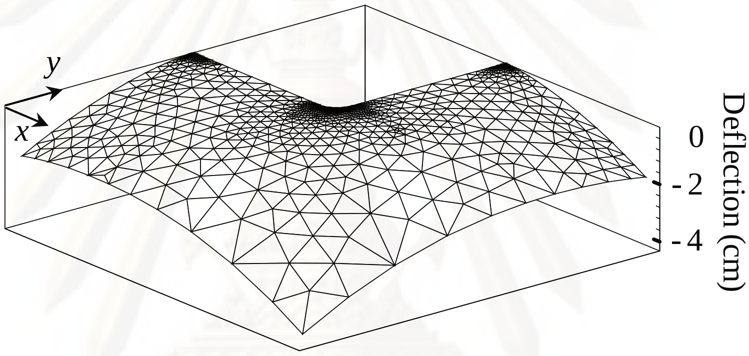


รูปที่ 7.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอล ที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น

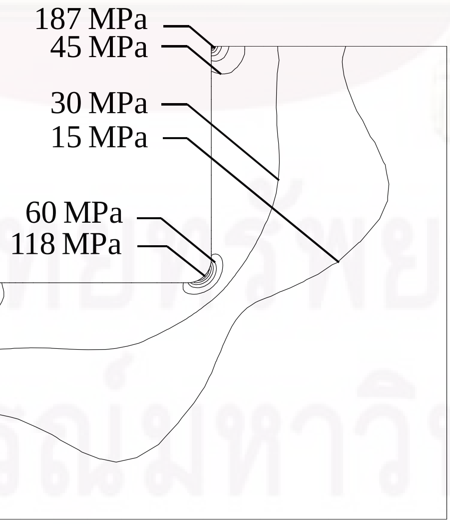


รูปที่ 7.18 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอล ที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น ด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

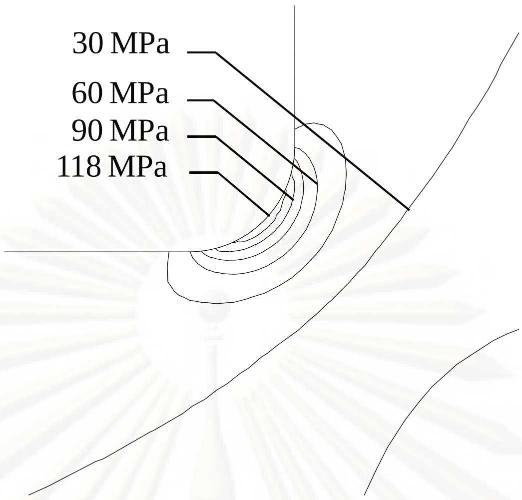
ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่ทำการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่ 4 แสดงไว้ดังรูปที่ 7.19 ลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสแสดงไว้ดังรูปที่ 7.20 โดยจะเห็นได้ว่ามีความเข้มของค่าความเค้นมากที่มุมโค้งด้านในบริเวณกึ่งกลางแผ่น และที่มุมของแผ่นบางของด้านที่ถูกยึดแน่น โดยลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสและเอลิเมนต์ที่บริเวณมุมโค้งด้านในบริเวณกึ่งกลางแผ่นแสดงไว้ดังรูปที่ 7.21 และ 7.22 ตามลำดับ และเมื่อพิจารณาค่าความเค้นวอนมิเซสที่ตำแหน่งกึ่งกลางของส่วนโค้งในแต่ละครั้งของการคำนวณพบว่า ค่าความเค้นวอนมิเซสจะลู่เข้าตามการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้นในบริเวณดังกล่าว โดยค่าความเค้นวอนมิเซสจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 4 ที่คำนวณได้คือ 118 MPa ดังแสดงในรูปที่ 7.23



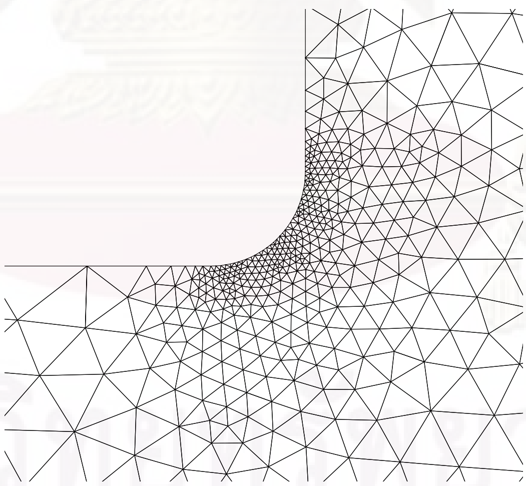
รูปที่ 7.19 การเสียรูปของแผ่นบางแผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4



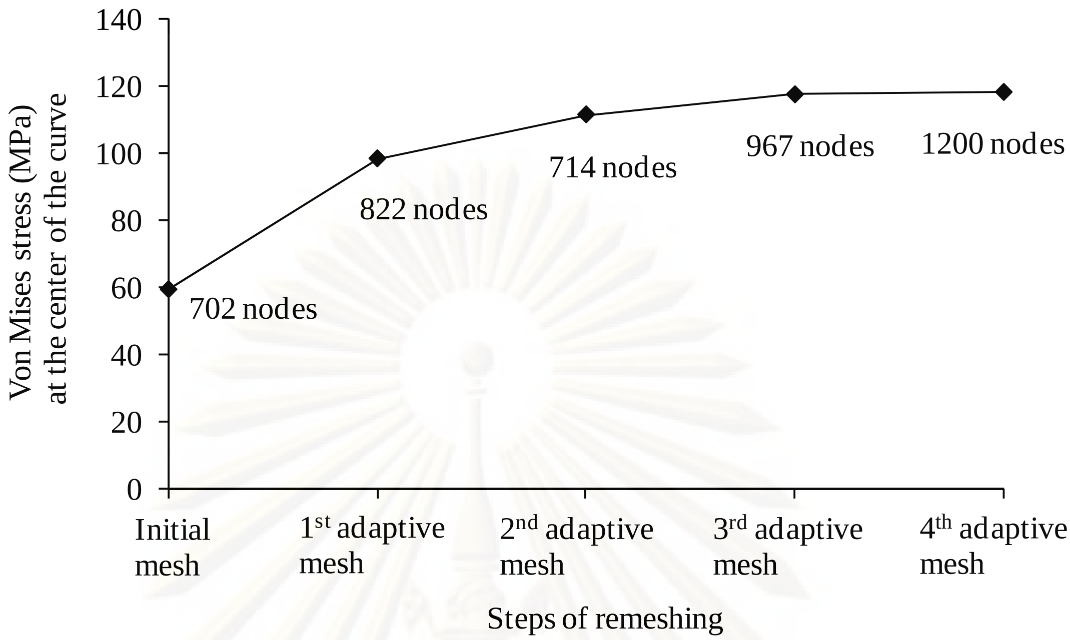
รูปที่ 7.20 ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4



รูปที่ 7.21 ค่าความเค้นวอนมิเซสของแผ่นบางรูปตัวแอลบริเวณมุมโค้งด้านใน บริเวณกึ่งกลางแผ่นโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4



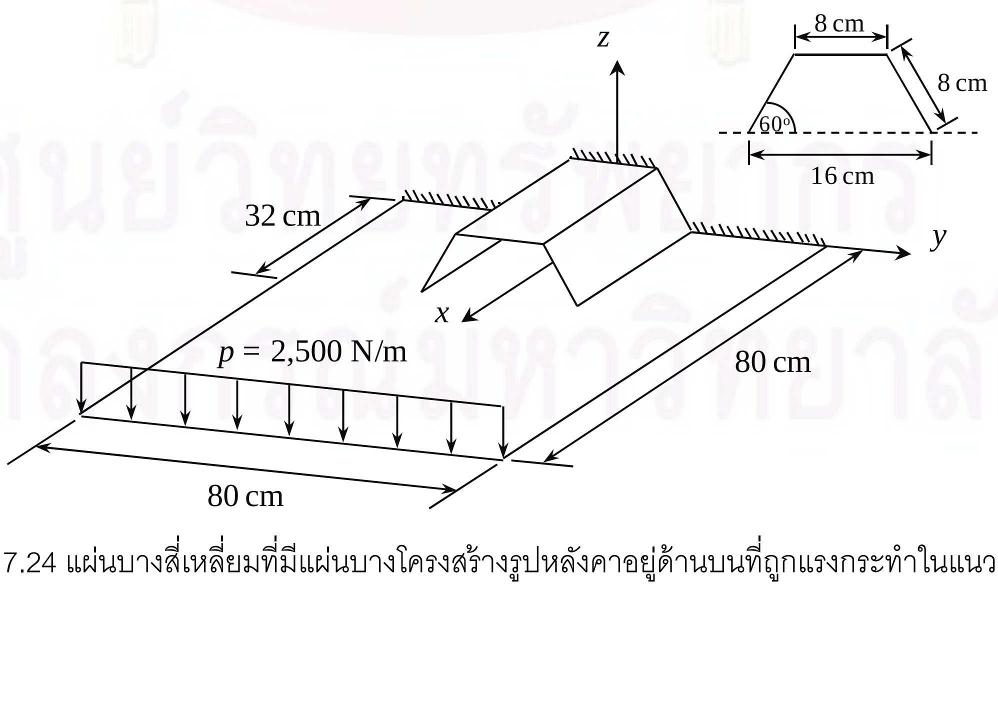
รูปที่ 7.22 เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4 ที่บริเวณมุมโค้งด้านในบริเวณกึ่งกลางแผ่นบาง



รูปที่ 7.23 การลู่เข้าของค่าความเค้นวอนมิเซสสูงสุดของแผ่นบางรูปตัวแอลที่ตำแหน่งกึ่งกลางของส่วนโค้งด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

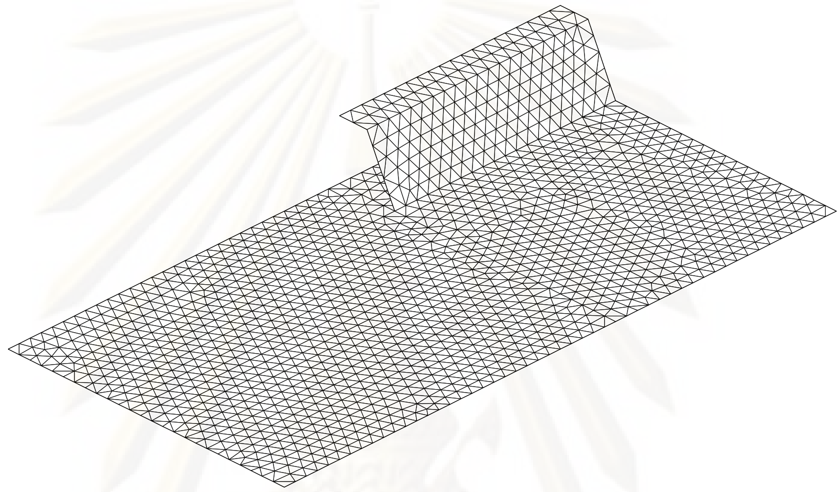
7.4 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางโครงสร้างรูปหลังคาอยู่ด้านบน

แผ่นบางโครงสร้างนี้ประกอบด้วยแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 80×80 cm^2 และแผ่นบางโครงสร้างรูปหลังคาติดอยู่ด้านบน โดยโครงสร้างแผ่นบางนี้มีความหนา 5 mm ถูกแรงขนาดสม่ำเสมอในแนวดิ่ง p = 2,500 N/m กระทำตลอดขอบด้านหนึ่งและถูกยึดกับผนังตลอดขอบอีกด้านหนึ่งดังแสดงในรูปที่ 7.24 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 190 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.3

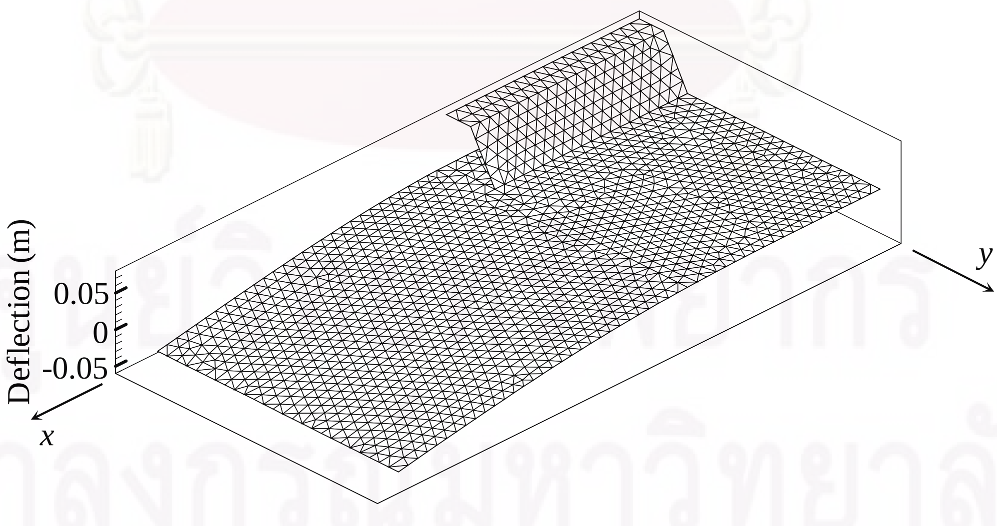


รูปที่ 7.24 แผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางโครงสร้างรูปหลังคาอยู่ด้านบนที่ถูกแรงกระทำในแนวดิ่ง

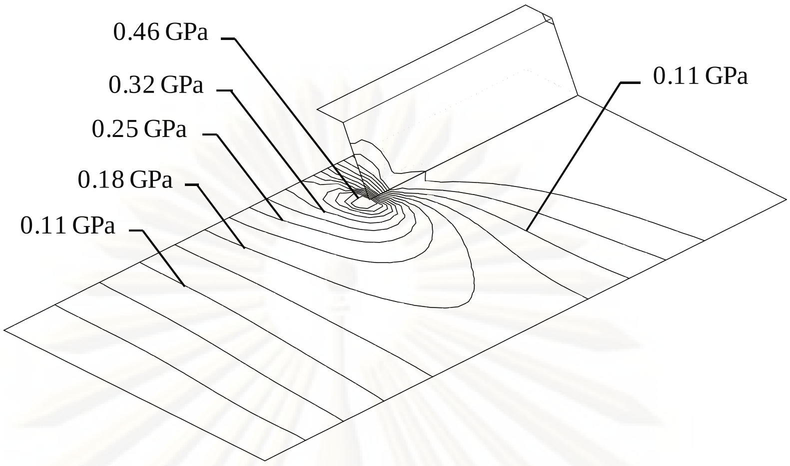
เนื่องจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตร เราจึงนำเพียงครึ่งหนึ่งทางด้านขวาของโครงสร้างแผ่นบางในรูปที่ 7.24 นี้มาวิเคราะห์ เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยทำการแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์แบบละเอียดขนาดสม่ำเสมอจำนวน 3,100 เอลิเมนต์ 1,633 จุดต่อ โดยลักษณะการแบ่งโดเมนนั้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.25 ซึ่งผลการวิเคราะห์ทั้งลักษณะการเสียรูป และลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสแสดงไว้ดังรูปที่ 7.26 และ 7.27 ตามลำดับ



รูปที่ 7.25 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด

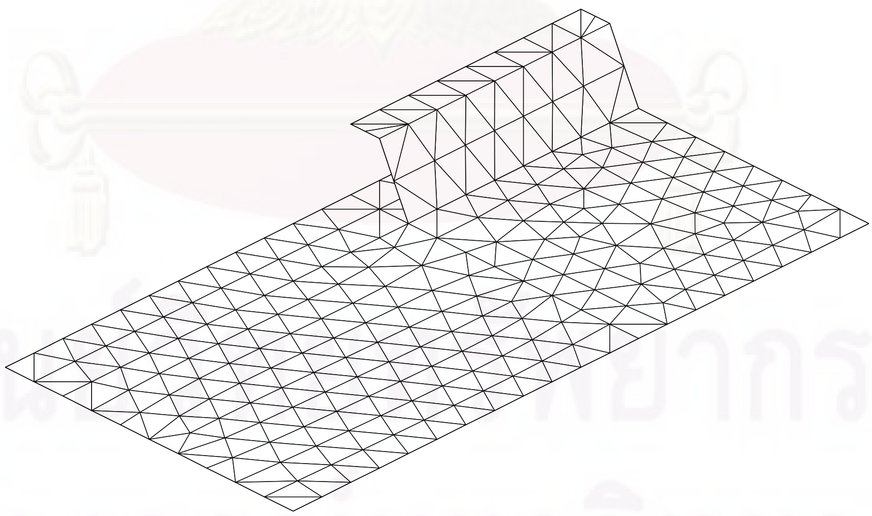


รูปที่ 7.26 การเสียรูปแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด

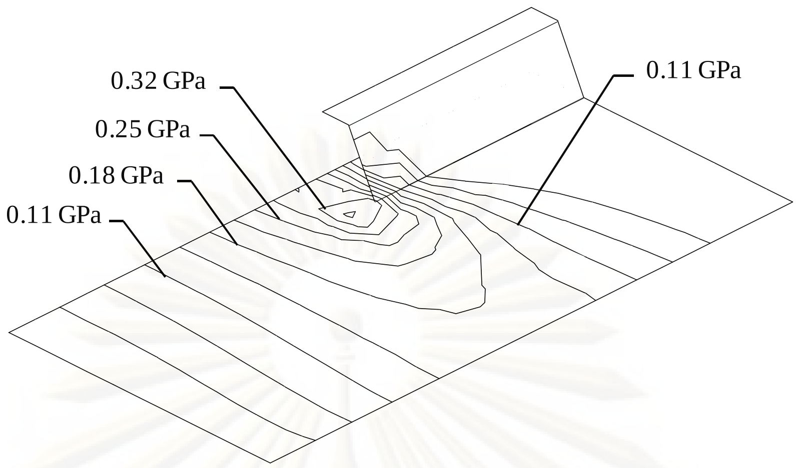


รูปที่ 7.27 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด

จากนั้นทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยเริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นที่ประกอบไปด้วย 458 เอลิเมนต์ 264 จุดต่อ โดยลักษณะการแบ่งโดเมนนั้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.28 โดยลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสแสดงไว้ดังรูปที่ 7.29

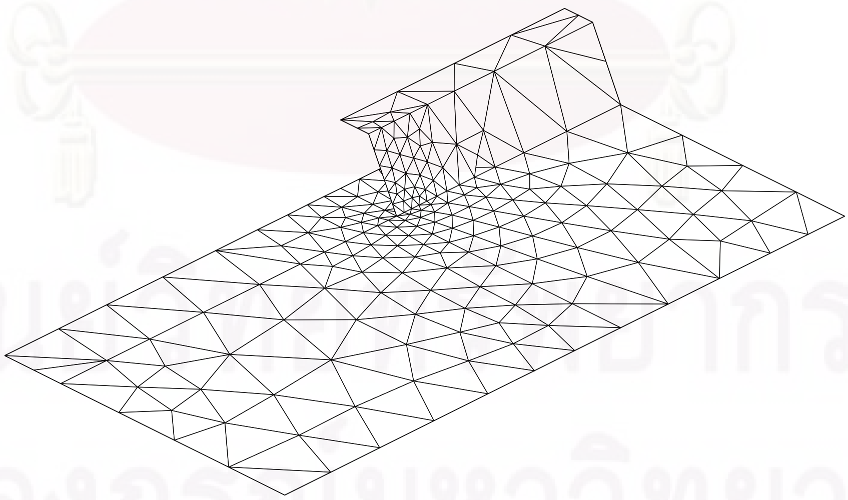


รูปที่ 7.28 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบน

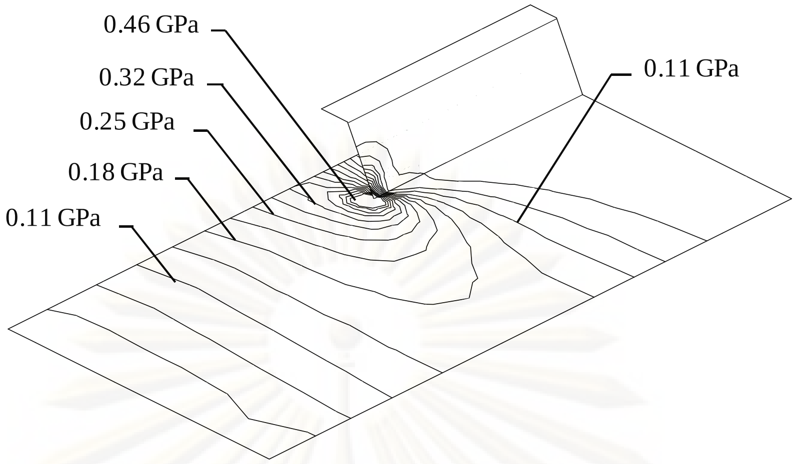


รูปที่ 7.29 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น

จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ของค่าความเค้นวอนมิเซสที่คำนวณได้มาหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมเพื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งแรกแสดงไว้ดังรูปที่ 7.30 ซึ่งประกอบไปด้วย 428 เอลิเมนต์ 237 จุดต่อ ซึ่งจะเห็นได้ว่า เอลิเมนต์จะมีขนาดเล็กลงที่บริเวณรอยต่อระหว่างแผ่นบางรูปหลังคากับแผ่นบางสี่เหลี่ยมซึ่งเป็นบริเวณที่มีค่าความเข้มของค่าความเค้นวอนมิเซสสูงดังแสดงในรูปที่ 7.31

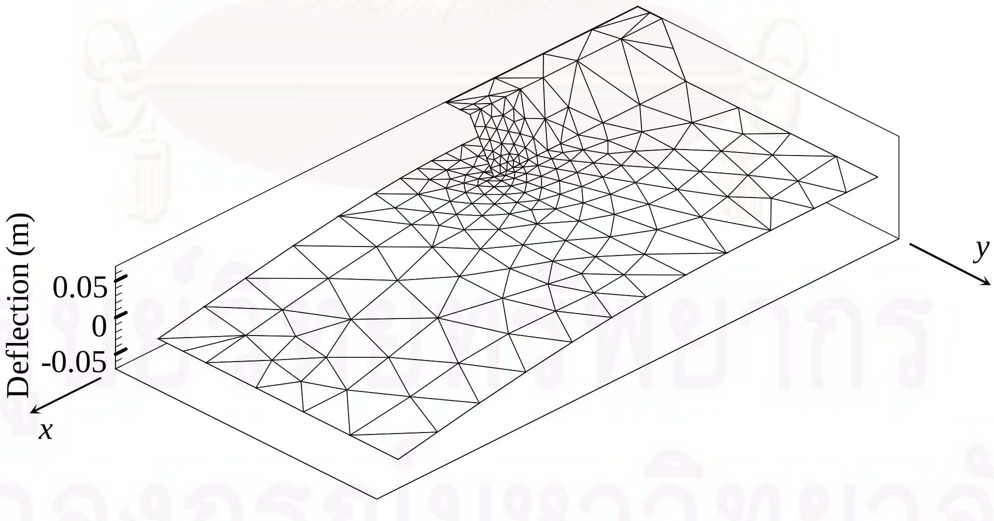


รูปที่ 7.30 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบน



รูปที่ 7.31 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว

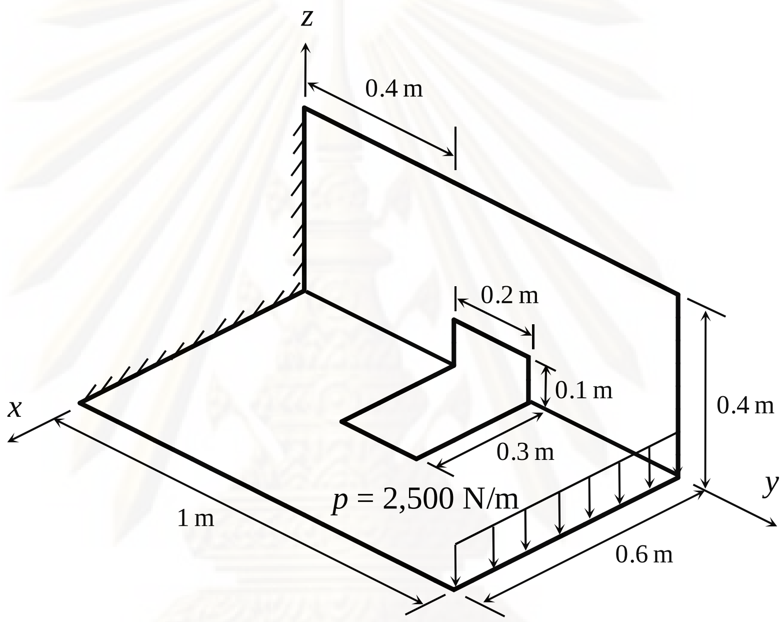
จะเห็นได้ว่าลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสที่คำนวณได้จากการปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นใกล้เคียงกับที่คำนวณโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียดที่ใช้จำนวนจุดต่อเป็นจำนวนมาก การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจึงช่วยให้ลดจำนวนตัวไม่ทราบค่าที่จะต้องทำการคำนวณลงและทำให้ใช้เวลาในการคำนวณลดลงด้วย แต่ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำใกล้เคียงกับการใช้เอลิเมนต์แบบละเอียดตลอดทั้งปัญหา ส่วนลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางโครงสร้างนี้โดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วแสดงไว้ดังรูปที่ 7.32



รูปที่ 7.32 การเสียรูปแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีแผ่นบางรูปหลังคาอยู่ด้านบนโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว

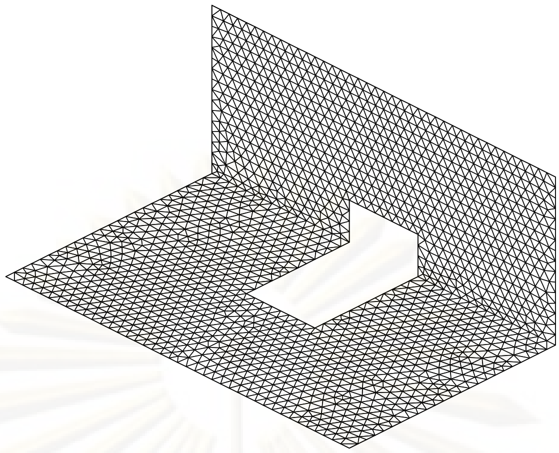
7.5 ปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลาง

แผ่นบางโครงสร้างที่เกิดจากแผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $1{\times}0.6\ m^2$ และขนาด $1{\times}0.4\ m^2$ มาประกอบตั้งฉากกันโดยตรงกลางถูกเจาะเป็นรูสี่เหลี่ยม แผ่นบางโครงสร้างมีความหนาคงที่ 0.01 m ขอบด้านหนึ่งถูกยึดแน่นกับผนัง และปลายอีกด้านหนึ่งมีแรงกระในแนวแกนดิ่งตลอดขอบ p = 2,500 N/m ดังแสดงในรูปที่ 7.33 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 68 GPa และอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.33

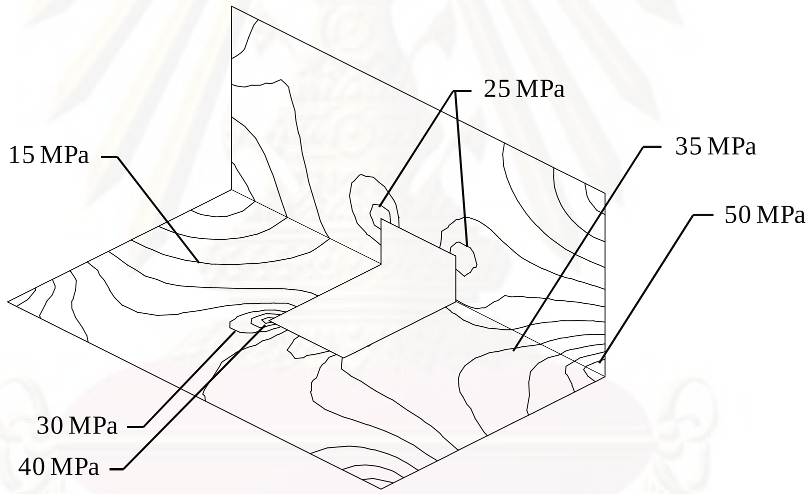


รูปที่ 7.33 แผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลางที่ถูกแรงกระทำในแนวดิ่ง

เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยทำการแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์แบบละเอียดขนาดสม่ำเสมอจำนวน 3,270 เอลิเมนต์ 1,739 จุดต่อ โดยลักษณะการแบ่งโดเมนนั้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.34 และลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสแสดงไว้ดังรูปที่ 7.35

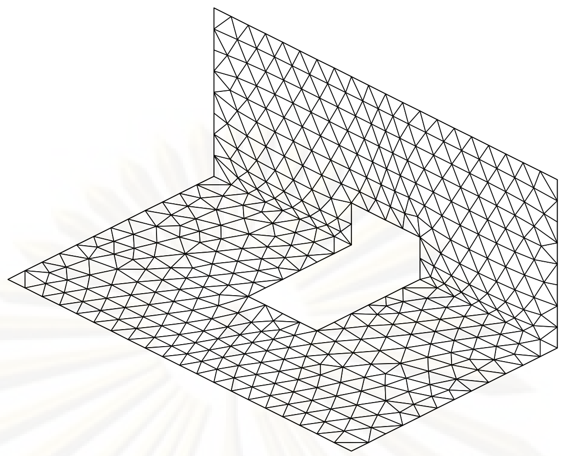


รูปที่ 7.34 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยม ที่มีรูตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด

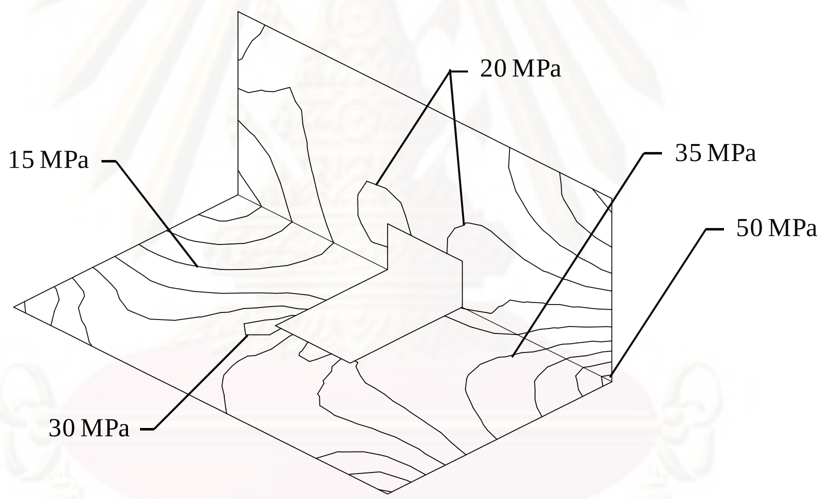


รูปที่ 7.35 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยม ที่มีรูตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด

จากนั้นทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยเริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นที่ประกอบไปด้วย 816 เอลิเมนต์ 460 จุดต่อ โดยลักษณะรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสนั้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.36 และ 7.37 ตามลำดับ



รูปที่ 7.36 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นบาง
โครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลาง

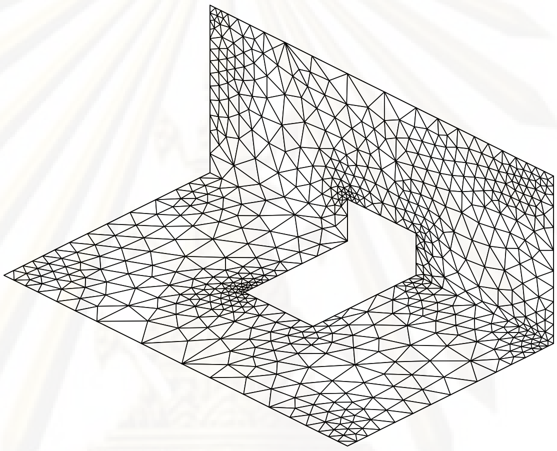


รูปที่ 7.37 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยม
ที่มีรูตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น

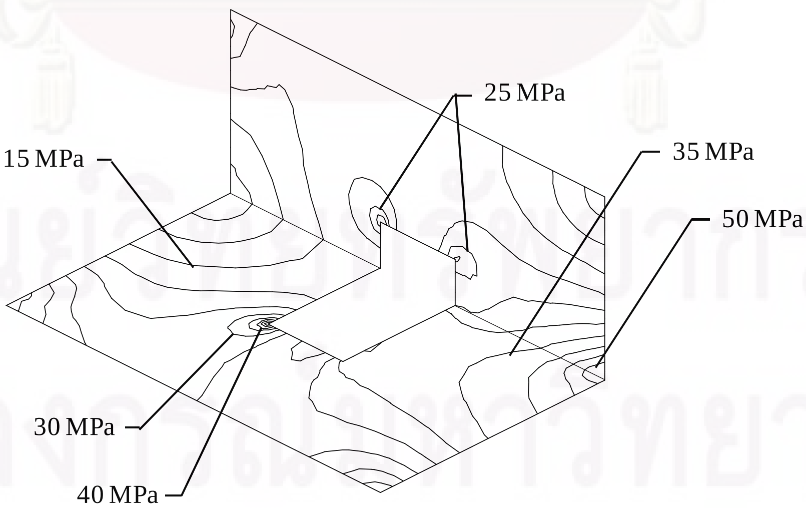
จากนั้นจึงทำการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยนำผลลัพธ์ของค่าความเค้นวอนมิเซสที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์เริ่มต้นมาหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วแสดงไว้ดังรูปที่ 7.38 ซึ่งประกอบไปด้วย 1,279 เอลิเมนต์ 704 จุดต่อ โดยพบว่าเอลิเมนต์จะมีขนาดเล็กลงที่บริเวณมุมของรูด้านในของแผ่นบางโครงสร้าง และที่มุมรอยต่อของแผ่นบางโครงสร้างด้านหน้าที่ถูกแรงกระทำในแนวแกนดิ่ง ซึ่งเป็นบริเวณที่มีค่าความเข้มของค่าความเค้นวอนมิเซสสูงดังแสดงในรูปที่ 7.39 ทำให้สามารถแสดงลักษณะการกระจายของความเค้น

บริเวณที่มีความเข้มของความเค้นสูงได้ชัดเจนมากขึ้นเมื่อเทียบกับการใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เบื้องต้น

จากรูปที่ 7.35 และ 7.39 พบว่าลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสจากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสองแบบนั้นมีลักษณะใกล้เคียงกัน แต่เมื่อเปรียบเทียบจำนวนจุดต่อที่ใช้จะเห็นว่า รูปแบบแรกที่ใช้เอลิเมนต์แบบละเอียดนั้นใช้จำนวนจจุดต่อถึง 1,739 จุดต่อ ในขณะที่รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์โดยการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นใช้จำนวนจุดต่อทั้งหมดเพียง 1,164 จุดต่อเท่านั้น



รูปที่ 7.38 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลาง



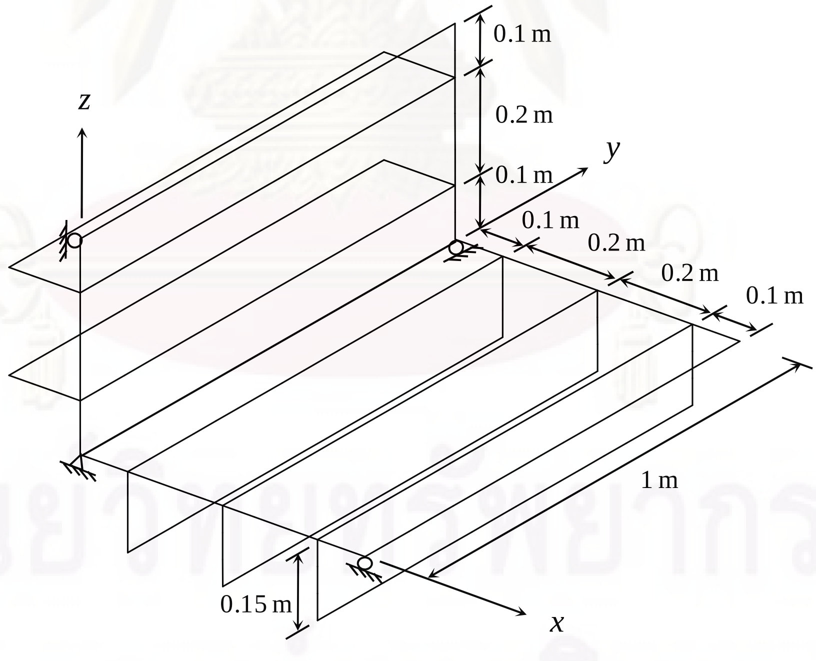
รูปที่ 7.39 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างสี่เหลี่ยมที่มีรูตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว

7.6 ปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุด

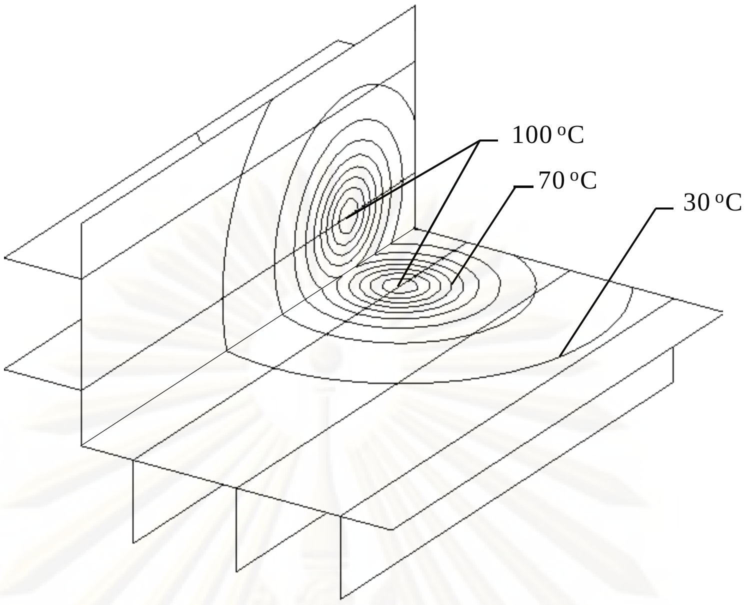
แผ่นบางโครงสร้างมีความหนาคงที่ 0.01 m ที่เกิดจากแผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้ามาประกอบตั้งฉากกัน โดยลักษณะรูปร่างและค่าขอบเขตของปัญหานั้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.40 แผ่นบางโครงสร้างนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น E เป็น 68 GPa มีค่าอัตราส่วนปัวซงส์ ν เป็น 0.33 มีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน α เป็น 22.6×10^{-6} /°C และอุณหภูมิอ้างอิงที่วัสดุไม่เกิดความเค้น T_0 มีค่า 0°C โดยแผ่นบางโครงสร้างนี้ถูกทำให้ร้อนมากที่บริเวณสองจุดบนแผ่นบางซึ่งกำหนดให้มีอุณหภูมิ 100°C และมีอุณหภูมิลดหลั่นลงมาโดยรอบบริเวณสองจุดนั้น โดยลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นบางโครงสร้างนี้แสดงไว้ดังสมการ (7.1) และดังรูปที่ 7.41

$$T(x,y,z) = 25 + 75\left(\frac{1}{0.95\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2\right)}\right) \tag{7.1}$$

โดยที่ $x_0 = 0.1, y_0 = 0.8, z_0 = 0.1$ คือ ตำแหน่งของจุดทั้งสองที่มีค่าอุณหภูมิสูงสุดบนแผ่นบางโครงสร้าง และไม่มีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิตลอดความหนาของแผ่นบาง

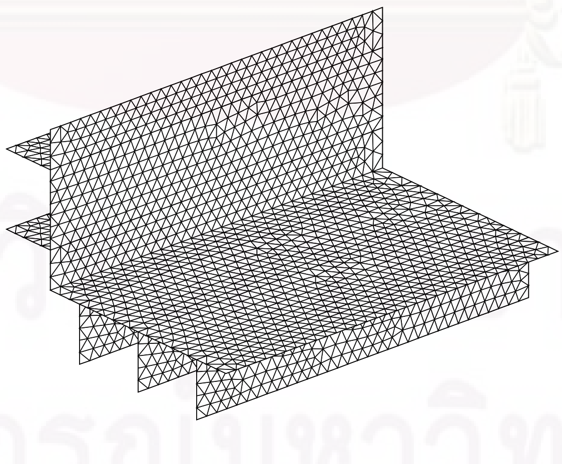


รูปที่ 7.40 แผ่นบางโครงสร้างที่เกิดจากแผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้ามาประกอบตั้งฉากกัน

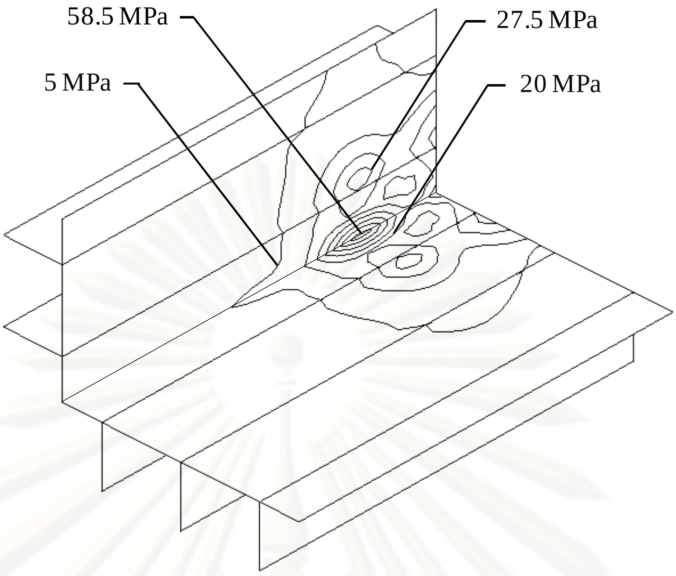


รูปที่ 7.41 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นบางโครงสร้าง

เริ่มต้นทำการวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียดขนาดสม่ำเสมอประกอบด้วย 2,170 จุดต่อและ 4,156 เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 7.42 โดยลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสบนโครงสร้างแผ่นบางแสดงไว้ดังรูปที่ 7.43 จะเห็นได้ว่าค่าความเค้นวอนมิเซสสูงสุดนั้นเกิดขึ้นบริเวณระหว่างจุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดทั้งสอง ซึ่งด้วยการใช้เอลิเมนต์แบบละเอียดนี้ทำให้ใช้เวลาและหน่วยความจำในการคำนวณเป็นจำนวนมาก โดยความยากลำบากนี้จะแก้ไขได้โดยการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ามาช่วย

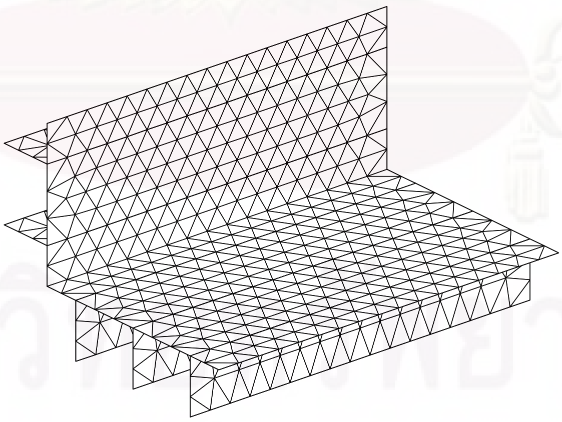


รูปที่ 7.42 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุดโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด

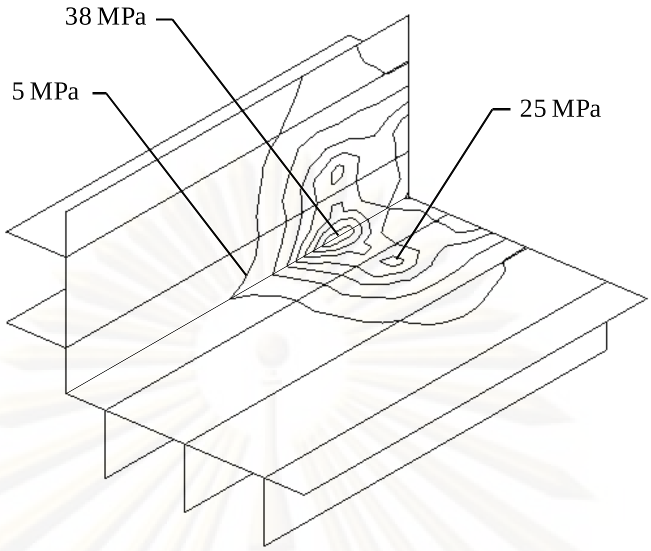


รูปที่ 7.43 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุดโดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด

ทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยเริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นที่ประกอบไปด้วย 547 จุดต่อ 994 เอลิเมนต์ โดยลักษณะรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสนั้นแสดงไว้ในรูปที่ 7.44 และ 7.45 ตามลำดับ

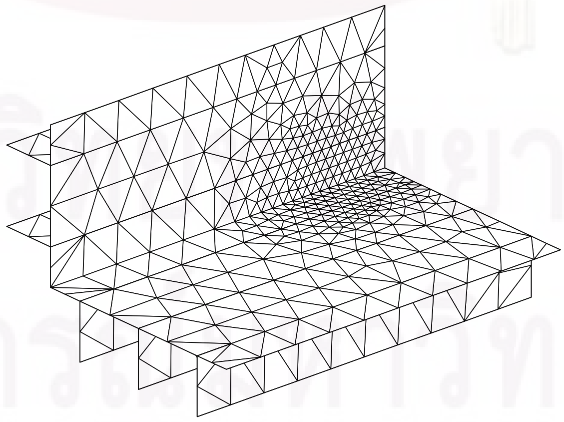


รูปที่ 7.44 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุด

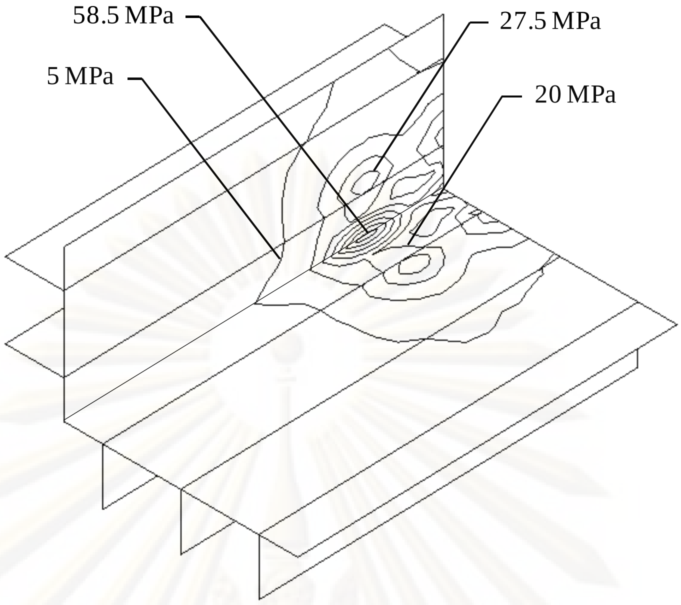


รูปที่ 7.45 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุดโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น

จากนั้นนำค่าความเค้นวอนมิเซสที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้นมาใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วแสดงไว้ดังรูปที่ 7.46 ซึ่งประกอบด้วย 503 จุดต่อ 936 เอลิเมนต์ โดยจะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์ถูกปรับให้มีขนาดเล็กลงในบริเวณที่มีความเข้มของความเค้นสูงเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น ส่วนในบริเวณอื่นนั้นเอลิเมนต์จะถูกปรับให้มีขนาดใหญ่ขึ้นเพื่อลดจำนวนตัวไม่ทราบค่าและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลง โดยจากค่าความเค้นวอนมิเซสดังแสดงไว้ในรูปที่ 7.47 ที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วพบว่า ให้ลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเซสในทำนองเดียวกันกับกรณีที่วิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์แบบละเอียด



รูปที่ 7.46 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุด



รูปที่ 7.47 ค่าความเค้นวอนมิเซสของปัญหาแผ่นบางโครงสร้างที่ได้รับความร้อนสูงสองจุดโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว

7.7 บทสรุป

ในบทนี้ได้ทำการตรวจสอบและแสดงถึงประสิทธิภาพของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติโดยนำมาวิเคราะห์ร่วมกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง โดยเอลิเมนต์จะถูกปรับให้มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของความเค้นวอนมิเซสสูง ในขณะที่เอลิเมนต์ขนาดใหญ่จะถูกสร้างขึ้นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของความเค้นต่ำทำให้ไม่จำเป็นต้องสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากตลอดทั้งโดเมน อีกทั้งเอลิเมนต์ยังถูกปรับขนาดโดยอัตโนมัติโดยที่เราไม่จำเป็นต้องทราบผลเฉลยของปัญหาล่วงหน้ามาก่อน เทคนิคนี้จึงช่วยให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น จำนวนเอลิเมนต์และจุดต่อลดลงส่งผลให้หน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณของคอมพิวเตอร์ลดลงไปด้วย

บทที่ 8

บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

8.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางเนื่องมาจากแรงกระทำทางกล และแรงกระทำทางความร้อนโดยใช้เอลิเมนต์แบบดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์ หรือเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคที ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ที่ให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง โดยได้ประยุกต์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น โดยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลง

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องนั้นได้ถูกนำเสนอไว้ในบทที่ 2 โดยประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการเสียรูปในแนวระนาบ และสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการเสียรูปในแนวดิ่ง ต่อมาในบทที่ 3 ได้อธิบายขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางนี้ จากนั้นในบทที่ 4 ได้นำเสนอขั้นตอนและรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยมีพื้นฐานจากไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ได้จากบทที่ 3 และได้ถูกนำมาทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ เบื้องต้นที่เราทราบผลเฉลยแม่นตรงเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น อีกทั้งยังแสดงให้เห็นถึงศักยภาพของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจึงถูกนำมาใช้ร่วมกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบาง โดยในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของผลลัพธ์สูง เอลิเมนต์ในบริเวณนั้นจะถูกปรับให้มีขนาดเล็กเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง และบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของผลลัพธ์ต่ำ เอลิเมนต์บริเวณนั้นจะถูกปรับให้มีขนาดใหญ่เพื่อลดจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทำให้ลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลง โดยหลักการเบื้องต้นของเทคนิคนี้รวมไปถึงขั้นตอนการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้นได้แสดงรายละเอียดไว้ในบทที่ 6 จากนั้นจึงทำการทดสอบเทคนิคดังกล่าวด้วยการวิเคราะห์ปัญหาหารโก่งของโครงสร้างแผ่นบางที่มีความซับซ้อนมากขึ้นด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ซึ่งพบว่า สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงโดยไม่จำเป็นต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์มากเกินความจำเป็น และช่วยให้ลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลง

8.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

เนื่องจากจำนวนตัวไม่ทราบค่าของปัญหามีปริมาณมาก การทำการวิเคราะห์ในบางครั้งที่มีการแบ่งเอลิเมนต์เป็นจำนวนมากอาจทำให้หน่วยความจำที่จะต้องใช้เกินกว่าที่คอมพิวเตอร์จะรับได้ นอกจากนี้ในการแก้ปัญหาระบบสมการขนาดใหญ่นั้นจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยในการคำนวณระบบสมการดังกล่าว โดยในที่นี้ได้ใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ ซึ่งแม้จะให้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงแต่ใช้เวลาในการคำนวณมาก ทำให้การวิเคราะห์ในบางครั้งกินระยะเวลานาน

การใช้โปรแกรม BUILT และโปรแกรม SPACE ในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้น ผู้ใช้ต้องมีความเข้าใจในตัวโปรแกรมพอสมควร เนื่องจากต้องมีการใช้ไฟล์นำเข้าและไฟล์ผลลัพธ์ต่าง ๆ ร่วมกัน รวมไปถึงการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ตัวโปรแกรมนั้นมีขั้นตอนที่ค่อนข้างซับซ้อนพอสมควร โดยสามารถศึกษาเพิ่มเติมในรายละเอียดของตัวโปรแกรมได้จากเอกสารอ้างอิง [18] และ [19]

8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ตัวโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนั้นยังสามารถนำไปพัฒนาต่อได้ในส่วนของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ระบบสมการรวม โดยอาจเปลี่ยนเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำแบบต่าง ๆ ที่ทำให้ใช้ระยะเวลาในการแก้ระบบสมการลดลง รวมไปถึงเนื่องจากโปรแกรมนั้นถูกประดิษฐ์ขึ้นด้วยภาษา FORTRAN 77 ซึ่งในปัจจุบันนั้น ได้มีการพัฒนาเป็น FORTRAN 90 รวมไปจนถึง FORTRAN 2003 ซึ่งจะช่วยให้สามารถเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้มีความซับซ้อนลดลงได้อย่างมาก อีกทั้งตัวโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนั้นอาจนำไปพัฒนาเพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางในสภาวะชั่วขณะ หรืออาจประยุกต์เข้ากับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลเพื่อศึกษาการปฏิสัมพันธ์ระหว่างของไหลและโครงสร้างแผ่นบาง ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยในอนาคตต่อไป

รายการอ้างอิง

[1] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550.

[2] Shames, I. H. and Dym C. L. Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics. 1st ed. India: New Age International Publishers Limited, 1995.

[3] Dechaumphai, P. Adaptive finite element technique for heat transfer problems. Journal of Energy, Heat and Mass Transfer. 17 (1995): 87-94.

[4] Hrabok, M. M. and Hrudey T. M. A review and catalogue of plate bending finite elements. Computers & Structures 19.3 (1984): 479-495.

[5] Stricklin, J. A., Haisler, W. E., Tisdale, P. R., and Gunderson, R. A rapidly converging triangular plate element. AIAA Journal. 7.1 (1969): 180-181.

[6] Batoz, J. L., Bathe, K. J., and Ho, L. W. A study of three-node triangular plate bending elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 15 (1980): 1771-1812.

[7] Batoz, J. L. An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 18 (1982): 1077-1089.

[8] Jeyachandrabose, C., Kirkhope J., and Babu C. R. An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 21 (1985): 1289-1293.

[9] Dechaumphai, P. Improvement of plane stress solutions using adaptive finite elements. Journal of the Chinese Institute of Engineers. 19.3 (1996): 375-380.

[10] Shames, I. H. and Pitarresi J. M. Introduction to Solid Mechanics. 3rd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2000.

[11] Ugural A. C. Stresses In Plates and Shells. 2nd ed. Singapore: McGraw-Hill, 1999.

[12] Huebner, K. H., Thornton, E. A., and Byrom T. G. The Finite Element Method for Engineers. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[13] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

[14] Lo C. C. and Leissa A. W. Bending of plates with circular holes. <u>Acta Mechanica</u>. 4 (1966): 64-78.

[15] Boley B. A. and Weiner J. H. <u>Theory of Thermal Stresses</u>. 1st ed. New York: John Wiley & Sons, 1960.

[16] Hibbeler R. C. <u>Mechanics of Materials</u>. 7th ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2008.

[17] Cook R. D., Malkus D. S., Plesha M. E. and Witt R. J. <u>Concepts and Applications of Finite Element Analysis</u>. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.

[18] สุพัฒนพงศ์ สิกขาบัณฑิต. <u>เทคนิคการปรับขนาดไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนืด</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

[19] เสฏฐวรรธ สุจริตภวัตสกุล. <u>การวิเคราะห์สัญญาณความดันของเรือด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

ภาคผนวก

(Appendix)

ภาคผนวก ก

(Appendix A)

รายละเอียดของโปรแกรม PLATEDKT

```
C     PROGRAM PLATEDKT
C
C     A FINITE ELEMENT COMPUTER PROGRAM FOR SOLVING DEFORMATION
C     AND THERMAL STRESS RESPONSE OF BUILT-UP PLATE STRUCTURES
C     IN THREE DIMENSIONS SUBJECTED TO BOTH THE MECHANICAL AND
C     THERMAL LOADINGS.  THE PROGRAM EMPLOYS:
C
C        -  TRIANGULAR DKT PLATE BENDING ELEMENTS THAT MAY HAVE
C           TEMPERATURE GRADIENTS THROUGH THE PLATE THICKNESS
C           FOR TRANSVERSE DEFLECTION, AND
C        -  TRIANGULAR CST MEMBRANE ELEMENTS WITH TEMPERATURE
C           DISTRIBUTION OVER ELEMENTS FOR IN-PLANE DEFORMATION
C
C     THE VALUES IN THE PARAMETER STATEMENT BELOW MUST BE ADJUSTED
C     ACCORDING TO THE SIZE OF THE WORKING PROBLEM:
C        MXPOI = MAXIMUM NUMBER OF NODAL POINTS IN THE MODEL
C        MXELE = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C        MXHBW = MAXIMUM NUMBER OF HALF-BANDWIDTH
C
      PARAMETER (MXPOI=1500, MXELE=3000, MXHBW=7000)
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  COORD(MXPOI,3), TEXT(20)
      DIMENSION  TH(MXELE), TEMPT(MXPOI), TEMPB(MXPOI), FDZ(MXELE)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*6,MXHBW), SYSF(MXPOI*6)
      DIMENSION  VONMIS(MXPOI), ONE(MXPOI)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,3), IBC(MXPOI,6)
C
      OPEN(UNIT=7, FILE='TESTTEST.DAT',STATUS='OLD')
      OPEN(UNIT=12,FILE='TESTTEST.OUT',STATUS='UNKNOWN')
      OPEN(UNIT=13,FILE='TESTTEST.PLT',STATUS='UNKNOWN')
C
C     READ TITLE OF COMPUTATION:
C
      READ(7,*)  NLINES
      DO 10  ILINE=1,NLINES
      READ(7,1)  TEXT
    1 FORMAT(20A4)
   10 CONTINUE
C
C     READ INPUT DATA:
C
      READ(7,1)  TEXT
      READ(7,*)  NELEM, NPOIN, NFORCE
      READ(7,1)  TEXT
      READ(7,*)  ELAS, PR, ALPHA, TREF
      READ(7,1)  TEXT
      DO 100  IE=1,NELEM
      READ(7,*)  I, (INTMAT(I,J), J=1,3), TH(I), FDZ(I)
      IF(I.NE.IE)  WRITE(6,110)
```

```
  110 FORMAT(' *** ERROR ***  INCONSISTENT ELEMENT NUMBERS')
  100 CONTINUE
      READ(7,1)  TEXT
      DO 200  IP=1,NPOIN
      READ(7,*)  I, (IBC(I,J), J=1,6), (COORD(I,K), K=1,3),
     &           TEMPT(I), TEMPB(I)
      IF(I.NE.IP)  WRITE(6,210)
  210 FORMAT(' *** ERROR ***  INCONSISTENT NODE NUMBERS')
  200 CONTINUE
C
      NDF  = 6
      NDOF = 18
      NEQ  = NPOIN*NDF
      DO 300  I=1,NEQ
      SYSF(I) = 0.
  300 CONTINUE
      READ(7,1)  TEXT
      DO 310  II=1,NFORCE
      READ(7,*)  N, FX, FY, FZ
      IEQ = (N-1)*NDF
      SYSF(IEQ+1) = FX
      SYSF(IEQ+2) = FY
      SYSF(IEQ+3) = FZ
  310 CONTINUE
C
C     COMPUTE HALF-BANDWIDTH:
C
      NHBW = 0
      DO 400  IE=1,NELEM
      MIN = 100000
      MAX = 0
      DO 410  IN=1,3
      II = INTMAT(IE,IN)
      IF(II.GT.MAX)  MAX = II
      IF(II.LT.MIN)  MIN = II
  410 CONTINUE
      NDIF = MAX - MIN + 1
      IF(NDIF.GT.NHBW)  NHBW = NDIF
  400 CONTINUE
C
      NHBW = NHBW*NDF
      WRITE(6,415)  NHBW
  415 FORMAT(10X, ' HALF-BANDWIDTH =', I6)
      IF(NHBW.GT.MXHBW)  WRITE(6,420)  NHBW
  420 FORMAT(' INCREASE MXHBW TO ', I5)
      IF(NHBW.GT.MXHBW)  STOP
C
      DO 450  I=1,NEQ
      DO 450  J=1,NHBW
      SYSK(I,J) = 0.
  450 CONTINUE
C
C     LOOP OVER ALL ELEMENTS TO COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE
C     THEM FOR SYSTEM MATRICES IN THE FORM NEEDED BY THE SOLVER:
C
      WRITE(6,451)
  451 FORMAT(' START FORMING ELEMENT MATRICES')
C
      CALL TRI(NELEM, NPOIN, NFORCE,  NDOF,  NEQ,  NHBW,
     *          ELAS,     PR,  ALPHA,  TREF,  IBC, COORD,
```

```
     *         INTMAT,   TH,  TEMPT, TEMPB, SYSK,  SYSF,
     *         MXPOI, MXELE,  MXHBW,   NDF,  FDZ)
C
      WRITE(6,452)
  452 FORMAT(' COMPLETE FORMING AND ASSEMBLING ELEMENT MATRICES')
C
C     APPLY BOUNDARY CONDITIONS:
C
      CALL APPLYBC(NEQ, NHBW, NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
      WRITE(6,453)
  453 FORMAT(' COMPLETE APPLYING BOUNDARY CONDITIONS')
C
C     SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQS FOR SOLUTION:
C
      WRITE(6,454)
  454 FORMAT(' START SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS')
C
      CALL SOLVE(NEQ, NHBW, SYSK, SYSF, MXPOI, MXHBW)
C
      WRITE(6,455)
  455 FORMAT(' COMPLETE SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS')
C
      WRITE(6,501)
  501 FORMAT(' COMPUTE STRESSES AND PREPARE OUTPUT FILES')
C
C     STRESS COMPUTATION:
C
      CALL STRESS(NELEM, NPOIN, NEQ, INTMAT, COORD, SYSF,
     *            ELAS, PR, ALPHA, TREF, TH, TEMPT, TEMPB,
     *            VONMIS, ONE, MXPOI, MXELE, MXHBW       )
C
C     CREATE SOLUTION FILE
C
      WRITE(12,700)
  700 FORMAT(/, 8X, ' NODAL DISPLACEMENTS AND ROTATIONS', //,
     *  2X, 'NODE', 11X, 'U', 13X, 'V', 15X, 'W',
     * 12X, 'THETA-X', 9X, 'THETA-Y', 9X, 'THETA-Z', /)
      I1 = 1
      DO 720  IP=1,NPOIN
      I2 = IP*NDF
      WRITE(12,710)  IP, (SYSF(I), I=I1,I2)
  710 FORMAT(I6, 6E16.6)
      I1 = I2 + 1
  720 CONTINUE
      WRITE(12,730)  NPOIN
  730 FORMAT(/,' NODAL STRESSES [', I5, ']:')
      WRITE(12,740)
  740 FORMAT(/,2X, 'NODE', 6X, 'V-M STRESS', /)
      DO 760  I=1,NPOIN
      WRITE(12,750)  I, VONMIS(I)
  750 FORMAT(I8, E16.6)
  760 CONTINUE
C
C     PRINT OUT SOLUTION FOR TECPLOT
C
      WRITE(13,800)
  800 FORMAT('TITLE=""')
      WRITE(13,810)
  810 FORMAT('VARIABLES = "X","Y","Z","U-DEFORM","V-DEFORM",
```

```
     *    "W-DEFORM","THETA-X", "THETA-Y", "THETA-Z", "V-M STRESS"')
      WRITE(13,820) NPOIN,NELEM
  820 FORMAT('ZONE I=',I6,2X,',J=',I6,2X,',F=FEPOINT, ET=TRIANGLE')
      DO 850 I=1,NPOIN
      WRITE(13,830) (COORD(I,J),J=1,3),SYSF(I*NDF-5),SYSF(I*NDF-4)
     *                  ,SYSF(I*NDF-3),SYSF(I*NDF-2),SYSF(I*NDF-1)
     *                  ,SYSF(I*NDF),VONMIS(I)
  830 FORMAT(10E16.6)
  850 CONTINUE
      DO 900 I=1,NELEM
      WRITE(13,860) (INTMAT(I,J),J=1,3)
  860 FORMAT(3I6)
  900 CONTINUE
C
      STOP
      END
C
C*********************************************************************
C
      SUBROUTINE APPLYBC(NEQ, NHBW, NPOIN, IBC, SYSK, SYSF,
     *                          MXPOI, MXHBW)
C
C     APPLY BOUNDARY CONDITIONS:   0 = FREE
C                                  1 = FIXED
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*6,MXHBW), SYSF(MXPOI*6)
C
      INTEGER  IBC(MXPOI,6)
C
      NDF = 6
      DO 100  IN=1,NPOIN
      DO 200  ID=1,NDF
      IF(IBC(IN,ID).NE.1)  GO TO 200
C
      IEQ = (IN-1)*NDF + ID
      SYSF(IEQ)   = 0.
C
      SYSK(IEQ,1) = 1.
      DO 300  I=2,NHBW
      SYSK(IEQ,I) = 0.
  300 CONTINUE
C
      IF(IEQ.EQ.1)  GO TO 450
      DO 400  N=1,IEQ-1
      IROW = IEQ - N
      ICOL =   N + 1
      IF(ICOL.GT.NHBW)  GO TO 450
      SYSK(IROW,ICOL) = 0.
  400 CONTINUE
  450 CONTINUE
C
  200 CONTINUE
  100 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*********************************************************************
C
```

```
      SUBROUTINE ASSMBLE(NEQ, NHBW, NELEM, IE, INTMAT,
     *                   SGBL, FGBL, SYSK, SYSF,
     *                           MXPOI, MXELE,  MXHBW        )
C
C     ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  SGBL(18,18), FGBL(18)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*6,MXHBW), SYSF(MXPOI*6)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,3)
C
      NNODE = 3
      NDF   = 6
C
      DO 100  NR=1,NNODE
      NODR = INTMAT(IE,NR)
      DO 100  MR=1,NDF
C
C     DENOTE:  NSR = ROW POSITION IN THE SYSTEM  EQS.
C              NER = ROW POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
      NSR = (NODR-1)*NDF + MR
      NER = (NR  -1)*NDF + MR
      SYSF(NSR) = SYSF(NSR) + FGBL(NER)
C
      DO 200  NC=1,NNODE
      NODC = INTMAT(IE,NC)
      DO 200  MC=1,NDF
C
C     DENOTE:  NSC = COLUMN POSITION IN THE SYSTEM  EQS.
C                    (AFTER ROTATION - READY FOR BANDED SOLVER)
C              NEC = COLUMN POSITION IN THE ELEMENT EQS.
C
      NSC = (NODC-1)*NDF + MC - NSR + 1
      NEC = (NC  -1)*NDF + MC
      IF(NSC.GT.0)
     &     SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + SGBL(NER,NEC)
  200 CONTINUE
C
  100 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*********************************************************************
C
      SUBROUTINE CROSS(A, B, C)
C
C     COMPUTE THE MAGNITUDE, C(4), OF A VECTOR  C = A CROSS B,
C     AND COMPONENTS OF A UNIT VECTOR IN THE VECTOR C DIRECTION.
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  A(4), B(4), C(4)
      X = A(2)*B(3) - A(3)*B(2)
      Y = A(3)*B(1) - A(1)*B(3)
      Z = A(1)*B(2) - A(2)*B(1)
      D2 = X*X + Y*Y + Z*Z
      C(4) = SQRT(D2)
      IF(C(4).LT.1.E-10)  WRITE(6,100)
```

```
  100 FORMAT(' *** ERROR IN SUBROUTINE CROSS) ***')
      IF(C(4).LT.1.E-10)  STOP
      C(1) = X/C(4)
      C(2) = Y/C(4)
      C(3) = Z/C(4)
C
      RETURN
      END
C
C*******************************************************************
C
      SUBROUTINE VECTOR(V, XI, YI, ZI, XJ, YJ, ZJ)
C
C     COMPUTE THE MAGNITUDE, V(4), OF A VECTOR FROM NODES I TO J,
C     AND COMPUTE COMPONENTS V(1), V(2), V(3) OF A UNIT VECTOR FROM
C     NODES I TO J.
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION  V(4)
C
      DX = XJ - XI
      DY = YJ - YI
      DZ = ZJ - ZI
      D2 = DX*DX + DY*DY + DZ*DZ
      V(4) = SQRT(D2)
      IF(V(4).LT.1.E-10)  WRITE(6,100)
  100 FORMAT(' *** ERROR IN SUBROUTINE VECTOR ***')
      IF(V(4).LT.1.E-10)  STOP
      V(1) = DX/V(4)
      V(2) = DY/V(4)
      V(3) = DZ/V(4)
C
      RETURN
      END
C
C*******************************************************************
C
      SUBROUTINE KDKT(D, X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3, SE,
     *                ELAS, AREA, THICK, SRZ        )
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION   D(3,3), DD(9,9),  QQ(9,9),  PP(3,3), PT(2,3)
      DIMENSION  RS(2,3), PX(3,3), GG(10,9), KOD(2,9), SE(9,9)
      DIMENSION   ALS(3),    Q(3),     B(3),     C(3)
      DIMENSION SRZ(3,3)
C
      DATA  KOD / 1,1,2,3,3,2,4,4,5,6,6,5,7,7,8,9,9,8 /
      DATA   PP / 12.D0,4.D0,4.D0,4.D0,2.D0,1.D0,4.D0,1.D0,2.D0 /
C
      B(1) = Y2 - Y3
      B(2) = Y3 - Y1
      B(3) = Y1 - Y2
      C(1) = X3 - X2
      C(2) = X1 - X3
      C(3) = X2 - X1
      DET  = (B(1)*C(2) - B(2)*C(1))*24.
C
      DO 10  I=1,3
      DO 10  J=1,3
   10 PX(I,J) = PP(I,J)/DET
```

```
C
      DO 25  I=1,3
      DO 25  J=1,3
      DO 25 K1=1,3
      II = (I-1)*3 + K1
      DO 25 K2=1,3
      JJ = (J-1)*3 + K2
   25 DD(II,JJ) = D(I,J)*PX(K1,K2)
C
      DO 30  I=1,3
      ALS(I)  = B(I)*B(I) + C(I)*C(I)
      PT(1,I) = 6.*C(I)/ALS(I)
      PT(2,I) = 6.*B(I)/ALS(I)
      RS(1,I) = 3.*C(I)*C(I)/ALS(I)
      RS(2,I) = 3.*B(I)*B(I)/ALS(I)
   30 Q(I)    = 3.*B(I)*C(I)/ALS(I)
C
      DO 720  I=1,10
      DO 720  J=1,9
  720 GG(I,J) = 0.
C
      DO 730  I=1,2
      II = (I-1)*5
      P1 = PT(I,1)
      P2 = PT(I,2)
      P3 = PT(I,3)
      R1 = RS(I,1)
      R2 = RS(I,2)
      R3 = RS(I,3)
      GG(II+1,KOD(I,1)) = P3
      GG(II+2,KOD(I,1)) =-P2
      GG(II+3,KOD(I,1)) =-P3
      GG(II+4,KOD(I,1)) = P2 - P3
      GG(II+5,KOD(I,1)) = P2
      GG(II+1,KOD(I,2)) =-Q(3)
      GG(II+2,KOD(I,2)) =-Q(2)
      GG(II+3,KOD(I,2)) = Q(3)
      GG(II+4,KOD(I,2)) = Q(2) + Q(3)
      GG(II+5,KOD(I,2)) = Q(2)
      GG(II+1,KOD(I,3)) =-1. - R3
      GG(II+2,KOD(I,3)) =-1. - R2
      GG(II+3,KOD(I,3)) = R3
      GG(II+4,KOD(I,3)) = R2 + R3
      GG(II+5,KOD(I,3)) = R2
      GG(II+1,KOD(I,4)) =-P3
      GG(II+3,KOD(I,4)) = P3
      GG(II+4,KOD(I,4)) = P1 + P3
      GG(II+1,KOD(I,5)) =-Q(3)
      GG(II+3,KOD(I,5)) = Q(3)
      GG(II+4,KOD(I,5)) = Q(3) - Q(1)
      GG(II+1,KOD(I,6)) = 1. - R3
      GG(II+3,KOD(I,6)) = R3
      GG(II+4,KOD(I,6)) = R3 - R1
      GG(II+2,KOD(I,7)) = P2
      GG(II+4,KOD(I,7)) =-P1 - P2
      GG(II+5,KOD(I,7)) =-P2
      GG(II+2,KOD(I,8)) =-Q(2)
      GG(II+4,KOD(I,8)) = Q(2) - Q(1)
      GG(II+5,KOD(I,8)) = Q(2)
      GG(II+2,KOD(I,9)) = 1. - R2
```

```
      GG(II+4,KOD(I,9)) = R2 - R1
      GG(II+5,KOD(I,9)) = R2
  730 CONTINUE
C
      DO 850  I=1,9
      QQ(1,I) =    B(2)*GG(1,I) +    B(3)*GG(2,I)
      QQ(2,I) = 2.*B(2)*GG(3,I) +    B(3)*GG(4,I)
      QQ(3,I) =    B(2)*GG(4,I) + 2.*B(3)*GG(5,I)
      QQ(4,I) =   -C(2)*GG(6,I) -    C(3)*GG(7,I)
      QQ(5,I) =-2.*C(2)*GG(8,I) -    C(3)*GG(9,I)
      QQ(6,I) =   -C(2)*GG(9,I) - 2.*C(3)*GG(10,I)
      QQ(7,I) =    C(2)*GG(1,I) +    C(3)*GG(2,I)
     1        -    B(2)*GG(6,I) -    B(3)*GG(7,I)
      QQ(8,I) = 2.*C(2)*GG(3,I) +    C(3)*GG(4,I)
     1        - 2.*B(2)*GG(8,I) -    B(3)*GG(9,I)
      QQ(9,I) =    C(2)*GG(4,I) + 2.*C(3)*GG(5,I)
     1        -    B(2)*GG(9,I) - 2.*B(3)*GG(10,I)
  850 CONTINUE
C
      DO 855  I=1,9
      DO 855  J=1,9
      GG(I,J) = 0.
      DO 855  K=1,9
  855 GG(I,J) = GG(I,J) + DD(I,K)*QQ(K,J)
C
      DO 960  L=1,9
      DO 960  J=L,9
      DUM = 0.
      DO 900  K=1,9
  900 DUM = DUM + QQ(K,L)*GG(K,J)
      SE(L,J) = DUM
  960 SE(J,L) = DUM
C
      BETA = ELAS*AREA*THICK/100000.
      SRZ(1,1) = BETA
      SRZ(1,2) =-BETA/2.
      SRZ(1,3) = SRZ(1,2)
      SRZ(2,1) = SRZ(1,2)
      SRZ(2,2) = SRZ(1,1)
      SRZ(2,3) = SRZ(1,2)
      SRZ(3,1) = SRZ(1,2)
      SRZ(3,2) = SRZ(1,2)
      SRZ(3,3) = SRZ(1,1)
C
      RETURN
      END
C
C*********************************************************************
C
      SUBROUTINE KRCST(ELAS, PR, ALPHA, TREF, TAVG, THICK,
     *                 X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3, AREA, SCST, FCST)
C
C     COMPUTE ELEMENT STIFFNESS MATRIX AND LOAD VECTOR FOR CONSTANT
C     STRAIN TRIANGLES.
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  SCST(6,6), FCST(6), C(3,3), B(3,6), BT(6,3)
      DIMENSION  DUMA(3,6), DUMB(3), AL(3)
C
      B1 = Y2 - Y3
```

```
      B2 = Y3 - Y1
      B3 = Y1 - Y2
      C1 = X3 - X2
      C2 = X1 - X3
      C3 = X2 - X1
C
      DO 10  I=1,3
      DO 10  J=1,6
      B(I,J) = 0.
   10 CONTINUE
C
      B(1,1) = B1
      B(1,3) = B2
      B(1,5) = B3
      B(2,2) = C1
      B(2,4) = C2
      B(2,6) = C3
      B(3,1) = C1
      B(3,2) = B1
      B(3,3) = C2
      B(3,4) = B2
      B(3,5) = C3
      B(3,6) = B3
C
      DO 20  I=1,3
      DO 30  J=1,6
      B(I,J)  = B(I,J)/(2.*AREA)
      BT(J,I) = B(I,J)
   30 CONTINUE
   20 CONTINUE
C
C     ELASTICITY MATRIX:
C
      FAC = ELAS/(1.-PR*PR)
      C(1,1) = FAC
      C(1,2) = FAC*PR
      C(1,3) = 0.
      C(2,1) = C(1,2)
      C(2,2) = C(1,1)
      C(2,3) = 0.
      C(3,1) = 0.
      C(3,2) = 0.
      C(3,3) = FAC*(1.-PR)/2.
C
C     ELEMENT STIFFNESS MATRIX:
C
      DO 100  I=1,3
      DO 100  J=1,6
      DUMA(I,J) = 0.
      DO 200  K=1,3
      DUMA(I,J) = DUMA(I,J) + C(I,K)*B(K,J)
  200 CONTINUE
  100 CONTINUE
C
      DO 300  I=1,6
      DO 300  J=1,6
      SCST(I,J) = 0.
      DO 400  K=1,3
      SCST(I,J) = SCST(I,J) + BT(I,K)*DUMA(K,J)
  400 CONTINUE
```

```
  300 CONTINUE
C
      DO 500  I=1,6
      DO 500  J=1,6
      SCST(I,J) = SCST(I,J)*THICK*AREA
  500 CONTINUE
C
C     ELEMENT NODAL FORCE DUE TO IN-PLANE THERMAL EXPANSION:
C
      AL(1) = ALPHA
      AL(2) = ALPHA
      AL(3) = 0.
      DO 600  I=1,3
      DUMB(I) = 0.
      DO 700  J=1,3
      DUMB(I) = DUMB(I) + C(I,J)*AL(J)
  700 CONTINUE
  600 CONTINUE
C
      DO 800  I=1,6
      FCST(I) = 0.
      DO 900  J=1,3
      FCST(I) = FCST(I) + BT(I,J)*DUMB(J)
  900 CONTINUE
  800 CONTINUE
C
      FAC = (TAVG - TREF)*THICK*AREA
      DO 1000  I=1,6
      FCST(I) = FCST(I)*FAC
 1000 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*******************************************************************
C
      SUBROUTINE RDKT(ELAS, PR, ALPHA, TREF, T2, T1, THICK,
     *                 X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3, AREA, FDKT  )
C
C     COMPUTE NODAL BENDING LOAD DUE TO LINEAR TEMPERATURE THROUGH
C     THE THICKNESS OF DKT ELEMENT.
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  FDKT(9), GXS(9), GXN(9), GYS(9), GYN(9)
      DIMENSION  BT(9,3)
C
      X23 = X2 - X3
      Y23 = Y2 - Y3
      X31 = X3 - X1
      Y31 = Y3 - Y1
      X12 = X1 - X2
      Y12 = Y1 - Y2
      XL23 = X23*X23 + Y23*Y23
      XL31 = X31*X31 + Y31*Y31
      XL12 = X12*X12 + Y12*Y12
C
      P4 = -6.*X23/XL23
      P5 = -6.*X31/XL31
      P6 = -6.*X12/XL12
      Q4 =  3.*X23*Y23/XL23
```

```
      Q5 =  3.*X31*Y31/XL31
      Q6 =  3.*X12*Y12/XL12
      T4 = -6.*Y23/XL23
      T5 = -6.*Y31/XL31
      T6 = -6.*Y12/XL12
      R4 =  3.*Y23*Y23/XL23
      R5 =  3.*Y31*Y31/XL31
      R6 =  3.*Y12*Y12/XL12
C
      GXS(1) =  P5/6.
      GXS(2) = -Q5/6.
      GXS(3) = -R5/6.
      GXS(4) =  P4/6.
      GXS(5) =  Q4/6.
      GXS(6) =  R4/6.
      GXS(7) =(-P4-P5)/6.
      GXS(8) = (Q4-Q5)/6.
      GXS(9) = (R4-R5)/6.
C
      GYS(1) =  T5/6.
      GYS(2) = (3.-R5)/6.
      GYS(3) =  Q5/6.
      GYS(4) =  T4/6.
      GYS(5) =(-3.+R4)/6.
      GYS(6) = -Q4/6.
      GYS(7) =(-T4-T5)/6.
      GYS(8) = (R4-R5)/6.
      GYS(9) =(-Q4+Q5)/6.
C
      GXN(1) = -P6/6.
      GXN(2) = -Q6/6.
      GXN(3) = -R6/6.
      GXN(4) = (P4+P6)/6.
      GXN(5) = (Q4-Q6)/6.
      GXN(6) = (R4-R6)/6.
      GXN(7) = -P4/6.
      GXN(8) =  Q4/6.
      GXN(9) =  R4/6.
C
      GYN(1) = -T6/6.
      GYN(2) = (3.-R6)/6.
      GYN(3) =  Q6/6.
      GYN(4) = (T4+T6)/6.
      GYN(5) = (R4-R6)/6.
      GYN(6) =(-Q4+Q6)/6.
      GYN(7) = -T4/6.
      GYN(8) =(-3.+R4)/6.
      GYN(9) = -Q4/6.
C
      DO 100  I=1,9
      BT(I,1) = Y31*GXS(I) + Y12*GXN(I)
      BT(I,1) = BT(I,1)/(2.*AREA)
      BT(I,2) =-X31*GYS(I) - X12*GYN(I)
      BT(I,2) = BT(I,2)/(2.*AREA)
      BT(I,3) =-X31*GXS(I) - X12*GXN(I)
     &         + Y31*GYS(I) + Y12*GYN(I)
      BT(I,3) = BT(I,3)/(2.*AREA)
  100 CONTINUE
C
      UP = ELAS*ALPHA*THICK*THICK
```

```
      DN = 12.*(1.-PR)
      FAC = +UP*(T2-T1)*2.*AREA/DN
C
      DO 200  I=1,9
      DO 200  J=1,3
      BT(I,J) = FAC*BT(I,J)
  200 CONTINUE
C
      DO 300  I=1,9
      FDKT(I) = 0.
      DO 400  J=1,2
      FDKT(I) = FDKT(I) + BT(I,J)
  400 CONTINUE
  300 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*******************************************************************
C
      SUBROUTINE SOLVE(NROW, NHBW, GSTIF, XL, MXPOI, MXHBW)
C
C     SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS USING GAUSS ELIMINATION.
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION  GSTIF(MXPOI*6,MXHBW), XL(MXPOI*6)
C      DIMENSION  GSTIF(NROW,NHBW), XL(NROW)
C
      NR=NROW
      NC=NHBW
C
C     DIAGONALIZATION THE MATRIX
C
      DO 10 I=1,NR
      PIVOT1=GSTIF(I,1)
      IF(ABS(PIVOT1).LT.10.E-10) THEN
      WRITE(6,1025) I, PIVOT1
 1025 FORMAT(' EQ. NO.', I5, ' HAS NEARLY ZERO PIVOT OF', E14.6,
     &        '  ** STOP **')
      STOP
      ENDIF
C
      XL(I)=XL(I)/PIVOT1
      DO 20 J=1,NC
   20 GSTIF(I,J)=GSTIF(I,J)/PIVOT1
      MM=0
      DO 30 II=I+1,NR
      MM=MM+1
      IF(MM+1.GT.NC) GOTO 30
      PIVOT2=GSTIF(I,MM+1)*PIVOT1
      XL(II)=XL(II)-XL(I)*PIVOT2
      DO 40 JJ=1,NC
      JJJ=JJ+MM
      IF(JJJ.LE.NC)
     &  GSTIF(II,JJ)=GSTIF(II,JJ)-GSTIF(I,JJJ)*PIVOT2
   40 CONTINUE
   30 CONTINUE
   10 CONTINUE
C
```

```
C     BACK SUBSTITUTION
C
      DO 70 I=NR-1,1,-1
      II=1
      DO 80 J=I+1,NR
      II=II+1
      IF(II.LE.NHBW) XL(I)=XL(I)-GSTIF(I,II)*XL(J)
   80 CONTINUE
   70 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*******************************************************************
C
      SUBROUTINE STRESS(NELEM, NPOIN, NEQ, INTMAT, COORD, DISP,
     *                  ELAS, PR, ALPHA, TREF, TH, TEMPT, TEMPB,
     *                  VONMIS,  ONE, MXPOI, MXELE, MXHBW      )
C
C     COMPUTE NODAL VON MISES STRESS FOR CST ELEMENTS
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  COORD(MXPOI,3), TH(MXELE)
      DIMENSION  TEMPT(MXPOI), TEMPB(MXPOI)
      DIMENSION  DISP(MXPOI*6), VONMIS(MXPOI), ONE(MXPOI)
      DIMENSION  C(3,3), P(4), Q(4), R(4), S(4)
      DIMENSION  B(3,6), EPS(3)
      DIMENSION  UG(3), VG(3), WG(3), UL(3), VL(3)
C
      DIMENSION  WL(3), THETAXL(3), THETAYL(3)
      DIMENSION  THETAXG(3), THETAYG(3), THETAZG(3)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,3)
C
      DO 10  I=1,NPOIN
      VONMIS(I) = 0.
      ONE(I)    = 0.
   10 CONTINUE
C
C     LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
      DO 1000  IE=1,NELEM
C
C     FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
C
      XG1 = COORD(II,1)
      XG2 = COORD(JJ,1)
      XG3 = COORD(KK,1)
      YG1 = COORD(II,2)
      YG2 = COORD(JJ,2)
      YG3 = COORD(KK,2)
      ZG1 = COORD(II,3)
      ZG2 = COORD(JJ,3)
      ZG3 = COORD(KK,3)
C
      CALL VECTOR(P, XG1, YG1, ZG1, XG2, YG2, ZG2)
```

```
      CALL VECTOR(S, XG1, YG1, ZG1, XG3, YG3, ZG3)
      CALL CROSS(P, S, R)
      CALL CROSS(R, P, Q)
      XL1 = 0.
      YL1 = 0.
      XL2 = P(4)
      YL2 = 0.
      XL3 = S(4)*(S(1)*P(1) + S(2)*P(2) + S(3)*P(3))
      YL3 = S(4)*(S(1)*Q(1) + S(2)*Q(2) + S(3)*Q(3))
      AREA= 0.5*P(4)*S(4)*R(4)
C
      B1 = YL2 - YL3
      B2 = YL3 - YL1
      B3 = YL1 - YL2
      C1 = XL3 - XL2
      C2 = XL1 - XL3
      C3 = XL2 - XL1
C
      DO 110  I=1,3
      DO 110  J=1,6
      B(I,J) = 0.
  110 CONTINUE
C
      B(1,1) = B1
      B(1,3) = B2
      B(1,5) = B3
      B(2,2) = C1
      B(2,4) = C2
      B(2,6) = C3
      B(3,1) = C1
      B(3,2) = B1
      B(3,3) = C2
      B(3,4) = B2
      B(3,5) = C3
      B(3,6) = B3
C
      DO 120  I=1,3
      DO 130  J=1,6
      B(I,J)  = B(I,J)/(2.*AREA)
  130 CONTINUE
  120 CONTINUE
C
C     ELASTICITY MATRIX:
C
      FAC = ELAS/(1.-PR*PR)
      C(1,1) = FAC
      C(1,2) = FAC*PR
      C(1,3) = 0.
      C(2,1) = C(1,2)
      C(2,2) = C(1,1)
      C(2,3) = 0.
      C(3,1) = 0.
      C(3,2) = 0.
      C(3,3) = FAC*(1.-PR)/2.
C
C     GATHER ELEMENT NODAL DISPLACEMENTS IN GLOBAL DIRECTIONS:
C
c
      DO 150 J1=1,3
            UG(J1) = 0.
```

```
            VG(J1) = 0.
            WG(J1) = 0.
            THETAXG(J1) = 0.
            THETAYG(J1) = 0.
            THETAZG(J1) = 0.
  150 CONTINUE
C
      DO 200  J1=1,3
      I1  = INTMAT(IE,J1)
      IEQ = (I1-1)*6 + 1
      UG(J1) = DISP(IEQ  )
      VG(J1) = DISP(IEQ+1)
      WG(J1) = DISP(IEQ+2)
      THETAXG(J1) = DISP(IEQ+3)
      THETAYG(J1) = DISP(IEQ+4)
      THETAZG(J1) = DISP(IEQ+5)
  200 CONTINUE
C
C     TRANSFORM TO OBATAIN ELEMENT NODAL DISPLACEMENTS IN ELEMENT
C     LOCAL COORDINATES:
C
      DO 209 J1=1,3
            UL(J1) = 0.
            VL(J1) = 0.
            WL(J1) = 0.
            THETAXL(J1) = 0.
            THETAYL(J1) = 0.
  209 CONTINUE
C
      DO 210  I=1,3
      UL(I) = P(1)*UG(I) + P(2)*VG(I) + P(3)*WG(I)
      VL(I) = Q(1)*UG(I) + Q(2)*VG(I) + Q(3)*WG(I)
      WL(I) = R(1)*UG(I) + R(2)*VG(I) + R(3)*WG(I)
      THETAXL(I) = P(1)*THETAXG(I) + P(2)*THETAYG(I) + P(3)*THETAZG(I)
      THETAYL(I) = Q(1)*THETAXG(I) + Q(2)*THETAYG(I) + Q(3)*THETAZG(I)
  210 CONTINUE
C
C     COMPUTE THE TOTAL STRAINS:
C
      DO 220  I=1,3
      EPS(I) = 0.
      DO 230  J=1,3
      J1 = (J-1)*2 + 1
      J2 = J1 + 1
      EPS(I) = EPS(I) + B(I,J1)*UL(J) + B(I,J2)*VL(J)
  230 CONTINUE
  220 CONTINUE
C
C     COMPUTE THERMAL STRAINS (BASED ON AVG NODAL TEMP):
C
      T2 = (TEMPT(II) + TEMPT(JJ) + TEMPT(KK))/3.
      T1 = (TEMPB(II) + TEMPB(JJ) + TEMPB(KK))/3.
      TAVG = (T1 + T2)/2.
      IF (T2.NE.T1) TAVG = TREF
C
C     THUS THE NET STRAINS:
C
      EPS(1) = EPS(1) - ALPHA*(TAVG - TREF)
      EPS(2) = EPS(2) - ALPHA*(TAVG - TREF)
C
```

```
C     CALCULATE DKT STRAINS
C
      CALL CASTRE(MXPOI,MXELE,NEQ,TH,ELAS,PR,COORD,INTMAT
     *    ,NPOIN,NELEM,IE,WL,THETAXL,THETAYL
     *    ,XL1,YL1,XL2,YL2,XL3,YL3,AREA
     *      ,SRXXE,SRYYE,SRXYE)
C
C     ADD BENDING STRAINS
C
      EPS(1) = EPS(1) + SRXXE - ALPHA*(T2 - T1)/2.
      EPS(2) = EPS(2) + SRYYE - ALPHA*(T2 - T1)/2.
      EPS(3) = EPS(3) + SRXYE
C
C     THEN THE ELEMENT STRESSES IN LOCAL COORDINATES ARE:
C
      STXX = C(1,1)*EPS(1) + C(1,2)*EPS(2) + C(1,3)*EPS(3)
      STYY = C(2,1)*EPS(1) + C(2,2)*EPS(2) + C(2,3)*EPS(3)
      STXY = C(3,1)*EPS(1) + C(3,2)*EPS(2) + C(3,3)*EPS(3)
C
C     AND THE ELEMENT VON MISES IS:
C
      SV = (STXX-STYY)*(STXX-STYY) + STXX*STXX + STYY*STYY
     *       + 6.*STXY*STXY
      SV = SQRT(SV)
      SV = SV/SQRT(2.)
C
C     CONTRIBUTIONS TO NODAL VON MISES STRESSES:
C
      VONMIS(II) = VONMIS(II) + SV
      VONMIS(JJ) = VONMIS(JJ) + SV
      VONMIS(KK) = VONMIS(KK) + SV
      ONE(II) = ONE(II) + 1.
      ONE(JJ) = ONE(JJ) + 1.
      ONE(KK) = ONE(KK) + 1.
C
 1000 CONTINUE
C
C     COMPUTE AVERAGE NODAL VONMISES STRESSES AND PRINT OUT:
C
      DO 1100  I=1,NPOIN
      IF(ONE(I).EQ.0.)  WRITE(6,1200)  I
 1200 FORMAT(' *** WARNING ***  NO STRESS CONTRIBUTION AT NODE', I5)
      IF(ONE(I).EQ.0.)  ONE(I) = 1.
      VONMIS(I) = VONMIS(I)/ONE(I)
 1100 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*******************************************************************
C
      SUBROUTINE TRFORM(P, Q, R, SDKT, FDKT, SCST, FCST, SRZ,
     *                 SGBL, FGBL                            )
C
C     PERFORM MATRIX TRANSFORMATION FROM LOCAL TO GLOBAL COORDINATES
C     FOR BOTH THE DKT AND CST ELEMENTS AND OBTAIN ELEMENT EQUATIONS
C     IN GLOBAL COORDINATE SYSTEM (18 EQUATIONS/ELEMENT).
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  P(4), Q(4), R(4)
```

```
      DIMENSION  SDKT(9,9), FDKT(9), SCST(6,6), FCST(6), SRZ(3,3)
      DIMENSION  SGBL(18,18), FGBL(18)
      DIMENSION  RD(9,18), RDT(18,9), RC(6,9), RCT(9,6)
      DIMENSION  DUMA(9,18), DUMB(6,9), DUMC(9,9), DUMD(9)
      DIMENSION  RZD(3,18), RZDT(18,3), DUME(3,18)
C
      DO 10  I=1,18
      FGBL(I) = 0.
      DO 10  J=1,18
      SGBL(I,J) = 0.
   10 CONTINUE
C
C     SET UP TRANSFORMATION MATRIX FOR  DKT  ELEMENT:
C
      DO 20  I=1,9
      DO 20  J=1,18
      RD(I,J) = 0.
   20 CONTINUE
C
      DO 30  I=1,3
      RD(1,I   ) = R(I)
      RD(2,I+3 ) = P(I)
      RD(3,I+3 ) = Q(I)
      RD(4,I+6 ) = R(I)
      RD(5,I+9 ) = P(I)
      RD(6,I+9 ) = Q(I)
      RD(7,I+12) = R(I)
      RD(8,I+15) = P(I)
      RD(9,I+15) = Q(I)
   30 CONTINUE
      DO 40  I=1,9
      DO 40  J=1,18
      RDT(J,I) = RD(I,J)
   40 CONTINUE
C
C     OBTAIN CONTRIBUTION OF DKT ELEMENT TO GLOBAL STIFFNESS MATRIX:
C
      DO 100  I=1,9
      DO 100  J=1,18
      DUMA(I,J) = 0.
      DO 100  K=1,9
      DUMA(I,J) = DUMA(I,J) + SDKT(I,K)*RD(K,J)
  100 CONTINUE
C
      DO 150  I=1,18
      DO 150  J=1,18
      DO 150  K=1,9
      SGBL(I,J) = SGBL(I,J) + RDT(I,K)*DUMA(K,J)
  150 CONTINUE
C
C     AND TO GLOBAL LOAD VECTOR:
C
      DO 170  I=1,18
      DO 170  J=1,9
      FGBL(I) = FGBL(I) + RDT(I,J)*FDKT(J)
  170 CONTINUE
C
C     SET UP TRANSFORMATION MATRIX FOR IN-PLANE ROTATION:
C
      DO 180  I=1,3
```

```
      DO 180  J=1,18
      RZD(I,J) = 0.
  180 CONTINUE
      DO 190  I=1,3
      RZD(1,I+3 ) = R(I)
      RZD(2,I+9 ) = R(I)
      RZD(3,I+15) = R(I)
  190 CONTINUE
      DO 195  I=1,3
      DO 195  J=1,18
      RZDT(J,I) = RZD(I,J)
  195 CONTINUE
C
C     OBTAIN CONTRIBUTION FROM IN-PLANE ROTATION MATRIX:
C
      DO 200  I=1,3
      DO 200  J=1,18
      DUME(I,J) = 0.
      DO 200  K=1,3
      DUME(I,J) = DUME(I,J) + SRZ(I,K)*RZD(K,J)
  200 CONTINUE
C
      DO 210  I=1,18
      DO 210  J=1,18
      DO 210  K=1,3
      SGBL(I,J) = SGBL(I,J) + RZDT(I,K)*DUME(K,J)
  210 CONTINUE
C
C     SET UP TRANSFORMATION MATRIX FOR  CST  ELEMENT:
C
      DO 240  I=1,6
      DO 240  J=1,9
      RC(I,J) = 0.
  240 CONTINUE
C
      DO 250  I=1,3
      RC(1,I  ) = P(I)
      RC(2,I  ) = Q(I)
      RC(3,I+3) = P(I)
      RC(4,I+3) = Q(I)
      RC(5,I+6) = P(I)
      RC(6,I+6) = Q(I)
  250 CONTINUE
      DO 270  I=1,6
      DO 270  J=1,9
      RCT(J,I) = RC(I,J)
  270 CONTINUE
C
C     OBTAIN CONTRIBUTION OF CST ELEMENT TO GLOBAL STIFFNESS MATRIX:
C
      DO 300  I=1,6
      DO 300  J=1,9
      DUMB(I,J) = 0.
      DO 300  K=1,6
      DUMB(I,J) = DUMB(I,J) + SCST(I,K)*RC(K,J)
  300 CONTINUE
C
      DO 350  I=1,9
      DO 350  J=1,9
      DUMC(I,J) = 0.
```

```
      DO 350  K=1,6
      DUMC(I,J) = DUMC(I,J) + RCT(I,K)*DUMB(K,J)
  350 CONTINUE
C
C     AND TO GLOBAL LOAD VECTOR:
C
      DO 370  I=1,9
      DUMD(I) = 0.
      DO 370  J=1,6
      DUMD(I) = DUMD(I) + RCT(I,J)*FCST(J)
  370 CONTINUE
C
C     CONTRIBUTION OF THESE CST ELEMENT COEFF. TO PROPER LOCATIONS:
C
      DO 400  I=1,3
      FGBL(I   ) = FGBL(I   ) + DUMD(I  )
      FGBL(I+6 ) = FGBL(I+6 ) + DUMD(I+3)
      FGBL(I+12) = FGBL(I+12) + DUMD(I+6)
      DO 500  J=1,3
      SGBL(I   ,J   ) = SGBL(I   ,J   ) + DUMC(I  ,J  )
      SGBL(I   ,J+6 ) = SGBL(I   ,J+6 ) + DUMC(I  ,J+3)
      SGBL(I   ,J+12) = SGBL(I   ,J+12) + DUMC(I  ,J+6)
      SGBL(I+6 ,J   ) = SGBL(I+6 ,J   ) + DUMC(I+3,J  )
      SGBL(I+6 ,J+6 ) = SGBL(I+6 ,J+6 ) + DUMC(I+3,J+3)
      SGBL(I+6 ,J+12) = SGBL(I+6 ,J+12) + DUMC(I+3,J+6)
      SGBL(I+12,J   ) = SGBL(I+12,J   ) + DUMC(I+6,J  )
      SGBL(I+12,J+6 ) = SGBL(I+12,J+6 ) + DUMC(I+6,J+3)
      SGBL(I+12,J+12) = SGBL(I+12,J+12) + DUMC(I+6,J+6)
  500 CONTINUE
  400 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*******************************************************************
C
      SUBROUTINE TRI( NELEM, NPOIN, NFORCE,  NDOF,  NEQ,  NHBW,
     *                ELAS,     PR,  ALPHA,  TREF,  IBC, COORD,
     *                INTMAT,   TH,  TEMPT, TEMPB, SYSK,  SYSF,
     *                        MXPOI, MXELE,  MXHBW,   NDF,  FDZ)
C
C     COMPUTE ELEMENT MATRICES, PERFORM MATRIX TRANSFORMATION,
C     ASSEMBLE THEM TO OBTAIN SYSTEM EQUATIONS.
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION  COORD(MXPOI,3), TH(MXELE), FDZ(MXELE)
      DIMENSION  TEMPT(MXPOI), TEMPB(MXPOI)
      DIMENSION  SYSK(MXPOI*6,MXHBW), SYSF(MXPOI*6)
      DIMENSION  D(3,3), P(4), Q(4), R(4), S(4)
      DIMENSION  SDKT(9,9), FDKT(9), SCST(6,6), FCST(6), SRZ(3,3)
      DIMENSION  SGBL(18,18), FGBL(18)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,3), IBC(MXPOI,6)
C
C     LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
      DO 1000  IE=1,NELEM
C
C     FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
```

```
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
C
      XG1 = COORD(II,1)
      XG2 = COORD(JJ,1)
      XG3 = COORD(KK,1)
      YG1 = COORD(II,2)
      YG2 = COORD(JJ,2)
      YG3 = COORD(KK,2)
      ZG1 = COORD(II,3)
      ZG2 = COORD(JJ,3)
      ZG3 = COORD(KK,3)
C
      CALL VECTOR(P, XG1, YG1, ZG1, XG2, YG2, ZG2)
      CALL VECTOR(S, XG1, YG1, ZG1, XG3, YG3, ZG3)
      CALL CROSS(P, S, R)
      CALL CROSS(R, P, Q)
      XL1 = 0.
      YL1 = 0.
      XL2 = P(4)
      YL2 = 0.
      XL3 = S(4)*(S(1)*P(1) + S(2)*P(2) + S(3)*P(3))
      YL3 = S(4)*(S(1)*Q(1) + S(2)*Q(2) + S(3)*Q(3))
      AREA= 0.5*P(4)*S(4)*R(4)
C
C     APPLY DISTRIBUTED LOAD TO EACH NODE
C
      PLOAD = AREA*FDZ(IE)/3.
      FZII = PLOAD
      FZJJ = PLOAD
      FZKK = PLOAD
      III = (II-1)*NDF
      SYSF(III+3) = SYSF(III+3) + FZII
      IJJ = (JJ-1)*NDF
      SYSF(IJJ+3) = SYSF(IJJ+3) + FZJJ
      IKK = (KK-1)*NDF
      SYSF(IKK+3) = SYSF(IKK+3) + FZKK
C
C     COMPUTE ELASTICITY MATRIX [D]:
C
      DO 100  I=1,3
      DO 100  J=1,3
      D(I,J) = 0.
  100 CONTINUE
      THICK = TH(IE)
      UP = ELAS*THICK*THICK*THICK
      DN = 12.*(1.-PR*PR)
      FAC = UP/DN
      D(1,1) = FAC
      D(1,2) = FAC*PR
      D(2,1) = D(1,2)
      D(2,2) = D(1,1)
      D(3,3) = FAC*(1.-PR)/2.
C
C     DKT ELEMENT STIFFNESS MATRIX DUE TO BENDING:
C
      CALL KDKT(D, XL1, YL1, XL2, YL2, XL3, YL3, SDKT,
     *          ELAS, AREA, THICK, SRZ                )
C
```

```
C     DKT ELEMENT LOAD VECTOR DUE TO THERMAL LOAD:
C
      T2 = (TEMPT(II) + TEMPT(JJ) + TEMPT(KK))/3.
      T1 = (TEMPB(II) + TEMPB(JJ) + TEMPB(KK))/3.
      CALL RDKT(ELAS, PR, ALPHA, TREF, T2, T1, THICK,
     *          XL1, YL1, XL2, YL2, XL3, YL3, AREA, FDKT)
C
C     CST ELEMENT STIFFNESS MATRIX AND THERMAL LOAD VECTOR
C     DUE TO STRETCHING:
C
      TAVG = (T1+T2)/2.
      IF (T2.NE.T1) TAVG = TREF
      CALL KRCST(ELAS, PR, ALPHA, TREF, TAVG, THICK,
     *           XL1, YL1, XL2, YL2, XL3, YL3, AREA, SCST, FCST)
C
C     PERFORM MATRIX TRANSFORMATION TO OBTAIN ELEMENT EQUATIONS
C     IN GLOBAL COORDINATE SYSTEM:
C
      CALL TRFORM(P, Q, R, SDKT, FDKT, SCST, FCST, SRZ,
     *            SGBL, FGBL                          )
C
C     ASSEMBLE THESE ELEMENT EQUATIONS INTO THE SYSTEM EQUATIONS:
C
      CALL ASSMBLE(NEQ, NHBW, NELEM, IE, INTMAT,
     *             SGBL, FGBL, SYSK, SYSF,
     *                 MXPOI, MXELE, MXHBW         )
C
 1000 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C*******************************************************************
C
C     CALCULATE DKT STRAINS
C
      SUBROUTINE CASTRE(MXPOI,MXELE,NEQ,TH,ELAS,PR,COORD,INTMAT
     *    ,NPOIN,NELEM,IE,WL,THETAXL,THETAYL
     *    ,XG1,YG1,XG2,YG2,XG3,YG3,AREA
     *      ,SRXXE,SRYYE,SRXYE)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION COORD(MXPOI,3), TH(MXELE)
      DIMENSION AIN(9,9),H(3,9),BM(3,9),CM(3,3),S(9),CCOUNT(MXPOI)
      DIMENSION  WL(3), THETAXL(3), THETAYL(3)
      INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
C     {STRAIN,SR} = [H][AIN]{S}
C
      SRXXE = 0.
      SRYYE = 0.
      SRXYE = 0.
C
      THICK = TH(IE)
C
C     FOR AREA COORDINATES
C     GET DD,BB,AA,AREA,L1,L1,L3 EACH ELEMENT
C
      DD1 = XG2*YG3 - XG3*YG2
      DD2 = XG3*YG1 - XG1*YG3
      DD3 = XG1*YG2 - XG2*YG1
```

```
      BB1 = YG2 - YG3
      BB2 = YG3 - YG1
      BB3 = YG1 - YG2
      AA1 = XG3 - XG2
      AA2 = XG1 - XG3
      AA3 = XG2 - XG1
C
C     (X,Y) IS AT CENTROID OF TRIANGULAR ELEMENT
C
      X = (XG1+XG2+XG3)/3.
      Y = (YG1+YG2+YG3)/3.
C
      GL1  = (DD1+BB1*X+AA1*Y)/(2.*AREA)
      GL2  = (DD2+BB2*X+AA2*Y)/(2.*AREA)
      GL3  = (DD3+BB3*X+AA3*Y)/(2.*AREA)
C
C           CREATE [AIN]
C
                  AIN(1,1) =  1.
                  AIN(1,2) =  0.
                  AIN(1,3) =  0.
                  AIN(1,4) =  0.
                  AIN(1,5) =  0.
                  AIN(1,6) =  0.
                  AIN(1,7) =  0.
                  AIN(1,8) =  0.
                  AIN(1,9) =  0.
                  AIN(2,1) =  0.
                  AIN(2,2) =  0.
                  AIN(2,3) =  0.
                  AIN(2,4) =  1.
                  AIN(2,5) =  0.
                  AIN(2,6) =  0.
                  AIN(2,7) =  0.
                  AIN(2,8) =  0.
                  AIN(2,9) =  0.
                  AIN(3,1) =  0.
                  AIN(3,2) =  0.
                  AIN(3,3) =  0.
                  AIN(3,4) =  0.
                  AIN(3,5) =  0.
                  AIN(3,6) =  0.
                  AIN(3,7) =  1.
                  AIN(3,8) =  0.
                  AIN(3,9) =  0.
                  AIN(4,1) = -1.
                  AIN(4,2) =  0.
                  AIN(4,3) =  0.
                  AIN(4,4) = -1.*(AA3*BB2-BB3*AA2)/(AA3*BB1-AA1*BB3)
                  AIN(4,5) = -2.*BB3*AREA/(AA3*BB1-AA1*BB3)
                  AIN(4,6) = -2.*AA3*AREA/(AA3*BB1-AA1*BB3)
                  AIN(4,7) =  0.
                  AIN(4,8) =  0.
                  AIN(4,9) =  0.
                  AIN(5,1) =  0.
                  AIN(5,2) =  0.
                  AIN(5,3) =  0.
                  AIN(5,4) = -1.
                  AIN(5,5) =  0.
                  AIN(5,6) =  0.
```

```
                AIN(5,7) = -1.*(AA3*BB1-BB3*AA1)/(AA2*BB1-AA1*BB2)
                AIN(5,8) =  2.*BB1*AREA/(AA2*BB1-AA1*BB2)
                AIN(5,9) =  2.*AA1*AREA/(AA2*BB1-AA1*BB2)
                AIN(6,1) =  (AA2*BB1-BB2*AA1)/(AA3*BB2-AA2*BB3)
                AIN(6,2) =  2.*BB2*AREA/(AA3*BB2-AA2*BB3)
                AIN(6,3) =  2.*AA2*AREA/(AA3*BB2-AA2*BB3)
                AIN(6,4) =  0.
                AIN(6,5) =  0.
                AIN(6,6) =  0.
                AIN(6,7) = -1.
                AIN(6,8) =  0.
                AIN(6,9) =  0.
                AIN(7,1) = -1.*(AA3*BB1-BB3*AA1)/(AA3*BB2-AA2*BB3)
                AIN(7,2) = -2.*BB3*AREA/(AA3*BB2-AA2*BB3)
                AIN(7,3) = -2.*AA3*AREA/(AA3*BB2-AA2*BB3)
                AIN(7,4) = -1.
                AIN(7,5) =  0.
                AIN(7,6) =  0.
                AIN(7,7) =  0.
                AIN(7,8) =  0.
                AIN(7,9) =  0.
                AIN(8,1) =  0.
                AIN(8,2) =  0.
                AIN(8,3) =  0.
                AIN(8,4) = -1.*(AA2*BB1-BB2*AA1)/(AA3*BB1-AA1*BB3)
                AIN(8,5) =  2.*BB1*AREA/(AA3*BB1-AA1*BB3)
                AIN(8,6) =  2.*AA1*AREA/(AA3*BB1-AA1*BB3)
                AIN(8,7) = -1.
                AIN(8,8) =  0.
                AIN(8,9) =  0.
                AIN(9,1) = -1.
                AIN(9,2) =  0.
                AIN(9,3) =  0.
                AIN(9,4) =  0.
                AIN(9,5) =  0.
                AIN(9,6) =  0.
                AIN(9,7) =  (AA3*BB2-BB3*AA2)/(AA2*BB1-AA1*BB2)
                AIN(9,8) = -2.*BB2*AREA/(AA2*BB1-AA1*BB2)
                AIN(9,9) = -2.*AA2*AREA/(AA2*BB1-AA1*BB2)
C
C           CREATE {S}
C
      DO 500 IM=1,3
            IA = IM*3 - 2
            S(IA)   = WL(IM)
            S(IA+1) = THETAXL(IM)
            S(IA+2) = THETAYL(IM)
  500 CONTINUE
C
C           CREATE [H]
C
                H(1,1) = 0.
                H(1,2) = 0.
                H(1,3) = 0.
                H(1,4) = GL1*(2.*BB2*BB2+BB2*BB3)
     *                +GL2*(4.*BB1*BB2+BB1*BB3)
     *                      +GL3*(BB1*BB2)
                H(1,5) = GL1*(BB2*BB3+GL2*(2.*BB3*BB3+BB1*BB3)
     *                      +GL3*(BB1*BB2+4.*BB2*BB3)
                H(1,6) = GL1*(4.*BB1*BB3+BB2*BB3)+GL2*(BB1*BB3)
```

```
     *                        +GL3*(2.*BB1*BB1+BB1*BB2)
                  H(1,7) = GL1*(4.*BB1*BB2+BB2*BB3)
     *                  +GL2*(2.*BB1*BB1+BB1*BB3)
     *                        +GL3*(BB1*BB2)
                  H(1,8) = GL1*(BB2*BB3+GL2*(BB1*BB3+4.*BB2*BB3)
     *                        +GL3*(2.*BB2*BB2+BB1*BB2)
                  H(1,9) = GL1*(2.*BB3*BB3+BB2*BB3)+GL2*(BB1*BB3)
     *                        +GL3*(BB1*BB2+4.*BB1*BB3)
                  H(2,1) = 0.
                  H(2,2) = 0.
                  H(2,3) = 0.
                  H(2,4) = GL1*(2.*AA2*AA2+AA2*AA3)
     *                  +GL2*(4.*AA1*AA2+AA1*AA3)
     *                        +GL3*(AA1*AA2)
                  H(2,5) = GL1*(AA2*AA3+GL2*(2.*AA3*AA3+AA1*AA3)
     *                        +GL3*(AA1*AA2+4.*AA2*AA3)
                  H(2,6) = GL1*(4.*AA1*AA3+AA2*AA3)+GL2*(AA1*AA3)
     *                        +GL3*(2.*AA1*AA1+AA1*AA2)
                  H(2,7) = GL1*(4.*AA1*AA2+AA2*AA3)
     *                  +GL2*(2.*AA1*AA1+AA1*AA3)
     *                        +GL3*(AA1*AA2)
                  H(2,8) = GL1*(AA2*AA3+GL2*(AA1*AA3+4.*AA2*AA3)
     *                        +GL3*(2.*AA2*AA2+AA1*AA2)
                  H(2,9) = GL1*(2.*AA3*AA3+AA2*AA3)+GL2*(AA1*AA3)
     *                        +GL3*(AA1*AA2+4.*AA1*AA3)
                  H(3,1) = 0.
                  H(3,2) = 0.
                  H(3,3) = 0.
                  H(3,4) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2+4.*AA2*BB2)
     *                  +GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1+4.*AA1*BB2+4.*AA2*BB1)
     *                        +GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1)
                  H(3,5) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2)
     *                        +GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1+4.*AA3*BB3)
     *                  +GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1+4.*AA2*BB3+4.*AA3*BB2)
                  H(3,6) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2+4.*AA1*BB3+4.*AA3*BB1)
     *                        +GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1)
     *                        +GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1+4.*AA1*BB1)
                  H(3,7) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2+4.*AA1*BB2+4.*AA2*BB1)
     *                        +GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1+4.*AA1*BB1)
     *                        +GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1)
                  H(3,8) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2)
     *                  +GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1+4.*AA2*BB3+4.*AA3*BB2)
     *                        +GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1+4.*AA2*BB2)
                  H(3,9) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2+4.*AA3*BB3)
     *                        +GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1)
     *                  +GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1+4.*AA1*BB3+4.*AA3*BB1)
C
            DO 550 IH=1,3
                  DO 550 IHH=1,9
                  H(IH,IHH) = -THICK*H(IH,IHH)/(2.*4.*AREA*AREA)
  550       CONTINUE
C
C
C           RECALL {STRAIN,SR} = [H][AIN]{S}
C                    {STRAIN,SR} = [BM]{S}
            DO 570 I=1,3
                  DO 570 J=1,9
                        BM(I,J) = 0.
  570       CONTINUE
C
```

```
            DO 580 IR=1,3
                  DO 580 IC=1,9
                        DO 580 ID=1,9
                              BM(IR,IC) = BM(IR,IC) +
&                             H(IR,ID)*AIN(ID,IC)
  580       CONTINUE
C
C
C     GET {STRAIN,SR} IN EACH ELEMENT
C
      DO 600 IC=1,9
            SRXXE = SRXXE + BM(1,IC)*S(IC)
            SRYYE = SRYYE + BM(2,IC)*S(IC)
            SRXYE = SRXYE + BM(3,IC)*S(IC)
  600 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพิชเญนทร์ โพธิคุณ เกิดเมื่อวันที่ 3 เดือนมิถุนายน พุทธศักราช 2526 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2547 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2549