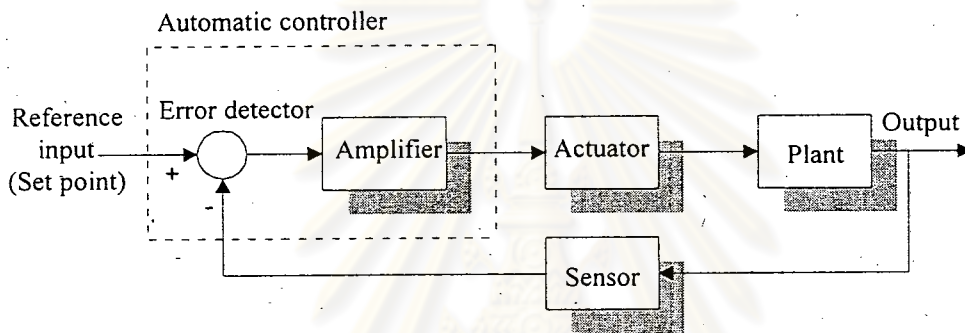


บทที่ 3

เขตไร้ผลสนองในระบบควบคุม

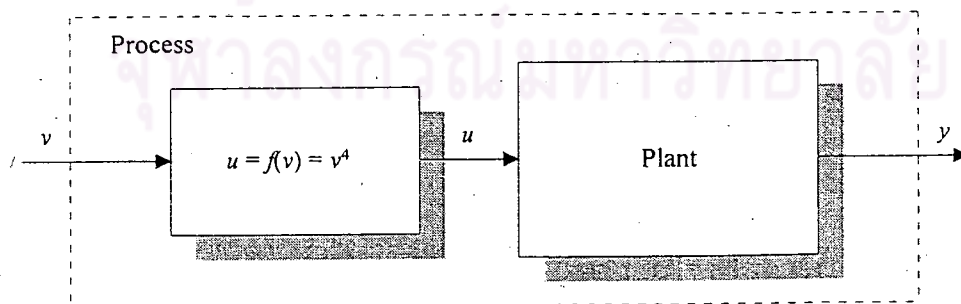
ระบบควบคุมที่ใช้กันอยู่ทั่วไปสามารถเขียนเป็นแผนภูมิกล่อง (Block diagram) ได้ดังรูปที่ 3.1 แอคชูเอเตอร์ (Actuator) เป็นอุปกรณ์กำลังที่ใช้สร้างสัญญาณควบคุมให้กับพลานต์ (Plant) ขึ้นอยู่กับสัญญาณที่ส่งมาจากตัวควบคุมเพื่อให้สัญญาณออกของพลานต์ตามสัญญาณอ้างอิง สัญญาณจากตัวควบคุมอาจป้อนให้กับแอคชูเอเตอร์ด้วย มอเตอร์นิวแมติกหรือวาล์ว มอเตอร์ไฮดรอลิก หรือมอเตอร์ไฟฟ้า สัญญาณออกจากส่วนตรวจจับ (Sensor) อาจจะเป็น การเคลื่อนที่ แรงดัน หรือ ความต่างศักย์



รูปที่ 3.1 แผนภูมิกล่องแสดงการควบคุมทางอุตสาหกรรมทั่วไป

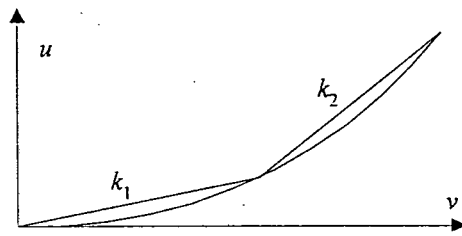
ความไม่เป็นเชิงเส้นอาจเกิดขึ้นตรงส่วนไหนของระบบก็ได้ ในที่นี้เราจะสนใจความไม่เป็นเชิงเส้นที่เป็นเขตไร้ผลสนองซึ่งปรากฏอยู่ที่ทางเข้าของพลานต์เท่านั้น เช่น ปรากฏที่แอคชูเอเตอร์โดยแอคชูเอเตอร์อาจจะเป็นวาล์วที่ทางเข้าพลานต์ก็ได้

ทางหนึ่งที่ใช้จัดการกับปัญหานี้คือการป้อนสัญญาณจากตัวควบคุมผ่านส่วนผกผันของความไม่เป็นเชิงเส้นเหล่านี้ก่อน ซึ่งจะใช้งานได้ดีถ้าการประมาณนั้นใกล้เคียงกับความเป็นจริงยกตัวอย่างเช่นกระบวนการในทางอุตสาหกรรมหนึ่งแบ่งได้เป็น 2 ส่วนตามรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ความไม่เป็นเชิงเส้นในกระบวนการ

โดย $u = f(v) = v^4$ เราอาจประมาณ u ได้ด้วยเส้นตรงสองเส้นดังรูปที่ 3.3 เส้นตรงหนึ่งเส้นก็คืออัตราขยายหนึ่งค่านั่นเองแล้วจึงนำเส้นตรงเหล่านี้มาสร้างส่วนผกผันของความไม่เป็นเชิงเส้น



รูปที่ 3.3 การประมาณความไม่เป็นเชิงเส้น $u = f(v) = v^4$ ด้วยเส้นตรงสองเส้นที่มีความชัน k_1, k_2

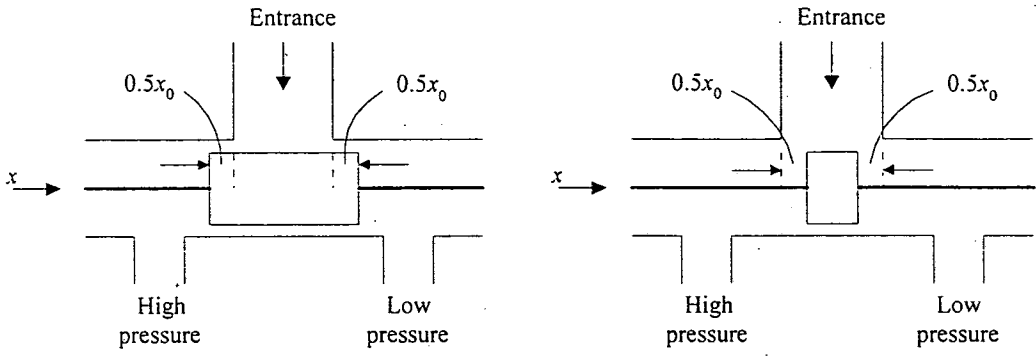
ขั้นตอนที่ได้กล่าวมานี้ถือได้ว่าเป็นกรณีเฉพาะอย่างหนึ่งของ การกำหนดตารางอัตราขยาย (Gain scheduling) [24] อย่างไรก็ตามถ้าพารามิเตอร์ของความไม่เป็นเชิงเส้นผิดจากความเป็นจริงไปมากวิธีการนี้จะใช้ไม่ได้ผล

3.1 เขตไร้ผลสนอง

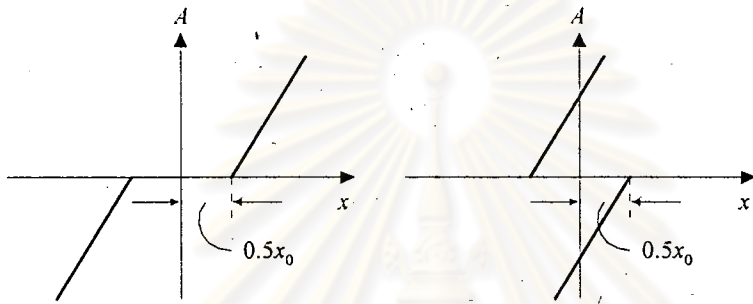
ลักษณะทางกายภาพของอุปกรณ์หลายชนิดสัญญาณออกจะยังคงเป็นศูนย์จนกว่าสัญญาณเข้าจะมีขนาดเกินค่าหนึ่ง ตัวอย่างเช่น มอเตอร์กระแสตรง ในการวิเคราะห์แบบเชิงเส้นเราจะสมมุติว่าแรงดันที่ป้อนให้กับขดลวดอามาเจอร์ขณะที่กระแสสนามคงที่จะสามารถทำให้มอเตอร์หมุนได้ทันที แต่ในความเป็นจริงจะมีความฝืดและแรงเสียดทานสถิตย์ที่เพลลาของมอเตอร์ ดังนั้นการหมุนจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อแรงบิดที่ได้จากมอเตอร์มีค่ามากเพียงพอ ทำนองเดียวกันลักษณะดังที่กล่าวมานี้สามารถพบได้ในการควบคุมการปิดเปิดวาล์วด้วยนิวแมติกแอกชูเอเตอร์และในอุปกรณ์ไฮดรอลิก เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า เขตไร้ผลสนอง (Dead-zone) [13]

อาจกล่าวได้โดยทั่วไปว่าเขตไร้ผลสนองอาจเกิดขึ้นได้กับส่วนต่างๆที่ใช้ในระบบควบคุม เช่น ในส่วนตรวจจับ (sensors) ส่วนขยาย (amplifiers) และแอกชูเอเตอร์ (actuators) ผลกระทบที่สำคัญของเขตไร้ผลสนองคือ การลดความถูกต้องของสัญญาณออก การเกิดลิมิตไซเคิล หรือการขาดเสถียรภาพ แต่ในบางกรณีเขตไร้ผลสนองก็สามารถช่วยให้ระบบมีเสถียรภาพขึ้นได้ เช่น ใช้ร่วมกับรีเลย์เพื่อลดการแกว่ง หรือช่วยป้องกันการเลื่อนของพารามิเตอร์ (Parameter drift) ในการควบคุมแบบปรับตัวเอง

เราลองมาดูตัวอย่างของการเกิดเขตไร้ผลสนองในระบบควบคุม วาล์วหลอด (Spool valve) ที่ใช้งานจริงๆมีลักษณะดังรูปที่ 3.4 [26] ขนาดของวาล์วไม่ใหญ่กว่า (Overlapped) ก็เล็กกว่า (Underlapped) ช่องที่มันปิดอยู่ซึ่งเป็นผลมาจากความไม่เที่ยงตรงในการผลิต



รูปที่ 3.4 (ซ้าย) แทนวาล์วที่มีขนาดใหญ่กว่าช่องทางเข้า (ขวา) แทนวาล์วที่มีขนาดเล็กกว่าช่องทางเข้า
เมื่อวาดกราฟความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ทางเข้า A กับระยะทาง x เป็นไปตามรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 (ซ้าย) แทนกราฟที่ได้จากวาล์วที่มีขนาดใหญ่กว่าช่องทางเข้า
(ขวา) แทนกราฟที่ได้จากวาล์วที่มีขนาดเล็กกว่าช่องทางเข้า

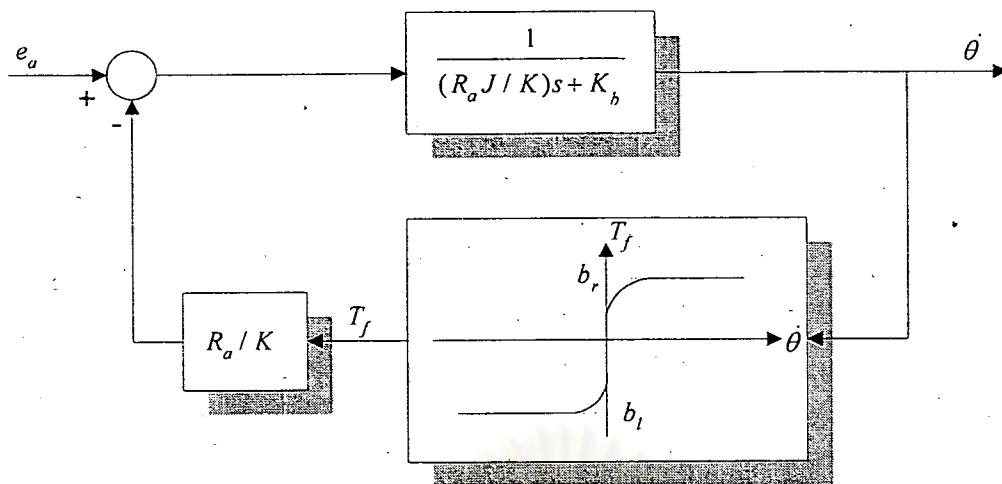
อีกตัวอย่างหนึ่งของเขตไร้อผลสองได้แก่ ผลที่เกิดจากแรงบิดเสียดทาน (Friction torque) ในแบบจำลองของเซอร์โวความเร็วที่ความถี่ต่ำ [12] เราลองมาพิจารณามอเตอร์กระแสตรงแบบเซอร์โวซึ่งอาศัยการควบคุมอาร์เมเจอร์ (Armature) โดยที่กระแสสนาม (Field current) คงที่ มีสมการที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้ สมมุติว่าค่าความเหนี่ยวนำ L_a ของขดลวดอาร์เมเจอร์น้อยมากจนตัดทิ้งได้ ดังนั้นกระแสอาร์เมเจอร์ $i_a = (e_a - e_b) / R_a$ โดยที่ e_a แทนแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่ป้อนให้กับอาร์เมเจอร์ และ e_b แทนแรงเคลื่อนไฟฟ้าย้อนกลับ (Back emf) ในกรณีที่สนามไฟฟ้าคงที่ $e_b = K_b \dot{\theta}$, K_b แทนค่าคงที่แรงเคลื่อนไฟฟ้าย้อนกลับ ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิดของมอเตอร์ T_m ซึ่งใช้ขับโหลดภายนอกและจากตัวมอเตอร์เองซึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of inertia) รวมกันเป็น J มีสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานรวมกันเป็น b เป็นไปดังนี้

$$J\ddot{\theta} = T_m - T_f = K i_a - b\dot{\theta}$$

โดย K แทนค่าคงที่แรงบิดของมอเตอร์ (Motor-torque constant) และ θ แทนมุมที่เพลาของมอเตอร์ จากความสัมพันธ์ทั้งหมดเขียนรวมกันเป็นสมการได้ดังนี้

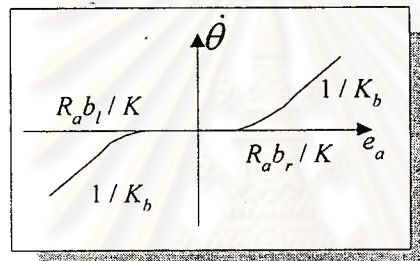
$$\frac{R_a J}{K} \ddot{\theta} + K_b \dot{\theta} = e_a - \frac{R_a}{K} b \dot{\theta}$$

ในทางปฏิบัติแล้วแรงบิดเสียดทาน T_f จะมีค่าเริ่มต้นอยู่แล้วค่าหนึ่งและค่าของมันจะเริ่มคงที่เมื่อความเร็วของมอเตอร์เพิ่มขึ้น ดังนั้นสมการนี้จึงแทนด้วยแผนภูมิกล่องได้ดังรูปที่ 3.6



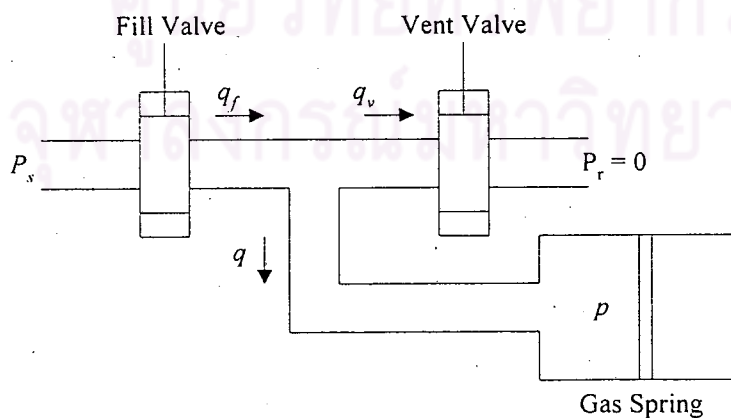
รูปที่ 3.6 แผนภูมิกล่องแทนมอเตอร์กระแสตรงที่คำนึงถึงผลของความเสียดทาน

แบบจำลองในรูปที่ 3.6 สามารถแทนได้ด้วยรูปที่ 3.7 ในกรณีความถี่ของสัญญาณต่ำ



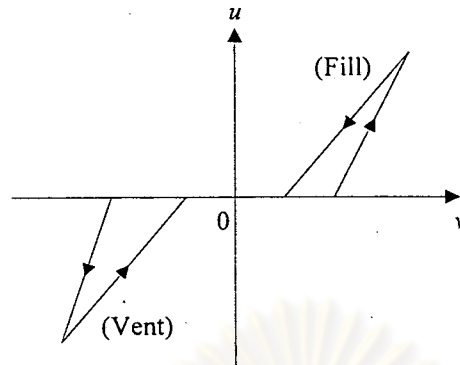
รูปที่ 3.7 ลักษณะเขตไร้ผลสนองสำหรับแบบจำลองที่ความถี่ต่ำ

ตัวอย่างสุดท้ายพิจารณาระบบแก๊สสปริง (Gas spring) [23] ในรูปที่ 3.8 โดยที่ q_f แทนปริมาณไหลเข้าของของเหลวซึ่งถูกควบคุมโดยวาล์วใส่ (Fill valve) และ q_v แทนปริมาณไหลออกซึ่งถูกควบคุมโดยวาล์วปล่อย (Vent valve) ปริมาณไหลสุทธิ q ใช้ควบคุมแรงดันของแก๊สสปริง ระบบดังกล่าวนี้เป็นส่วนหนึ่งของระบบกันสะเทือนสำหรับรถยนต์สมัยใหม่ ส่วนที่เป็นเขตไร้ผลสนองถูกใช้เพื่อป้องกันไม่ให้ของเหลวไหลเข้าออกและรักษาระดับความสูงของรถขณะที่เครื่องยนต์หยุดทำงานหรือขณะที่รถจอด



รูปที่ 3.8 ระบบไฮดรอลิกไฟฟ้าที่ใช้ควบคุมแก๊สสปริง

จากการทดลองพบว่าคุณลักษณะของระบบเป็นไปตามรูปที่ 3.9 ซึ่งแสดงปริมาณของเหลวที่ไหลผ่านวาล์วเทียบกับแรงดันไฟฟ้าของโซลินอยด์



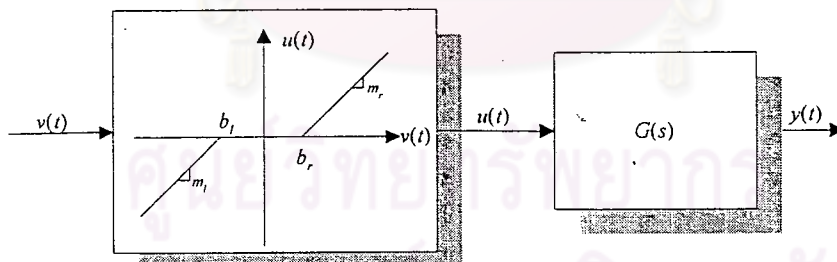
รูปที่ 3.9 เขตไร้ผลสนองกับฮิสเตอร์ซิส

3.2 ส่วนผกผันของเขตไร้ผลสนองแบบปรับตัวเอง

3.2.1 กำหนดปัญหา

เขตไร้ผลสนองที่มีอินพุต $v(t)$ และเอาต์พุต $u(t)$ ดังรูปที่ 3.10 บรรยายได้ด้วย

$$u(t) = D(v(t)) = \begin{cases} m_r(v(t) - b_r), & v(t) \geq b_r \\ 0, & b_l < v(t) < b_r \\ m_l(v(t) - b_l), & v(t) \leq b_l \end{cases} \quad (3.2.1)$$



รูปที่ 3.10 แบบจำลองของระบบเชิงเส้นและเขตไร้ผลสนอง

ปัญหาในการควบคุม คือ

1. สัญญาณออกของเขตไร้ผลสนอง $u(t)$ ไม่สามารถวัดได้
2. พารามิเตอร์ของเขตไร้ผลสนอง คือ b_r , b_l , m_r และ m_l ไม่ทราบค่าแต่รู้เครื่องหมายคือ $b_r > 0$, $b_l < 0$, $m_r > 0$ และ $m_l > 0$

ข้อสมมุติของระบบเหมือนกับการควบคุมแบบปรับตัวเองทั่วไปสำหรับแบบจำลองอ้างอิง
ธรรมดา (Model Reference Adaptive Control, MRAC) ดังนี้

1. คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเป็นแบบเฟสต่ำสุด (Minimum phase) $Z(s)$ และ $R(s)$ เป็นพหุนาม
โมนิก (monic polynomial) โดยที่ $y(t) = G(s)[u](t)$, $G(s) = k_p \frac{Z(s)}{R(s)}$
2. รู้อันดับของ $G(s)$
3. รู้เครื่องหมายของ k_p

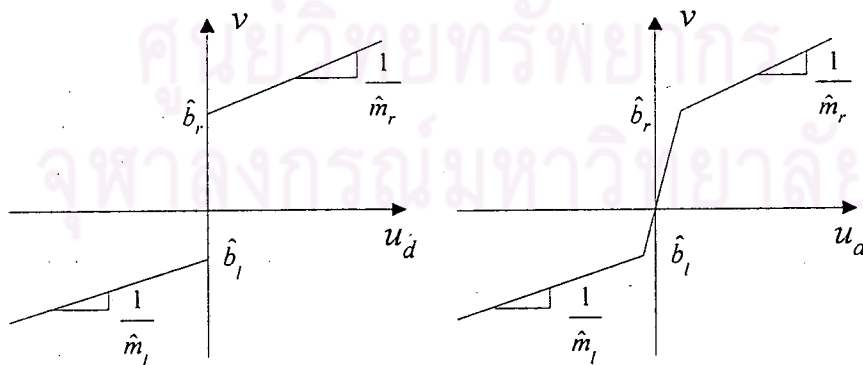
สำหรับกรณีที่ต่างไปจากนี้ เช่น ไม่รู้เครื่องหมายของ k_p หรือไม่ทราบอันดับของ $G(s)$ จำเป็น
ต้องเพิ่มการปรับพารามิเตอร์อีก เพื่อลดความยุ่งยากจึงกำหนดไว้ดังที่กล่าวมาโดยไม่เสียลักษณะต่างๆ
ไปของระบบ

จุดประสงค์ของการควบคุมคือ ต้องการออกแบบตัวควบคุม $v(t)$ ที่ทำให้ระบบวงปิดมีขอบเขต
และสัญญาณออกของระบบ $y(t)$ ตามสัญญาณของแบบจำลองอ้างอิง $y_m(t)$ โดยที่

$$y_m(t) = W_m(s)[r](t) = \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}[r](t)$$

กำหนดให้ $u_d(t)$ เป็นสัญญาณจากตัวควบคุมเชิงเส้นที่ทำให้การควบคุมบรรลุจุดประสงค์เมื่อ
ระบบปราศจากเขตไร้ผลสนอง แต่ $u_d(t)$ จะเปลี่ยนไปเมื่อผ่านเขตไร้ผลสนองวิธีแก้ไขที่เห็นได้ชัดที่
สุดคือการชดเชยผลของเขตไร้ผลสนองเพื่อให้สัญญาณเข้าของระบบเชิงเส้นมีค่าเท่ากับ $u_d(t)$ เรียกว่า
การสร้างส่วนผกผันของเขตไร้ผลสนอง (Dead-zone inverse, DI) ดังรูปที่ 3.11 ซึ่งบรรยายได้ด้วย

$$v(t) = DI(u_d(t)) = \begin{cases} \frac{u_d(t) + \hat{m}_r \hat{b}_r}{\hat{m}_r}, & u_d(t) \geq 0 \\ \frac{u_d(t) + \hat{m}_l \hat{b}_l}{\hat{m}_l}, & u_d(t) < 0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$



รูปที่ 3.11 (ซ้าย) ส่วนผกผันของเขตไร้ผลสนองแบบไม่ต่อเนื่อง (ขวา) แบบประมาณต่อเนื่อง

ข้อสมมุติของส่วนผกของพจน์เขตไร้ผลสนองคือ $\hat{m}_r, \hat{m}_l > 0$ จาก (3.2.2) จะเห็นได้ว่าส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองมีลักษณะเป็นรีเลย์คั้งนั้นเพื่อลดความถี่ของสัญญาณควบคุมอาจประมาณส่วนที่ไม่ต่อเนื่องให้เป็นเชิงเส้นได้ดังรูปที่ 3.11 (ขวา) แต่ก็จะทำให้ความคลาดเคลื่อนมีขนาดเพิ่มขึ้น

3.2.2 การออกแบบส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองแบบปรับตัวเอง [12, 23]

ถ้าเราลองพิจารณาจะเห็นได้ว่าการสร้างส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองเป็นหลักการเดียวกับการกำหนดตารางอัตราขยายที่ได้กล่าวไว้ในตอนต้น ก่อนอื่นลองมาทดสอบการใช้ส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองแบบคงที่ (3.2.2) กับตัวควบคุมเชิงเส้นทั่วไป กรณีแรกคือทราบ $G(s)$ ถ้าพารามิเตอร์ที่คาดเดาของส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองแบบคงที่ตรงกับของเขตไร้ผลสนองพอดี นั่นคือสัญญาณออกของระบบจะตามสัญญาณออกของแบบจำลองได้ แต่ถ้าพารามิเตอร์ที่ใช้แตกต่างกันมากก็อาจจะทำให้ระบบวงปิดขาดเสถียรภาพได้ ในกรณีที่สองคือไม่ทราบ $G(s)$ และยังคงใช้ส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองแบบคงที่กับการควบคุมแบบปรับตัวเองที่มั่นคง (Robust adaptive control) พบว่าแม้ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้แตกต่างกันมากก็ตามแต่ระบบวงปิดก็ยังคงมีเสถียรภาพ ส่วนความคลาดเคลื่อนของสัญญาณออกจะไม่ลู่เข้าหาศูนย์เว้นเสียแต่ว่าพารามิเตอร์ของส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองแบบคงที่จะตรงกับเขตไร้ผลสนองจริงๆ เราจึงสรุปว่าการใช้ส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองแบบคงที่ไม่สามารถกำจัดผลของเขตไร้ผลสนองออกไปได้ จึงต้องมีการหากฎที่ใช้ในการปรับพารามิเตอร์ของส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองเรียกว่า ส่วนผกพจน์ของเขตไร้ผลสนองแบบปรับตัวเอง (adaptive deadzone inverse) คั้งนั้นตัวควบคุม (3.2.2) จึงกลายเป็น

$$v(t) = \text{ADI}(u_d(t)) = \begin{cases} \frac{u_d(t) + \hat{m}_r \hat{b}_r(t)}{\hat{m}_r(t)}, & u_d(t) \geq 0 \\ \frac{u_d(t) + \hat{m}_l \hat{b}_l(t)}{\hat{m}_l(t)}, & u_d(t) < 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

(ก.) กรณีที่ $m_r = m_l$

กำหนดพารามิเตอร์ต่างๆที่จะใช้ต่อไปได้คือ

$$\theta_0^* = [m, mb_r, mb_l]^T, \quad \theta_0(t) = [\hat{m}(t), \hat{m}\hat{b}_r(t), \hat{m}\hat{b}_l(t)]^T, \quad \phi_0 = \theta_0(t) - \theta_0^* \quad (3.2.4)$$

$$\omega_0(t) = [-v(t), \chi(t), 1 - \chi(t)]^T, \quad \omega_1(t) = \left(\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) [u_d](t), \quad \omega_2(t) = \left(\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) [y](t) \quad (3.2.5)$$

โดยที่ $\Lambda(s)$ เป็นพหุนามโมนิคเฮอริวิตซ์อันดับ n ใดๆเมื่อ n เป็นอันดับของระบบ $\chi(t) = \begin{cases} 1, & u_d(t) \geq 0 \\ 0 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$

แทนพารามิเตอร์ซึ่งใช้บอกว่สัญญาณควบคุมอยู่ทางซ้ายหรือขวาของเขตไร้ผลสนอง และ

$$\alpha(s) = [1 \quad s \quad \dots \quad s^{n-1}]^T$$

กรณีที่ 1 รู้พารามิเตอร์ของระบบเชิงเส้น ดังนั้นตัวควบคุมสำหรับส่วนที่เป็นเชิงเส้นจะเป็นแบบคงที่คือ

$$u_d^*(t) = \theta_1^* \frac{a(s)}{\Lambda(s)} u_d(t) + \theta_2^* \frac{a(s)}{\Lambda(s)} y(t) + \theta_3^* r(t) \quad (3.2.6)$$

โดย $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^n$, $\theta_3 \in \mathbb{R}$ ค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการ θ^* สามารถหาได้จากเงื่อนไขเท่าเทียม (Matching condition) ดังต่อไปนี้

$$\theta_1^{*T} a(s) R(s) + \theta_2^{*T} a(s) k_p Z(s) = \Lambda(s) (R(s) - k_p \theta_3^* Z(s) R_m(s)), \quad \theta_3^* = k_p^{-1} \quad (3.2.7)$$

จากตัวควบคุม (3.2.3) และ (3.2.6) เราสามารถเขียนสมการความคลาดเคลื่อนของสัญญาณออกที่มีสาเหตุมาจากความคลาดเคลื่อนของพารามิเตอร์ของเขตไร้ผลสองซึ่งนำมาใช้ใน (3.2.3) ได้คือ

$$e(t) = H(s) [\phi_0^T \omega_0 + d_0](t) \quad (3.2.8)$$

เมื่อ $d_0(t) = m_r \Delta_r(t)(v(t) - b_r) + m_l \Delta_l(t)(v(t) - b_l)$

$$\text{และ } \Delta_r(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq v(t) < b_r \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases}, \quad \Delta_l(t) = \begin{cases} -1, & b_l < v(t) < 0 \\ 0, & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

โดยที่ $H(s) = \theta_3^{*-1} W_m(s) (1 - \theta_1^{*T} (a(s) / \Lambda(s)))$ เป็นพหุนามเสถียรแบบเหมาะสมแท้จริง (Strictly proper stable) ซึ่งรู้ค่า

จะเห็นได้ว่ารูปแบบของ $e(t)$ มีลักษณะคล้ายความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการควบคุมแบบปรับตัวเองที่มั่นคง (Robust adaptive control) [1, 20, 21, 22] ทำให้ใช้กฎการปรับได้เหมือนกัน ในที่นี้จะใช้กฎการปรับที่ได้จาก [22] ดังนี้

$$\dot{\theta}_0(t) = -\frac{\Gamma \zeta(t) \varepsilon(t)}{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} - \Gamma \sigma(\theta_0(t)) \theta_0(t) \quad (3.2.9)$$

โดยที่ $\Gamma = \Gamma^T > 0$

และ $\varepsilon(t) = e(t) + \xi(t)$, $\xi(t) = \theta_0^T(t) \zeta(t) - H(s) [\theta_0^T \omega_0](t)$, $\zeta(t) = H(s) [\omega_0](t)$

$$\sigma(\theta_0(t)) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } \|\theta_0(t)\| < M_0 \\ \sigma_0 \left(\frac{\|\theta_0(t)\|}{M_0} - 1 \right) & \text{ถ้า } M_0 \leq \|\theta_0(t)\| < 2M_0 \\ \sigma_0 & \text{ถ้า } \|\theta_0(t)\| \geq 2M_0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

โดยที่ $\sigma_0 > 0$ เป็นพารามิเตอร์ในการออกแบบ

M_0 เป็นขอบเขตบนของ $\|\theta_0^*\|$

ข้อสังเกต จาก (3.2.9) จะต้องมีการกำหนดว่า $m(t) > 0$

สัญญาณที่ได้จาก (3.2.9) รับประกันได้ว่ามีขอบเขตดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีที่ 3.1 กฎการปรับใน (3.2.9) จะรับประกันได้ว่า

1. $\theta_0(t), \dot{\theta}_0(t), \frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)}} \in L_\infty$
2. สำหรับบาง $c_1, c_2 > 0$ และทุกๆ $t_2 > t_1 \geq 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\theta}_0(t)\|^2 dt \leq c_1 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{c_2}{1+\zeta^T(t)\zeta(t)+\xi^2(t)} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon^2(t)}{1+\zeta^T(t)\zeta(t)+\xi^2(t)} dt \leq c_1 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{c_2}{1+\zeta^T(t)\zeta(t)+\xi^2(t)} dt$$

3. สำหรับบาง $c_3, c_4 > 0$ และทุกๆ $t_2 > t_1 \geq 0$ ความคลาดเคลื่อนในการตาม $e(t)$ จะเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt \leq c_3 + c_4 \int_{t_1}^{t_2} d_0^2(t) dt \quad (3.2.11)$$

สำหรับการพิสูจน์ที่ได้จากเอกสารอ้างอิง [12, 23] ถ้า $d_0(t)$ มีขนาดเล็ก $e(t)$ จะมีขนาดเล็กแบบนัยกำลังสองเฉลี่ย (Mean square sense) ตาม (3.2.11) โดย $d_0(t) = 0$ ถ้า $\hat{b}_r(t) \geq b_r$ และ $\hat{b}_l(t) \leq b_l$ หรือถ้า $v(t) \geq b_r$ หรือ $v(t) \leq b_l$ และ $d_0(t)$ มีขนาดเล็กถ้า $\theta_0(t)$ มีค่าเข้าใกล้ θ_0^*

กรณีที่ 2 ไม่รู้พารามิเตอร์ของระบบ

เมื่อไม่ทราบ $G(s)$ ก่อนอื่นจะต้องปรับปรุงโครงสร้างของตัวควบคุมที่ทำให้สมการความคลาดเคลื่อนในการตาม $e(t)$ อยู่ในรูปแบบเดียวกับรูปแบบมาตรฐาน โดยใช้โครงสร้างของตัวควบคุมต่อไปนี้จะถูกใช้ร่วมกับ (3.2.3) แทน

$$u_d(t) = \theta_2^T(t)\omega_2(t) + \theta_3(t)r(t) + \theta_4^T(t)\omega_4(t) \quad (3.2.12)$$

โดย $\omega_4(t) = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}[\omega_0](t)$, $A(s) = [I_3 \ sI_3 \ \dots \ s^{n-1}I_3]^T$, I_3 แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix), $\theta_4^* \in \mathcal{R}^{3n}$, $\theta_4^* = -\theta_1^* \otimes \theta_0^*$, \otimes แทนผลคูณ Kronecker product

จากตัวควบคุม (3.2.3) และ (3.2.12) จะทำให้ได้สมการความคลาดเคลื่อนที่ต้องการ คือ

$$e(t) = \rho^* W_m(s)[\phi^T \omega](t) + d_1(t)$$

โดยที่ $\rho^* = \theta_3^{*-1}$

และ $d_1(t) = \theta_3^{*-1} W_m(s) (1 - \theta_1^* \frac{a(s)}{\Lambda(s)}) [d_0](t)$, $\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$

$$\theta^* = [\theta_2^{*T} \ \theta_3^* \ \theta_4^{*T} \ \theta_0^{*T}]^T, \ \omega(t) = [\omega_2^T(t) \ r(t) \ \omega_4^T(t) \ \omega_0^T(t)]^T$$

ซึ่ง θ^* จะต้องตรงกับ (3.2.7)

ทำให้สามารถใช้กฎการปรับพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\text{sgn}(k_p)\Gamma\zeta(t)\varepsilon(t)}{1+\zeta^T(t)\zeta(t)+\xi^2(t)} - \Gamma\sigma(\theta(t))\theta(t) \quad (3.2.13)$$

โดยที่ $\Gamma = \Gamma^T > 0$

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{\gamma\xi(t)\varepsilon(t)}{1+\zeta^T(t)\zeta(t)+\xi^2(t)} - \gamma\sigma(\rho(t))\rho(t), \ \gamma > 0 \quad (3.2.14)$$

โดยที่ $\rho(t)$ เป็นค่าคาดหมายของ $\rho^* = \theta_3^{*-1}$, $\varepsilon(t) = e(t) + \rho(t)\xi(t)$, $\zeta(t) = W_m(s)[\omega](t)$,

$$\xi(t) = \theta(t)^T \zeta(t) - W_m(s)[\theta^T \omega](t), \quad \sigma(\theta(t)) \text{ และ } \sigma(\rho(t)) \text{ นิยามเหมือน (3.2.10)}$$

สัญญาณที่ได้จาก (3.2.13) รับรองได้ว่าทุกๆสัญญาณในระบบวงปิดมีขอบเขตและความคลาดเคลื่อนในการตามมีค่าเล็กแบบนัยกำลังสองเฉลี่ยซึ่งสามารถพิสูจน์ได้แบบเดียวกับทฤษฎีที่ 3.1

จะเห็นว่าทั้งกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ได้จากการสมมุติว่าความชัน $m = m_r = m_l$ จะสามารถบอกได้ว่าความคลาดเคลื่อนในการตามจะมีขนาดเล็กแบบนัยกำลังสองเฉลี่ย แต่ในความเป็นจริงแล้วเป็นไปได้ไม่น้อยมากที่ความชันทั้งสองจะเท่ากัน ถ้า $m_r \neq m_l$ ด้วยวิธีดังที่กล่าวมาข้างต้นยังคงพิสูจน์เสถียรภาพและการลู่เข้าของความคลาดเคลื่อนไม่ได้ โดยการใช้อุปกรณ์ปรับเดิมในการคาดเดาพารามิเตอร์และอาศัยการจำลอง (Simulation) แสดงผลที่ได้จากการควบคุมเป็นเครื่องพิสูจน์ในกรณีที่ $m_r \neq m_l$ ขั้นตอนของการควบคุมจะได้กล่าวถึงต่อไป

(ข.) กรณีที่ $m_r \neq m_l$

โดยทั่วไปเซตไร้มวลสนองจะมีพารามิเตอร์ทั้งหมด 4 ค่า คือ m_r, m_l และ b_r, b_l ซึ่งโดยมากแล้ว $m_r \neq m_l$ และ $b_r \neq b_l$ โดยไม่เสียลักษณะต่างๆไปเราสามารถสมมุติได้ว่า $m_r > 0$, $m_l > 0$, $b_r > 0$ และ $b_l < 0$ นั่นคือ

$$\theta_0(t) = (\hat{m}_r(t), \hat{m}_l b_r(t), \hat{m}_l(t), \hat{m}_l b_l(t))^T$$

$$\theta_0^* = (m_r, m_l b_r, m_l, m_l b_l)^T$$

$$\phi_0(t) = \theta_0(t) - \theta_0^*$$

กำหนดให้ $\omega_0(t) = (-\chi(t)v(t), \chi(t), -(1-\chi(t))v(t), 1-\chi(t))^T$

โดย $\chi(t)$ นิยามเหมือนใน (3.2.5)

กฎการปรับที่ใช้ยังคงเหมือนในกรณีที่ $m_r = m_l$ เพียงแต่จะมีพารามิเตอร์เพิ่มขึ้น ตัวอย่างเช่น $\omega_4(t) = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}[\omega_0](t)$ แต่ตอนนี้ $A(s) = [I_4 \quad sI_4 \quad \dots \quad s^{n-1}I_4]^T$, I_4 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

(Identity matrix), $\theta_4^* \in \mathbb{R}^{4n}$ ตัวควบคุมเชิงเส้นก็ยังคงใช้เหมือนเดิม คือ

$$u_d(t) = \theta_2^T(t)\omega_2(t) + \theta_3(t)r(t) + \theta_4^T(t)\omega_4(t)$$

ข้อสังเกต 3.1

ส่วนผกผันของเซตไร้มวลสนองมีลักษณะเป็นรีเลย์ซึ่งจะกำจัดผลของเซตไร้มวลสนองได้ถ้าพารามิเตอร์ตรงกันพอดี แต่ในความเป็นจริงเราไม่สามารถรับรองได้ว่าพารามิเตอร์ที่ลู่เข้าจะเป็นค่าจริง

ตัวอย่างที่ 3.1 แสดงการใช้ส่วนผกผันของเซตไร้มวลสนองกับระบบอันดับหนึ่งที่ไม่มีเสถียรภาพ

$G(s) = 1/(s-1)$ ซึ่งรู้พารามิเตอร์กับเซตไร้มวลสนองสมมาตร

$$u(t) = D(v(t)) = \begin{cases} v(t) - b, & v(t) \geq b \\ 0, & -b < v(t) < b \\ v(t) + b, & v(t) \leq -b \end{cases}$$

ทำให้มีพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่ามีเพียงค่าเดียวคือ b สมมติสัญญาณอ้างอิงเป็นค่าคงที่ $r > 0$

เขียนสมการของระบบได้เป็น $dy/dt = y + r$ โดยสัญญาณควบคุมที่ต้องการคือ $u_d(t) = -2y + r$ ในกรณีที่ไม่มีเขตไร้ผลสนอง $u(t) = u_d(t)$ ทำให้ $y(t) \rightarrow r$ ในขณะที่ $t \rightarrow \infty$ ในกรณีที่มีเขตไร้ผลสนอง เพื่อให้ผลที่ได้ยังคงเหมือนเดิมเราจะต้องออกแบบส่วนผกผันของเขตไร้ผลสนองแบบปรับตัวเอง คือ

$$v(t) = u_d(t) + \hat{b}(t) \operatorname{sgn}(u_d(t)), \quad \phi(t) = \hat{b}(t) - b, \quad e(t) = y(t) - r$$

สมการความคลาดเคลื่อนแบ่งเป็น 2 กรณี คือ

$$\dot{e} = -e - u_d, \quad -b < v(t) < b \quad (3.2.15)$$

$$\dot{e} = -e + \phi \operatorname{sgn}(u_d(t)), \quad v(t) \leq -b \quad \text{หรือ} \quad v(t) \geq b \quad (3.2.16)$$

จากสมการ (3.2.16) ซึ่งเป็นขณะที่อยู่ภายนอกของเขตไร้ผลสนอง สามารถหากฎการปรับจากฟังก์ชันเลียปูนอฟซึ่งบังคับให้ค่าคลาดเคลื่อนที่ได้มากกว่าศูนย์ ดังนี้

$$\dot{\phi} = \dot{\hat{b}} = \begin{cases} -e \operatorname{sgn}(u_d), & \hat{b} > 0 \\ 0, & \hat{b} = 0 \text{ และ } -e \operatorname{sgn}(ud) < 0 \end{cases}$$

กฎการปรับนี้จะใช้กับในสมการ (3.2.15) ด้วย

ทั้งสองกรณีจะมีความไม่ต่อเนื่องที่ $u_d = 0$ หรือ $e = -r/2$ ถ้า v อยู่ในเขตไร้ผลสนองจะไม่เกิดแบบไถล (Sliding mode) แต่ถ้าอยู่ภายนอกไม่ว่า u_d จะเป็นบวกหรือลบจะได้ว่า

$$\dot{u}_d u_d = 2(e u_d - \phi |u_d|) < 0 \quad \text{สำหรับ} \quad \phi > r/2$$

นั่นคือจะเกิดแบบไถลที่เส้น $e = -r/2$ เฉพาะในบริเวณที่ $\phi > r/2$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $e(t)$ และ $\phi(t)$ ลู่เข้าสู่ศูนย์โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟ $V = 0.5(e^2 + \phi^2)$ กรณีที่อยู่นอกเขตไร้ผลสนองจะได้ว่า $\dot{V} = -e^2 \leq 0$ กรณีที่อยู่ในเขตไร้ผลสนองยังแบ่งได้อีก 2 กรณีคือ

- $u_d = -2e - r > 0$ นั่นคือ $e < -r/2 < 0$ และจาก $0 < v < b$ นั่นคือ $e + r - \phi > 0$ จะได้ว่า $\dot{V} = e(e + r - \phi) \leq 0$
- $u_d = -2e - r < 0$ แบ่งได้อีก 2 แบบ คือ 2.1) $-r/2 < e < 0$ สามารถแสดงได้แบบเดียวกับกรณีแรกคือ $\dot{V} = e(e + r - \phi) \leq 0$ เมื่อ $e + r - \phi \geq 0$ แต่ถ้า $e + r - \phi \leq 0$, $\dot{V} \geq 0$ ซึ่งสามารถแสดงได้ว่า จะออกจากสภาวะนี้ได้ในเวลาจำกัด 2.2) $e \geq 0$, $\dot{V} = -e^2 \leq 0$

ตัวอย่างนี้เป็นเพียงตัวอย่างง่าย ๆ ที่เราสมมุติว่ารู้พารามิเตอร์ของส่วนที่เป็นเชิงเส้นอย่างดีแล้ว ในบทที่ 5 จะได้แสดงตัวอย่างการใช้เขตไร้ผลสนองแบบปรับตัวเองกับกรณีที่ไม่มีพารามิเตอร์ของส่วนเชิงเส้นด้วย

เป็นที่ทราบกันดีว่าผลกระทบของเขตไร้ผลสนองทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนอยู่ตัวและก็เป็นที่ยอมรับกันดีอีกเช่นกันว่าตัวควบคุมแบบอินทิกรัลสัดส่วน (Proportional-plus-integral controller) มีความ

สามารถในการจัดการกับความคลาดเคลื่อนได้ จึงมีความคิดที่ว่าถ้านำส่วนอินทิกรัลมาใช้กับตัวควบคุมเชิงเส้นน่าจะช่วยลดผลของเขตไร้ผลสนองได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.2 ต้องการควบคุมระบบแบบเดียวกับตัวอย่างที่ 3.1

ใช้สัญญาณควบคุมคือ $v(t) = u_d(t) + \frac{1}{T_i} \int e dt = -Ky + r + \frac{1}{T_i} \int e dt$, r เป็นค่าคงที่

$e = r - y$, $\dot{e} = -\dot{y}$ จะได้ว่า

$$E(s) = \frac{[s + (K-1)]e(0) + \dot{e}(0)}{s^2 + (K-1)s + \frac{1}{T_i}}, \quad K > 1 \text{ ดังนั้นสำหรับ } e(0), \dot{e}(0) = -\dot{y}(0) \text{ ที่มีขอบเขต ความคลาด}$$

เคลื่อนจะลู่เข้าสู่ศูนย์

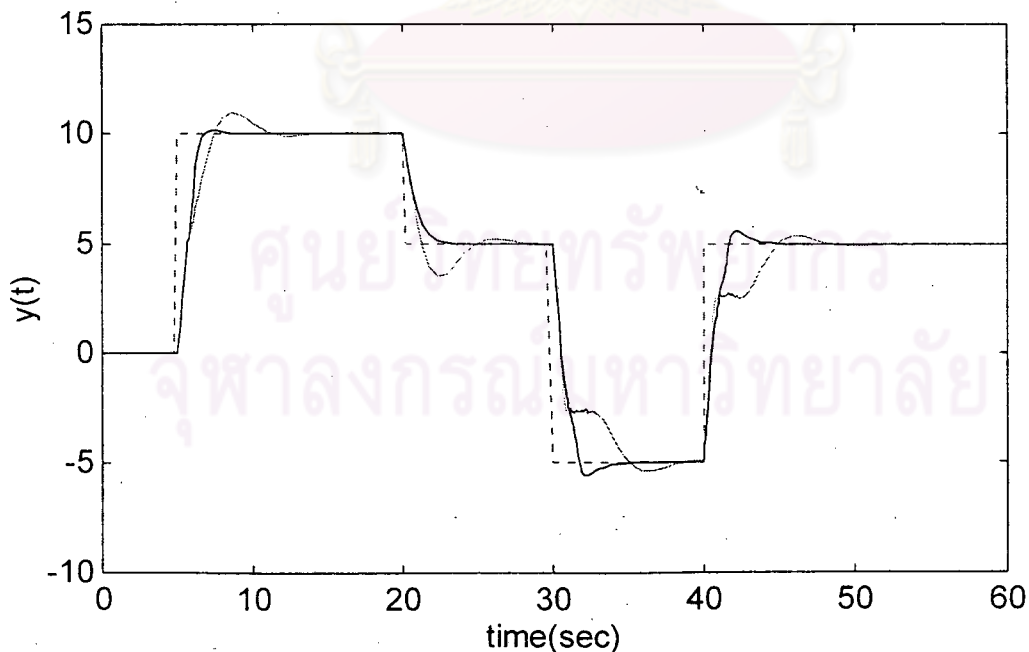
ผลการจำลองจากตัวอย่างที่ 3.1 และตัวอย่างที่ 3.2 เปรียบเทียบความสามารถในการตามสัญญาณอ้างอิงและลักษณะของสัญญาณควบคุมได้ดังรูปที่ 3.12 และ รูปที่ 3.13 โดยที่ระบบคือ $G(s) = 1/(s-1)$ จุดเริ่ม จุดสุดท้ายและความชันของเขตไร้ผลสนอง คือ $-3, 3, 1$ สมมติว่ารู้ความชันแต่ไม่รู้จุดเริ่มและจุดสุดท้าย

- ตัวควบคุมที่ใช้ในตัวอย่างที่ 3.1 คือ

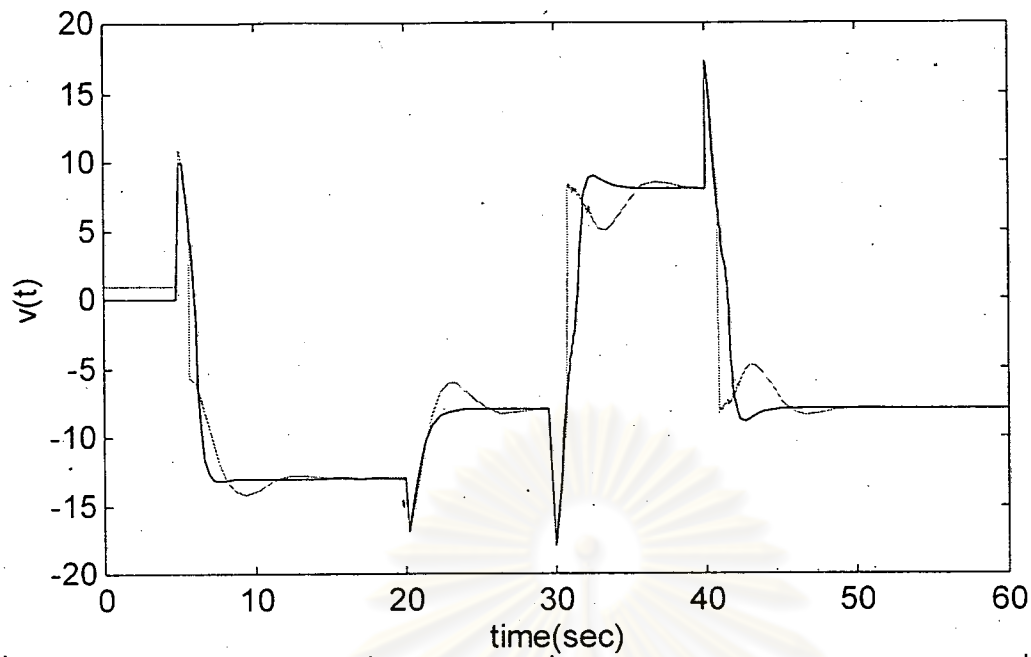
$$v(t) = u_d(t) + \dot{b}(t) \operatorname{sgn}(u_d(t)), \quad u_d(t) = -2y(t) + r(t), \quad \dot{b}(0) = 1$$

- ตัวควบคุมที่ใช้ในตัวอย่างที่ 3.2 คือ

$$v(t) = u_d(t) + \left(1/T_i\right) \int_0^t e(t) dt, \quad u_d(t) = -5y(t) + r(t), \quad e(t) = r - y(t)$$



รูปที่ 3.12 แสดงสัญญาณอ้างอิง (เส้นประ) สัญญาณออกจากตัวอย่างที่ 3.1 (เส้นจาง) สัญญาณออกจากตัวอย่างที่ 3.2 (เส้นเข้ม)



รูปที่ 3.13 แสดงสัญญาณควบคุมที่ได้จากตัวอย่างที่ 3.1 (เส้นจาง) สัญญาณควบคุมที่ได้จากตัวอย่างที่ 3.2 (เส้นเข้ม)

จากผลการจำลองถือได้ว่าเป็นที่น่าพอใจคือตัวควบคุมทั้งสองสามารถทำให้สัญญาณออกของระบบตามสัญญาณที่กำหนดไว้ได้

ดังนั้นจากตัวอย่างที่ 3.2 จึงมีความเป็นไปได้ในการควบคุมระบบที่ประกอบด้วยเขตไร้ผลสนองโดยไม่ต้องอาศัยการคาดเดาพารามิเตอร์ของเขตไร้ผลสนองโดยตรงซึ่งจะทำให้สามารถลดผลกระทบจากความไม่แน่นอนของพารามิเตอร์ได้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย