



2.1 บทนำ

โดยทั่วไปการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีจุดรองรับเฉียงเป็นมุมมองศาสตร์ต่าง ๆ กับหน้าตัดตั้งฉากของโครงสร้างนั้น อาจวิเคราะห์ได้จากทฤษฎีแผ่นเฉียงบาง (Theory of Skew Plate) หรือวิธีการวิเคราะห์อย่างประมาณวิธีอื่น วิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทนี้ต่างก็มีขีดจำกัดแตกต่างกัน กล่าวคือ

2.1.1 ทฤษฎีแผ่นเฉียงบาง (Theory of Skew Plate)

การวิเคราะห์โดยวิธีนี้จะเหมาะสมสำหรับโครงสร้างแผ่นบางที่มีแนวของจุดรองรับขนานกัน แม้กระนั้นก็ตาม ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างแผ่นเฉียงบางภายใต้น้ำหนักบรรทุกกระทำก็ได้เฉพาะบางกรณีเท่านั้น (10) ในการวิเคราะห์โครงสร้างประเภทนี้ด้วยทฤษฎีแผ่นเฉียงบางจำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ชั้นสูงในการแก้ปัญหาสมการดิฟเฟอเรนเชียล (Differential Equation) ภายใต้สภาพขอบเขต (Boundary Condition) ที่กำหนด อีกทั้งระบบแกนพิกัดที่ใช้ยังเป็นชนิด Oblique Co-Ordinate วิธีนี้จึงใช้ไม่ได้ผลต่อโครงสร้างที่สลับซับซ้อนมากขึ้น

2.1.2 วิธีการจำลองโครงสร้างจริงด้วยโครงสร้างเสมือน (Modified Methods)

วิธีนี้วิเคราะห์โดยจำลองรูปร่าง (Geometric Idealization) ของโครงสร้างให้สามารถวิเคราะห์ได้ด้วยทฤษฎีอื่นที่มีอยู่เช่น ทฤษฎีคาน (11) กริด (12) และไฟไนต์สทริป (13) ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีนี้จึงเป็นค่าอย่างประมาณและในบางกรณีอาจให้ค่าคลาดเคลื่อนมาก ดังนั้นในบางครั้งจึงจำเป็นต้องเปรียบเทียบกับวิธีการวิเคราะห์โดยวิธีอื่น หรือจำเป็นต้องสร้างหุ่นจำลอง (Models) เพื่อทำการทดสอบเปรียบเทียบ สิ่งต่าง ๆ ดังกล่าวมานี้จึงเป็นข้อเสียของการวิเคราะห์โดยวิธีนี้

2.1.3 วิธีไฟไนท์เอเลเมนต์ (The Finite Element Method)

วิธีไฟไนท์เอเลเมนต์เป็นวิธีการวิเคราะห์ที่ได้จากการจำลองโครงสร้างจริงด้วย โครงสร้างจำลอง ซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อยจำนวนหนึ่งมาต่อกันที่ข้อ (Node) ในแต่ละจุดข้อ ของชิ้นส่วนย่อยจะประกอบด้วยฟังก์ชันแทนการเคลื่อนที่ของดีกรีความอิสระ (Degree of Freedom) จำนวนหนึ่ง โดยทั่วไปฟังก์ชันแทนการเคลื่อนที่จะจำลองมาจากฟังก์ชันโพลิโนเมียล (Polynomial Function) ซึ่งจะมีคุณสมบัติตามต้องการดังต่อไปนี้ คือ

- ก. ประกอบด้วยการเคลื่อนที่ของวัตถุแข็ง (Rigid Body Displacement)
- ข. ประกอบด้วยความเครียดคงที่และสภาพการโค้งงอที่ (Constant Strain and Curvature States)
- ค. บริเวณที่เชื่อมกันระหว่างชิ้นส่วนย่อยจะมีความต่อเนื่องและประสานเข้ากันได้ (Compatibility with Adjacent Elements)

เมื่อฟังก์ชันแทนการเคลื่อนที่สามารถเลือกได้ใกล้เคียงตามสภาพที่เกิดขึ้นจริง ตามส่วนต่าง ๆ ของโครงสร้าง ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยวิธีนี้ย่อมจะแสดงถึงพฤติกรรมของโครงสร้างนั้น ฉะนั้นงานวิจัยนี้จึงมุ่งใช้วิธีไฟไนท์เอเลเมนต์ในการวิเคราะห์ ดังรายละเอียดจะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

2.2 สมมติฐาน

การวิเคราะห์โครงสร้างสะพานแบบบ็อกซ์เกอร์เดอร์ปลายเฉียงภายใต้น้ำหนักบรรทุกสถิต (Static Load) สำหรับงานวิจัยนี้ตั้งอยู่บนสมมติฐานดังต่อไปนี้คือ

2.2.1 วัสดุที่มีคุณสมบัติเป็น Isotropic และพฤติกรรมที่เกิดขึ้นอยู่ในช่วงอีลาสติคเชิงเส้น (Linear Elastic) หรือเป็นไปตาม Hooke's Law

2.2.2 สมมติฐานของ Kirchhoff เป็นจริง กล่าวคือ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับผิวกึ่งกลาง (Middle Surface) ก่อนและหลังเกิดการเปลี่ยนรูป (Deformation) ก็ยังคงเป็นเส้นตรงอยู่หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ หลังงานเนื่องจากการบิดโดยแรงเฉือนจะไม่นำมาพิจารณาในการคำนวณ

หาสตีฟเนสของโครงสร้างในส่วนที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมนอกระนาบ แต่จะนำมาพิจารณาในการคำนวณหาสตีฟเนสของโครงสร้างในส่วนที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมในระนาบ

2.2.3 โครงสร้างที่จะวิเคราะห์ มีลักษณะเป็นโครงสร้างแผ่นบาง (Thin Plate Structure)

2.2.4 ชั้นส่วนย่อยในแต่ละชั้นมีความหนาคงที่

2.3 ขั้นตอนในการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการสตีฟเนส (Stiffness Method) ซึ่งมีขั้นตอนตามลำดับดังต่อไปนี้คือ

2.3.1 เลือกระบบแกนพิกัดฉากที่เหมาะสมในระดับโครงสร้างและระดับชั้นส่วนย่อย เพื่อประโยชน์ในการกำหนดสภาพขอบเขต (Boundary Condition) และการเตรียมข้อมูลอื่น ๆ กำหนดเลขประจำขั้วและเลขประจำชั้นส่วนย่อยให้เป็นระบบตามทิศทางที่ใช้เวลาในการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์ให้น้อยที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 2.1

2.3.2 จำลองฟังก์ชันแทนการเคลื่อนที่ที่จุดใด ๆ ในชั้นส่วนย่อย ($f(x,y)$)

$$\delta(x,y) = [f(x,y)]\{\alpha\} \dots\dots\dots(2.1)$$

2.3.3 หาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ที่จุดใด ๆ ในชั้นส่วนย่อย $[\delta(x,y)]$ ให้อยู่ในรูปของการเคลื่อนที่ที่จุดขั้วของชั้นส่วนย่อยนั้น $[\{r_e\}]$

$$\delta(x,y) = [N(x,y)] \{r_e\} \dots\dots\dots(2.2)$$

2.3.4 หาความสัมพันธ์ของความเครียด (Strain) ที่จุดใด ๆ ในชั้นส่วนย่อย $[\epsilon(x,y)]$ ให้อยู่ในรูปของการเคลื่อนที่ที่จุดขั้ว $[\{r_e\}]$

$$\epsilon(x,y) = [B] \{r_e\} \dots\dots\dots(2.3)$$

2.3.5 กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง (Stress) และความเครียด (strain) พร้อมทั้งจัดให้อยู่ในรูปของการเคลื่อนที่ที่จุดขั้ว $\{r_e\}$

$$\sigma(x,y) = [D] \{ \epsilon(x,y) \} = [D] [B] \{ r_e \} \dots (2.4)$$

2.3.6 หาค่าสตีเฟนเนสของชิ้นส่วนย่อย (K_e) โดยอาศัยหลักของพลังงานศักย์ต่ำสุด (Minimum Potential Energy Principle) ที่กล่าวว่า พลังงานศักย์รวมของวัสดุจะมีค่าคงที่ และจะมีค่าเท่ากับผลต่างของพลังงานเนื่องจากความเครียดในเนื้อวัสดุ (U) กับพลังงานศักย์ที่เกิดจากแรงภายนอกกระทำต่อวัสดุ (W) นั่นก็คือ

$$P = U - W \dots \dots \dots (2.5)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T D \epsilon \, dv - \int_V \epsilon^T D \epsilon_0 \, dv - \int_V \epsilon^T \sigma_0 \, dv \dots (2.6)$$

$$W = \int_R f \, u \, dR + \int_S t \, u \, dS = r_e^T R_e \dots \dots \dots (2.7)$$

- เมื่อ ϵ เป็นความเครียดในเนื้อวัสดุที่เกิดจากแรงภายนอก
 ϵ_0 เป็นความเครียดในเนื้อวัสดุก่อนแรงภายนอกกระทำ
 σ_0 เป็นหน่วยแรงในเนื้อวัสดุก่อนแรงภายนอกกระทำ
 f เป็นแรงภายนอกที่เกิดจากเนื้อวัสดุ (Body Force)
 t เป็นแรงภายนอกกระทำที่ผิววัสดุ (Surface Traction)
 R_e เป็นแรงสมมูลย์กระทำที่จุดขั้วของแรงภายนอก (Equivalent Nodal Forces)
 u เป็นระยะการเคลื่อนที่ของวัสดุที่เกิดจากแรงภายนอกกระทำ
 r_e เป็นระยะการเคลื่อนที่ที่จุดขั้วของวัสดุที่เกิดจากแรงภายนอกกระทำ

เมื่อแทนค่า U และ W จากสมการ 2.6 และ 2.7 ลงในสมการ 2.5 แล้วทำการดิฟเฟอเรนเชียล (Differentiate) จะได้

$$\delta P = \frac{1}{2} \int_V \delta \epsilon^T D \epsilon \, dv + \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T D \delta \epsilon \, dv - \delta r_e^T R_e = 0$$

ถ้า K เป็น Symmetric Matrix จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} \int_V \delta \epsilon^T D \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T D \delta \epsilon dV$$

$$\int_V \delta \epsilon^T D \epsilon dV = \delta r_e^T R_e$$

$$\delta r_e^T \left(\int_V B^T D B dV \right) r_e = \delta r_e^T R_e$$

$$K_e r_e = R_e \dots \dots \dots (2.8)$$

นั่นก็คือสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย $(K_e) = \int_V B^T D B dV \dots \dots \dots (2.9)$

2.3.7 เปลี่ยนค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย (K_e) ให้อยู่ในรูปของสติฟเนสระดับโครงสร้าง โดยอาศัยแมทริกซ์แปรเปลี่ยน (Transformation Matrix) แล้วรวมค่าสติฟเนสที่ได้ด้วยวิธีการรวมสติฟเนสที่สอดคล้องกันโดยตรง (Direct Stiffness Method)

$$K = \sum_e T^T K_e T \dots \dots \dots (2.10)$$

ในทำนองเดียวกันก็จะได้

$$R = \sum_e T^T R_e T \dots \dots \dots (2.11)$$

ในทำนองเดียวกับหัวข้อ 2.3.6 จะได้

$$K r = R \dots \dots \dots (2.12)$$

2.3.8 หาค่าการเคลื่อนที่ที่จุดข้อ $\{r\}$ ในสมการ 2.12 แล้วนำค่าที่ได้ไปแทนค่าในสมการ 2.3 และ 2.4 ก็จะได้ค่าผลลัพธ์ต่าง ๆ ตามต้องการ ดังนี้

$$\sigma(x,y) = [D] [B] \{r_e\}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \text{ หรือเขียนได้ในรูป } M(x,y) = \int_{-t/2}^{t/2} z [D] [B] \{r_e\} dz$$

2.4 การจำลองรูปร่าง (Geometric Idealization)

การวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วย การจำลองชิ้นส่วนย่อยออกเป็นชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานรูปสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม พีระมิด หรือแม้แต่ชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานชนิดผิวโค้ง เป็นต้น รูปร่างและลักษณะของชิ้นส่วนย่อยที่นำมาใช้ย่อมขึ้นอยู่กับลักษณะและชนิดของปัญหานั้น ในงานวิจัยนี้จะวิเคราะห์โดยใช้ชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมประกอบกัน เพื่อให้ได้การจำลองรูปร่างใกล้เคียงกับสภาพของโครงสร้างยิ่งขึ้น

2.5 การจำลองการเคลื่อนที่ (Displacement Idealization)

ในการจำลองการเคลื่อนที่ของชิ้นส่วนย่อยที่จุดข้อสำหรับงานวิจัยนี้ ประกอบด้วยแบบของการเคลื่อนที่อย่างง่าย ๆ (Simple Displacement Patterns) กล่าวคือ

2.5.1 การเคลื่อนที่ในแนวระนาบจะประกอบด้วยฟังก์ชันการเคลื่อนที่ชนิดเชิงเส้น สำหรับชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานรูปสามเหลี่ยม ฟังก์ชันแทนการเคลื่อนที่ชนิด Quadratic สำหรับชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานรูปสี่เหลี่ยม

2.5.2 การเคลื่อนที่นอกระนาบจะประกอบด้วยฟังก์ชันการเคลื่อนที่ชนิด Cubic

นอกจากนั้น การเคลื่อนที่ในแนวระนาบหรือสตีเฟเนลในแนวระนาบจะไม่มีผลกระทบต่อ การเคลื่อนที่นอกระนาบหรือค่าสตีเฟเนลนอกระนาบในระดับชิ้นส่วนย่อย

2.6 การหาค่าสตีเฟเนลในระนาบของชิ้นส่วนย่อยชนิด CST (1.4)

สตีเฟเนลในระนาบชนิด CST หาได้จากชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมที่มีฟังก์ชันแทนการเคลื่อนที่ในแนวระนาบ ชนิดเชิงเส้นจำนวน 2 ดีกรีความอิสระต่อจุดข้อ ดังแสดงในรูปที่ 2.2

นั่นก็คือ

$$\{ \delta (x,y) \} = \begin{Bmatrix} u (x,y) \\ v (x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.13)$$

หรือเขียนอยู่ในรูป

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)]\{\alpha\}$$

เมื่อแทนการเคลื่อนที่ที่จุดข้างจะได้

$$\begin{Bmatrix} \{r_{e1}\} \\ \{r_e\} \\ \{r_{e2}\} \\ \{r_{e3}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.14)$$

หรือเขียนอยู่ในรูป

$$\{r_e\} = [A]\{\alpha\} \dots\dots\dots (2.15)$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{r_e\} \dots\dots\dots (2.16)$$

$$\{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] [A]^{-1} \{r_e\} = [N(x,y)] \{r_e\} \dots\dots (2.17)$$

โดยที่

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_3 + x_3y_1 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_3 + x_3y_1 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \dots\dots (2.1)$$

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) \dots\dots\dots(2.19)$$

= 2 x พื้นที่ของชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยม

$$\{r_{ei}\} = \begin{cases} u_i(x_i, y_i) \\ \dots\dots\dots \\ v_i(x_i, y_i) \end{cases} \dots\dots\dots(2.20)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนที่ที่จุดขั้วจะได้ว่า

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \dots\dots(2.21)$$

หรือเขียนอยู่ในรูป

$$\{\epsilon(x,y)\} = [C] \{\alpha\} = [C] [A]^{-1} \{r_e\} = [B] \{r_e\} \dots\dots\dots(2.22)$$

โดยที่

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \dots\dots(2.23)$$

จากความสัมพันธ์ของหน่วยแรง (Stress) และความเครียด (Strain) ในรูปของการเคลื่อนที่ที่จุดขั้วจะได้

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.24)$$

หรือเขียนอยู่ในรูป

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] \{\epsilon(x,y)\} = [D][B]\{r_e\} \dots\dots\dots(2.25)$$

ค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมชนิด CST จะหาได้จาก

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \dots\dots\dots(2.26)$$

ในกรณีของชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยมมีความหนาคงที่จะได้

$$K_e = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2.27)$$



โดยที่

$$\begin{aligned}
k_{11} &= d_{11} (y_2 - y_3)^2 + d_{33} (x_3 - x_2)^2 \\
k_{22} &= d_{22} (x_3 - x_2)^2 + d_{33} (y_2 - y_3)^2 \\
k_{33} &= d_{11} (y_3 - y_1)^2 + d_{33} (x_1 - x_3)^2 \\
k_{44} &= d_{22} (x_1 - x_3)^2 + d_{33} (y_3 - y_1)^2 \\
k_{55} &= d_{11} (y_1 - y_2)^2 + d_{33} (x_2 - x_1)^2 \\
k_{66} &= d_{22} (x_2 - x_1)^2 + d_{33} (y_1 - y_2)^2 \\
k_{12} &= k_{21} = d_{12} (x_3 - x_2) (y_2 - y_3) + d_{33} (x_3 - x_2) (y_2 - y_3) \\
k_{13} &= k_{31} = d_{11} (y_2 - y_3) (y_3 - y_1) + d_{33} (x_3 - x_2) (x_1 - x_3) \\
k_{14} &= k_{41} = d_{12} (x_1 - x_3) (y_2 - y_3) + d_{33} (x_3 - x_2) (y_3 - y_1) \\
k_{15} &= k_{51} = d_{11} (y_1 - y_2) (y_2 - y_3) + d_{33} (x_2 - x_1) (x_3 - x_2) \\
k_{16} &= k_{61} = d_{12} (x_2 - x_1) (y_2 - y_3) + d_{33} (x_3 - x_2) (y_1 - y_2) \\
k_{23} &= k_{32} = d_{12} (y_3 - y_1) (x_3 - x_2) + d_{33} (x_1 - x_3) (y_2 - y_3) \\
k_{24} &= k_{42} = d_{22} (x_3 - x_2) (x_1 - x_3) + d_{33} (y_2 - y_3) (y_3 - y_1) \\
k_{25} &= k_{52} = d_{21} (x_3 - x_2) (y_1 - y_2) + d_{33} (x_2 - x_1) (y_2 - y_3) \\
k_{26} &= k_{62} = d_{22} (x_2 - x_1) (x_3 - x_2) + d_{33} (y_1 - y_2) (y_2 - y_3) \\
k_{34} &= k_{43} = d_{12} (x_1 - x_3) (y_3 - y_1) + d_{33} (x_1 - x_3) (y_3 - y_1) \\
k_{35} &= k_{53} = d_{11} (y_1 - y_2) (y_3 - y_1) + d_{33} (x_1 - x_3) (x_2 - x_1)
\end{aligned}$$

$$k_{36} = k_{63} = d_{12}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + d_{33}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2)$$

$$k_{45} = k_{54} = d_{21}(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$$

$$k_{46} = k_{64} = d_{22}(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + d_{33}(y_1 - y_2)(y_3 - y_1)$$

$$k_5 = k_{65} = d_{12}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2) + d_{33}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

2.7 การหาค่าสติฟเนสในระนาบของชิ้นส่วนย่อยชนิด QM5 (15)

สติฟเนสในระนาบชนิด QM5 หาได้จากชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยมที่มีฟังก์ชันแทนการเคลื่อนที่ ในแนวระนาบชนิด Quadratic จำนวน 2 ดีกรีความอิสระต่อจุดข้อั้วเป็นจำนวน 5 จุดข้อั้ว และมีระบบ แกนพิกัด 2 ระบบคือ Natural Coordinate System ซึ่งมีแกนพิกัด s, t ระบบแกนพิกัดอีกระบบ หนึ่งก็คือ Local Coordinate ซึ่งมีแกนพิกัด x, y ดังแสดงในรูปที่ 2.3 นั่นก็คือ

$$\{\delta(s, t)\} = \begin{Bmatrix} u(s, t) \\ v(s, t) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 h_i \{r_{ei}\} + h_5 \{r_{e5}\} \dots (2.28)$$

$$x = \sum_{i=1}^4 h_i x_i \dots (2.29)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 h_i y_i \dots (2.30)$$

โดยที่

$$h_1 = \frac{1}{4} (1-s) (1-t)$$

$$h_2 = \frac{1}{4} (1+s) (1-t)$$

$$h_3 = \frac{1}{4} (1+s) (1+t)$$

$$h_4 = \frac{1}{4} (1-s) (1+t)$$

$$h_5 = (1-s^2) (1-t^2)$$

$$\{r_{ei}\} = \begin{Bmatrix} u_i (s_i, t_i) \\ v_i (s_i, t_i) \end{Bmatrix}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนที่ที่จุดข้อจะได้ว่า

$$\epsilon_x = u_{,x} = \sum_{i=1}^4 h_{i,x} u_i + h_{5,x} u_5 \dots\dots\dots(2.31)$$

$$\epsilon_y = v_{,y} = \sum_{i=1}^4 h_{i,y} v_i + h_{5,y} v_5 \dots\dots\dots(2.32)$$

$$\epsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \sum_{i=1}^4 h_{i,y} u_i \Big|_{x=y=0} + \sum_{i=1}^4 h_{i,x} v_i \Big|_{x=y=0} \dots\dots\dots(2.33)$$

โดยที่

$$h_{i,x} = h_{i,s} s_{,x} + h_{i,t} t_{,x}$$

$$h_{i,y} = h_{i,s} s_{,y} + h_{i,t} t_{,y}$$

จาก Chain Rule จะเขียนได้ในรูปของ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,s} & y_{,s} \\ x_{,t} & y_{,t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{,x} & t_{,x} \\ s_{,y} & t_{,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.35)$$

นั่นก็คือ

$$\left. \begin{aligned} s',_x &= \frac{1}{J} y',_t \\ t',_x &= \frac{1}{J} y',_s \\ s',_y &= \frac{1}{J} x',_t \\ t',_y &= \frac{1}{J} x',_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.36)$$

โดยที่

$$J = \text{Jacobian determinant}$$

$$J = J(s,t)$$

$$= x',_s y',_t - x',_t y',_s$$

โดยที่

$$x',_s = \sum_{i=1}^4 h_{i,s} x_i$$

$$x',_t = \sum_{i=1}^4 h_{i,t} x_i$$

$$y',_s = \sum_{i=1}^4 h_{i,s} y_i$$

$$y',_t = \sum_{i=1}^4 h_{i,t} y_i$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$[B] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_2 & 0 & R_3 & 0 & R_4 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 & Z_2 & 0 & Z_3 & 0 & Z_4 & 0 & Z_5 \\ Z_6 & R_6 & Z_7 & R_7 & Z_8 & R_8 & Z_9 & R_9 & Z_{10} & R_{10} \end{bmatrix} \dots\dots(2.37)$$

โดยที่

$$\left. \begin{aligned} R_i &= h_{i,x} \\ Z_i &= h_{i,y} \\ R_{i+5} &= R_i \Big|_{s=t=0} \\ Z_{i+5} &= Z_i \Big|_{s=t=0} \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$R_1 = - (x_{24} - x_{34} s - x_{23} t) / 8J$$

$$R_2 = - (-x_{23} + x_{34} s + x_{14} t) / 8J$$

$$R_3 = - (-x_{24} + x_{12} s - x_{14} t) / 8J$$

$$R_4 = - (x_{13} - x_{12} s + x_{23} t) / 8J$$

$$R_5 = 2[(1-s^2) t x_s - (1-t^2) s x_t] / J$$

$$R_6 = -x_{24} / \bar{J}$$

$$R_7 = x_{23} / \bar{J}$$

$$R_8 = x_{24} / \bar{J}$$

$$R_9 = -x_{13} / \bar{J}$$

$$R_{10} = 0$$

$$Z_1 = (y_{24} - y_{34} s - y_{23} t) / 8J$$

$$Z_2 = (-y_{23} + y_{34} s + y_{14} t) / 8J$$

$$Z_3 = (-y_{24} + y_{12} s - y_{14} t) / 8J$$

$$Z_4 = (y_{13} - y_{12} s + y_{23} t) / 8J$$

$$z_5 = -2[(1-s^2)ty_s - (1-t^2)sy_t]/J$$

$$z_6 = y_{24}/\bar{J}$$

$$z_7 = -y_{22}/\bar{J}$$

$$z_8 = -y_{24}/\bar{J}$$

$$z_9 = y_{13}/\bar{J}$$

$$z_{10} = 0$$

โดยมี

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

$$J = \{ (x_{13}y_{24} - x_{24}y_{13}) + s(x_{34}y_{12} - x_{12}y_{34}) + t(x_{23}y_{14} - x_{14}y_{23}) \} / 8$$

$$\bar{J} = J(0,0) = x_{13}y_{24} - x_{24}y_{13}$$

ค่าสคิปเนลของชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยมชนิด QM5 จะหาได้จาก

$$[K_e] = \int_{\text{vol.}} B^T D B dV \dots \dots \dots (2.38)$$

เมื่อชิ้นส่วนย่อยมีความหนา t คงที่จะได้ว่า

$$[K_e] = t \int_{\text{area}} B^T D B dx dy$$

$$[K_e] = t \int_{t=-1}^1 \int_{s=-1}^1 B^T D B J ds dt \dots \dots \dots (2.39)$$

2.8 การหาค่าสติฟเนสของระบบของชิ้นส่วนย่อยชนิด HCT (16)

สติฟเนสของระบบชนิด HCT หาได้จากการแบ่งชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานรูปสามเหลี่ยมออกเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อย (Sub-Element) จำนวน 3 รูป ในแต่ละชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อยนี้จะประกอบด้วยข้อจำนวน 3 จุดข้อ แต่ละจุดข้อจะมีฟังก์ชันแทนการเคลื่อนที่ของระบบชนิด cubic จำนวน 3 ดีกรีความอิสระ รวมเป็นจำนวน 27 ดีกรีความอิสระ ฉะนั้นจึงจำเป็นต้องลดค่าดีกรีความอิสระให้เหลือจำนวน 9 ค่าซึ่งจะกระจายอยู่ตามจุดข้อภายนอกของชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานข้อละ 3 ค่า การลดค่าดีกรีความอิสระจะทำได้โดยอาศัยการประสานเข้ากันได้ภายในชิ้นส่วนย่อย (Internal Compatibility) และยังต้องกำหนดให้มีการประสานเข้ากันได้ของ normal slope ที่จุดกึ่งกลางด้านร่วมของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อย (Sub-Element) ในแต่ละรูปดังแสดงในรูปที่ 2.4 หลังจากนี้จึงทำตามขั้นตอนในหัวข้อ 2.3 ซึ่งจะเขียนเป็นรูปสมการดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(c)} &= \{1, x_3, y_3, x_3^2, x_3 y_3, y_3^2, x_3^3, x_3^2 y_3, y_3^3\} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_9 \end{Bmatrix} \\ \bar{w}^{(a)} &= \{1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1^3, x_1^2 y_1, y_1^3\} \begin{Bmatrix} \alpha_{10} \\ \vdots \\ \alpha_{18} \end{Bmatrix} \\ \bar{w}^{(b)} &= \{1, x_2, y_2, x_2^2, x_2 y_2, y_2^2, x_2^3, x_2^2 y_2, y_2^3\} \begin{Bmatrix} \alpha_{19} \\ \vdots \\ \alpha_{27} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{\bar{\delta}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \bar{w}(x, y) \\ \bar{\theta}_x(x, y) \\ \bar{\theta}_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & xy^2 & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & 2xy & 3y^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & y^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{9m-8} \\ \vdots \\ \alpha_{9m} \end{Bmatrix}, m=1, 3$$

หรือเขียนอยู่ในรูป

$$\{\bar{\delta}(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\}$$

เมื่อแทนค่าการเคลื่อนที่ที่จุดข้อ i ของชิ้นส่วนย่อย c พร้อมกับเปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่ที่จุดข้อให้สอดคล้องกับระบบแกนพิกัดของชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \{r_{ei}\}^{(c)} &= [T]^{(c)} \{\bar{r}_{ei}\}^{(c)} \\ &= [T]^{(c)} \left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_i(x,y) \\ \bar{\theta}_{xi}(x,y) \\ \bar{\theta}_{yi}(x,y) \end{array} \right\}^{(c)} \\ &= [T]^{(c)} \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3 y_3^2 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & 2x_3 y_3 & 3y_3^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_3 & y_3 & 0 & 3x_3^2 & y_3^2 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_9 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

เมื่อ $[T]^{(c)}$ = เมทริกซ์แปรเปลี่ยน (Transformation Matrix) ของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม
 ย่อย c จากระบบแกนพิกัดระดับชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานไปยังชิ้นส่วนสามเหลี่ยมย่อย c

หรือเขียนอยู่ในรูป

$$\{r_{ei}\}^{(c)} = [A_i]^{(c)} \{\alpha_c\} \dots \dots \dots (2.40)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} \{r_{ej}\}^{(c)} &= [A_j]^{(c)} \{\alpha_c\} \quad , \quad \{r_{eo}\}^{(c)} = [A_o]^{(c)} \{\alpha_c\} \\ \{r_{ej}\}^{(a)} &= [A_j]^{(a)} \{\alpha_a\} \quad , \quad \{r_{ek}\}^{(a)} = [A_k]^{(a)} \{\alpha_a\} \\ \{r_{eo}\}^{(a)} &= [A_o]^{(a)} \{\alpha_a\} \\ \{r_{ek}\}^{(b)} &= [A_k]^{(b)} \{\alpha_b\} \quad , \quad \{r_{ei}\}^{(b)} = [A_i]^{(b)} \{\alpha_b\} \\ \{r_{eo}\}^{(b)} &= [A_o]^{(b)} \{\alpha_b\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2.41)$$

จากสภาพการประสานเข้ากันได้ (Compatibility Conditions) ของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} r_{ei} \\ r_{ej} \\ r_{ek} \\ r_{ei}^c \\ r_{ej}^a \\ r_{ek}^b \\ r_{eo}^a \\ r_{eo}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ei}^c \\ r_{ej}^a \\ r_{ek}^b \\ r_{ei}^b \\ \dots \\ r_{ej}^c \\ r_{ek}^a \\ r_{eo}^b \\ r_{eo}^c \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Normal slope ที่จุดกึ่งกลางด้านร่วมของสามเหลี่ยมย่อย (Sub-Element) สามารถเขียนได้

ในรูป

$$\left. \begin{aligned} (w,n)_t^c &\equiv r_t^c = A_t^c d_c, & (w,n)_u^c &\equiv r_u^c = A_u^c d_c \\ (w,n)_u^a &\equiv r_u^a = A_u^a d_a, & (w,n)_v^a &\equiv r_v^a = A_v^a d_a \\ (w,n)_v^b &\equiv r_v^b = A_v^b d_b, & (w,n)_t^b &\equiv r_t^b = A_t^b d_b \end{aligned} \right\} \dots (2.43)$$

จากการ Constrain Normal Slope จะได้

$$\begin{bmatrix} r_t^c \\ r_u^a \\ r_v^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_t^b \\ r_u^c \\ r_v^a \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

จากชุดของสมการ 2.40, 2.41, 2.42, 2.43 และ 2.44 จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} r_{ei} \\ r_{ej} \\ r_{ek} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_i^c \\ A_j^a & 0 & 0 \\ 0 & A_k^b & 0 \\ 0 & -A_i^b & A_i^c \\ A_j^a & 0 & -A_j^c \\ -A_k^a & A_k^b & 0 \\ 0 & A_o^b & -A_o^c \\ A_o^a & -A_o^b & 0 \\ 0 & -A_t^b & A_t^c \\ A_u^a & 0 & -A_u^c \\ -A_v^a & A_v^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_a \\ d_b \\ d_c \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.45)$$

จากสมการ 2.45 จะเขียนได้ในรูป

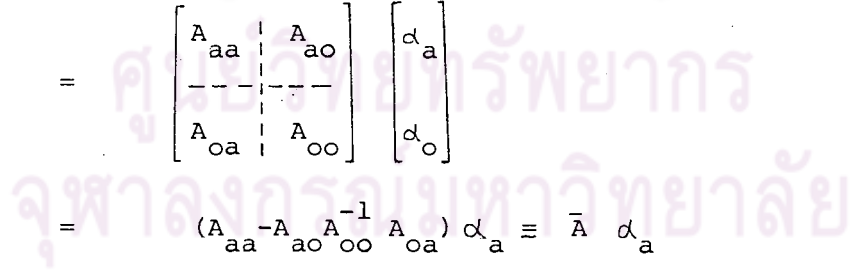
$$\begin{bmatrix} r_e \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ao} \\ \dots & \dots \\ A_{oa} & A_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_a \\ d_o \end{bmatrix}$$

$$r_e = (A_{aa} - A_{ao} A_{oo}^{-1} A_{oa}) d_a \equiv \bar{A} d_a$$

$$d_a = \bar{A}^{-1} r_e$$

$$0 = A_{oa} d_a + A_{oo} d_o$$

$$d_o = -A_{oo}^{-1} A_{oa} d_a$$



$$\begin{Bmatrix} \alpha_a \\ \alpha_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}^{-1} \\ -A_{oo}^{-1} A_{oa} \bar{A}^{-1} \end{bmatrix} r_e = \bar{A}^{-1} r_e \dots\dots\dots (2.46)$$

$$E = B \alpha$$

$$\sigma = DB \alpha$$

$$\bar{k} = \int B^T DB dV$$

ค่าสถิติ เหนสของชั้นส่วนย่อยในรูปของการเคลื่อนที่ที่จุดขั้วจะมีค่าดังนี้

$$k = (\bar{A}^{-1})^T \bar{k} (A^{-1}) \dots\dots\dots (2.47)$$

2.9 การหาค่าสถิติ เหนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกน Z

การกำหนดการเคลื่อนที่และจำนวนค่าดิกรีความอิสระที่จุดขั้วของชั้นส่วนย่อยเพื่อใช้วิเคราะห์โครงสร้างนั้นย่อมขึ้นอยู่กับลักษณะของแต่ละปัญหา ในกรณีของโครงสร้างแผ่นพื้น (Plate Structure) บนระนาบเดียวกัน ค่าดิกรีความอิสระตัวที่ 6 หรือค่าการหมุนรอบแกน Z มีค่าเป็นศูนย์ เป็นผลให้จุดขั้วแต่ละจุดมีดิกรีความอิสระ 5 ค่า ก็เป็นการเพียงพอแล้ว แต่ในกรณีของโครงสร้างแผ่นพับหรือโครงสร้างเปลือกบางชั้นส่วนย่อยพื้นฐานที่มาประกอบกันไม่อยู่ในระนาบเดียวกัน ค่าการหมุนรอบแกน Z จึงปรากฏขึ้น เพื่อเป็นการขจัดปัญหาดังกล่าวจึงทำการเพิ่มค่าดิกรีความอิสระตัวที่ 6 หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือการเพิ่มค่าสถิติ เหนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกน Z

ค่าดิกรีความอิสระตัวที่ 6 นี้เกิดจากความแตกต่างของหน่วยแรงเฉือนในระนาบอันมีผลทำให้เกิดโมเมนต์บิดซึ่งมีค่า เป็นฟังก์ชันกับโมดูลัสยืดหยุ่น (E) ความหนาของชั้นส่วนย่อย (t) และพื้นที่ของชั้นส่วนย่อย (A) ดังนั้นในการเพิ่มค่าสถิติ เหนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกน Z นี้ จะกระทำที่สถานะสมดุลในระดับชั้นส่วนย่อยยังคงสภาพอยู่ และเป็นฟังก์ชันกับค่า $\alpha E t A$ โดยมี α เป็นสัมประสิทธิ์ตัวแปรที่มีค่าน้อยเพียงพอที่จะไม่ทำให้ค่าสถิติ เหนสที่สอดคล้องกับการหมุนรอบแกน Z ที่เพิ่มขึ้นนี้มีผลกระทบต่อค่าสถิติ เหนสที่สอดคล้องกับดิกรีความอิสระตัวอื่นในกรณีที่โครงสร้างนั้นไม่อยู่ในระนาบเดียวกัน และ จะต้องมียุคค่ามากเพียงพอที่จะไม่เกินขีดความสามารถของคอมพิวเตอร์ที่ใช้ โดยจะเพิ่มค่าสถิติ เหนสตัวที่ 6 ตามวิธีการของ Zeinkiewicz (9,17) กล่าวคือ

ในชั้นส่วนย่อยสามเหลี่ยมจะเพิ่ม

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \alpha EtA \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.48)$$

ในชั้นส่วนย่อยสี่เหลี่ยมจะเพิ่ม

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \\ M_{z4} \end{Bmatrix} = \alpha EtA \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.49)$$

โดยที่

E = Young's Modulus

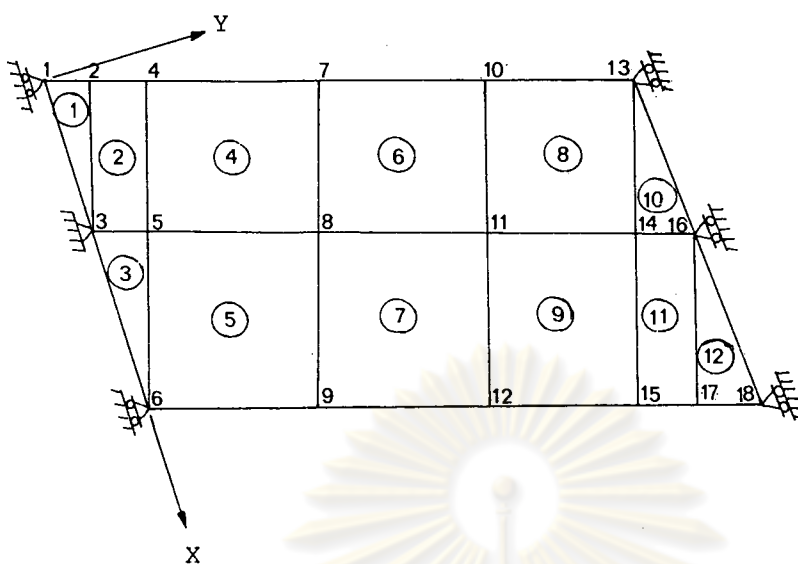
A = พื้นที่ของชั้นส่วนย่อย

t = ความหนาของชั้นส่วนย่อย

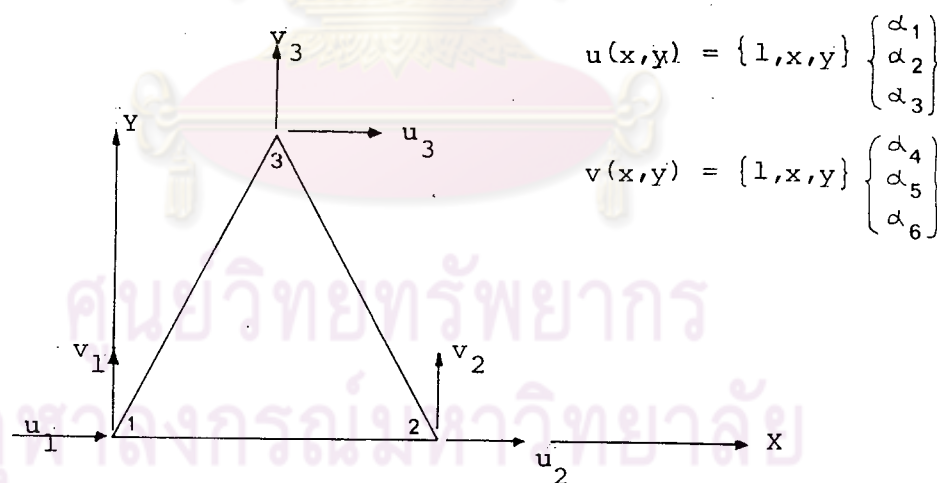
α = สัมประสิทธิ์ตัวแปร

ดังแสดงในรูปที่ 2.5

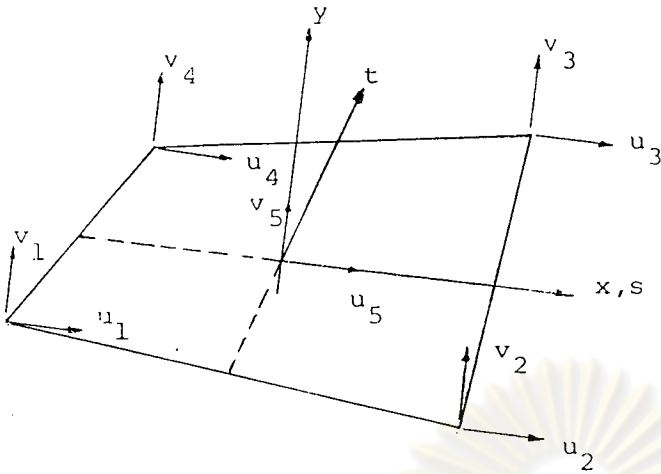
ตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ตัวแปร เป็นโครงสร้างเปลือกบาง (Thin Cylindrical Shell) ดังแสดงในรูปที่ 2.6 ในการศึกษาเพื่อหาผลอันเนื่องมาจากการเพิ่มค่าดิกิริความอิสระตัวที่ 6 หรือการเพิ่มค่าสตีเฟเนสเนื่องจากการหมุนรอบแกนตั้งฉากกับผิว โครงสร้างจะทำโดยการกำหนดให้สัมประสิทธิ์ตัวแปร α มีค่าต่าง ๆ กันแล้วนำค่าการเคลื่อนที่ในแนวตั้งที่กึ่งกลางช่วงความยาวบนด้านปลายอิสระที่ได้มา เปรียบเทียบกับทฤษฎี Shallow Shell (18) ดังแสดงในรูปที่ 2.7 จากการเปรียบเทียบจะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ตัวแปร α ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.001 จะให้ค่าผลลัพธ์ใกล้เคียงกับทฤษฎี Shallow Shell (18) ดังนั้นในการศึกษาพฤติกรรมของสะพานแบบม็อกซ์เกอร์เคอร์ปลายเฉียงจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์ตัวแปร $\alpha = 0.001$



รูปที่ 2.1 แสดงการแบ่งชิ้นส่วนย่อยและการเลือกแกนพิกัดจากระดับโครงสร้างที่เหมาะสม.



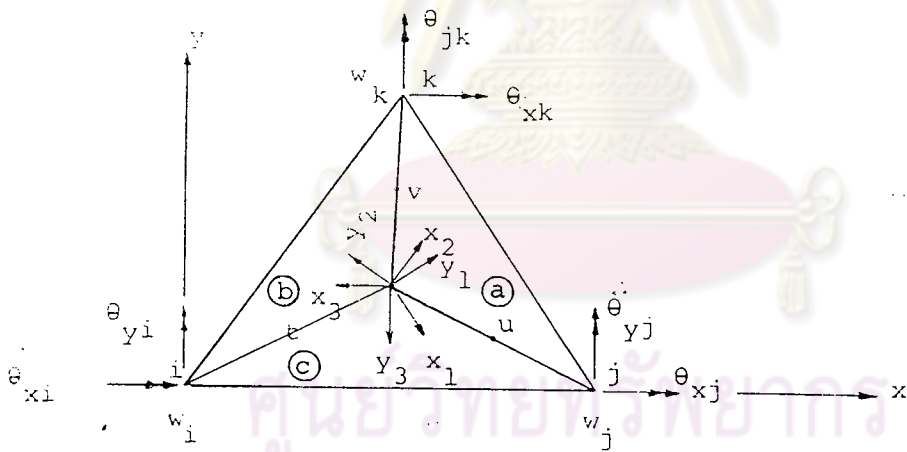
รูปที่ 2.2 ชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานรูปสามเหลี่ยมชนิด CST



$$u = a_0 + a_1 s + a_2 t + a_3 s t + a_4 (1-s^2)(1-t^2)$$

$$v = b_0 + b_1 s + b_2 t + b_3 s t + b_4 (1-s^2)(1-t^2)$$

รูปที่ 2.3 ชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานรูปสี่เหลี่ยมชนิด QM5

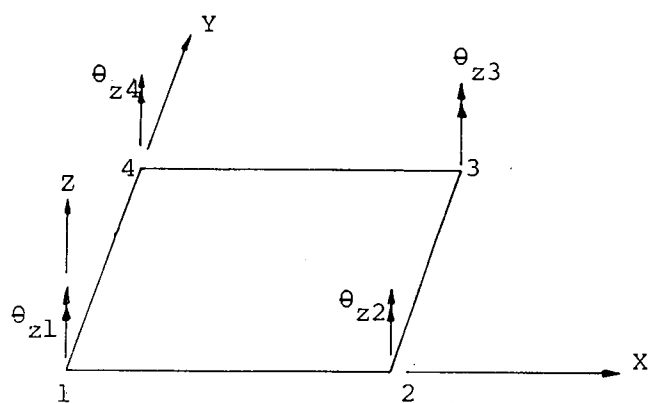


$$w^{(c)} = \{ 1, x_3, y_3, x_3^2, x_3 y_3, y_3^2, x_3^3, x_3^2 y_3, y_3^3 \} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_9 \end{Bmatrix}$$

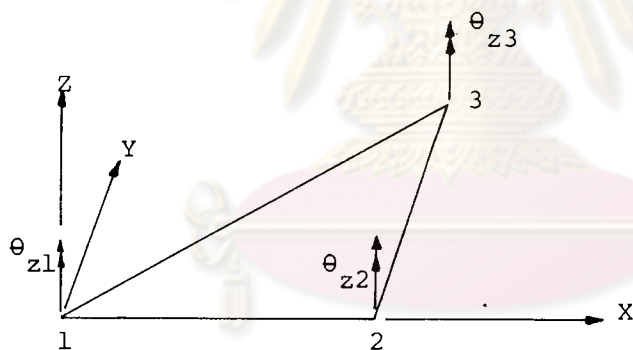
$$w^{(a)} = \{ 1, x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1^3, x_1^2 y_1, y_1^3 \} \begin{Bmatrix} \alpha_{10} \\ \vdots \\ \alpha_{18} \end{Bmatrix}$$

$$w^{(b)} = \{ 1, x_2, y_2, x_2^2, x_2 y_2, y_2^2, x_2^3, x_2^2 y_2, y_2^3 \} \begin{Bmatrix} \alpha_{19} \\ \vdots \\ \alpha_{27} \end{Bmatrix}$$

รูปที่ 2.4 ชิ้นส่วนย่อยพื้นฐานรูปสามเหลี่ยมชนิด HCT

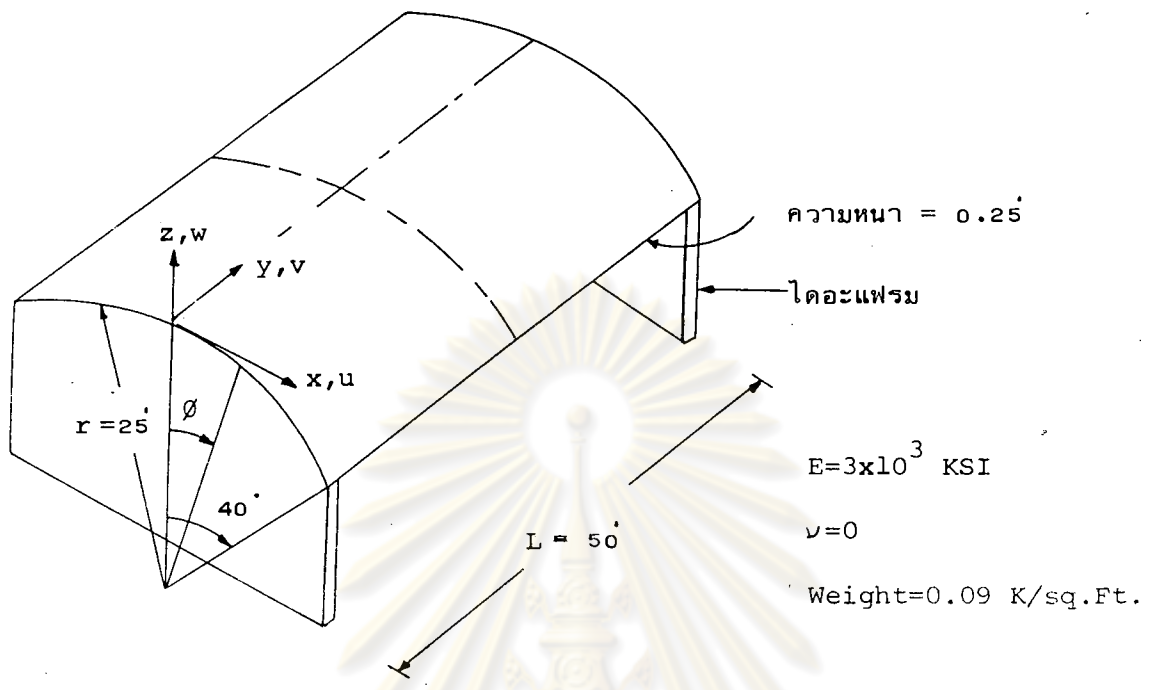


(a) ชิ้นส่วนย่อยรูปสี่เหลี่ยม

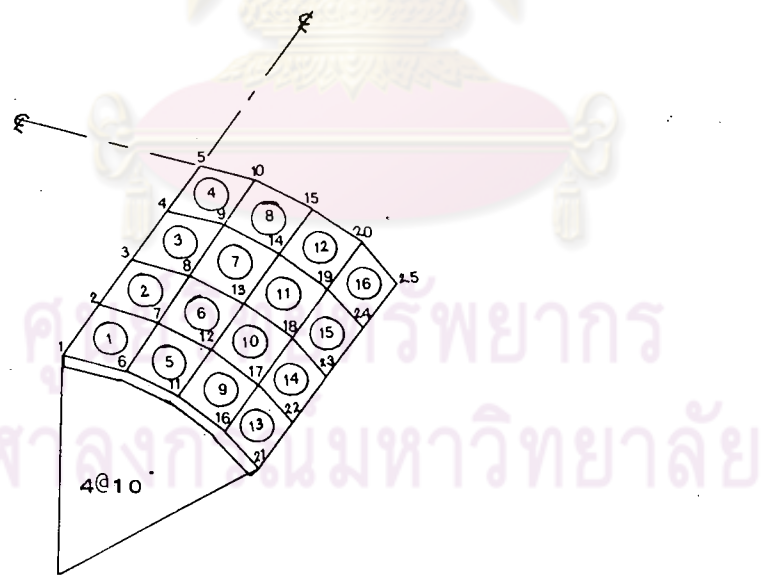


(b) ชิ้นส่วนย่อยรูปสามเหลี่ยม

รูปที่ 2.5 แสดงค่าดิกรีความอิสระตัวที่ 6



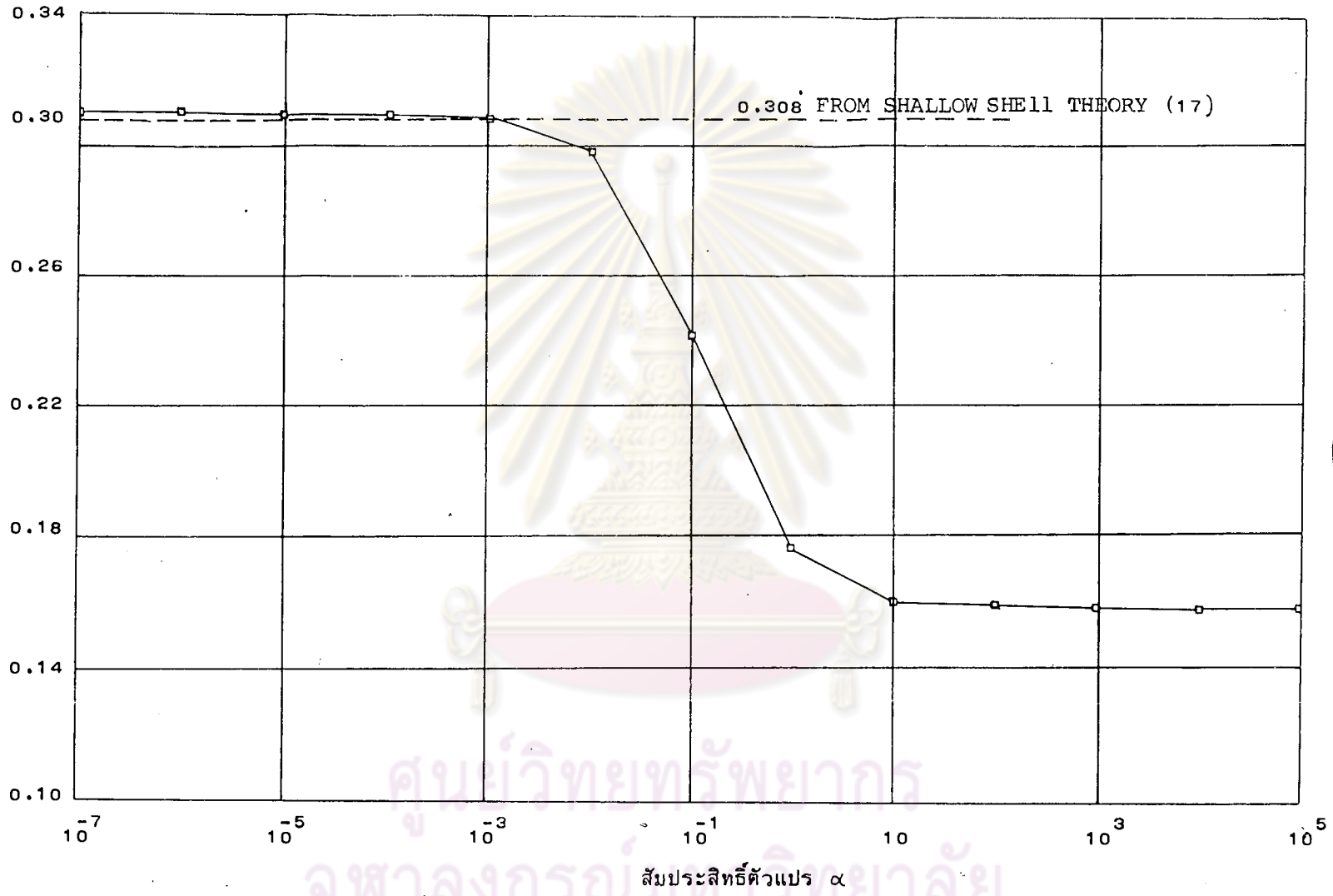
รูป (ก)



รูป (ข)

รูปที่ 2.6 แสดงโครงสร้างเปลือกบาง (Thin Cylindrical Shell) และการแบ่งชิ้นส่วนย่อย

ค่าระยะการโก่งตัวในแนวตั้งที่จุดกึ่งกลางของบ่ออิสระ (ฟุต)



รูปที่ 2.7 แสดงผลกระทบของสตีฟเนสที่สอดคล้องกับคิรีความอิสระตัวที่ 6 ซึ่งมีต่อโครงสร้างเปลือกบาง