การวิเคราะห์ทางคิเนแมติกส์และไดนามิกส์ของแขนกล PA10-7C

นายณัฐศร พรหมเพ็ชร

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

KINEMATICS AND DYNAMICS ANALYSIS OF THE PA10-7C MANIPULATOR ARM.

Mr.Nattasorn Prompetch

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2007

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวิเคราะห์ทางคิเนแมติกส์และไดนามิกส์ของแขนกล PA10-7C
โดย นายณัฐศร พรหมเพ็ชร
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ชัยโรจน์ คุณพนิชกิจ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์
(รองศาสตราจารย์ ดร.วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.รัชทิน จันทร์เจริญ)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิทยา วัณณสุโภประสิทธิ์)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ณัฐศร พรหมเพ็ชร : การวิเคราะห์ทางคิเนแมติกส์และไดนามิกส์ของแขนกล PA10-7C. (KINEMATICS AND DYNAMICS ANALYSIS OF THE PA10-7C MANIPULATOR ARM.) อ. ที่ปรึกษา : รศ.ดร.วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ, 89หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นการวิเคราะห์ทางคิเนแมติกส์และไดนามิกส์ของแขนกลที่มีข้อต่อลักษณะข้อต่อหมุนเพิ่มขึ้นมาจากแขนกลปกติที่ใช้กันอย่างแพร่หลายเป็นแขนกลที่มีข้อต่อเป็นเจ็ดข้อต่อเพื่อเพิ่มความสามารถของแขนกลปกติมากขึ้นในหลายๆด้าน โดยมีพื้นฐานของความต้องการ 4 อย่าง คือ 1) การเคลื่อนที่หลบหลีกจุดที่จะทำให้เกิด singularity 2) มีลักษณะการออกแบบทางกลที่มีเสถียรภาพ 3) ง่ายต่อการหาสมการทางคิเนแมติกส์ และ 4) ไม่ทำให้ศูนย์เสียพื้นที่การทำงานไป โดยวิทยานิพนธ์นี้จะใช้วิธีการเพิ่มแกนหมุนอิสระระหว่างส่วนปลายแขนและส่วนแกนเฟรมอ้างอิง 0 ขึ้นมาเพื่อให้สามารถเลือกการเคลื่อนที่ได้หลากหลายผ่านแกนอิสระนี้เพื่อสามารถหลบหลีกปัญหาข้างต้นได้ โดยได้ทำการวิเคราะห์หาสมการ ฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ อินเวิร์สคิเนแมติกส์ สมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว เพื่อให้สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งและความเร็วของการเคลื่อนที่ที่ปลายแขนมายังแต่ละข้อต่อแกนได้ และยังทำการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ไว้ด้วย โดยการวิเคราะห์นี้จะเป็นการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์แขนกลที่มีลักษณะการตั้งแกนแบบ spherical wrist หรือ zero joint offsets ซึ่งเป็นลักษณะการตั้งแกนแบบเดียวกับแขนกล Mitsubishi Heavy Industries PA10-7C ซึ่งใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

วิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองความถูกต้องของสมการทางคิเนแมติกส์ซึ่งประกอบด้วย สมการฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ สมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ และ สมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว ด้วยวิธีการจำลองการเคลื่อนที่(simulation) และ ทดสอบจริงกับหุ่นยนต์ PA10-7C ซึ่งผลการทดลองในลักษณะต่างๆสรุปได้ว่าสมการที่ได้วิเคราะห์มานั้นสามารถใช้ในการควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนกลในลักษณะดังกล่าวได้อย่างถูกต้อง และ ในส่วนการวิเคราะห์ทางไดนามิกส์ ได้แสดงความถูกต้องของสมการการเคลื่อนที่จากคุณสมบัติความเป็น skew symmetric matrix ของสมการ $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})-2\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ ทำให้ทราบว่าสมการการเคลื่อนที่นั้นมีโครงสร้างที่ถูกต้อง และ ได้ตรวจสอบความมีเสถียรภาพของสมการโดยการจำลองเส้นทางการเคลื่อนที่ส่งไปยังสมการการเคลื่อนที่เพื่อคำนวณค่าแรงบิดของแต่ละข้อต่อเพื่อแสดงให้เห็นความเสถียรของสมการการเคลื่อนที่

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต: ณัฐศร

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา: วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ

ปีการศึกษา 2550

4770596021 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEY WORD: PA10-7C / INVERSE KINEMATIC / DYNAMIC / 7 DOF ROBOT / MANIPULATE

NATTASORN PROMPETCH : KINEMATICS AND DYNAMICS ANALYSIS OF THE PA10-7C MANIPULATOR ARM. THESIS ADVISOR: ASSOC.PROF. VIBOON SANGVERAPHUNSIRI, 89 pp.

This thesis presents an analysis of kinematics and dynamics of an anthropomorphic seven degree-of-freedom serial link spatial manipulator with revolute joints. For mechanical reliability, singularities needed to be evaluated for the manipulator. Coordinate is assigned at each joint so that a kinematic simplicity is obtained without loss of the workspace. The redundancy is parameterized by a scalar variable which corresponds to the angle between the arm plane and a reference plane. This redundancy can be used to overcome obstructions along a desired path. Analysis of forward and inverse kinematics is used to evaluate the relationship between joint angles and end-effector positions based on working coordinate system and vice versa. And the mapping between the joint velocity and end-effector velocity based on working coordinate system are described by the derived augmented Jacobian matrix. We also derive the dynamic model of the manipulator arm. All the derivations are done for the seven-DOF manipulator arm with a spherical wrist and zero joint offsets, the PA10-7C Mitsubishi Heavy industries manipulator arm.

The purposed of the experiments are to ensure the accuracy of the derived equations both kinematics and dynamic equations. By comparing simulation results from the PA10-7C with the derived kinematics: the forward equations, the inverse equations, and the Jacobian matrix based on the joint coordinate system and the working coordinate system, We can show that, from the end-effector motions, the comparisons are very close. For correctness of the derived dynamic model, we can guarantee the skew symmetric matrix of the matrix $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})-2\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ and also by investigate result motions by solving the dynamic model when joints motion is specified.

Department Mechanical Engineering Student's signature ....

Field of study Mechanical Engineering Advisor's signature ....

Academic year 2007

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของ รศ.ดร. วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้กรุณาสละเวลาอันมีค่าของท่านเพื่อให้คำแนะนำปรึกษาและข้อคิดเห็นต่าง ๆ ในการวิจัยครั้งนี้ พร้อมทั้งจัดหาทุน และอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำวิทยานิพนธ์นี้มาให้โดยตลอด ขอขอบคุณบัณฑิตวิทยาลัยที่ได้ให้ทุนอุดหนุนการวิจัย ขอขอบคุณ คุณกรรมมันต์ ชูประเสริฐ ที่ให้คำแนะนำในการใช้งานโปรแกรมsolid work ขอขอบคุณ คุณกฤษณะ อุตมัง และ คุณพงศกร เพชรพันธ์ศรี ที่ให้คำแนะนำในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ และขอขอบคุณ เพื่อนนักศึกษา รุ่นพี่ รุ่นน้อง ทั้งในระดับปริญญาเอก และปริญญาโท ที่ได้ร่วมกันให้ข้อคิดเห็น และข้อเสนอแนะต่างๆ พร้อมทั้งยังได้ให้กำลังใจที่ดีๆ แก่กันเสมอมา

สุดท้ายนี้ วิทยานิพนธ์และงานวิจัยนี้คงจะไม่มีทางประสบผลสำเร็จลงได้ ถ้าหากขาดความช่วยเหลือจากบิดามารดาในทุกๆ ด้าน ไม่ว่าจะเป็นทางด้านเงินทุน ข้อคิดเห็นต่างๆ รวมทั้งกำลังใจและความห่วงใยที่อบอุ่นยิ่งที่มีให้แก่ผู้เขียนเสมอมา ในโอกาสนี้ผู้วิจัยจึงใคร่ขอกรอบขอบพระคุณบิดา-มารดา ที่ได้อบรมเลี้ยงดู ให้กำลังใจและให้การสนับสนุนในทุกๆ สิ่งให้แก่ผู้เขียนจนสามารถสำเร็จการศึกษาลงได้ด้วยดี

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญตาราง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

ภาพประกอบ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์

เป็นเวลานานแล้วที่มนุษย์พยายามที่จะประดิษฐ์นวัตกรรมใหม่ๆ เพื่อที่จะนำมาใช้งานแทนแรงงานมนุษย์เพื่อวัตถุประสงค์หลายอย่าง จากแนวคิดข้างต้นนี้ จึงมีการสร้างเครื่องจักรที่สามารถทำงานคล้ายคนหรือหุ่นยนต์มาใช้แทนแรงงานมนุษย์ เนื่องด้วยศักยภาพทั้งในด้านกำลัง ความอดทน ความแม่นยำในการทำงาน ความสามารถทำงานในสภาพแวดล้อมที่ไม่เหมาะกับคน และความสามารถในการทำงานต่าง ๆ ตามโปรแกรมที่ใช้ในการสั่งงานเพื่อให้หุ่นยนต์สามารถทำงานแทนมนุษย์ได้ดีขึ้นเรื่อยๆ แต่เดิมหุ่นยนต์จะทำงานที่มีลักษณะเป็นแบบซ้ำเดิมที่ได้รับการสอนมา เช่น งานยกและวางของ (pick and place) ภายหลังความสามารถในการโปรแกรมได้ทำให้หุ่นยนต์มีความยืดหยุ่นในการทำงานมากขึ้น โดยการพัฒนาได้มุ่งไปทั้งในด้านการออกแบบกลไกทาง (mechanics) และเพื่อให้หุ่นยนต์สามารถเข้าถึงพื้นที่การทำงานได้ในตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการได้ในทุกทิศทุกทาง ดังนั้นหุ่นยนต์แบบ 5 แกน เช่น หุ่น Yasukawa Motoman L-3 และหุ่นยนต์ 6 แกน เช่น PUMA จึงเป็นที่นิยมใช้ในการกระบวนการผลิตและใช้งานในภาคอุตสาหกรรมมาก

ปัจจุบันการใช้งานหุ่นยนต์มีความหลากหลายและผู้ใช้มีความต้องการความสามารถในการเข้าถึงตำแหน่งที่ต้องการ (Workspace หรือ working area) มากขึ้น โดยเฉพาะเมื่อมีสิ่งกีดขวางเข้ามาขวางทางเคลื่อนที่ ดังนั้น ด้วยข้อจำกัดของหุ่นยนต์แบบ 5 แกนและ 6 แกน ซึ่งเป็นที่นิยมใช้กันในอุตสาหกรรมจึงไม่เหมาะกับการใช้งานเท่าไรนัก ได้มีงานวิจัยหลายๆ เรื่องที่พยายามจะออกแบบหุ่นยนต์เพื่อให้มีความสามารถในการหลีกเลี่ยงและแก้ปัญหาเหล่านี้ คือ

1. เพิ่มความสามารถในการจัดการการเคลื่อนที่ผ่านจุด singularity เนื่องจากมีความสามารถในการเลือกลักษณะการเคลื่อนที่ของแขนกลได้หลากหลาย

2. หลีกเลี่ยงการเคลื่อนที่ชนกันเองของแขนกลหรือหลีกเลี่ยงการชนกับสิ่งกีดขวาง (collision avoidance)

3. ออกแบบกลไกทางกลที่เอื้อประโยชน์ในการใช้งานและควบคุม (enhancement of mechanical advantage)

4. ออกแบบเพื่อให้สามารถเคลื่อนที่ดีมากขึ้น (manipulability enhancement) คือ มีความสามารถในการเคลื่อนจุดต่อแต่ละจุดต่อได้หลากหลายมากขึ้น

5. ออกแบบเพื่อให้เพิ่มสมรรถนะในการทำงาน (subtask performance)

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้น จึงได้มีการวิจัย[6] และพัฒนาหุ่นยนต์เพื่อลดปัญหาดังกล่าว โดยแนวคิดที่มีการนำเสนอและค่อนข้างมีผู้ให้ความสนใจคือการออกแบบหุ่นยนต์ให้มีจุดต่อมากกว่า 6 จุดต่อหรือที่เรียกว่า redundant robot เช่น การเพิ่มแกนพิเศษขึ้นมาเป็นแกนที่ 7 (redundant axis) เพื่อเพิ่มความยืดหยุ่นในการเข้าถึงจุดที่ต้องการหรือเข้าไปในจุดที่เป็น Singularity ได้ดีขึ้น

เนื่องจากเริ่มมีผู้สนใจศึกษาการนำแขนกลที่มีจุดต่อมากกว่า 6 หรือ redundant robot มาใช้มากขึ้น ดังนั้นจึงมีความสำคัญอย่างยิ่งที่จะต้องพัฒนาองค์ความรู้ในด้านนี้ให้มากขึ้น เพื่อให้สามารถนำแขนกลนี้ไปประยุกต์ใช้ในงานอุตสาหกรรมขั้นสูงและงานวิจัยอื่น ๆ ต่อไป เช่น นำไปใช้กับระบบ visual tracking moving target หรือ การนำไปประยุกต์กับระบบ force sensor และ อื่น ๆ อีกมากมาย

วิทยานิพนธ์นี้จึงทำการศึกษาระบบ คิเนแมติกส์ และ ไดนามิกส์ ของแขนหุ่นยนต์ประเภท redundant robot โดยจะครอบคลุมการหาสมการฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ อินเวิร์สคิเนแมติกส์ จาโคเบียน และ สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ เพื่อหาพารามิเตอร์ที่จำเป็น เช่น ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแต่ละจุดต่อ น้ำหนักของแต่ละจุดต่อ เป็นต้น เพื่อไปประยุกต์ใช้ต่องานวิจัยขั้นสูงในอนาคตต่อไป โดยจะใช้หุ่นยนต์แขนกล Mitsubishi heavy industries ltd. รุ่น PA10-7C ในงานวิจัย

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

เพื่อหาสมการทางด้าน คิเนแมติกส์ และ ไดนามิกส์ และพารามิเตอร์ที่จำเป็น เช่น ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแต่ละจุดต่อ น้ำหนักของแต่ละจุดต่อที่เกี่ยวข้องต่อการควบคุมการทำงานของหุ่นยนต์ประเภท redundant robot โดยใช้แขนกลต้นแบบคือ PA10-7C เพื่อให้สามารถที่จะนำแขนกลนี้ไปประยุกต์ใช้ในงานวิจัยขั้นสูงอื่นๆ ต่อไป

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. หาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ประกอบด้วย

ก. การวิเคราะห์สมการฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ (forword kinematics)

ข. การวิเคราะห์สมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ (inverse kinematics)

ค. การวิเคราะห์สมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วระหว่างตัวแปร joint coordinate และตัวแปร cartesian coordinate หรือการหาสมการจาโคเบียน (jacobian)

ง. การวิเคราะห์หาสมการการเคลื่อนที่ (dynamic model)

2. ทดลองการเคลื่อนที่ของแขนกลด้วยการจำลองการเคลื่อนที่ (simulation) เพื่อตรวจสอบสมการและค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่หาสามารถควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนกลได้จริง

3. ทดสอบการทำงานกับแขนกล PA10-7C โดยทำการทดลองสร้างโปรแกรมควบคุมการเคลื่อนที่จริงจากสมการคิเนแมติกส์และไดนามิกส์ที่หาได้ กับแขนกล PA10-7C โดยใช้ภาษาซีพลัสพลัส (C++) และโปรแกรมบนระบบปฏิบัติการวินโดวส์ด้วย Microsoft® Visual C++

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับ

1. ได้วิธีการในการวิเคราะห์หาสมการทางด้าน คิเนแมติกส์ และ ไดนามิกส์ของแขนกลประเภท redundant

2. สามารถตรวจสอบการใช้งานจริงกับแขนกล redundant เพื่อแสดงถึงประสิทธิภาพในการใช้งานจริง โดยใช้แขนกล PA10-7C

3. สามารถแสดงให้เห็นถึงความสามารถและความหลากหลายในการเข้าถึงพื้นที่ที่จำกัดซึ่งแขนกลแบบ 6 จุดต่อทำไม่ได้ เช่น การเคลื่อนที่ผ่านจุด singularity การเคลื่อนที่ผ่านสิ่งกีดขวาง เป็นต้น

4. เป็นพื้นฐานความรู้ในการวิจัยขั้นสูงและการพัฒนาเพื่อนำไปใช้กับแขนกลแบบ redundant โดยใช้แขนกล PA10-7C เป็นมาตรฐาน เช่น การนำไปใช้กับระบบ visual tracking moving target โดยพัฒนานำระบบการมองเห็นมาใช้ร่วมกับแขนกล PA10-7C

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

การดำเนินงานวิทยานิพนธ์แบ่งออกเป็น 7 ขั้นตอนหลักคือ

1. ศึกษาลักษณะเฉพาะ (property) ต่างๆของแขนกล PA10-7C เช่น ความสามารถในการควบคุมแขนกลดังกล่าวผ่าน controller ที่มีมาว่าสามารถควบคุมได้มากน้อยเพียงใด และ สามารถที่จะควบคุมแขนกลได้ด้วยโปรแกรม Visual C++ ได้อย่างไรเพียงใด

2. ศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับการหาสมการเพื่อควบคุมแขนกลแบบ redundant และนำมาประยุกต์กับแขนกลแบบ 7 แกน

3. หาสมการฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ อินเวิร์สคิเนแมติกส์ จาโคเบียน และสมการการเคลื่อนที่ของแขนกลแบบ redundant robot เพื่อใช้ในการควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C

4. วิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ (parameters) ที่จำเป็นโดยใช้โปรแกรม CAD ได้แก่ โปรแกรม Catia เช่นหาค่า มวล และ moment of inertia

5. จำลองการเคลื่อนที่ด้วยคอมพิวเตอร์และใช้โปรแกรม Matlab/Simulink ร่วมกับ Matlab robotic toolbox

6. ทดสอบการทำงานจริง โดยทำการทดลองสร้างโปรแกรมควบคุมการเคลื่อนที่จริงจากสมการคิเนแมติกส์และไดนามิกส์ที่หาได้ กับแขนกล PA10-7C โดยใช้ภาษาซีพลัสพลัส (C++) และโปรแกรมบนระบบปฏิบัติการวินโดวส์ด้วย Microsoft® Visual C++ และ ปรับปรุงแก้ไขโปรแกรม

7. สรุปผลการวิจัยและพิมพ์วิทยานิพนธ์ฉบับสมบูรณ์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2
ทฤษฎีพื้นฐานและแนวคิดพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับแขนกล 7 แกน

2.1 แนวคิดในการเลือกตำแหน่งแกนที่ 7 (redundant axis)[1]

ได้มีการพิจารณาตำแหน่งของจุดต่อที่ 7 (redundant axis) ลงบนแขนกล 6 แกนแบบมาตรฐานดังรูปที่ 2.1 คือ แบบจุดต่อหมุน (revolute joint) ทั้ง 6 จุดต่อโดยได้มีการทดลองหาตำแหน่งที่เหมาะสมในลักษณะต่างๆ โดยวิเคราะห์สิ่งที่จำเป็นต่อการเคลื่อนที่ 4 สิ่ง ดังนี้

1. ต้องสามารถกำจัดการกับตำแหน่งที่จะทำให้เกิดการศูนย์เสียความสามารถในการเคลื่อนที่ของจุดต่อบางจุดต่อเนื่องจากเมื่อแขนกลเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งดังกล่าวสมการที่ใช้ในการควบคุมแขนกล เช่น สมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ สมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว ไม่สามารถหาค่าความสัมพันธ์ที่ตำแหน่งนั้นได้ ซึ่งจะทำให้เกิดตำแหน่งที่ผลลัพธ์ของสมการเกิด infinite solution หรือที่เรียกว่าการเกิดตำแหน่ง singularity ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ภายในบริเวณที่ทำงาน (internal workspace singularity) ซึ่งเป็นเรื่องที่ต้องการมากเป็นอันดับต้นๆ ของการเพิ่มแกนที่ 7 ซึ่งหมายถึง singularity ที่เกิดขึ้นภายในตำแหน่ง หัวไหล่ และข้อมือ ของแขนกล ดังรูปที่ 2.3 ส่วนจุด singularity ภายนอกที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งข้อศอกไม่สำคัญมากนักเนื่องจากในการเคลื่อนที่ของแขนกลนั้นการเกิด singularity ที่จุดนี้มักจะเกิดภายนอก workspace ของแขนกลเสมอ

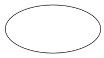
2. จุดต่อที่เพิ่มขึ้นมาต้องทำให้แขนกลเคลื่อนที่ในพื้นที่ทำงานได้มากที่สุดคือต้องลดการเคลื่อนที่ชนกันหรือขวางทางการเคลื่อนที่กันเอง

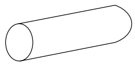
3. เมื่อเพิ่มจุดต่อที่ 7 ขึ้นมาแล้วจะต้องไม่ทำให้การหาสมการทางคิเนแมติกส์ไม่ยุ่งยากมากนัก

4. จุดต่อที่เพิ่มเข้าไปต้องสามารถสร้างได้จริง

สัญลักษณ์ของตัวแปรที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ จะใช้เหมือนกับที่งานวิจัยส่วนใหญ่นิยมใช้กล่าวคือ ในกรณีของเมทริกซ์จะใช้เป็นตัวอักษรใหญ่ชุดแบบอักษรหนา ตัวแปรเวกเตอร์จะใช้เป็นตัวอักษรเล็กชุดแบบอักษรหนา สำหรับตัวแปรสเกลาร์จะใช้เป็นตัวอักษรเล็กชุดแบบอักษรปกติ เช่น $\mathbf{A}, \mathbf{p}, t$ จะเป็นสัญลักษณ์แสดงตัวแปรเมทริกซ์ เวกเตอร์และสเกลาร์ตามลำดับ ยกเว้นในกรณีที่มีการนิยามไว้โดยเฉพาะตรงหัวข้อนั้น

สัญลักษณ์ของจุดต่อต่างๆแสดงดังนี้

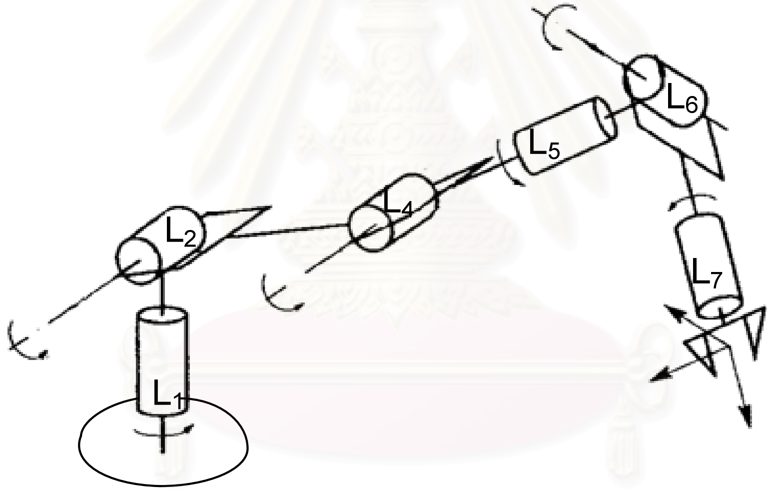

แสดงสัญลักษณ์ของแกนอ้างอิงฐาน


แสดงสัญลักษณ์ของจุดต่อแบบจุดต่อหมุนบนแขนกล

และ L_i แทนจุดต่อที่ i

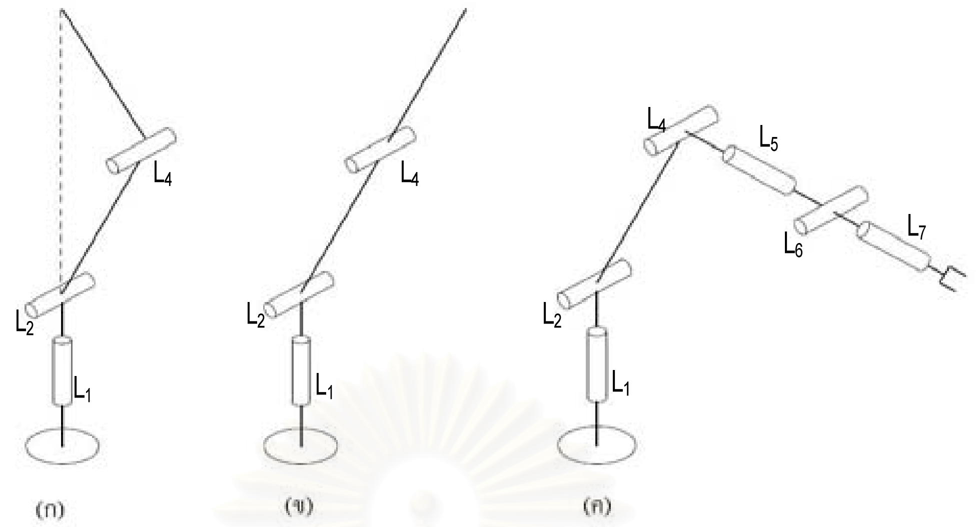
ซึ่งลักษณะการวางตำแหน่งของจุดต่อที่เจ็ดที่เพิ่มขึ้นนี้ได้มีการทดลองไว้หลายรูปแบบโดยมีรูปแบบที่น่าสนใจ 3 แบบ ดังนี้

1. แบบตั้งแกนหมุนทั้ง 3 แกนไว้ที่จุดหัวไหล่ (spherical shoulder joint) โดยเพิ่มจุดต่อจากแขนกลมาตรฐาน 6 แกน ดังรูปที่ 2.1 เป็น 7 จุดต่อดังรูปที่ 2.3 การตั้งแกนในลักษณะนี้มีความเป็นไปได้ที่จะหาลักษณะการเคลื่อนที่ที่จะหลีกเลี่ยงการเกิด singularity ได้ และการตั้งแกนในลักษณะนี้จะง่ายต่อการหาสมการการเคลื่อนที่ โดยจะใช้การสร้างจุดต่อขึ้นมาดังรูปที่ 2.4 เป็นลักษณะหนึ่งของการเคลื่อนที่รอบแกนระหว่างหัวไหล่กับข้อมือ

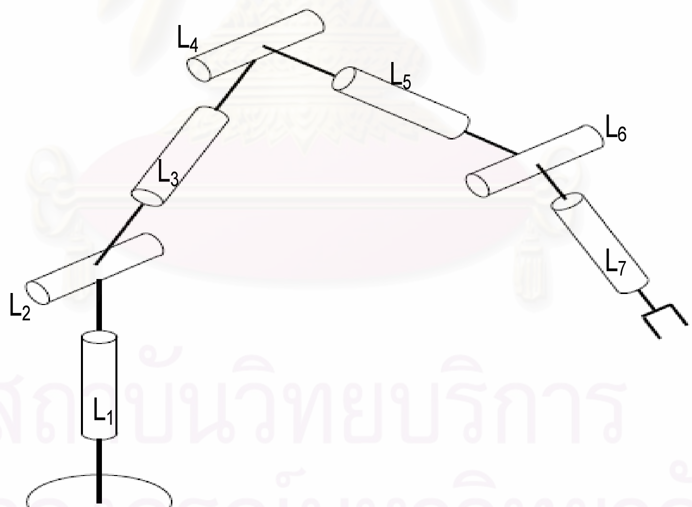


สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 2.1: แขนกล 6 จุดต่อแบบมาตรฐาน



รูปที่ 2.2: ตำแหน่งที่เกิด singularity ของแขนกล 6 จุดต่อ โดย (ก) จุด singularity ที่เกิดในตำแหน่งที่ข้อมือมีตำแหน่งตรงกันกับหัวไหล่เกิดที่ตำแหน่งที่เคลื่อนที่บนเส้น”--“ (ข) จุด singularity ที่เกิดในตำแหน่งที่ข้อศอกวางตัวเหยียดตรงเกิดที่เมื่อมุมของจุดต่อที่ 4 (L_4) วางตัว 0 เรเดียน (ค) จุด singularity ที่เกิดในตำแหน่งที่ข้อมือวางตัวเหยียดตรงเกิดที่เมื่อมุมของจุดต่อที่6 (L_6) วางตัว 0 เรเดียน

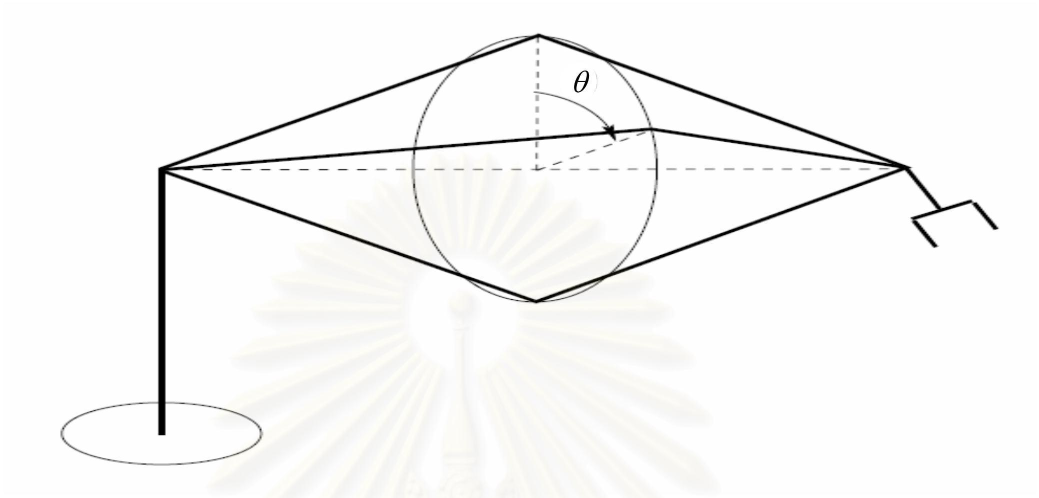


รูปที่ 2.3: แขนกลที่เพิ่มจุดต่อไว้ที่ตำแหน่งเหนือจุดต่อที่ 2 นับจากพื้น บนแขนกล 6 แกน

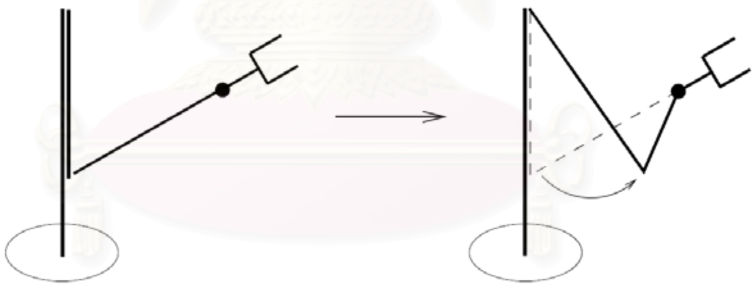
จากรูปที่ 2.4 จะเห็นว่าสามารถหลีกเลี่ยงการเกิด singularity ที่จุดหัวไหล่ คือ จะเห็นได้ว่าสามารถเลือกเส้นทางการเคลื่อนที่ได้หลากหลายโดยใช้การเปลี่ยนค่ามุม θ ได้ และจากรูปที่ 2.5 จะเห็นว่าสามารถที่จะแก้การเกิด singularity ที่จุดข้อมือได้ คือ เมื่อแขนกล

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เคลื่อนที่ถึงจุดที่ข้อมือเหยียดตรงสามารถปรับเปลี่ยนการเคลื่อนที่เพื่อหลีกเลี่ยงกรณีดังกล่าวได้และยังไม่ทำให้เสียพื้นที่ทำงาน (workspace)

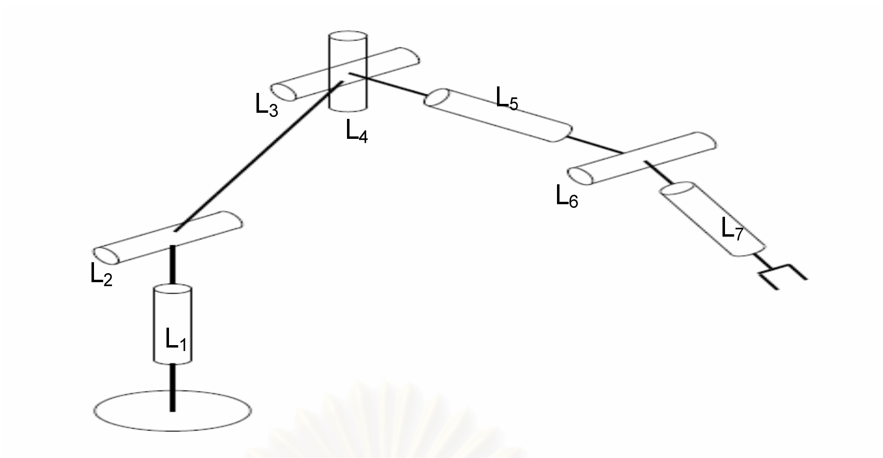


รูปที่ 2.4: การเคลื่อนที่แขนกลรอบแกนระหว่างหัวไหล่-ข้อมือ



รูปที่ 2.5: การหลีกเลี่ยงการเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่ง singularity ที่ข้อมือ

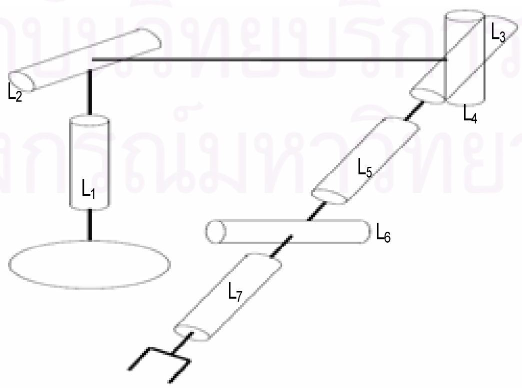
2. แบบตั้งแกนไว้ที่ข้อศอก 2 แกน (2 DOF Elbow) ลักษณะการตั้งแกนแบบที่ 2 นี้ เป็นการเพิ่มจุดต่ออีก 1 จุดต่อที่ตำแหน่งข้อศอก ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6: การตั้งแกนเพิ่มอีก 1 จุดต่อที่ตำแหน่งข้อศอก

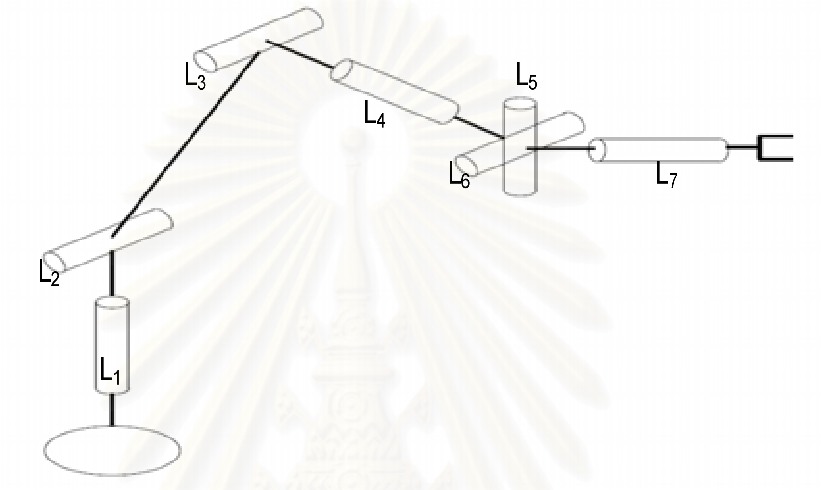
จะสังเกตเห็นว่าการตั้งแกนในลักษณะนี้มีลักษณะการเคลื่อนที่ได้เหมือนกับการตั้งแกนแบบแรก จึงมีความสามารถในการลดและหลีกเลี่ยงการเคลื่อนที่ผ่าน singularity ได้ในลักษณะเดียวกัน ไม่เพียงเท่านั้น ในลักษณะ singularity ที่ตำแหน่งที่แกนที่ข้อศอกวางตัว 0 เรเดียน และ $\pi/2$ เรเดียน ตามลำดับ ที่ตำแหน่งนี้ถ้าข้อมือวางตัวเหยียดตรงด้วยแล้ว ดังรูปที่ 2.7 จะทำให้เกิดการเสียการเคลื่อนที่ไปเพราะจะเกิดการทับกันของแกนถึง 3 แกน ซึ่งการตั้งแกนลักษณะนี้สามารถแก้ปัญหานี้ได้โดยที่การตั้งแกนในลักษณะแรกนั้นไม่สามารถแก้ปัญหานี้ได้

แต่เมื่อวิเคราะห์ทางด้านเครื่องกลแล้ว การตั้งแกนในลักษณะนี้เป็นการออกแบบที่ไม่ดีนัก กล่าวคือ ข้อแรก การติดจุดต่อในลักษณะนี้ยากต่อการออกแบบให้สมดุลและดูไม่เกะกะการเคลื่อนที่ และอีกข้อก็คือมวลของมอเตอร์จากจุดต่อที่เพิ่มขึ้นมานั้นอยู่ห่างจากแกนอ้างอิงมากกว่าแบบแรกทำให้ความเฉื่อยในการเคลื่อนที่แย่กว่าการตั้งแกนแบบแรกพอสมควร



รูปที่ 2.7: ตำแหน่งการซ้อนทับกันของแกนถึง 3 แกน คือตำแหน่งที่แกนที่ข้อศอกวางตัว 0 เรเดียน และ $\pi/2$ องศา ตามลำดับ และตำแหน่งข้อมือเหยียดตรง

3. แบบตั้งแกนที่ข้อมือ 4 แกน (4 DOF Wrist) คือการเพิ่มจุดต่อที่ 7 ไว้ที่ตำแหน่งข้อมือ ดังรูปที่ 2.8 ซึ่งการตั้งแกนลักษณะนี้ก็จะทำให้เกิดปัญหาในลักษณะเดียวกันกับการตั้งแกนในแบบที่ 2 คือ มวลของมอเตอร์ที่เพิ่มเข้าไปนั้นอยู่ที่ตำแหน่งข้อมือ ซึ่งไกลจากจุดอ้างอิง 0 มาก จึงจะเป็นผลให้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยแกนส่วนข้อมือมีผลให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการเคลื่อนที่สูงขึ้น



รูปที่ 2.8: การตั้งจุดต่อเพิ่มที่จุดข้อมือ

จากการตั้งแกนทั้ง 3 แบบจะเห็นว่า แบบแรกจะดีที่สุดในสิ่งที่ต้องการทั้ง 4 ข้อข้างต้นดังนั้นในปัจจุบันจึงเริ่มมีหุ่นแขนกลที่มีการตั้งแกนในลักษณะนี้ใช้กันมากขึ้น เช่น หุ่นแขนกล PA10-7C ซึ่งเป็นหุ่นที่จะนำมาใช้ในการวิเคราะห์ทั้งในเรื่องคิเนแมติกส์ และ ไดนามิกซ์เพื่อเป็นองค์ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต่อสำหรับการต่อยอดในงานวิจัยอื่นๆ ในอนาคตต่อไป

2.2 ทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับแขนกล 7 แกน

ก. การวิเคราะห์ฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ (forward kinematics)[2]

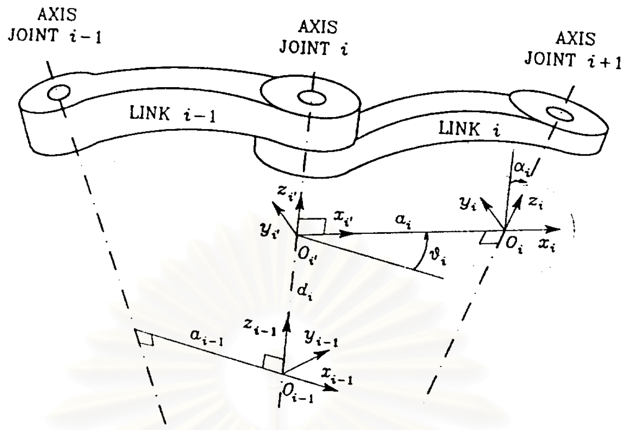
การกำหนดพารามิเตอร์ของ Denavit-Hartenberg ที่บ่งบอกถึงความสัมพันธ์ระหว่างแกน $\mathbf{z}_i$ และ แกน $\mathbf{x}_i$ ที่ติดบนแขนกล ตามรูปที่ 2.9 ดังนี้

a_i แทนระยะระหว่างแกน $\mathbf{z}_{i-1}$ และ แกน $\mathbf{z}_i$ โดยคิดทิศตามแกน $\mathbf{x}_i$

α_i แทนขนาดของระหว่างแกน $\mathbf{z}_{i-1}$ และ แกน $\mathbf{z}_i$ โดยคิดทิศตามกฎมือขวาตามแกน $\mathbf{x}_i$

l_i แทนระยะระหว่างแกน $\mathbf{x}_{i-1}$ และ แกน $\mathbf{x}_i$ โดยคิดทิศตามแกน $\mathbf{z}_{i-1}$

θ_i แทนขนาดของระหว่างแกน $\mathbf{x}_{i-1}$ และ แกน $\mathbf{x}_i$ โดยคิดทิศตามกฎมือขวาตามแกน $\mathbf{z}_{i-1}$



รูปที่ 2.9: การติดแกนบนจุดต่อ และ รายละเอียดของพารามิเตอร์ต่างๆแบบ Denavit-Hartenberg convention

การตั้งแกนบนแขนต่าง ๆ แบบ Denavit-Hartenberg convention ซึ่งเป็นวิธีการตั้งแกนที่เป็นที่นิยม ดังนี้

ลักษณะการตั้งแกนและการหาค่าพาลามิเตอร์ต่างๆสามารถหาได้ ดังรูปที่ 2.8

แกน $\mathbf{z}_{i-1}$ ให้ตั้งทิศตามแกนหมุนของแขนที่ i โดย ติดตรงตำแหน่งจุดต่อระหว่างแขน $i-1$ กับ i

แกน $\mathbf{x}_i$ ให้ตั้งตามแกนที่ตั้งฉากระหว่างแกน $\mathbf{z}_{i-1}$ และ แกน $\mathbf{z}_i$

แกน $\mathbf{y}$ ให้ตั้งโดยยึดตามกฎมือขวาและแกน $\mathbf{x}$ และแกน $\mathbf{z}$ ที่ได้มาข้างต้น

โดย ทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ (transformation matrix) ของ coordinate frame ที่ $i-1$ เทียบกับ coordinate frame ที่ i ของแขนที่ i เป็นดังนี้

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

(เมื่อ $i = 1,2,3,4,5,6,7$)

โดยกำหนดให้ $c\theta$ คือ รูปย่อของ $\cos(\theta)$, $s\theta$ คือ รูปย่อของ $\sin(\theta)$ และ $i = 1, 2, 3...$ แทนลำดับของจุดต่อ

ข. การวิเคราะห์อินเวิร์สคิเนแมติกส์ (inverse kinematics)

การหาสมการทางคณิตศาสตร์ทางอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของแขนกลที่มีแกนมากกว่า 6 แกนนั้นโดยปกติจะเป็นการคำนวณและใช้ความรู้ทาง quadratic optimization [5] ในการคำนวณเพื่อนำสมการเหล่านั้นมาควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนกล แต่ในปัจจุบันได้มีวิธีที่เป็นที่ยอมรับและมีการใช้อย่างแพร่หลายในการหาสมการทางอินเวิร์สคิเนแมติกส์เพื่อให้ได้สมการโดยตรง[1],[7] โดยใช้วิธีการกำหนดแกนขึ้นระหว่างส่วนหัวไหล่ และ ข้อมือ ตามรูปที่ 2.3 และคำนวณสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ให้สามารถควบคุมหุ่นและมุมการหมุนรอบแกนใหม่นี้ได้ เพื่อที่จะสามารถนำความสามารถในการหมุนรอบแกนใดๆนี้ มาใช้เป็นประโยชน์ในการเคลื่อนที่ผ่านสิ่งกีดขวาง และ ผ่านตำแหน่งที่จะเกิด singularity ได้ โดยรายละเอียดในการคำนวณจะกล่าวอย่างละเอียดไว้ใน บทที่ 3

ค. การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงความเร็ว

การหาเมทริกซ์จาโคเบียน (jacobian matrix) ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงความเร็วระหว่างการเคลื่อนที่ใน cartesian space และ joint space สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของความสัมพันธ์เชิงตำแหน่ง ดังนี้

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \qquad (2.2)$$

โดย $\dot{\mathbf{X}}$ คือ ความเร็วของปลายแขนกล

$\dot{\boldsymbol{\theta}}$ คือ ความเร็วของการเคลื่อนที่ของแกนต่างๆในแขนกล

$\mathbf{J}$ คือ เมทริกซ์ จาโคเบียน

โดยค่าเมทริกซ์จาโคเบียนหาได้ ดังนี้

จากการวิเคราะห์ฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์เราจะได้ความสัมพันธ์ของตำแหน่งและมุมการหมุนของปลายแขนในรูปของมุมของแกนต่างๆ

$$\begin{cases} x_1 = f_1(\theta_1, ..., \theta_n) \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ x_n = f_n(\theta_1, ..., \theta_n) \end{cases}$$

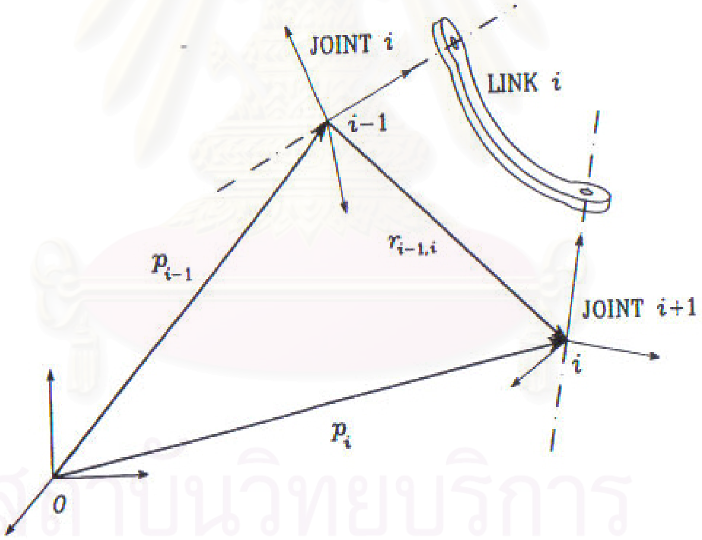
ค่า เมทริกซ์จาโคเบียน สามารถหาได้จาก [3]

$$\mathbf{J}(\theta_1,...,\theta_n)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial\theta_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial\theta_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial\theta_n}\end{bmatrix}$$

หรือหาโดยการใช้ geometric technique [2]

จะได้ สมการจาโคเบียนสำหรับจุดต่อที่เป็นแบบจุดต่อหมุน ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{J}&=\begin{bmatrix} j_{P1} & & j_{Pn}\\ & \cdots & \\ j_{O1} & & j_{On}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} j_{Pi}\\ j_{Oi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{z}_{i-1}\times(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{i-1})\\ \mathbf{z}_{i-1}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.3}$$



รูปที่ 2.10: การกำหนดค่าเวกเตอร์ต่าง ๆสำหรับการหาเมทริกซ์จาโคเบียน

แกน $\mathbf{z}_{i-1}$ คือ column ที่ 3 ของเมทริกซ์การหมุน (rotation matrix) $\mathbf{R}_{i-1}^{0}$, ดังนี้

$$\mathbf{z}_{i-1}=\mathbf{R}_1^0(q_1)\ldots\mathbf{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\mathbf{z}_0 \tag{2.4}$$

โดยที่ $\mathbf{z}_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

$\mathbf{p}$ คือ ค่า 3 พจน์แรกของ column ที่ 4 ของเมทริกซ์การย้ายตำแหน่ง หรือ ทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ (transformation matrix) $\mathbf{A}_n^0$ ดังนี้

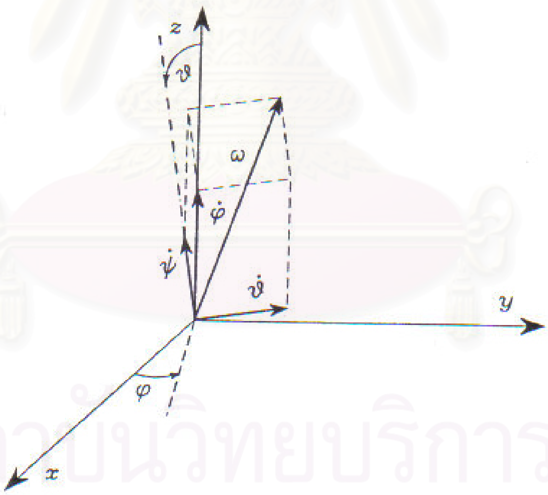
$$\mathbf{p} = \mathbf{A}_1^0(q_1)\ldots\mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)\mathbf{p}_0 \tag{2.5}$$

โดยที่ $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

$\mathbf{p}_{i-1}$ คือ ค่า 3 พจน์แรกของ column ที่ 4 ของทรานส์ฟอร์มเมทริกซ์ $\mathbf{A}_{i-1}^0$ ดังนี้

$$\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{A}_1^0(q_1)\ldots\mathbf{A}_{n-1}^{n-2}(q_{i-1})\mathbf{p}_0 \tag{2.6}$$

การคำนวณเมทริกซ์จาโคเบียนด้วย geometric technique นั้นจะเป็นการเทียบความเร็วของปลายแขนกับเฟรมอ้างอิง 0 (reference frame) ในรูปแบบฟังชันก์ของเวกเตอร์ซึ่งเมื่อจะนำไปใช้จริงนั้น ค่าที่จะกำหนดให้ในการเคลื่อนที่โดยปกติจะใช้ลักษณะการกำหนดทิศทางของมุมหมุนของปลายแขนด้วย Euler angle โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้การหมุนแบบ ZYZ Euler angles[2] ดังรูปที่ 2.11 ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ของการหมุนตามลำดับการหมุน ดังนี้



รูปที่ 2.11: การรูปแบบการหมุนแกนแบบ ZYZ Euler angles

เริ่มจากการหมุนรอบแกน $\mathbf{z}$ ด้วยความเร็ว $\dot{\varphi}$ จะได้ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต (Geometric) ดังนี้ $\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T = \dot{\varphi}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

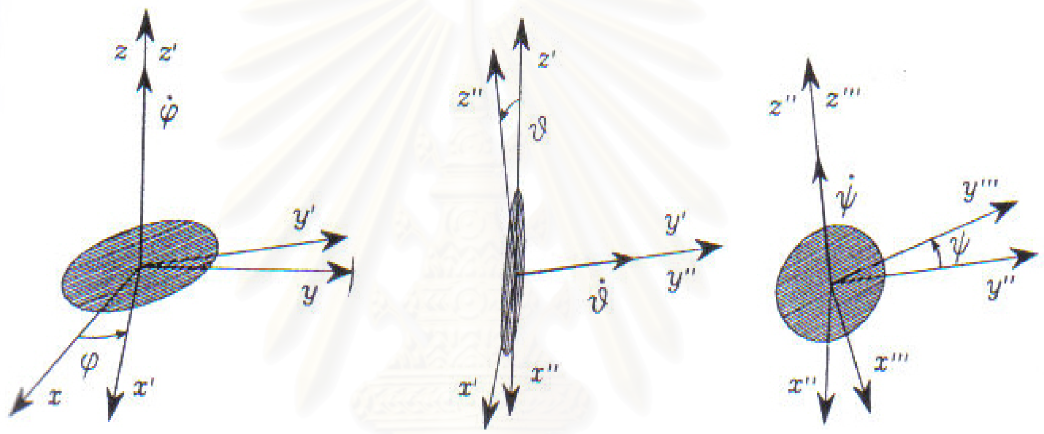
แล้วหมุนรอบแกน $\mathbf{y}'$ ด้วยความเร็ว $\dot{\vartheta}$ จะได้ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต ดังนี้ $\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T = \dot{\vartheta}\begin{bmatrix}-s_\varphi & c_\varphi & 0\end{bmatrix}^T$

และหมุนรอบแกน **z**" ด้วยความเร็ว $\dot{\psi}$ จะได้ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต ดังนี้
$\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T = \dot{\psi}\begin{bmatrix}c_\varphi s_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta & c_\vartheta\end{bmatrix}^T$

เพราะฉะนั้น จะได้ความสัมพันธ์ในรูปของ Euler angle คือ

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\vartheta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\vartheta \\ 1 & 0 & c_\vartheta \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{T}(\phi)\dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

และสามารถเปลี่ยนเมทริกซ์จาโคเบียนจากความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิต เป็น ZYZ Euler angle ดังรูปที่ 2.12 ได้ ดังนี้



รูปที่ 2.12: ความสัมพันธ์ของการหมุนเชิงเรขาคณิต กับ การหมุนแบบ ZYZ Euler angles

ในการนำไปใช้ในการหาความสัมพันธ์เชิงความเร็วสำหรับหุ่นยนต์แขนกลปกติ จะให้ความสัมพันธ์ตามสมการ(2.2) ซึ่งจะเห็นว่าถ้าต้องการจะหาค่าความเร็วใน joint space จำเป็นต้องทำการอินเวิร์สจาโคเบียน ซึ่งจะไม่มีปัญหาเนื่องจากเมทริกซ์จาโคเบียนที่ได้จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัส แต่สำหรับหุ่นยนต์แขนกลลักษณะ redundant นั้นจะเห็นว่าเมทริกซ์จาโคเบียนจะไม่เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ดังนั้นจำเป็นต้องมีการนำ pseudo-inverse[2] มาใช้ในการอินเวิร์สเมทริกซ์จาโคเบียนซึ่งจะได้ในรูปของ

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{\dagger}\mathbf{v} \qquad (2.7)$$

โดยที่

$$\mathbf{J}^{\dagger} = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \qquad (2.8)$$

ง. วิเคราะห์ singularity

การเกิด singularity จะเกิดเมื่อเคลื่อนที่แขนกลไปยังตำแหน่งบางตำแหน่งแล้วทำให้เกิดการศูนย์เสียความสามารถในการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}^{-1}(\theta)\mathbf{v} \tag{2.9}$$

จากสมการที่ 2.9 การเกิดจุด singularity เกิดเมื่อเคลื่อนที่ไปในบางตำแหน่ง หรือ บางมุม แล้วทำให้สมการดังกล่าวไม่สามารถหาอินเวิร์สกลับจากความเร็วใน cartesian space กลับมาเป็นความเร็วใน joint space ได้ กล่าวคือ สมการจะสามารถหาความสัมพันธ์เชิงความเร็วระหว่างปลายแขนกลและความเร็วของจุดต่อต่างๆ ได้ ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์จาโคเบียนเป็นเมทริกซ์ full-rank ถ้าเมทริกซ์จาโคเบียนไม่ใช่เมทริกซ์ดังกล่าวจะทำให้เกิด singularity ขึ้น ดังนั้นจึงหาจุดที่ทำให้เกิดตำแหน่ง singularity ได้จาก

$$\det[(\mathbf{J})] = 0$$

การที่เราต้องหลีกเลี่ยงการเกิด singularity นั้น เนื่องจากเมื่อมีการเคลื่อนที่ผ่านไปยังตำแหน่งที่เกิด singularity นั้นมีผลให้เกิด

1. ที่จุด singularity มีผลให้ความสามารถในการเคลื่อนที่ของแกนหมุนบางแกนเสียไป ซึ่งมีผลทำให้ตำแหน่งและมุมหมุนที่ต้องการที่ปลายแขนกลไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ในบางมุม

2. เมื่อเกิดการเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่ง singularity อาจทำให้ไม่สามารถคำนวณหาสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ได้ หรืออาจคำนวณได้คำตอบที่เป็นค่าอนันต์

3. ที่ตำแหน่ง singularity เมื่อควบคุมให้แขนกลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเพียงเล็กน้อย อาจมีผลให้แขนกลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่สูงมากเกินความต้องการมาก

โดยทั่วไปเราจะแบ่งการเกิด singularity ออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. boundary singularity คือตำแหน่ง singularity ที่เกิดที่ตำแหน่งเกินจากขอบเขตการเคลื่อนที่ (boundary) ถ้ามีการควบคุมให้แขนกลเคลื่อนไปยังตำแหน่งดังกล่าวจะทำให้แขนกลอาจเคลื่อนที่ผิดปกติจากที่ต้องการ ซึ่งจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องหลีกเลี่ยงการเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งนี้

2. internal singularity หรือการเกิด singularity ที่เกิดขึ้นภายในขอบเขตการเคลื่อนที่ (workspace) การเกิด singularity ลักษณะนี้จะต่างจากแบบแรกคือ สามารถจะเกิดที่ตำแหน่งใดก็ได้ภายในขอบเขตการเคลื่อนที่ ดังนั้นการเกิด singularity ลักษณะนี้จึงเป็นปัญหาที่สำคัญที่มีความจำเป็นต้องทราบให้ได้ว่าที่การเคลื่อนที่ในลักษณะใดจะทำให้เกิด

singularity ในลักษณะนี้ เพื่อที่จะสามารถวางแผนการเคลื่อนที่ให้ไม่ผ่านจุดที่จะทำให้เกิดปัญหาดังกล่าวได้

และจากสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่หามาติดในรูปของ θ ทำให้สามารถใช้มุมดังกล่าวในการหลบเลี่ยงปัญหา singularity ได้

จ. การวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่

การควบคุมแรงสามารถควบคุมได้ด้วยกัน 2 วิธี คือการควบคุมแรงแบบ indirect force control และการควบคุมแรงแบบ direct force control นอกจากนั้นในตัวของแรงก็ต้องการตั้งเป้าหมายของการควบคุมได้ 2 แบบ คือแบบ regulation และแบบ tracking ในสองแบบจะเห็นว่า สมการไดนามิกส์ของแขนกลมีส่วนสำคัญในการควบคุมแรงดังกล่าว ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องทำการวิเคราะห์สมการไดนามิกส์ หรือ สมการการเคลื่อนที่เพื่อที่จะเป็นพื้นฐานที่จะนำไปใช้ในการควบคุมแขนกลลักษณะนี้

โดยหนึ่งในวิธีที่เป็นที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ คือ วิธีการของ Lagrange [2] โดยสมการการเคลื่อนที่ของแขนกลสามารถเขียนในรูป

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(q) \tag{2.10}$$

โดยที่

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{q}) &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q_i} \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\left(m_{lj}\mathbf{g_0^T}\frac{\partial \mathbf{p_{lj}}}{\partial q_i} + m_{mj}\mathbf{g_0^T}\frac{\partial \mathbf{p_{mj}}}{\partial q_i}\right) \\ &= -\sum_{j=1}^{n}\left(m_{lj}\mathbf{g_0^T}\mathbf{j_{pi}^{(lj)}}(\mathbf{q}) + m_{mj}\mathbf{g_0^T}\mathbf{j_{pi}^{(mj)}}(\mathbf{q})\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

และ

$$\mathbf{B(q)} = \sum_{i=1}^{n}\left(m_{li}\mathbf{J}_p^{(li)T}\mathbf{J}_p^{(li)} + \mathbf{J}_0^{(li)T}\mathbf{R}_i\mathbf{I}_{li}^{i}\mathbf{R}_i^{T}\mathbf{J}_0^{(li)} + m_{mi}\mathbf{J}_p^{(mi)T}\mathbf{J}_p^{(mi)} + \mathbf{J}_0^{(mi)T}\mathbf{R}_{mi}\mathbf{I}_{mi}^{i}\mathbf{R}_{mi}^{T}\mathbf{J}_0^{(mi)}\right) \tag{2.13}$$

เมื่อ b_{ij} คือ สมาชิก element ที่ i สดมภ์ที่ j ของเมทริกซ์ $\mathbf{B}(q)$

g_i คือ ทอร์คเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (gravity torque) กระทำต่อแกน i

สำหรับจุดต่อที่เป็นจุดต่อหมุนจะสามารถหาค่า

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{Pj}^{(li)} &= \mathbf{z}_{j-1} \times (\mathbf{p}_{li} - \mathbf{p}_{j-1}) \\ \mathbf{J}_{0j}^{(li)} &= \mathbf{z}_{j-1} \end{aligned} \tag{2.14}$$

โดยแกน $\mathbf{z}_{i-1}$ คือ column ที่ 3 ของเมทริกซ์การหมุน $\mathbf{R}_{i-1}^{0}$, ดังนี้

$$\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{R}_1^0(q_1)\ldots\mathbf{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\mathbf{z}_0 \tag{2.15}$$

โดยที่ $\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

$\mathbf{p}$ คือ ค่า 3 พจน์แรกของ column ที่4ของทรานส์ฟอร์เมชันเมทริกซ์ $\mathbf{A}_n^0$ ดังนี้

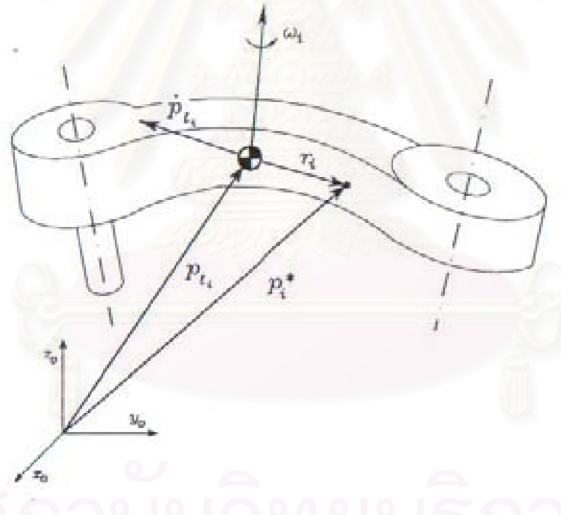
$$\mathbf{p} = \mathbf{A}_1^0(q_1)\ldots\mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)\mathbf{p}_0 \tag{2.16}$$

โดยที่ $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

$\mathbf{p}_{i-1}$ คือ ค่า 3 พจน์แรกของcolumn ที่ 4 ของทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ $\mathbf{A}_{i-1}^0$ ดังนี้

$$\mathbf{p}_{i-1} = \mathbf{A}_1^0(q_1)\ldots\mathbf{A}_{n-1}^{n-2}(q_{i-1})\mathbf{p}_0 \tag{2.17}$$

และให้ยึดเวกเตอร์ $\mathbf{p}$ และ $\mathbf{p}_{i-1}$ ตามรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13: เวกเตอร์ตำแหน่งของแกนต่าง ๆที่จะนำไปใช้ในการคำนวณด้วย Lagrange

เมทริกซ์ความเฉื่อยขึ้นอยู่กับโครงสร้างทางคิเนแมติกส์ (kinematic structure) ของแขนกลและคุณสมบัติเชิงมวล (mass property) ของแต่ละแขน การปรับเปลี่ยนโครงสร้างทางจลนศาสตร์และคุณสมบัติเชิงมวลของแขนจะทำให้เมทริกซ์ความเฉื่อยเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งสามารถหาดังนี้

ฉ. การวิเคราะห์เมทริกซ์ความเฉื่อยของแขนกล

เมทริกซ์ความเฉื่อยของวัตถุเกร็ง (rigid body) หนึ่ง ๆเทียบกับเฟรม (frame) {A} จะสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ซึ่งมีมิติ 3x3 ได้ดังนี้

$$ {}^{A}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} $$

โดยที่

$$ \begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2)\rho \cdot dV \\ I_{yy} &= \iiint_V (x^2 + z^2)\rho \cdot dV \\ I_{zz} &= \iiint_V (x^2 + y^2)\rho \cdot dV \\ I_{xy} &= \iiint_V xy\rho \cdot dV \\ I_{xz} &= \iiint_V xz\rho \cdot dV \\ I_{yz} &= \iiint_V yz\rho \cdot dV \end{aligned} \tag{2.18} $$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นของวัตถุเกร็ง

V คือ ปริมาตรของวัตถุเกร็ง

x,y,z คือ ระยะตามแกน x, y และ z บนพิกัดคาร์ทีเชียน (cartesian coordinates)

การหาเมทริกซ์ความเฉื่อยของวัตถุสามารถหาได้จากสมการของพลังงานจลน์ โดยที่พลังงานจลน์ของวัตถุเป็นผลจากการเคลื่อนที่โดยทางขนาน (translation) ของจุดศูนย์กลางมวล และการเคลื่อนที่โดยการหมุน (rotation) รอบจุดศูนย์กลางมวล ถ้า v_i แทนความเร็วของการเคลื่อนที่โดยการเลื่อนทางขนาน และ ϖ_i แทน ความเร็วเชิงมุมของการหมุน พลังงานจลน์ของแขน (link) ที่ i สามารถเขียนได้เป็น

$$ k_i = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \varpi_i^T I_i \varpi_i $$

เมื่อ m_i และ I_i แทนมวล และ เมทริกซ์ความเฉื่อยของแขนที่ i ตามลำดับ

ผลรวมของพลังงานจลน์จากแต่ละแขน เมื่อเทียบกับแกนเดียวกันจะเป็นพลังงานจลน์ของแขนกลทั้งระบบ และสามารถเขียนให้สมการของพลังงานจลน์ นิยามบนพิกัดของจุดต่อ (joint coordinates) ได้ในรูป

$$ k = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T H \dot{\theta} $$

โดยที่ H คือ เมทริกซ์ความเฉื่อยของแขนกลซึ่งนิยามบนพิกัดของจุดต่อ มีมิติ $n \times n$

และ $\dot{\theta} = col(\dot{\theta}_1, \ldots, \dot{\theta}_n)$ คือ เวกเตอร์ความเร็วของจุดต่อบนพิกัดของจุดต่อ

หากต้องการนิยามเมทริกซ์ความเฉื่อยบนพิกัดนัยทั่วไป (generalized coordinates) ซึ่งเป็นพิกัดที่วัดมุมของจุดต่อโดยเทียบกับแกนระดับ [6] สมการพลังงานจลน์จะเขียนได้ในรูป

$$k = \frac{1}{2}\dot{q}^{T} G \dot{q}$$

เมื่อ $\dot{\mathrm{q}} = col(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$ คือ เวกเตอร์ความเร็วของจุดต่อบนพิกัดนัยทั่วไป

$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{T}\mathbf{H}\mathbf{R}$ คือ เมทริกซ์ความเฉื่อยของแขนกลซึ่งนิยามบนพิกัดนัยทั่วไป

และ **R** คือ เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์จาโคเบียน ที่แปลงพิกัดของจุดต่อให้เป็นพิกัดนัยทั่วไป

และเมื่อสามารถหาเมทริกซ์ความเฉื่อยของแขนกลก็จะสามารถนำไปแทนค่าในสมการการเคลื่อนที่ (2.10) ทำให้สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ได้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

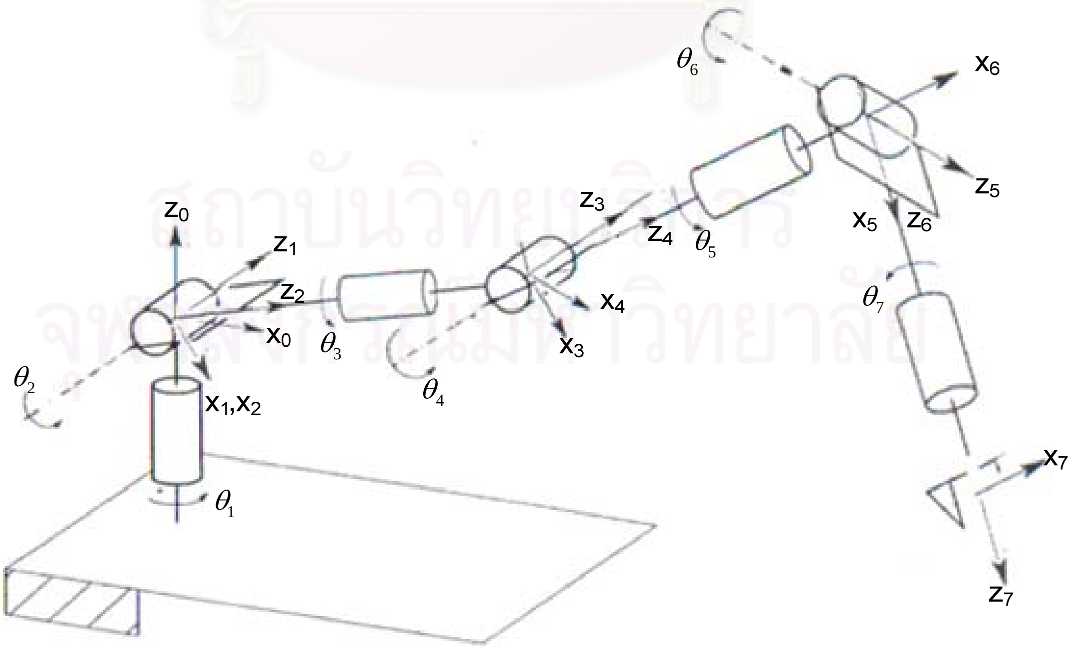
การหาสมการที่จำเป็นสำหรับการควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์แบบ redundant

หุ่นแขนกลที่ใช้ในงานวิจัยคือหุ่นยนต์แขนกล Mitsubishi heavy industries, Ltd. รุ่น PA10-7C ถูกออกแบบตัวควบคุมให้สามารถที่จะโปรแกรมลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่จากสมการต่างๆ เป็นลักษณะ open architecture โดยใช้ภาษาซีพลัสพลัส (C++) ทำให้มีความยืดหยุ่นในการใช้งานสูงและที่สำคัญ แขนกล PA10-7C ยังมีแกนเพิ่มมาอีก1แกนคือแกนที่ 7 (redundant axis) เพิ่มมาในตำแหน่งที่ดีที่สุดจากการวิเคราะห์ไว้ก่อนหน้านี้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จะทำการหาค่าสมการต่างๆ สำหรับแขนกล PA10-7C หรือแขนกลที่มีลักษณะโครงสร้างแบบเดียวกัน ในด้านของ คิเนแมติกส์ และ ไดนามิกส์ โดยจะเป็นในลักษณะการประยุกต์การคิดสมการของแขนกลแบบ 6 แกน [4] มาใช้

3.1 การวิเคราะห์ทางคิเนแมติกส์

3.1.1 การวิเคราะห์ direct kinematic หรือ การวิเคราะห์ฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์

เริ่มจากการตั้งแกนลงบนแขนกล PA10-7C โดยจะทำการตั้งแกนในลักษณะ zero-offset robot เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณในหัวข้อถัดไป ซึ่งจะได้ลักษณะการตั้งแกนบนแขนกล PA10-7C ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1: การตั้งแกนต่างๆลงบนแขนกล PA10-7C

จากการตั้งแกนในรูปที่ 3.1 สามารถกำหนดพารามิเตอร์ต่างๆในตาราง Denavit-Hartenberg ได้ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 พารามิเตอร์ของ Denavit-Hartenberg สำหรับแขนกล PA10-7C

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	0	θ_2
3	0	$-\pi/2$	l_3	θ_3
4	0	$\pi/2$	0	θ_4
5	0	$-\pi/2$	l_5	θ_5
6	0	$\pi/2$	0	θ_6
7	0	0	0	θ_7

และจากสมการ (2.1) พารามิเตอร์ของ Denavit-Hartenberg จะได้ ทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ ของแต่ละแกน ดังนี้

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & 0 & s_6 & 0 \\ s_6 & 0 & -c_6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

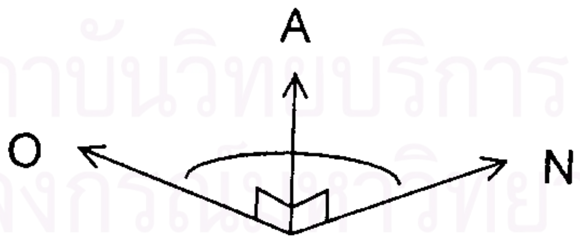
$$\mathbf{A}_7^6 = \begin{bmatrix} c_7 & -s_7 & 0 & 0 \\ s_7 & c_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และจากทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ ข้างต้น สามารถหาทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ ของ เฟรมอ้างอิง ที่ 7 เมื่อเทียบกับเฟรมอ้างอิงที่ 0 ของแขนกลได้ ดังนี้คือ

$$\mathbf{A}_7^0 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{A}_3^2\mathbf{A}_4^3\mathbf{A}_5^4\mathbf{A}_6^5\mathbf{A}_7^6$$

$$\mathbf{A}_7^0 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่ **N O A** คือ unit vector ของแกน orientation ของ tip โดยที่ **N** คือ เวกเตอร์ $\mathbf{X}_7$, **O** คือ เวกเตอร์ $\mathbf{Y}_7$, **A** คือ เวกเตอร์ $\mathbf{Z}_7$ ที่ต้องการเทียบกับ แกนอ้างอิง 0 (base reference) เช่น $\mathbf{n}_\mathbf{x}$ คือ unit vector ของ vector ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$) ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2: ลักษณะแกนของเวกเตอร์ N O A

เพราะฉะนั้น จะได้ค่าทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ จากแกนที่ 7 เทียบกับ เฟรมอ้างอิงที่ 0 ดังสมการที่ โดยที่

n_x = $((((c_1c_2c_3-s_1s_3)c_4-c_1s_2s_4)c_5+(-c_1c_2s_3-s_1c_3)s_5)c_6+(-(c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4-c_1s_2c_4)s_6)c_7+(-((c_1c_2c_3-s_1s_3)c_4-c_1s_2s_4)s_5+(-c_1c_2s_3-s_1c_3)c_5)s_7$

$n_y = ((((s_1c_2c_3+c_1s_3)c_4-s_1s_2s_4)c_5+(-s_1c_2s_3+c_1c_3)s_5)c_6+(-(s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4-s_1s_2c_4)s_6)c_7+(-((s_1c_2c_3+c_1s_3)c_4-s_1s_2s_4)s_5+(-s_1c_2s_3+c_1c_3)c_5)s_7$

$n_z = (((-s_2c_3c_4-c_2s_4)c_5+s_2s_3s_5)c_6+(s_2c_3s_4-c_2c_4)s_6)c_7+(-(-s_2c_3c_4-c_2s_4)s_5+s_2s_3c_5)s_7$

$o_x = -((((c_1c_2c_3-s_1s_3)c_4-c_1s_2s_4)c_5+(-c_1c_2s_3-s_1c_3)s_5)c_6+(-(c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4-c_1s_2c_4)s_6)s_7+(-((c_1c_2c_3-s_1s_3)c_4-c_1s_2s_4)s_5+(-c_1c_2s_3-s_1c_3)c_5)c_7$

$o_y = -((((s_1c_2c_3+c_1s_3)c_4-s_1s_2s_4)c_5+(-s_1c_2s_3+c_1c_3)s_5)c_6+(-(s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4-s_1s_2c_4)s_6)s_7+(-((s_1c_2c_3+c_1s_3)c_4-s_1s_2s_4)s_5+(-s_1c_2s_3+c_1c_3)c_5)c_7$

$o_z = -(((-s_2c_3c_4-c_2s_4)c_5+s_2s_3s_5)c_6+(s_2c_3s_4-c_2c_4)s_6)s_7+(-(-s_2c_3c_4-c_2s_4)s_5+s_2s_3c_5)c_7$

$a_x = (((c_1c_2c_3-s_1s_3)c_4-c_1s_2s_4)c_5+(-c_1c_2s_3-s_1c_3)s_5)s_6-(-(c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4-c_1s_2c_4)c_6$

$a_y = (((s_1c_2c_3+c_1s_3)c_4-s_1s_2s_4)c_5+(-s_1c_2s_3+c_1c_3)s_5)s_6-(-(s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4-s_1s_2c_4)c_6$

$a_z = ((-s_2c_3c_4-c_2s_4)c_5+s_2s_3s_5)s_6-(s_2c_3s_4-c_2c_4)c_6$

$p_x = ((c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4+c_1s_2c_4)l_5+c_1s_2l_3$

$p_y = ((s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4+s_1s_2c_4)l_5+s_1s_2l_3$

$p_z = (-s_2c_3s_4+c_2c_4)l_5+c_2l_3$

และจะได้เมทริกซ์ตำแหน่ง $\mathbf{p}$ (position matrix) และ เมทริกซ์การหมุน $\mathbf{R}$ (rotation matrix) คือ

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

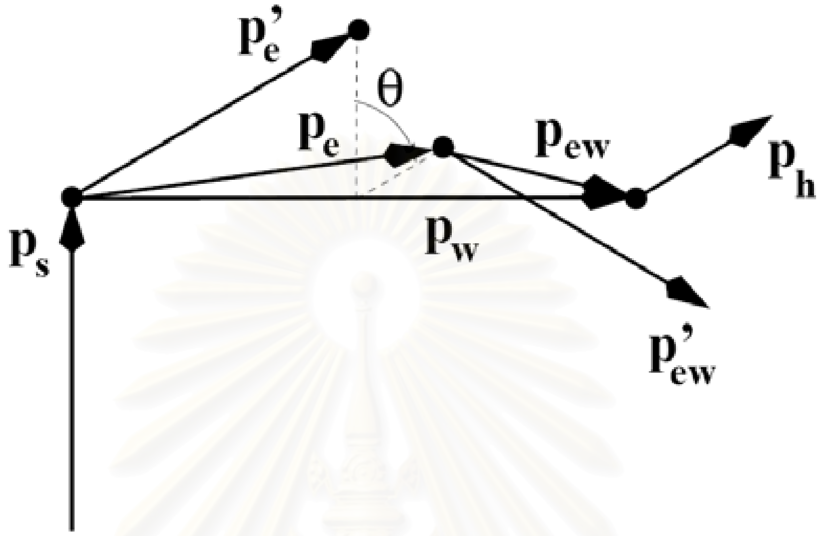
ซึ่งตำแหน่งนี้คือตำแหน่งทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ของจุดที่ต้องการให้แขนกลเคลื่อนที่ไป

3.1.2 การวิเคราะห์อินเวิร์สคิเนแมติกส์[1],[7]

ขั้นตอนการหาสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของแขนกล 7 แกน ได้ทำการประยุกต์การหาสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของแขนกล 6 แกน ซึ่งมีลักษณะการหาได้หลายวิธี เช่น การหาสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของหุ่น PUMA-560 [3] ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ แต่เนื่องจากวิธีดังกล่าวยากที่จะประยุกต์มาใช้ในการหาสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของแขนกล 7 แกน ดังนั้นสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของงานวิจัยนี้จึงเป็นลักษณะการประยุกต์การหาอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของแขนกล 6 แกน ของ [4]

โดยกำหนดให้ $\mathbf{p}_s$ คือ เวกเตอร์ จากพื้น ถึง หัวไหล่ (shoulder) โดยตำแหน่งต่างๆตามรูปที่ 3.4 ให้ $\mathbf{p}_s$ แทนตำแหน่งหัวไหล่ของแขนกล $\mathbf{p}_e$ แทนตำแหน่งข้อศอกของแขนกล และ $\mathbf{p}_w$ แทนตำแหน่งข้อมือของแขนกล

ขั้นที่ 1 : หาตำแหน่งของข้อมือ (wrist) ของแขนกลก่อน โดยกำหนดตำแหน่ง $\mathbf{p}$ (position) และ เมทริกซ์การหมุน $\mathbf{R}$ (rotation matrix) ที่ต้องการของปลายแขน ตำแหน่งของข้อมือของแขนกล $\mathbf{p}_w$ จะหาได้ ดังนี้ (จาก รูปที่ 3.3 และ 3.4) โดยกำหนดให้เครื่องหมาย (') คือตำแหน่งที่ $\theta = 0$



รูปที่ 3.3: แขนกลในรูปแบบสัญลักษณ์เวกเตอร์

รูปที่ 3.4: ตำแหน่งหัวไหล่($\mathbf{p}_s$) ข้อศอก($\mathbf{p}_e$) ข้อมือ($\mathbf{p}_w$) และ ปลายแขน($\mathbf{p}_h$)

จากรูปที่ 3.3 และ 3.4 จะได้

$$\mathbf{p}_w = \mathbf{p} - \mathbf{R}\,{}^7\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_s$$
$$= \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

โดย ${}^7\mathbf{p}_h$ คือ เวกเตอร์จากตำแหน่งข้อมือ ถึง ปลายแขนกล โดยยึดตาม Coordinate Frameของจุดต่อที่ 7

ขั้นที่ 2: หามุมของจุดต่อ 4 จุดต่อ แรก โดยลักษณะการคำนวณจะคล้ายกับการหา แขนกล 6 แกน [4] โดยจะคำนวณดังนี้

ขั้นที่ 2.1 : กล่าวคือ ในขั้นนี้จะกำหนดให้ $\theta_3 = 0$ ก่อน ก็จะเหลือแกนที่จะพิจารณาให้เคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งที่ต้องการเพียง 3 แกนแรกเท่านั้น ดังนี้

ตำแหน่งหัวไหล่ ($\mathbf{p}_s$) , ตำแหน่งข้อศอก ($\mathbf{p}_e$) , ตำแหน่งข้อมือ ($\mathbf{p}_w$) และ ปลายแขน ($\mathbf{p}_h$) จะได้

$$\theta_1' = \mathrm{Atan}\,2\left(p_{wy}, p_{wx}\right)$$

และจะได้

$$\sin\theta_4 = \frac{l_3^2 + l_5^2 - |\mathbf{p}_w|^2}{2l_3 l_5}$$

โดยให้เครื่องหมาย (‘) คือตำแหน่งที่ $\theta = 0$ ตามรูป 3.3

$\mathbf{p}_w$ สามารถหาในเทอมของ coordinate frame ที่ 1ได้จากเมทริกซ์การหมุนของ 6 แกนแรก จากสมการฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ที่หามาข้างต้น คือ

$$\mathbf{R}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & 0 & \pm s\theta_i \\ s\theta_i & 0 & \mp c\theta_i \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น มุมการหมุนของ θ_2' ได้จาก

${}^1\mathbf{p}_w' = (\mathbf{A}_1^0)^T \mathbf{p}_w$ จะได้

$$\sin\theta'_2 = \frac{{}^1p'_{wy}(l_3 - l_5\sin\theta_4) - {}^1p'_{wx} l_5 \cos\theta_4}{l_3{}^2 + l_5{}^2 - 2l_3 l_5 \sin\theta_4}$$
$$\cos\theta'_2 = \frac{{}^1p'_{wx} + l_5\cos\theta_4 \sin\theta_2'}{l_3 - l_5\sin\theta_4}$$
$$\theta'_2 = \mathrm{Atan}\,2\left(\sin\theta'_2, \cos\theta'_2\right)$$

ขั้นที่ 2.2 : หาตำแหน่งของข้อศอกโดยหมุนจุดข้อศอกรอบแกนเวกเตอร์ p_w เป็นมุม θ โดยหาตำแหน่งของข้อศอก โดยยึดให้ $\theta = 0$ ก่อน ได้

$$\mathbf{p}'_e = \mathbf{A}'_1\,\mathbf{A}'_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{bmatrix} = l_3 \begin{bmatrix} c\theta'_1\, s\theta'_2 \\ s\theta'_1\, s\theta'_2 \\ -c\theta'_2 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $\mathbf{n} = \mathbf{p}_w / |\mathbf{p}_w|$ และจากการแก้สมการตำแหน่งของข้อศอก โดยใช้ Rodrigues rotation formula จะได้

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}'_e)(1-c_\theta) + \mathbf{p}'_e c_\theta + \mathbf{n}\times\mathbf{p}'_e s_\theta$$

ขั้นที่ 2.3 : หามุมการหมุนของ 2 แกนแรก ได้ ดังนี้:

$$\theta_1 = \mathrm{Atan}\,2\left(p_{ey}, p_{ex}\right)$$

$$\theta_2 = \mathrm{Atan}\,2\left(\sqrt{p_{ex}^2 + p_{ey}^2}, -p_{ez}\right)$$

ขั้นที่ 2.4 : หามุมการหมุน θ_3 โดยพิจารณาตำแหน่งของข้อมือ ที่จะเกิดขึ้นถ้า $\theta_3 = 0$ หาได้จาก $p'_{ew} = l_5 \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3\, {}^4\mathbf{z}_4$ ซึ่งในความเป็นจริงจุดข้อมือจะวางตัวอยู่ที่ตำแหน่ง $\mathbf{p}_{ew} = \mathbf{p}_w - \mathbf{p}_e$ ดังนั้นจะได้

$$\theta_3 = \mathrm{Atan}\,2\left(|\mathbf{p}'_{ew}\times\mathbf{p}_{ew}|, \mathbf{p}'_{ew}\cdot\mathbf{p}_{ew}\right)$$

ขั้นที่ 3 : หาตำแหน่งของมือ (hand) ที่ต้องการ การคำนวณจะคล้ายกับการคำนวณในแขนกล 6 แกน [4] ต่างกันคือมีการเพิ่มแกนหมุนที่ 3 เข้ามา ดังนี้

$$\mathbf{R}_7^4 = (\mathbf{R}_4^0)^T\,\mathbf{R}_7^0$$
$$= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $\mathbf{R}_4^0$ หาได้จากค่ามุม ทั้ง 4 ค่าที่ได้จาก ขั้นตอนที่ 2 คือ

$$\mathbf{R}_4^0 = \mathbf{R}_1^0\mathbf{R}_2^1\mathbf{R}_3^2\mathbf{R}_4^3$$
$$= \begin{bmatrix} (c\theta_1c\theta_2c\theta_3 + s\theta_1s\theta_3)c\theta_4 - c\theta_1s\theta_2s\theta_4 & -c\theta_1c\theta_2s\theta_3 + s\theta_1c\theta_3 & (c\theta_1c\theta_2c\theta_3 + s\theta_1s\theta_3)s\theta_4 + c\theta_1s\theta_2c\theta_4 \\ (s\theta_1c\theta_2c\theta_3 - c\theta_1s\theta_3)c\theta_4 - s\theta_1s\theta_2s\theta_4 & -s\theta_1c\theta_2s\theta_3 - c\theta_1c\theta_3 & (s\theta_1c\theta_2c\theta_3 - c\theta_1s\theta_3)s\theta_4 + s\theta_1s\theta_2c\theta_4 \\ s\theta_2c\theta_3c\theta_4 + c\theta_2s\theta_4 & -s\theta_2s\theta_3 & s\theta_2c\theta_3s\theta_4 - c\theta_2c\theta_4 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 4 : หา มุมการหมุน $(\theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7)$ ที่ข้อมือ ดังนี้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จาก

$$\mathbf{R}_5^4\mathbf{R}_6^5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 c\theta_6 & -s\theta_5 & c\theta_5 s\theta_6 \\ s\theta_5 c\theta_6 & c\theta_5 & s\theta_5 s\theta_6 \\ -s\theta_6 & 0 & c\theta_6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{R}_7^4(\mathbf{R}_7^0)^T = \begin{bmatrix} w_{11}c\theta_7 - w_{12}s\theta_7 & w_{11}s\theta_7 + w_{12}c\theta_7 & w_{13} \\ w_{21}c\theta_7 - w_{22}s\theta_7 & w_{21}s\theta_7 + w_{22}c\theta_7 & w_{23} \\ w_{31}c\theta_7 - w_{32}s\theta_7 & w_{31}s\theta_7 + w_{32}c\theta_7 & w_{33} \end{bmatrix}$$

และจาก $\mathbf{R}_5^4\mathbf{R}_6^5 = \mathbf{R}_7^4(\mathbf{R}_7^0)^T$ จากความสัมพันธ์ของตำแหน่งที่ 13 และ 23 ของเมทริกซ์ทั้ง 2 ข้างต้น จะได้

$$\theta_5 = \mathrm{Atan}\,2(w_{23}, w_{13})$$

และในลักษณะเดียวกันสามารถหาค่า θ_6 และ θ_7 ได้จากความสัมพันธ์ของ $\mathbf{R}_6^5\mathbf{R}_7^6 = (\mathbf{R}_5^4)^T\mathbf{R}_7^4$ ดังนี้

$$\mathbf{R}_6^5\mathbf{R}_7^6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 c\theta_7 & -c\theta_6 s\theta_7 & s\theta_6 \\ s\theta_6 c\theta_7 & -s\theta_6 s\theta_7 & -c\theta_6 \\ s\theta_7 & c\theta_7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{R}_5^4)^T\mathbf{R}_7^4 = \begin{bmatrix} w_{11}c\theta_5 + w_{21}s\theta_5 & w_{12}c\theta_5 + w_{22}s\theta_5 & w_{13}c\theta_5 + w_{23}s\theta_5 \\ -w_{31} & -w_{32} & -w_{33} \\ -w_{11}s\theta_5 + w_{21}c\theta_5 & -w_{12}s\theta_5 + w_{22}c\theta_5 & -w_{13}s\theta_5 + w_{23}c\theta_5 \end{bmatrix}$$

จะได้ความสัมพันธ์ของตำแหน่งที่ (1,3) และ (2,3) ของเมทริกซ์ทั้ง 2 ข้างต้น ดังนี้

$$s\theta_6 = w_{13}c\theta_5 + w_{23}s\theta_5$$
$$c\theta_6 = w_{33}$$
$$\theta_6 = \mathrm{Atan}\,2(s\theta_6, c\theta_6)$$

และจากความสัมพันธ์ของตำแหน่งที่ (3,1) และ (3,2) ของเมตริกทั้ง 2 ข้างต้น ดังนี้

$$s\theta_7 = -w_{11}s\theta_5 + w_{21}c\theta_5$$
$$c\theta_7 = -w_{12}s\theta_5 + w_{22}c\theta_5$$
$$\theta_7 = \mathrm{Atan}\,2(s\theta_7, c\theta_7)$$

ซึ่งจากการแก้สมการข้างต้นทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่จากในรูปของตำแหน่ง และ ทิศทางที่ต้องการ หรือ ทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์มาเป็นลักษณะของมุมที่ต้องเคลื่อนที่ของแกนทั้ง 7 แกน ในเทอมของ θ ซึ่งจะมีประโยชน์ในการใช้เป็นตัวแปรเพื่อควบคุมการเคลื่อนที่ผ่านจุด singularity ต่อไป

3.1.3 การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงความเร็ว

จากสมการที่ (2.3) จะได้ geometric jacobian โดยหาได้จาก สมการที่ (2.4) และ สมการฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์ จะได้

$$\mathbf{z}_0 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3 \\ -s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 \\ s_2 s_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_4 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2 \mathbf{R}_4^3 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} s_4(c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) + c_1 s_2 c_4 \\ s_4(s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3) + s_1 s_2 c_4 \\ -s_2 c_3 s_4 + c_2 c_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2 \mathbf{R}_4^3 \mathbf{R}_5^4 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} -s_5(c_4(c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) - c_1 s_2 s_4) - c_5(c_1 c_2 s_3 + s_1 c_3) \\ -s_5(c_4(s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) - s_1 s_2 s_4) - c_5(s_1 c_2 s_3 - c_1 c_3) \\ s_5(s_2 c_3 c_4 + c_2 s_4) + s_2 s_3 c_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_6 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2 \mathbf{R}_4^3 \mathbf{R}_5^4 \mathbf{R}_6^5 \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} (((c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) c_4 - c_1 s_2 s_4) c_5 + (-c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3) s_5) s_6 - (-(c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) s_4 - c_1 s_2 c_4) c_6 \\ (((s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) c_4 - s_1 s_2 s_4) c_5 + (-s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3) s_5) s_6 - (-(s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) s_4 - s_1 s_2 c_4) c_6 \\ ((-s_2 c_3 c_4 - c_2 s_4) c_5 + s_2 s_3 s_5) s_6 - (s_2 c_3 s_4 - c_2 c_4) c_6 \end{bmatrix}$$

และจาก สมการที่(2.6) จะได้

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{A}_3^2\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 l_3 \\ s_1 s_2 l_3 \\ c_2 l_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_4 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{A}_3^2\mathbf{A}_4^3\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 l_3 \\ s_1 s_2 l_3 \\ c_2 l_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_5 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{A}_3^2\mathbf{A}_4^3\mathbf{A}_5^4\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} ((c_1c_2c_3 - s_1s_3)s_4 + c_1s_2c_4)l_5 + c_1s_2l_3 \\ ((s_1c_2c_3 + c_1s_3)s_4 + s_1s_2c_4)l_5 + s_1s_2l_3 \\ (-s_2c_3s_4 + c_2c_4)l_5 + c_2l_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_6 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{A}_3^2\mathbf{A}_4^3\mathbf{A}_5^4\mathbf{A}_6^5\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} ((c_1c_2c_3 - s_1s_3)s_4 + c_1s_2c_4)l_5 + c_1s_2l_3 \\ ((s_1c_2c_3 + c_1s_3)s_4 + s_1s_2c_4)l_5 + s_1s_2l_3 \\ (-s_2c_3s_4 + c_2c_4)l_5 + c_2l_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_7 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{A}_3^2\mathbf{A}_4^3\mathbf{A}_5^4\mathbf{A}_6^5\mathbf{A}_7^6\mathbf{p}_0 = \mathbf{p} = \begin{bmatrix} ((c_1c_2c_3 - s_1s_3)s_4 + c_1s_2c_4)l_5 + c_1s_2l_3 \\ ((s_1c_2c_3 + c_1s_3)s_4 + s_1s_2c_4)l_5 + s_1s_2l_3 \\ (-s_2c_3s_4 + c_2c_4)l_5 + c_2l_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จากสมการ (2.3) จะได้

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Pi} \\ \mathbf{J}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_6 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_6) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_5) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_4) & \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_3) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \\ \mathbf{z}_6 & \mathbf{z}_5 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$$

และเมื่อนำค่าที่ได้ข้างต้นมาใส่ในสมการ (2.3) ได้

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{P1} & \mathbf{j}_{P2} & \mathbf{j}_{P3} & \mathbf{j}_{P4} & \mathbf{j}_{P5} & \mathbf{j}_{P6} & \mathbf{j}_{P7} \\ \mathbf{j}_{O1} & \mathbf{j}_{O2} & \mathbf{j}_{O3} & \mathbf{j}_{O4} & \mathbf{j}_{O5} & \mathbf{j}_{O6} & \mathbf{j}_{O7} \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\mathbf{j}_{P1} = \begin{bmatrix} -l_5 s_4 (s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) - s_1 s_2 (l_5 c_4 + l_3) \\ l_5 s_4 (c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) + c_1 s_2 (l_5 c_4 + l_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{P2} = \begin{bmatrix} -c_1 (l_5 s_2 c_3 s_4 - l_5 c_2 c_4 - c_2 l_3) \\ -s_1 (l_5 s_2 c_3 s_4 - l_5 c_2 c_4 - c_2 l_3) \\ -l_5 s_4 c_2 c_3 - l_5 s_2 c_4 - s_2 l_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{P3} = \begin{bmatrix} -s_4 (s_1 c_3 + c_1 c_2 s_3) l_5 \\ -s_4 (s_1 c_2 s_3 - c_1 c_3) l_5 \\ s_2 l_5 s_4 s_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{P4} = \begin{bmatrix} -l_5 (-c_1 c_2 c_3 c_4 + s_2 s_4 c_1 + s_3 s_1 c_4) \\ l_5 (-s_2 s_4 s_1 + s_3 c_1 c_4 + s_1 c_3 c_2 c_4) \\ -l_5 (c_3 s_2 c_4 + c_2 s_4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{P5} = \mathbf{j}_{P6} = \mathbf{j}_{P7} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

และ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\mathbf{j}_{O1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{O2} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{O3} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{O4} = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3 \\ -s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 \\ s_2 s_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{O5} = \begin{bmatrix} (c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) s_4 + c_1 s_2 c_4 \\ (s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) s_4 + s_1 s_2 c_4 \\ -s_2 c_3 s_4 + c_2 c_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{O6} = \begin{bmatrix} -((c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) c_4 - c_1 s_2 s_4) s_5 + (-c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3) c_5 \\ -((s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) c_4 - s_1 s_2 s_4) s_5 + (-s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3) c_5 \\ -(-s_2 c_3 c_4 - c_2 s_4) s_5 + s_2 s_3 c_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j}_{O7} = \begin{bmatrix} (((c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) c_4 - c_1 s_2 s_4) c_5 + (-c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3) s_5) s_6 - (-(c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) s_4 - c_1 s_2 c_4) c_6 \\ (((s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) c_4 - s_1 s_2 s_4) c_5 + (-s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3) s_5) s_6 - (-(s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) s_4 - s_1 s_2 c_4) c_6 \\ ((-s_2 c_3 c_4 - c_2 s_4) c_5 + s_2 s_3 s_5) s_6 - (s_2 c_3 s_4 - c_2 c_4) c_6 \end{bmatrix}$$

วิเคราะห์ ความสัมพันธ์ระหว่าง geometric jacobian และ analytical jacobian จะได้ดังนี้

จาก

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T = \mathbf{J}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 & \dot{\theta}_7 \end{bmatrix}^T$$

และ จาก

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\vartheta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\vartheta \\ 1 & 0 & c_\vartheta \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{T}(\phi)\dot{\boldsymbol{\varphi}}$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{bmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T = \mathbf{J}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 & \dot{\theta}_7\end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{J}_O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 & \dot{\theta}_7\end{bmatrix}^T$$

เทียบกับลักษณะการหมุนแบบ ZYZ Euler angle จะได้

$$\mathbf{T}(\phi)\begin{bmatrix}\dot{\varphi} & \dot{\vartheta} & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{J}_O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 & \dot{\theta}_7\end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix}0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\vartheta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\vartheta \\ 1 & 0 & c_\vartheta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi} & \dot{\vartheta} & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{J}_O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 & \dot{\theta}_4 & \dot{\theta}_5 & \dot{\theta}_6 & \dot{\theta}_7\end{bmatrix}^T$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \dot{\varphi} & \dot{\vartheta} & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix}\mathbf{J}_P \\ \mathbf{T}^{-1}(\phi)\mathbf{J}_O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \cdots & \dot{\theta}_7\end{bmatrix}^T \\ &= \mathbf{J}_A\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \cdots & \dot{\theta}_7\end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

3.2 การวิเคราะห์ singularity

การวิเคราะห์ singularity สำหรับโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อนมากนัก การวิเคราะห์โดยใช้ เมทริกซ์ จาโคเบียน เป็นอีกวิธีที่เป็นที่นิยม โดยมีขั้นตอนดังนี้

สำหรับแขนกลที่มีลักษณะโครงสร้างแบบแขนกล PA10-7C นั้นจากการคำนวณสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ จะเห็นว่าสามารถแบ่งปัญหาของ singularity ออกเป็น 2 ส่วน คือ

1. singularity ที่เกิดจากแขนกลส่วนที่เคลื่อนที่ให้ได้ตำแหน่ง คือ แขนกล 4-จุดต่อ แรก ตามที่ได้แบ่งการคำนวณออกเป็น 2 ส่วน เพื่อใช้ในการคำนวณค่าอินเวิร์สคิเนแมติกส์ และอีกส่วน คือ

2. singularity ที่เกิดกับส่วนที่ใช้ในการเคลื่อนที่ให้ได้เมทริกซ์การหมุน (rotation matrix) ตามที่ต้องการ หรือส่วนของข้อมือ คือ แขนกล 3 จุดต่อถัดมานั่นเอง

ดังนั้นจะทำการแบ่งวิเคราะห์ เมทริกซ์จาโคเบียน เป็น

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}\mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22}\end{bmatrix}$$

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จากการตั้งแกนในแบบของ PA10-7C ทำให้ $\mathbf{J}_{12}$ =0

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22}) - \det(\mathbf{J}_{21})\det(\mathbf{J}_{12})$$
$$= \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22})$$

จากการวิเคราะห์ จาโคเบียน และ อินเวิร์สคิเนแมติกส์ จะได้ singularity ภายในอยู่ 3 ตำแหน่ง คือ

1. จาก singularity แบ่งออกเป็น 2 ส่วนข้างต้น ดังนั้น singularity ที่เกิดจากแขนกลส่วนที่เคลื่อนที่ให้ได้ตำแหน่งจะเกิด เมื่อ

$$\det(\mathbf{J}_{11})=0$$

ซึ่ง เมทริกซ์ $\mathbf{J}_{11}$ เป็น เมทริกซ์ ขนาด [3x4] ซึ่งไม่สามมารถหา determinant ได้ จากการวิเคราะห์ เมทริกซ์ ดังกล่าวจะสามารถหา determinant ได้ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ ดังกล่าวเป็น เมทริกซ์ จัตุรัส det($\mathbf{J}_{11}$)=0 จึงจำเป็นต้องใช้ความสัมพันธ์ของ pseudo inverse มาช่วยในการวิเคราะห์ กล่าวคือ det($\mathbf{J}_{11}$) จะหาค่าได้เมื่อ pseudo inverse [2]ของ $\mathbf{J}_{11}$ สามารถหาค่าได้ จาก

$$\mathbf{J}^{\dagger} = \mathbf{J}^{T}(\mathbf{J}\mathbf{J}^{T})^{-1}$$
$$\mathbf{J}_{11}^{\dagger} = \mathbf{J}_{11}{}^{T}(\mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{11}{}^{T})^{-1}$$

จะเห็นว่า $\mathbf{J}_{11}^{\dagger} = 0$ จะเกิดได้ จาก สมการ เกิดเมื่อ $\mathbf{J}_{11}{}^{T} = 0$ หรือ $(\mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{11}{}^{T})^{-1} = 0$ ดังนั้นจึงพิจารณาที่ $(\mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{11}{}^{T})^{-1} = 0$ ซึ่งก็คือ $\det(\mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{11}{}^{T}) = 0$

$$\det(\mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{11}^{T}) = s_4{}^2 l_3{}^2 l_5{}^2 (l_3{}^2 - l_3{}^2 c_2{}^2 + 2l_5{}^2 c_3{}^2 c_2{}^2 - 2l_3 l_5 c_4 c_2{}^2 - l_5{}^2 c_2{}^2 + 2l_3 l_5 c_4 +$$
$$2l_5 s_2 c_3 s_4 c_2 l_3 + 2l_5{}^2 s_2 c_3 s_4 c_2 c_4 + l_5{}^2 - 2l_5{}^2 c_3{}^2 c_2{}^2 c_4{}^2)$$

จะเห็นว่า $\det(\mathbf{J}_{11}\mathbf{J}_{11}{}^{T}) = 0$ เมื่อ $s_4 = 0$ ดังนั้นจะเกิด singularity ที่ตำแหน่งนี้ เมื่อ θ_4=0 และ $\theta_4 = \pm\pi$

2. singularity ที่เกิดกับส่วนที่ใช้ในการเคลื่อนที่ให้ได้มุมหมุนตามที่ต้องการหรือส่วนของข้อมือจะเกิด เมื่อ

$$\det(\mathbf{J}_{22})=0$$

จากสมการที่ จะได้

$$\det\left(\mathbf{J}_{22}\right) = -s_6 = 0$$

ดังนั้นจะเกิด singularity เมื่อ θ_6=0 และ $\theta_6 = \pm\pi$

จากรูปที่ 3.1 พบจะสังเกตเห็นว่าที่ตำแหน่ง θ_6=0 และ $\theta_6 = \pm\pi$ เป็นตำแหน่งที่แกน $\mathbf{z}_4$ และแกน $\mathbf{z}_6$ ซ้อนทับกัน ซึ่งทำให้ความสามารถในการเคลื่อนที่ในส่วนข้อมือเสียไป

3. และ singularity อีกตำแหน่งเกิดขึ้นเมื่อ

$$\mathbf{p}_{wx} \neq 0, \mathbf{p}_{wy} \neq 0$$

จากสมการอินเวอร์สคิเนแมติกส์จะเห็นว่าตำแหน่งดังกล่าวจะทำให้ค่า $\theta'_2 = 0$ ซึ่งจะทำให้ค่า $\mathbf{p}_e$ เป็นค่าคงที่ จึงทำให้ไม่สามารถหาค่า θ_1, θ_2 ได้ หรือจะทำให้สมการที่ เกิด infinite solution ได้

3.3 การวิเคราะห์หาสมการการเคลื่อนที่

จากสมการ (2.15) เมื่อนำมาวิเคราะห์ในแขนกล PA10-7C จะได้

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{R}^0_1\mathbf{z}_0 \qquad \mathbf{z}_2 = \mathbf{R}^0_1\mathbf{R}^1_2\mathbf{z}_0 \qquad \mathbf{z}_3 = \mathbf{R}^0_1\mathbf{R}^1_2\mathbf{R}^2_3\mathbf{R}^3_4\mathbf{z}_0 \qquad \mathbf{z}_4 = \mathbf{R}^0_1\mathbf{R}^1_2\mathbf{R}^2_3\mathbf{R}^3_4\mathbf{R}^4_5\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} -c_1c_2s_3 - s_1c_3 \\ -s_1c_2s_3 + c_1c_3 \\ s_2s_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} (c_1c_2c_3 - s_1s_3)s_4 + c_1s_2c_4 \\ (s_1c_2c_3 + c_1s_3)s_4 + s_1s_2c_4 \\ -s_2c_3s_4 + c_2c_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{R}^0_1\mathbf{R}^1_2\mathbf{R}^2_3\mathbf{R}^3_4\mathbf{R}^4_5\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} -((c_1c_2c_3 - s_1s_3)c_4 - c_1s_2s_4)s_5 + (-c_1c_2s_3 - s_1c_3)c_5 \\ -((s_1c_2c_3 + c_1s_3)c_4 - s_1s_2s_4)s_5 + (-s_1c_2s_3 + c_1c_3)c_5 \\ -(-s_2c_3c_4 - c_2s_4)s_5 + s_2s_3c_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_6 = \mathbf{R}^0_1\mathbf{R}^1_2\mathbf{R}^2_3\mathbf{R}^3_4\mathbf{R}^4_5\mathbf{R}^5_6\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_6 = \begin{bmatrix} (((c_1c_2c_3 - s_1s_3)c_4 - c_1s_2s_4)c_5 + (-c_1c_2s_3 - s_1c_3)s_5)s_6 - (-c_1c_2c_3 - s_1s_3)s_4 - c_1s_2c_4)c_6 \\ (((s_1c_2c_3 + c_1s_3)c_4 - s_1s_2s_4)c_5 + (-s_1c_2s_3 + c_1c_3)s_5)s_6 - (-s_1c_2c_3 + c_1s_3)s_4 - s_1s_2c_4)c_6 \\ ((-s_2c_3c_4 - c_2s_4)c_5 + s_2s_3c_5)s_6 - (s_2c_3s_4 - c_2c_4)c_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_7 = \mathbf{R}^0_1\mathbf{R}^1_2\mathbf{R}^2_3\mathbf{R}^3_4\mathbf{R}^4_5\mathbf{R}^5_6\mathbf{R}^6_7\mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{z}_7 = \begin{bmatrix} (((c_1c_2c_3 - s_1s_3)c_4 - c_1s_2s_4)c_5 + (-c_1c_2s_3 - s_1c_3)s_5)s_6 - (-c_1c_2c_3 - s_1s_3)s_4 - c_1s_2c_4)c_6 \\ (((s_1c_2c_3 + c_1s_3)c_4 - s_1s_2s_4)c_5 + (-s_1c_2s_3 + c_1c_3)s_5)s_6 - (-s_1c_2c_3 + c_1s_3)s_4 - s_1s_2c_4)c_6 \\ ((-s_2c_3c_4 - c_2s_4)c_5 + s_2s_3c_5)s_6 - (s_2c_3s_4 - c_2c_4)c_6 \end{bmatrix}$$

และ จากสมการ(2.16) จะได้

$$\mathbf{p}_{O0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{O1} = \mathbf{A}_1^0 [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \qquad \mathbf{p}_{O2} = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{O3} = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad \mathbf{p}_{O4} = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3 [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 s_2 l_3 \\ s_1 s_2 l_3 \\ c_2 l_3 \end{bmatrix} \quad , \quad = \begin{bmatrix} c_1 s_2 l_3 \\ s_1 s_2 l_3 \\ c_2 l_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{O5} = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3 \mathbf{A}_5^4 [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$= \begin{bmatrix} ((c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) s_4 + c_1 s_2 c_4) l_5 + c_1 s_2 l_3 \\ ((s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) s_4 + s_1 s_2 c_4) l_5 + s_1 s_2 l_3 \\ (-s_2 c_3 c_4 + c_2 s_4) l_5 + c_2 l_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{O6} = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3 \mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5 [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$= \begin{bmatrix} ((c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) s_4 + c_1 s_2 c_4) l_5 + c_1 s_2 l_3 \\ ((s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) s_4 + s_1 s_2 c_4) l_5 + s_1 s_2 l_3 \\ (-s_2 c_3 c_4 + c_2 s_4) l_5 + c_2 l_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{O7} = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 \mathbf{A}_4^3 \mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5 \mathbf{A}_7^6 [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$= \begin{bmatrix} ((c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3) s_4 + c_1 s_2 c_4) l_5 + c_1 s_2 l_3 \\ ((s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3) s_4 + s_1 s_2 c_4) l_5 + s_1 s_2 l_3 \\ (-s_2 c_3 c_4 + c_2 s_4) l_5 + c_2 l_3 \end{bmatrix}$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

และจากสมการที่ (2.17)

$$\mathbf{p}_{l_{i-1}} = \mathbf{R}_1^0 (q_1) \ldots \mathbf{R}_{i-1}^{i-2} (q_{i-1}) \mathbf{p}_0$$

จะได้

$$\mathbf{p}_{l0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{p}_{l1} = \mathbf{A}_1^0 \begin{bmatrix} 0 & y_{c1} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \mathbf{p}_{l2} = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & z_{c2} & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_{c1} \end{bmatrix} \quad , \quad = \begin{bmatrix} c_1 s_2 z_{c2} \\ s_1 s_2 z_{c2} \\ c_2 z_{c2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{l_3}=\underset{1}{\mathbf{A}^0}\underset{2}{\mathbf{A}^1}\underset{3}{\mathbf{A}^2}\begin{bmatrix}0 & y_{c3} & 0 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}-c_1s_2y_{c2}+c_1s_2l_3\\ -s_1s_2y_{c2}+s_1s_2l_3\\ -c_2y_{c2}+c_2l_3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{l_4}=\underset{1}{\mathbf{A}^0}\underset{2}{\mathbf{A}^1}\underset{3}{\mathbf{A}^2}\underset{4}{\mathbf{A}^3}\begin{bmatrix}0 & 0 & z_{c4} & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}((c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4+c_1s_2c_4)z_{c4}+c_1s_2l_3\\ ((s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4+s_1s_2c_4)z_{c4}+s_1s_2l_3\\ -(s_2c_3s_4+c_2c_4)z_{c4}+c_2l_3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{l_5}=\underset{1}{\mathbf{A}^0}\underset{2}{\mathbf{A}^1}\underset{3}{\mathbf{A}^2}\underset{4}{\mathbf{A}^3}\underset{5}{\mathbf{A}^4}\begin{bmatrix}0 & y_{c5} & 0 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}(-(c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4-c_1s_2c_4)y_{c5}+((c_1c_2c_3-s_1s_3)s_3)s_4+c_1s_2c_4)l_5+c_1s_2l_3\\ (-(s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4-s_1s_2c_4)y_{c5}+((s_1c_2c_3+c_1s_3)s_3)s_4+s_1s_2c_4)l_5+s_1s_2l_3\\ (s_2c_3s_4-c_4)y_{c5}+(-s_2c_3s_4+c_2c_4)l_5+c_2l_3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{l_6}=\underset{1}{\mathbf{A}^0}\underset{2}{\mathbf{A}^1}\underset{3}{\mathbf{A}^2}\underset{4}{\mathbf{A}^3}\underset{5}{\mathbf{A}^4}\underset{6}{\mathbf{A}^5}\begin{bmatrix}0 & 0 & z_{c6} & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}((((c_1c_2c_3-s_1s_3)c_4-c_1s_2s_4)c_5+(-c_1c_2s_3-s_1c_3)s_5)s_6-(-(c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4\\ -c_1s_2c_4)c_6)z_{c6}+((c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4+c_1s_2c_4)l_5+c_1s_2l_3\\ ((((s_1c_2c_3+c_1s_3)c_4-s_1s_2s_4)c_5+(-s_1c_2s_3+c_1c_3)s_5)s_6-(-(s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4\\ -s_1s_2c_4)c_6)z_{c6}+((s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4+s_1s_2c_4)l_5+s_1s_2l_3\\ (((-s_2c_3c_4-c_2s_4)c_5+s_2s_3s_5)s_6-(s_2c_3s_4-c_2c_4)c_6)z_{c6}+(-s_2c_3s_4+c_2c_4)l_5+c_2l_3\\ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{l_7}=\underset{1}{\mathbf{A}^0}\underset{2}{\mathbf{A}^1}\underset{3}{\mathbf{A}^2}\underset{4}{\mathbf{A}^3}\underset{5}{\mathbf{A}^4}\underset{6}{\mathbf{A}^5}\underset{7}{\mathbf{A}^6}\begin{bmatrix}0 & 0 & z_{c7} & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}((((c_1c_2c_3-s_1s_3)c_4-c_1s_2s_4)c_5+(-c_1c_2s_3-s_1c_3)s_5)s_6-(-(c_1c_2c_3\\ -s_1s_3)s_4-c_1s_2c_4)c_6)z_{c7}+((c_1c_2c_3-s_1s_3)s_4+c_1s_2c_4)l_5+c_1s_2l_3\\ ((((s_1c_2c_3+c_1s_3)c_4-s_1s_2s_4)c_5+(-s_1c_2s_3+c_1c_3)s_5)s_6-(-(s_1c_2c_3\\ +c_1s_3)s_4-s_1s_2c_4)c_6)z_{c7}+((s_1c_2c_3+c_1s_3)s_4+s_1s_2c_4)l_5+s_1s_2l_3\\ (((-s_2c_3c_4-c_2s_4)c_5+s_2s_3s_5)s_6-(s_2c_3s_4-c_2c_4)c_6)z_{c7}+(-s_2c_3s_4+c_2c_4)l_5+c_2l_3\\ \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.14) จะได้ $\mathbf{J}_p^{(l_i)}$ และ $\mathbf{J}_O^{(l_i)}$ และจากภาคผนวก (ข) จะได้ค่า น้ำหนักและตำแหน่งจุดศูนย์กลางของแต่ละแกน ทำให้เราสามารถคำนวณค่า โมเมนต์ความเฉื่อยได้จากสมการ (2.18)

จากสมการที่ (2.13) โดยจากพารามิเตอร์ต่าง ๆเป็นค่ารวมของมอเตอร์และแขนกลของแต่ละแกนไว้แล้ว จึงลดรูปสมการที่ (2.13) ได้

$$\mathbf{B(q)}=\sum_{i=1}^{7}\left(m_{li}\mathbf{J}_p^{(li)T}\mathbf{J}_p^{(li)}+\mathbf{J}_0^{(li)T}\mathbf{R}_i\mathbf{I}_{li}^i\mathbf{R}_i^T\mathbf{J}_0^{(li)}\right) \qquad (3.1)$$

โดยที่ $i=1,2,...,7$

ทำการคำนวณจะได้

$$\mathbf{B(q)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} & b_{57} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} & b_{67} \\ b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} & b_{75} & b_{76} & b_{77} \end{bmatrix}$$

จากสมการการเคลื่อนที่ (2.10)

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(q) \qquad (3.2)$$

โดยที่ $i, j, k = 1, 2, ..., 7$

และ จากสมการที่ (3.1), (3.2) โดยสมมติว่ามอเตอร์ของแต่ละจุดต่อไม่มีแรงเสียดทาน จะได้

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i \quad \text{โดยที่ } i, j, k = 1, 2, ..., 7 \qquad (3.3)$$

สามารถเขียนสมการของการเคลื่อนที่ของแขนกลได้ในรูปแบบของสมการปริภูมิสเตต (state space equation) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(q)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(q,\dot{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(q) \qquad (3.4)$$

เมื่อ $\mathbf{B}(q)$ คือ เมทริกซ์ของมวลของแขนกลนั้นซึ่งมีขนาด $n \times n$

$\mathbf{C}(q,\dot{q})$ คือ เวกเตอร์ของแรงที่หันเหเข้าสู่ศูนย์กลาง (centripetal) และอิทธิพลของแรงโคริออริส (Coriolis force) ซึ่งมีขนาด $n \times 1$

$\mathbf{G}(q)$ คือ เวกเตอร์ของแรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational) ซึ่งมีขนาด $n \times 1$

บทที่ 4
การทดลอง

ในบทนี้เป็นการทดลองสมการที่ทำการคำนวณได้ เพื่อทดสอบความถูกต้องของสมการที่หาได้ จะทำการทดสอบสมการโดยจะทำการทดลองด้วยการจำลองการเคลื่อนที่ และการส่งค่าจริงไปยังแขนกล PA10-7C

อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่

1. แขนกลของบริษัท Mitsubishi heavy industrial, Ltd. รุ่น PA10-7C ซึ่งเป็นแขนกล 7 แกน

2. ชุดควบคุม (robot control unit) ของแขนกล PA10-7C รุ่น PA10-7C-CNT ของบริษัท Mitsubishi heavy industrial, Ltd. พร้อมสายสัญญาณ 1 ชุด

3. Motion control CPU Board รุ่น MHI-D7281 ของบริษัท Mitsubishi heavy industrial,Ltd.

4. DIO board รุ่น PIO-32/32L ของบริษัท CONTEC

5. เครื่องคอมพิวเตอร์เวิร์กสเตชันยี่ห้อ HP รุ่น XW6200 ใช้หน่วยประมวลผลกลาง xeon ความเร็ว 3.40 GHz มีหน่วยความจำขนาด 1 GB 1 เครื่อง

6. โปรแกรม SolidWorks2007 SP0.0 cosmos with plug in motion2007 ของบริษัท SolidWorks Corporation, Matlab ของบริษัท The MathWorks, Inc. และ Visual c++ .net ของบริษัท Microsoft Corporation

7. แขนกล PhantomOmni ของบริษัท SensAble Technologies, Inc.,

โดยสามารถดูภาพอุปกรณ์ทั้งหมดได้จากภาคผนวก ก

การทดลองที่กล่าวถึงจะแบ่งเป็น 3 ส่วนหลัก คือ

1. การทดสอบสมการโดยใช้สมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ในการควบคุมแขนกล

2. การทดสอบสมการโดยใช้สมการจาโคเบียน (jacobian) ในการควบคุมแขนกล

3. การทดสอบสมการโดยใช้สมการการเคลื่อนที่ในการควบคุมแขนกล

โดยในแต่ละการทดสอบจะแบ่งการทดลองออกเป็น 4 การทดลอง คือ ปรับเปลี่ยนค่ามุมหมุนของแกนอิสระที่เพิ่มขึ้น โดยจะใช้ค่าการทดลองที่ $\theta = 0, \pi/6, \pi/3$ และที่ $\pi/2$ เรเดียน เพื่อทดลองว่าสมการสามารถใช้ได้ในทุกกรณี และในแต่ละมุมที่กำหนด จะออกแบบการเคลื่อนที่ในลักษณะต่างๆ คือ การเคลื่อนที่เป็น วงกลม เส้นทางการเคลื่อนที่ได้มาจากการวาดลักษณะการเคลื่อนที่ในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion แล้วส่งค่าตำแหน่งและมุมหมุนที่ต้องการที่เวลาต่างๆ และ ในลักษณะอิสระ โดยเส้นทางการเคลื่อนที่จะนำมาจากการใช้หุ่น Phantom Omni เคลื่อนที่แล้วส่งค่าตำแหน่งและมุมหมุนที่ต้องการที่เวลาต่างๆ เพื่อนำไปใช้ในการทดสอบว่าเส้นทางที่ส่งไปให้กับสมการที่ได้จากบทที่ 3 นั้นถูกต้องแม่นยำโดยจะใช้วิธีการทดลอง ดังนี้

1. กำหนดจุดที่ต้องการให้แขนกล PA10-7C เคลื่อนที่ไปในเวลาใดๆ

2. ส่งค่าจุดที่ต้องการในลักษณะทรานส์ฟอร์มเมทริกซ์ไปคำนวณการเคลื่อนที่จากลักษณะของ cartesian space ไปยัง joint space ด้วยสมการทั้ง 3 ข้างต้น

3. ทดลองจำลองการเคลื่อนที่ด้วยโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion โดยใช้ข้อมูล 3D solid model ที่สร้างขึ้นสำหรับแขนกล PA10-7C

4. ทดลองส่งค่าดังกล่าวไปยังแขนกล PA10-7C

5. เปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนเพื่อตัวบอกความถูกต้องของสมการ

โดยกำหนดให้ระนาบ θ ต่างๆที่ทำการทดลองในบทนี้ ถ้าไม่มีการกำหนดเพิ่มเติมไว้ให้ยึดการกำหนดให้เป็นไปตามมุม θ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 3.3

4.1 การทดสอบสมการโดยใช้ สมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ในการควบคุมแขนกล

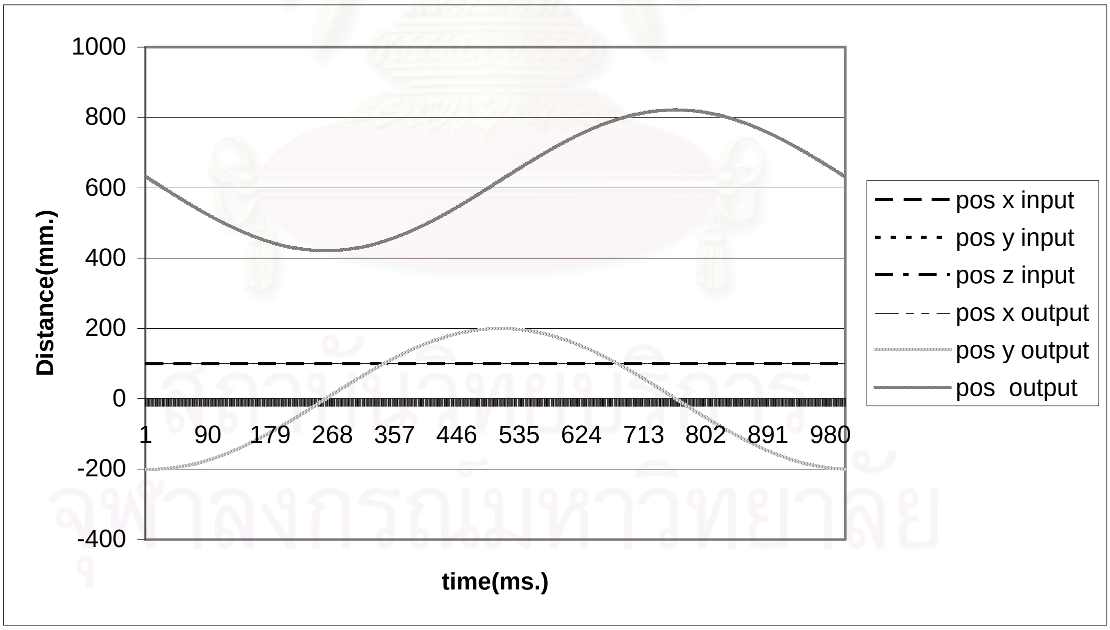
ทดสอบที่ระนาบต่างๆที่กำหนดไว้ คือ ที่ระนาบทำมุม $\theta = 0, \pi/6, \pi/3$ และ $\pi/2$ เรเดียน โดยจะทดลองที่เส้นทางการเคลื่อนที่ 2 ลักษณะ คือ

1. ทำการทดสอบกับเส้นทางเคลื่อนที่ที่ปลายแขนหุ่นยนต์เป็นวงกลมรัศมี 200 มิลลิเมตร

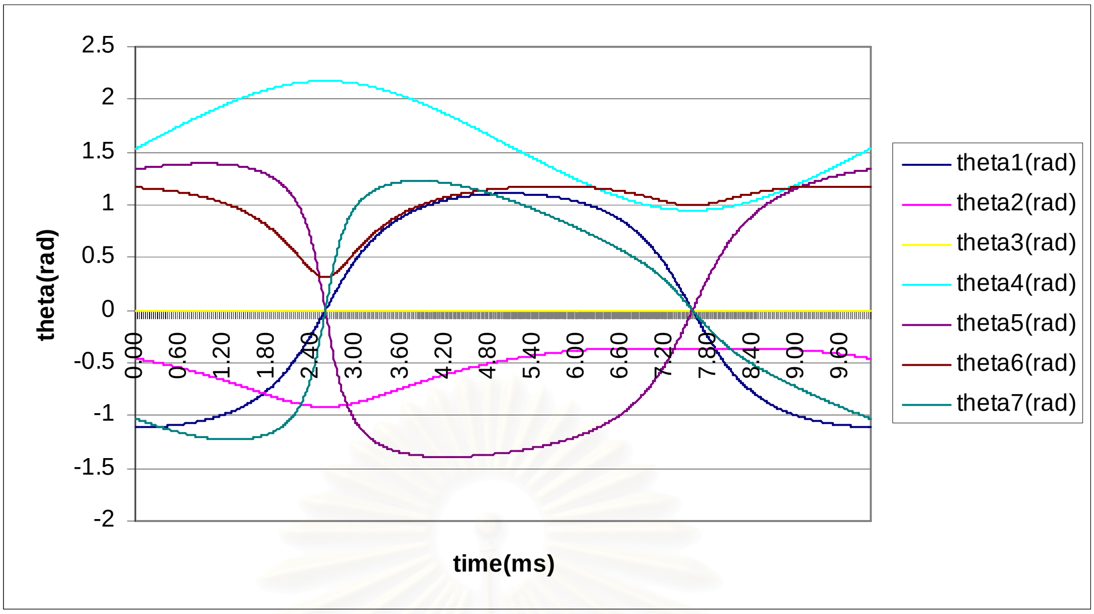
2. ทำการทดสอบกับเส้นทางการเคลื่อนที่ปลายแขนหุ่นยนต์ที่เป็นลักษณะรูปแบบอิสระ (freeform) โดยจะใช้แขนกล Phantom เป็นตัวสร้างเส้นทางการเคลื่อนที่และส่งค่าไปคำนวณมุมที่จุดต่อแต่ละจุดต่อของแขนหุ่นยนต์โดยใช้สมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่หามาได้ของ PA10-7C แล้วจึงส่งค่าไปยังแขนกล PA10-7C เพื่อตรวจสอบการเคลื่อนที่ที่ปลายแขน

4.1.1 ทดสอบที่ ระนาบ $\theta = 0$ เรเดียน

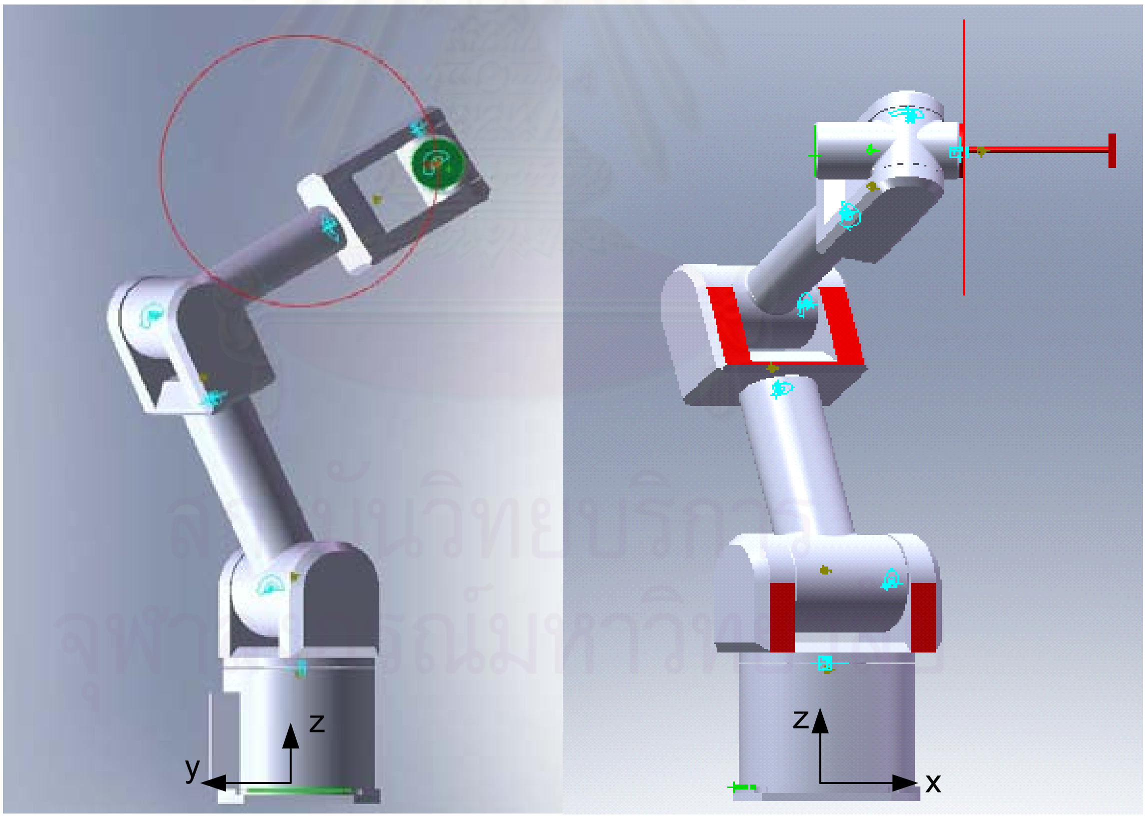
1. เส้นทางเคลื่อนที่ที่เป็นวงกลมที่ปลายแขนหุ่นยนต์ โดยเส้นทางนี้หาได้จากสมการวงกลมที่อยู่ในรูปของสมการพาราเมทริกซ์ แล้วแปลงมาเพื่อหาตำแหน่งใน cartesian space ในแต่ละแกน (x, y, z) ค่าตำแหน่งใน cartesian space ดังกล่าวนี้จะถูกนำไปใช้สำหรับการเปรียบเทียบความถูกต้องของสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ที่หามาได้ โดยการนำค่าทางเดินที่เป็นวงกลมใน cartesian space นี้ไปแทนค่าในสมการ อินเวิร์สคิเนแมติกส์ เพื่อคำนวณหาค่ามุมในระบบพิกัด joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ต้องเคลื่อนที่เพื่อให้ปลายแขนมีการเคลื่อนที่เป็นวงกลม รูปที่ 4.2 เป็นค่ามุมที่จุดต่อต่าง ๆ ที่คำนวณหาได้จากสมการ อินเวิร์สคิเนแมติกส์ ที่หาได้ ในกรณีของระนาบ $\theta = 0$ เรเดียน จากค่ามุมที่จุดต่อนี้ของต่อใน joint space ที่คำนวณหาได้นี้นำไปใส่ในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion โดยใช้ข้อมูล 3D solid model ที่สร้างขึ้นสำหรับแขนกล PA10-7C เพื่อคำนวนหาตำแหน่งปลายแขนใน cartesian Space ค่าตำแหน่งปลายแขนในแนวแกน x, y, และ z ที่ได้จากโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion นี้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับตำแหน่งที่ได้จากสมการพาราเมทริกซ์ ผลที่ได้ดังแสดงในรูปที่ 4.1 จากรูปที่ 4.1 จะเห็นว่าค่าทั้งสองนั้นมีค่าใกล้เคียงกันมากจนเกือบทับกันทั้ง 3 แกน ส่วนรูปที่ 4.3 เป็นรูปแสดงการเคลื่อนที่ของปลายแขนหุ่นยนต์ของข้อมูล 3D solid model ในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion



รูปที่ 4.1: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesians space ระหว่างค่าที่กำหนดได้จากสมการพาราเมทริกซ์กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



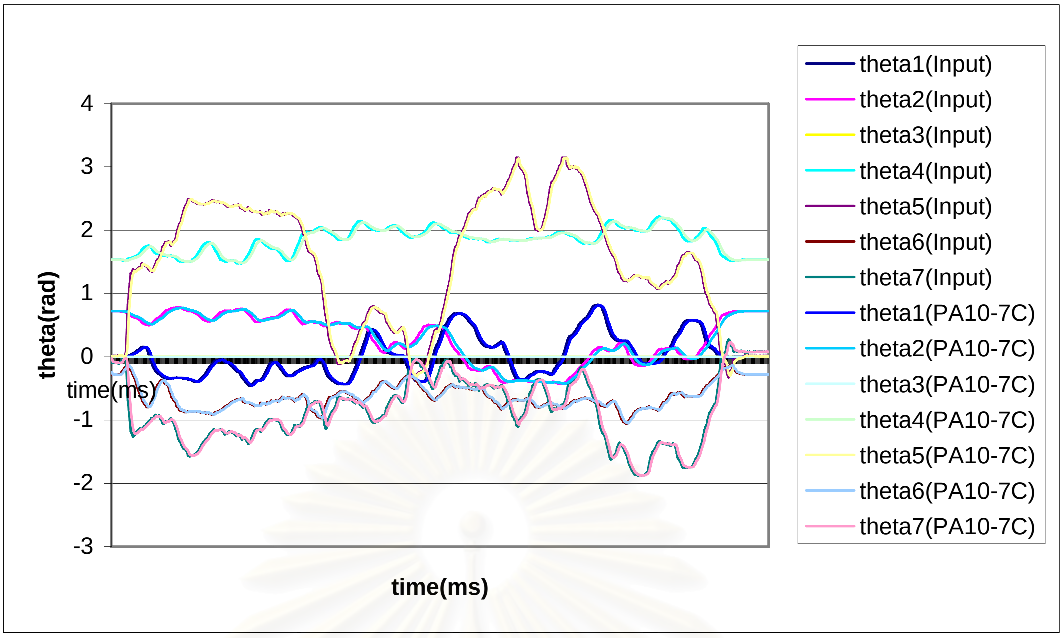
รูปที่ 4.2: ค่ามุมทั้ง 7 แกนที่ได้จากการนำค่าใน cartesians space ของปลายแขนที่ เคลื่อนที่แบบวงกลมไปคำนวณในสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



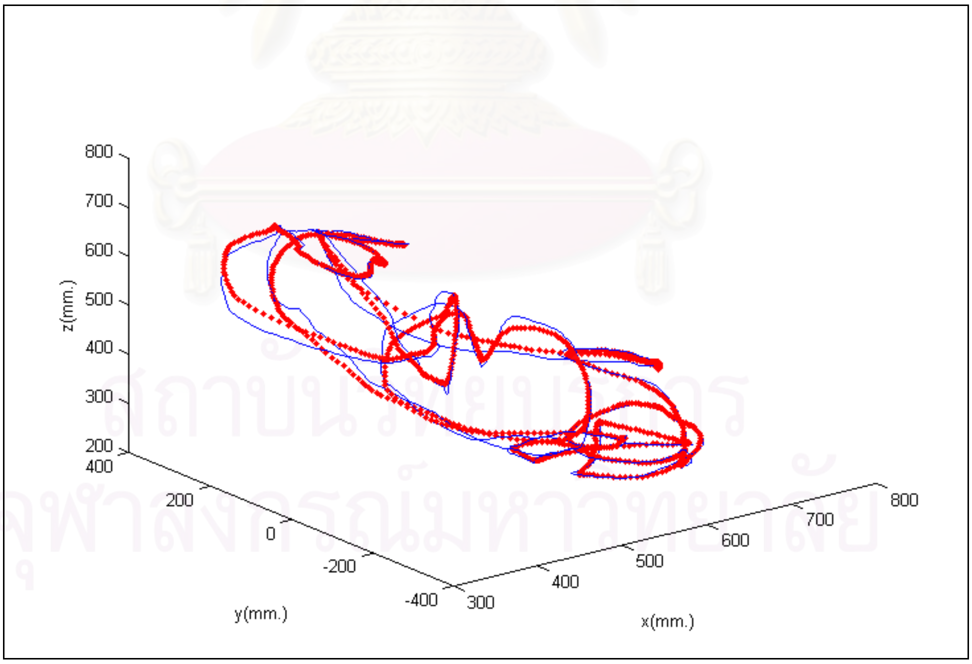
รูปที่ 4.3: การผลทดสอบการจำลองการทำงานในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน

2. ทดสอบด้วยแขนกล Phantom Omni โดยแขนกล Phantom Omni นี้เป็นแขนชนิด 6 องศาอิสระ เราจะใช้แขนกล Phantom Omni นี้เพื่อสร้างวิถีการเคลื่อนที่แบบอิสระ (freeform path) โดยการเคลื่อนที่แขนกล Phantom ในลักษณะอิสระ (freeform) แขนกล Phantom Omni นี้จะบันทึกค่าทั้งตำแหน่ง (position) และการเรียงตัว (Orientation) โดยเก็บในรูปแบบของทรานส์ฟอร์มเมทริกซ์ จากเมทริกซ์การหมุน (rotation matrix) หรือเมทริกซ์การหมุน ที่วัดมาได้นี้สามารถนำไปคำนวณหามุมออยเลอร์ (Euler angle) ในระบบ ZYZ ได้ การทดลองนี้จะทำการเก็บค่าตามเส้นทางการเคลื่อนที่ปลายขนของแขนกล Phantom แบบอิสระทุกๆ 10 ms ในรูปของทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์จากนั้นค่าตำแหน่งใน cartesians space ที่ได้จากทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์นี้จะใช้สำหรับการเปรียบเทียบความถูกต้องของสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ที่หามาได้ โดยนำค่าเส้นทางการเคลื่อนที่ในรูปของทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ ในแต่ละเวลาสุ่ม (Sampling time) ที่ 10ms ไปแทนค่าในสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์เพื่อคำนวณหาค่ามุมการเคลื่อนที่ของจุดต่อของแขนกล PA10-7C ในพิกัด joint space ที่ต้องเคลื่อนที่เพื่อให้ได้เส้นทางการเคลื่อนที่ของปลายแขนเป็นไปตามแบบการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom

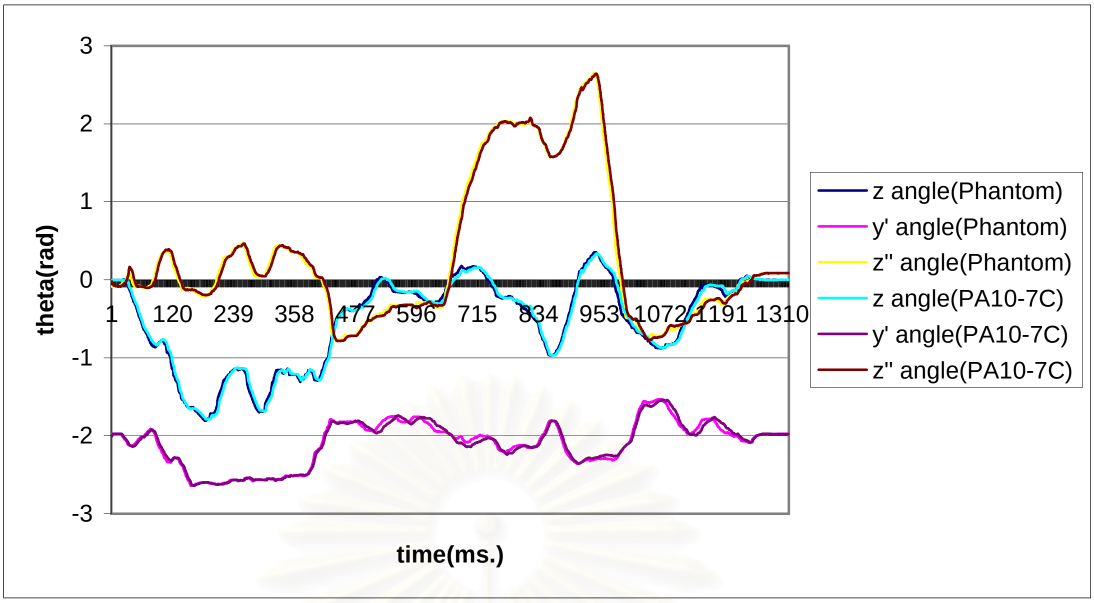
ในการงานวิจัยนี้ ได้พัฒนาโปรแกรมที่ใช้ในเชื่อมต่อระหว่างแขนหุ่นยนต์ PA10-7C กับเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการควบคุม โดยใช้ภาษา visual C++ โดยโปรแกรมนี้จะส่งค่าคำสั่งการเคลื่อนที่เชิงมุมของจุดต่อของแขนหุ่นยนต์ PA10-7C ที่คำนวณได้จากสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์โดยใช้ทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ที่ได้จากแขนกล Phantom เมื่อแขนหุ่นยนต์ PA10-7C ได้รับคำสั่งดังกล่าวแล้วจุดต่อต่าง ๆ ก็จะเคลื่อนที่ตามคำสั่งนั้นในแบบ real-time ในขณะเดียวกันก็จะบันทึกมุมที่จุดต่อต่าง ๆ ทั้ง 7 จุดต่อของแขนหุ่นยนต์ PA10-7C เคลื่อนที่จริง ค่ามุมที่จุดต่อเคลื่อนที่จริงที่วัดได้นี้จะถูกนำไปเปรียบกับค่ามุมจุดต่อที่คำนวณได้จากสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์โดยใช้ค่าจากทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกส์ที่วัดจากปลายแขนของแขนกล Phantom ดังตัวอย่างแสดงไว้ในรูปที่ 4.5 ในกรณีของระนาบ $\theta = 0$ เรเดียน จากรูป 4.5 นี้จะเห็นได้ว่าค่าทั้งสองชุดนั้นมีการเลื่อมกันบ้างอันเนื่องจากมีเวลาหน่วง (delay time) ในระหว่างการส่งคำสั่งการเคลื่อนที่กับการเคลื่อนที่จริงของแขนกล PA10-7C ส่วนในกรณีของแขนกล Phantom จะมีเวลาหน่วงน้อยกว่ามาก รูปที่ 4.6 เป็นรูปที่แสดงการเปรียบเทียบค่าตำแหน่งปลายแขนของหุ่นยนต์ PA10-7C กับแขนกล Phantom ในพิกัด cartesian space จะเห็นว่าผลกระทบเนื่องจากเวลาหน่วงนั้นทำให้ตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom มีการคลาดเคลื่อนอยู่บ้าง รูป 4.7 เป็นรูปแสดงการเปรียบเทียบการเรียงตัวของตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom โดยเป็นการคำนวณมุมออยเลอร์ในรูปแบบ ZYZ จากสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ จะเห็นว่ามีค่าใกล้เคียงกันมาก ส่วนของการผิดพลาดก็เนื่องมาจากเวลาหน่วงดังที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง



รูปที่ 4.5: ค่ามุมทั้ง 7 แกน จากการส่งค่าทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ของปลายแขนกล Phantom ไปยังสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของ PA10-7C เปรียบเทียบกับค่ามุมทั้ง 7 ที่ได้จากการเคลื่อนที่จริงของ PA10-7C ผ่านโปรแกรม visual c++ ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



รูปที่ 4.6: เส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom เทียบกับ PA10-7C โดยเส้น "--" แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom และ "." แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของ PA10-7C ในลักษณะ freeform ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



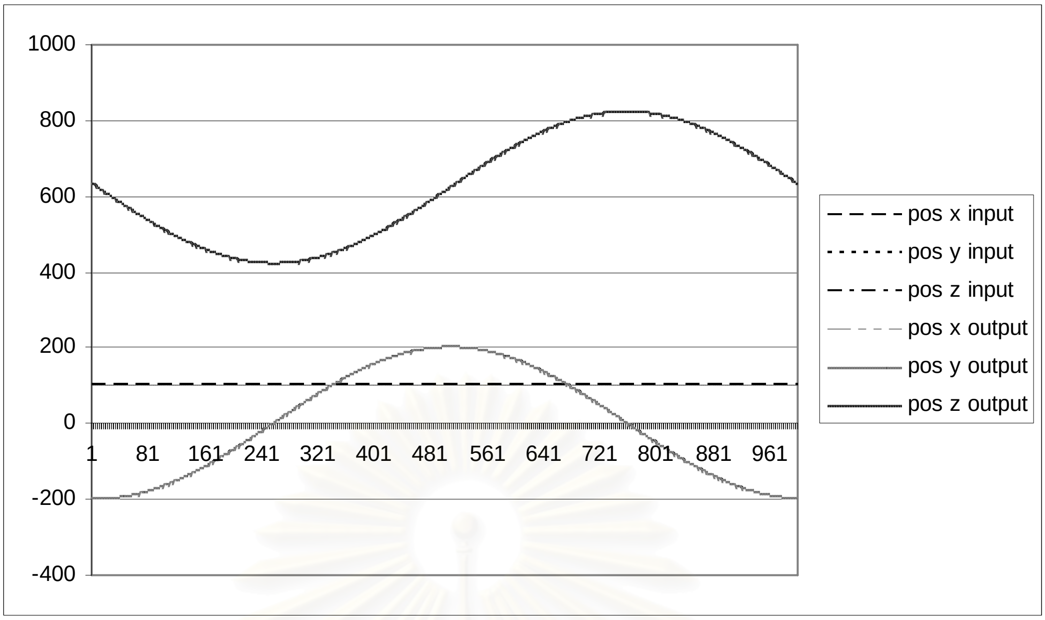
รูปที่ 4.7: เปรียบเทียบการเรียงตัวของตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom โดยเป็นการคำนวณมุมออยเลอร์ในรูปแบบ ZYZ ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน

การทดสอบความถูกต้องของสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่ระนาบ θ อื่น สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับในกรณีของ θ = 0 เรเดียน ผลจากทดสอบดังจะกล่าวใน หัวข้อ 4.1.2 สำหรับกรณี $\theta = \pi/2$ เรเดียน หัวข้อ 4.1.3 สำหรับกรณี $\theta = \pi/3$ เรเดียน และ หัวข้อ 4.1.4 สำหรับกรณี $\theta = \pi/6$ เรเดียน

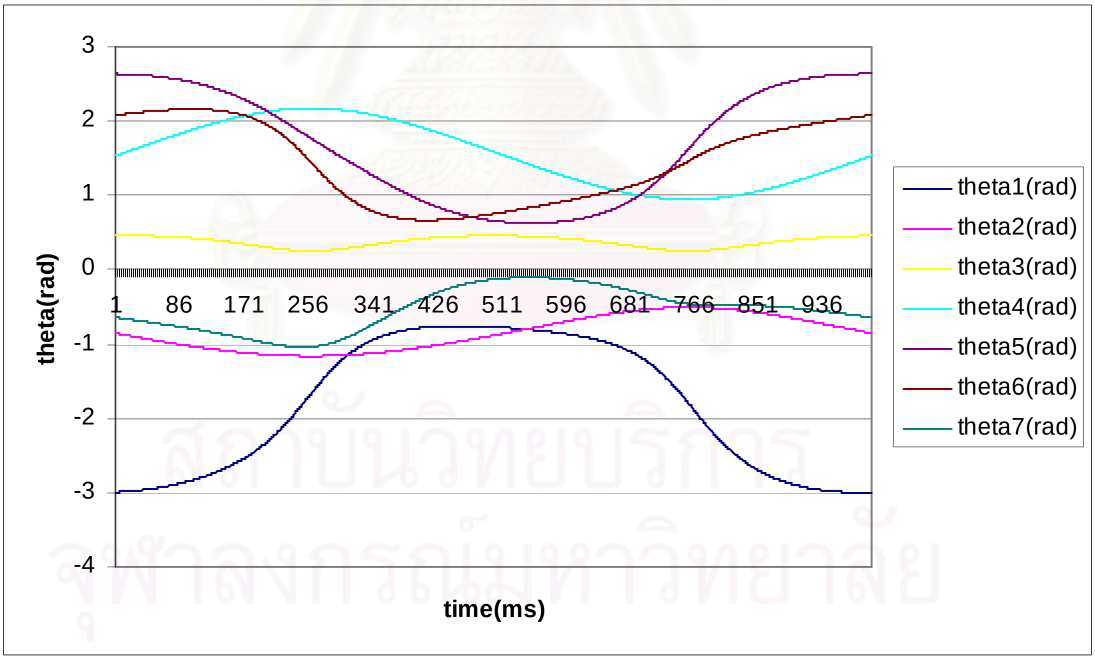
4.1.2 ทดสอบที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน

1 ทดสอบที่เส้นทางการเคลื่อนที่ในลักษณะวงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 200 มิลลิเมตร ทำการทดลองเช่นเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.1.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/2$ เรเดียน ได้ผลดังนี้ คือ

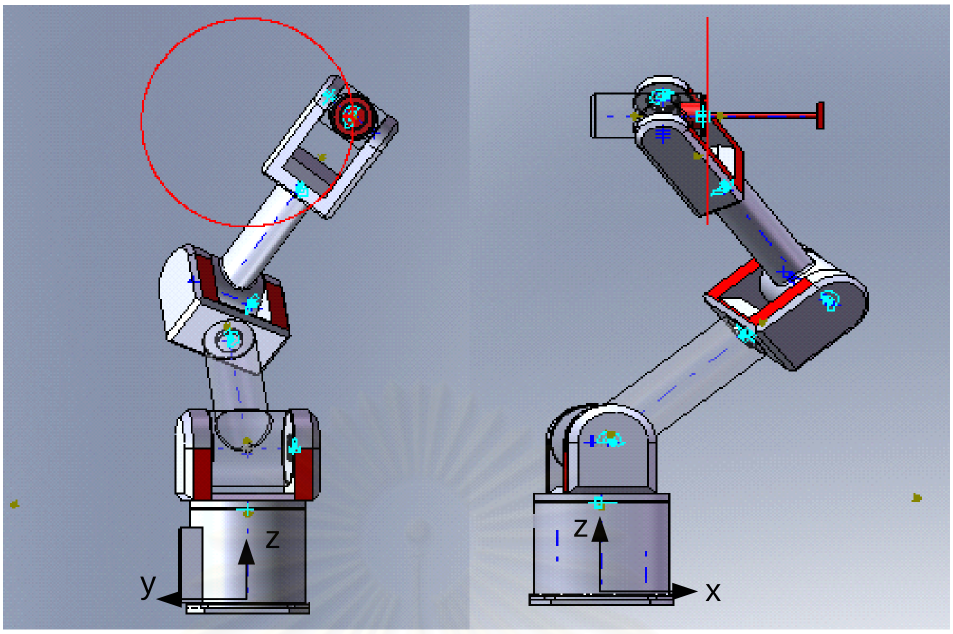
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.8: เปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดได้จากสมการพาราเมทริกซ์กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน

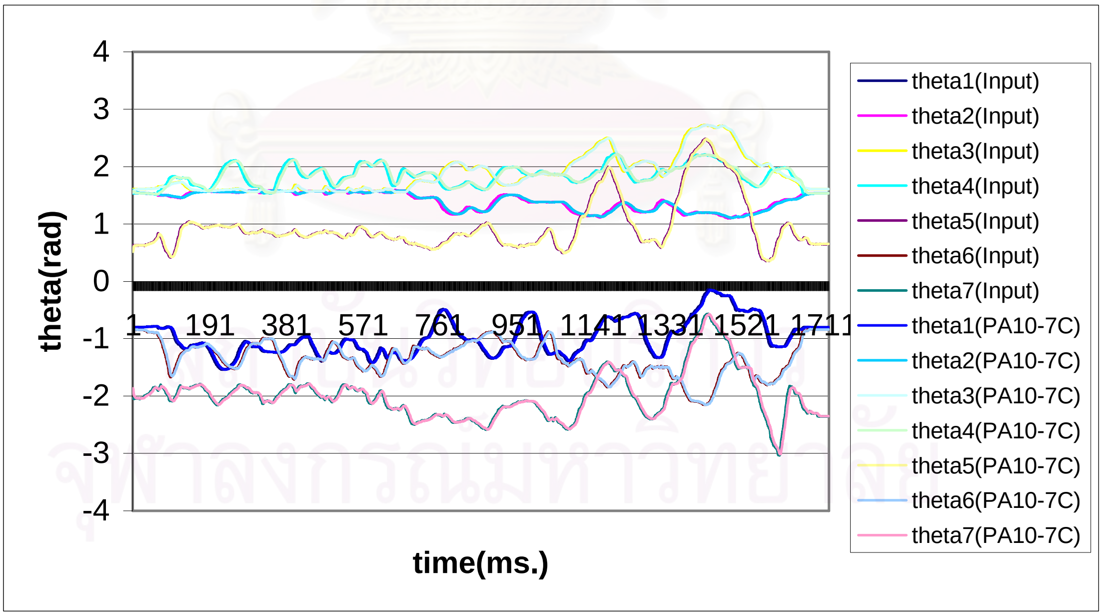


รูปที่ 4.9: ค่ามุมทั้ง 7 แกนที่ได้จากการนำค่าใน cartesians space ของปลายแขนที่เคลื่อนที่แบบวงกลมไปคำนวณในสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน

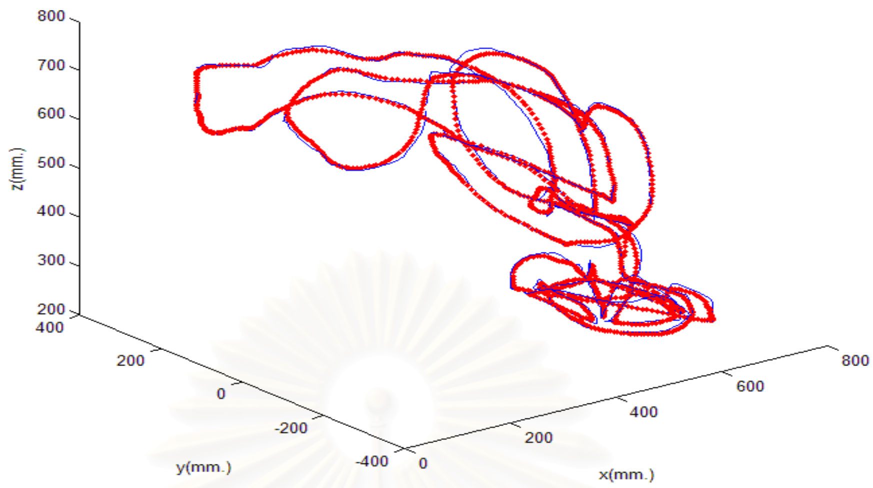


รูปที่ 4.10: ผลทดสอบการจำลองการทำงานในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion ที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน

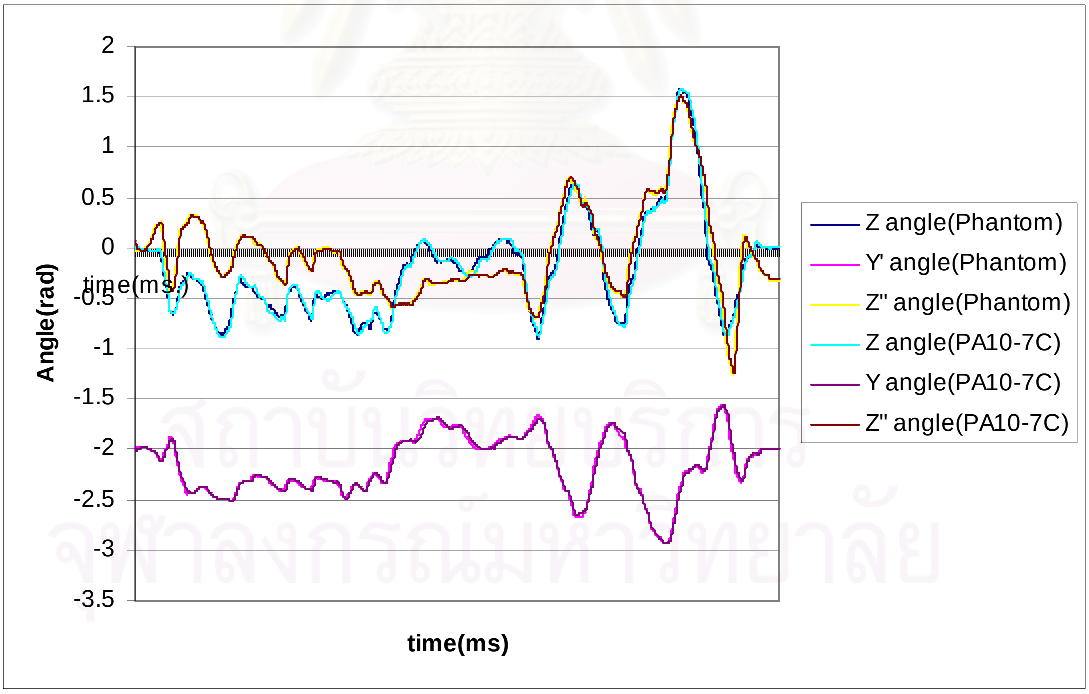
2. ทดสอบด้วยแขนกล Phantom Omni และทำการทดลองเช่นเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.1.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/2$ เรเดียน



รูปที่ 4.11: ค่ามุมทั้ง 7 แกน จากการส่งค่าทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ของปลายแขนกล Phantom ไปยังสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของ PA10-7C เปรียบเทียบกับค่ามุมทั้ง 7 ที่ได้จากการเคลื่อนที่จริงของ PA10-7C ผ่านโปรแกรม visual c++ ที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน



รูปที่ 4.12: เส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom เทียบกับ PA10-7C โดยเส้น “--“ แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom และ “.” แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของ PA10-7C ในลักษณะ freeform ที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน

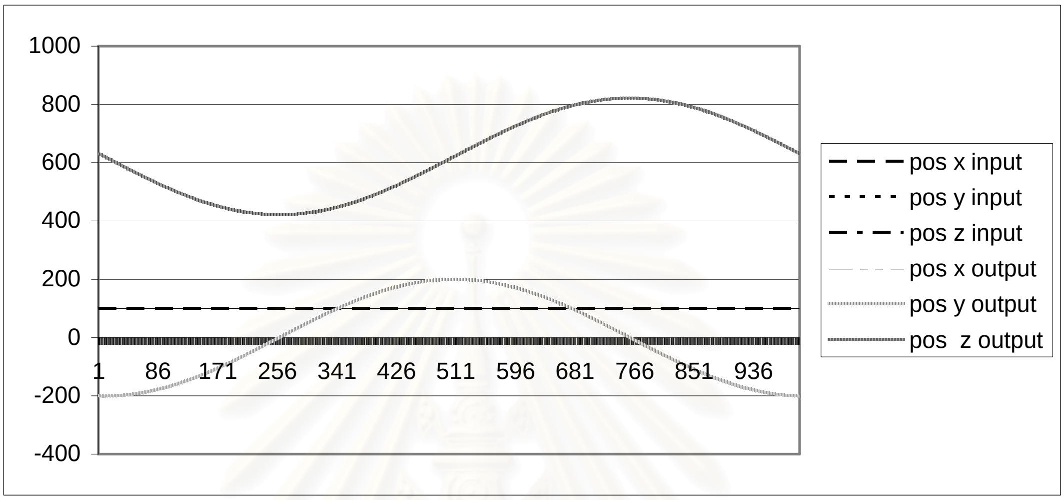


รูปที่ 4.13: การเปรียบเทียบการเรียงตัวของตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom โดยเป็นการคำนวณมุมออยเลอร์ในรูปแบบ ZYZ ที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน

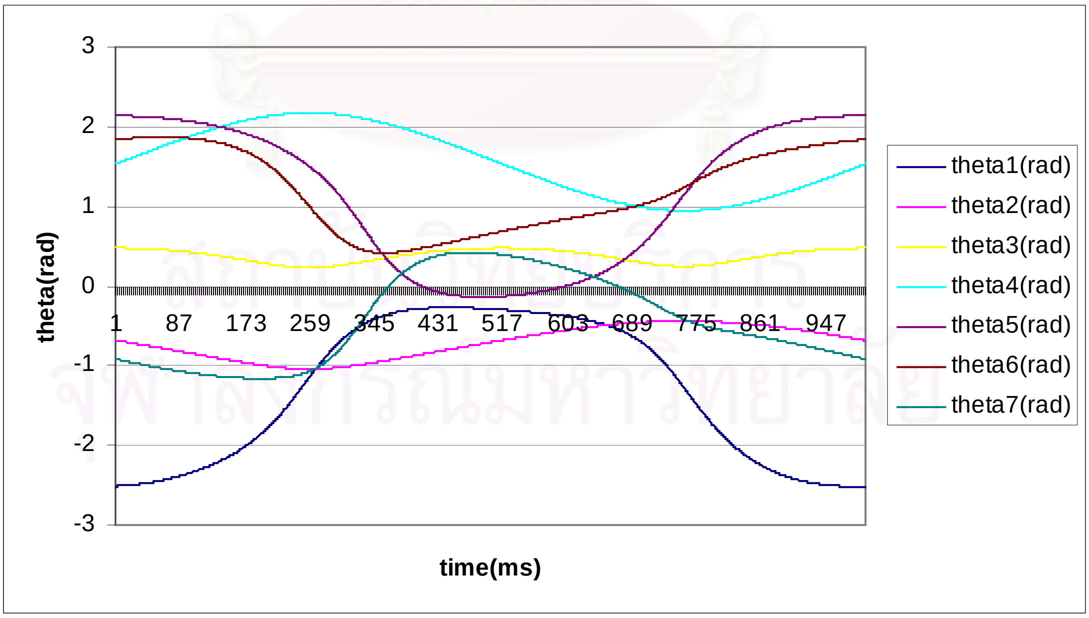
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.1.3 ทดสอบที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน

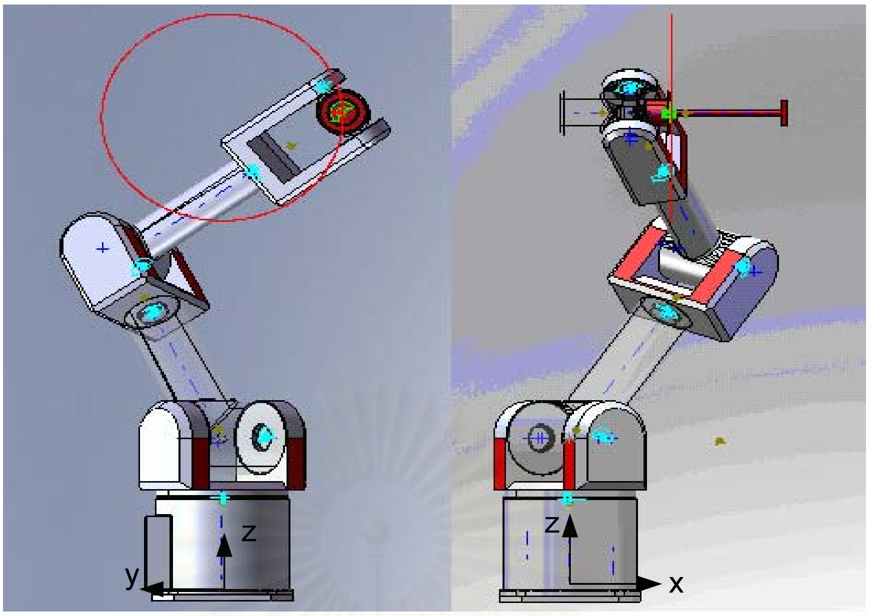
1 เส้นทางการเคลื่อนที่ในลักษณะวงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 200 มิลลิเมตร และทำการทดลองในลักษณะเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.1.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/3$ เรเดียนจะได้



รูปที่ 4.14: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดได้จากสมการพาราเมทริกซ์กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน

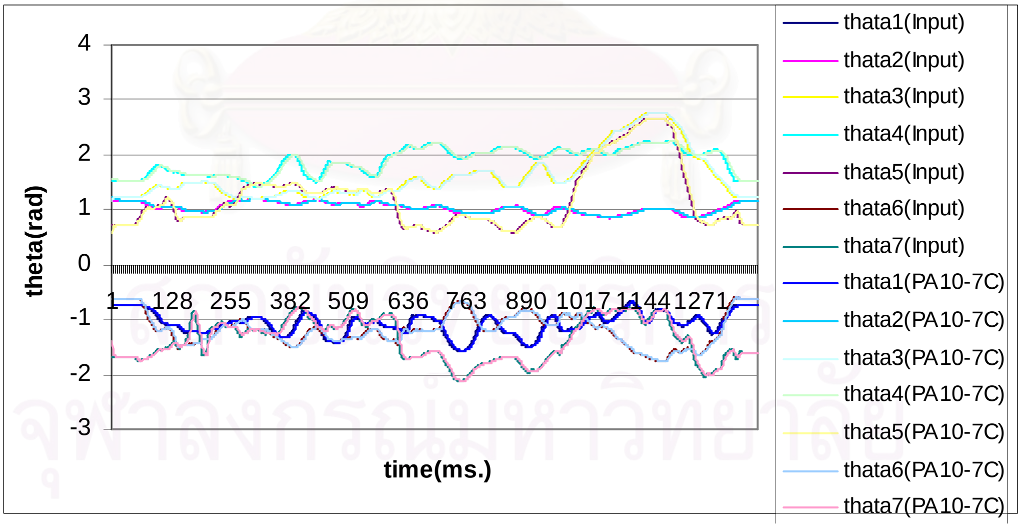


รูปที่ 4.15: ค่ามุมทั้ง 7 แกนที่ได้จากการนำค่าใน cartesian space ของปลายแขนที่เคลื่อนที่แบบวงกลมไปคำนวณในสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน

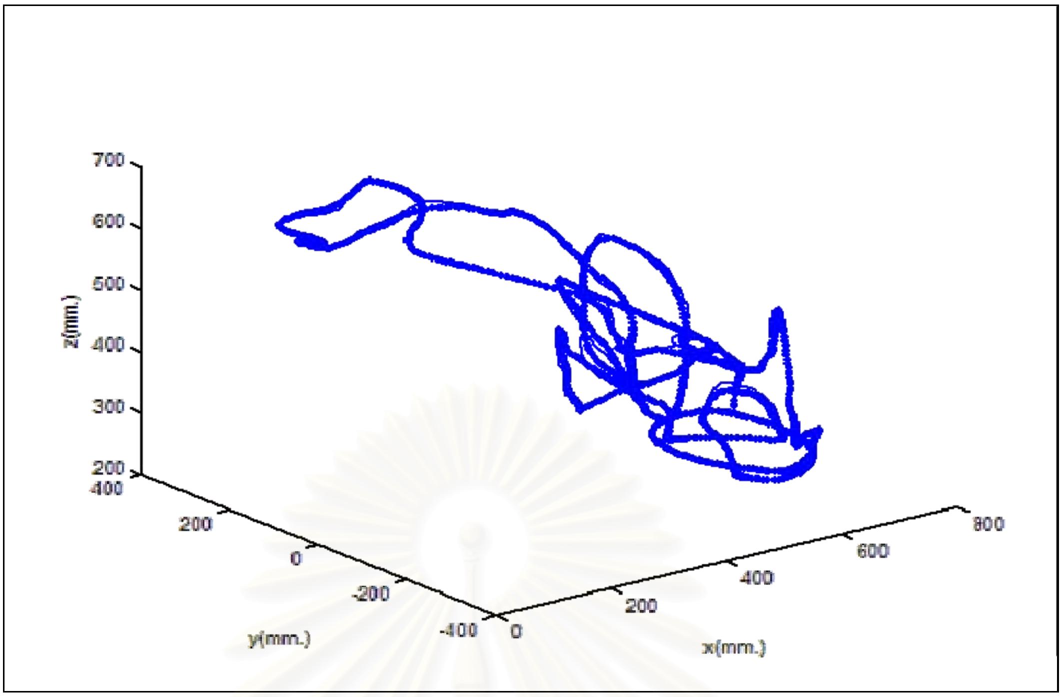


รูปที่ 4.16: การผลทดสอบการจำลองการทำงานในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน

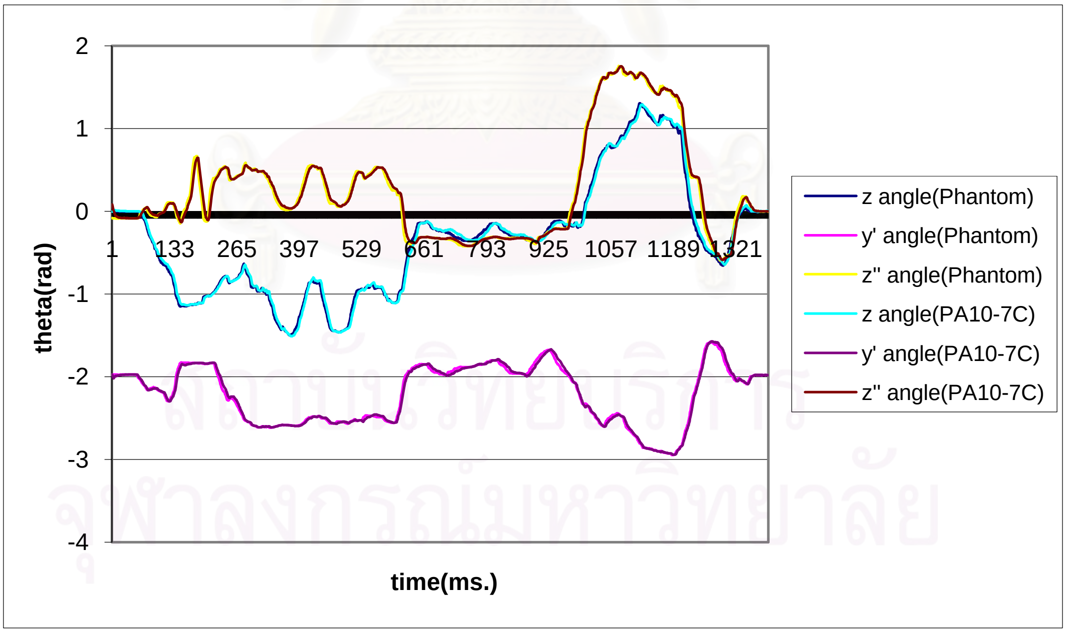
2. ทดสอบด้วยแขนกล Phantom Omni ในลักษณะการเคลื่อนที่แบบอิสระและทำการทดลองในลักษณะเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.1.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/3$ เรเดียนจะได้



รูปที่ 4.17: ค่ามุมทั้ง 7 แกน จากการส่งค่าทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ของปลายแขนกล Phantom ไปยังสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของ PA10-7C เปรียบเทียบกับค่ามุมทั้ง 7 ที่ได้จากการเคลื่อนที่จริงของ PA10-7C ผ่านโปรแกรม visual c++ ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



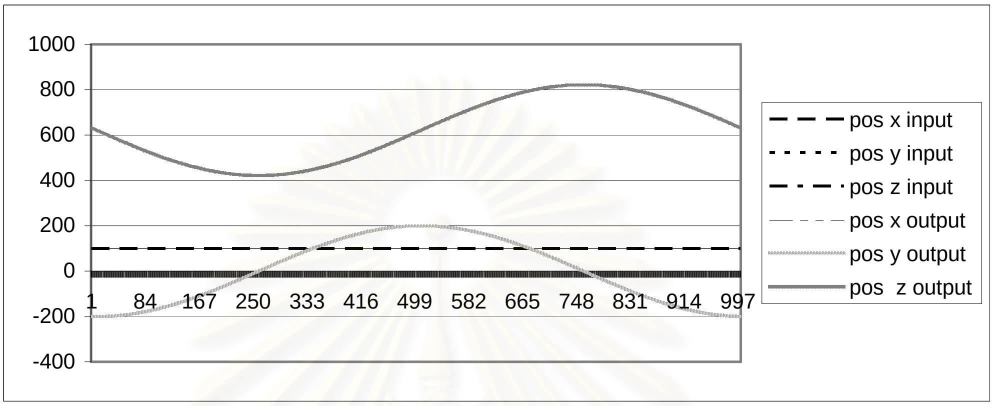
รูปที่ 4.18: เส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom เทียบกับ PA10-7C โดยเส้น “--“ แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom และ “.” แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของ PA10-7C ในลักษณะ freeform ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



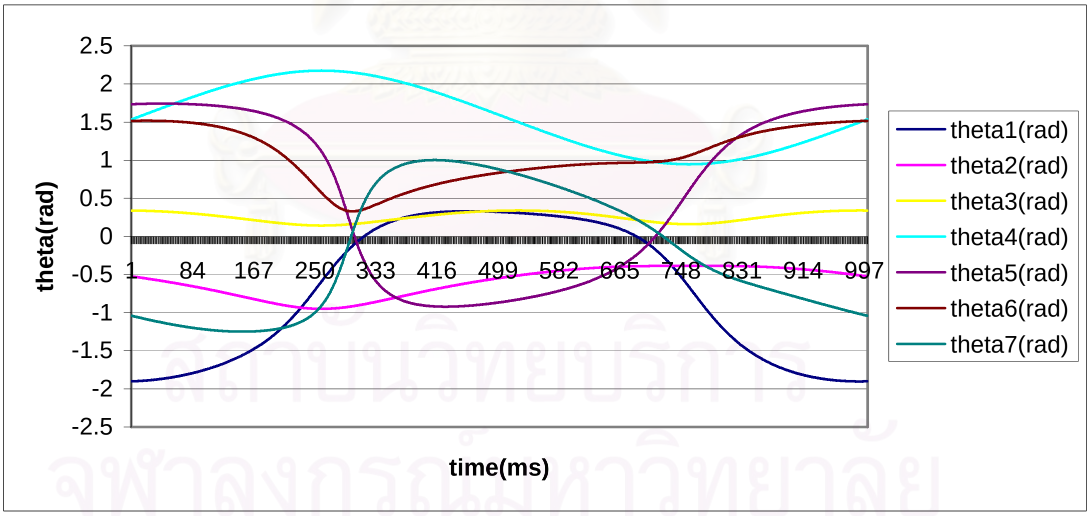
รูปที่ 4.19: เป็นรูปแสดงการเปรียบเทียบการเรียงตัวของตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom โดยเป็นการคำนวณมุมออยเลอร์ในรูปแบบ ZYZ ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน

4.1.4 ทดสอบที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน

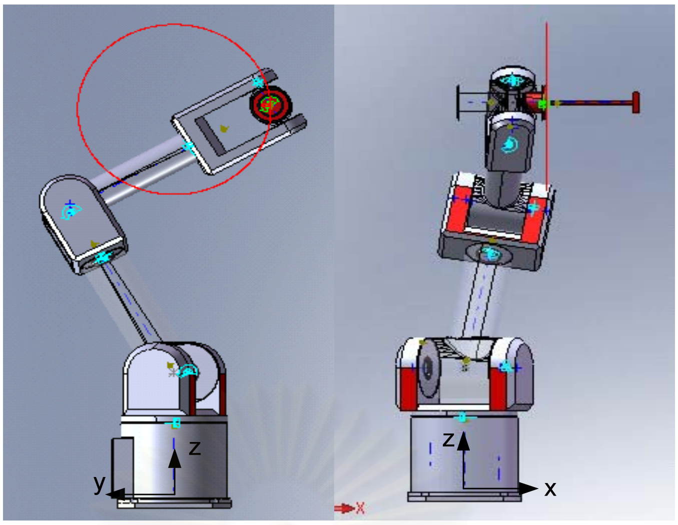
1 เส้นทางการเคลื่อนที่ในลักษณะวงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 200 มิลลิเมตร และทำการทดลองในลักษณะเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.1.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/6$ เรเดียนจะได้



รูปที่ 4.20: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดได้จากสมการพาราเมทริกซ์กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน

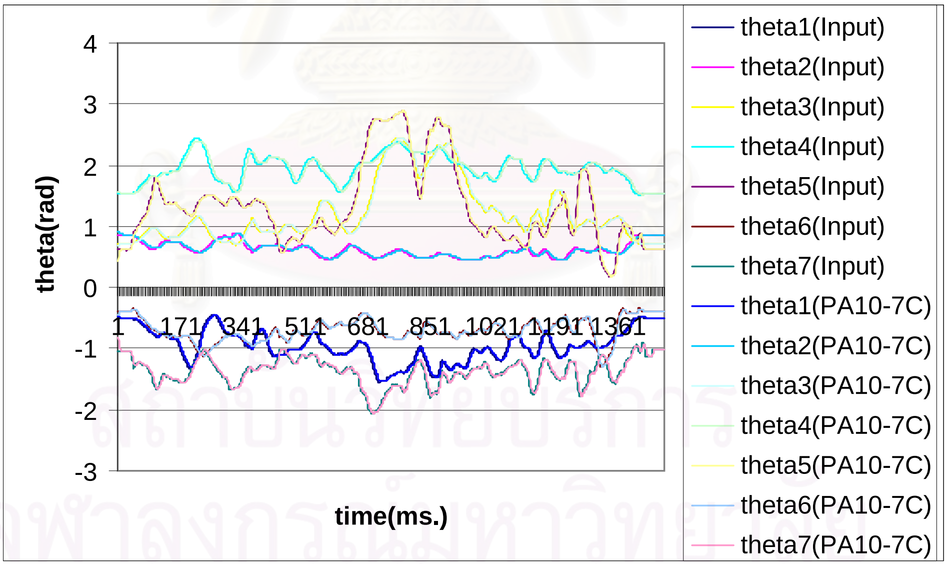


รูปที่ 4.21: ค่ามุมทั้ง 7 แกนที่ได้จากการนำค่าใน cartesian space ของปลายแขนที่เคลื่อนที่แบบวงกลมไปคำนวณในสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ ที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน

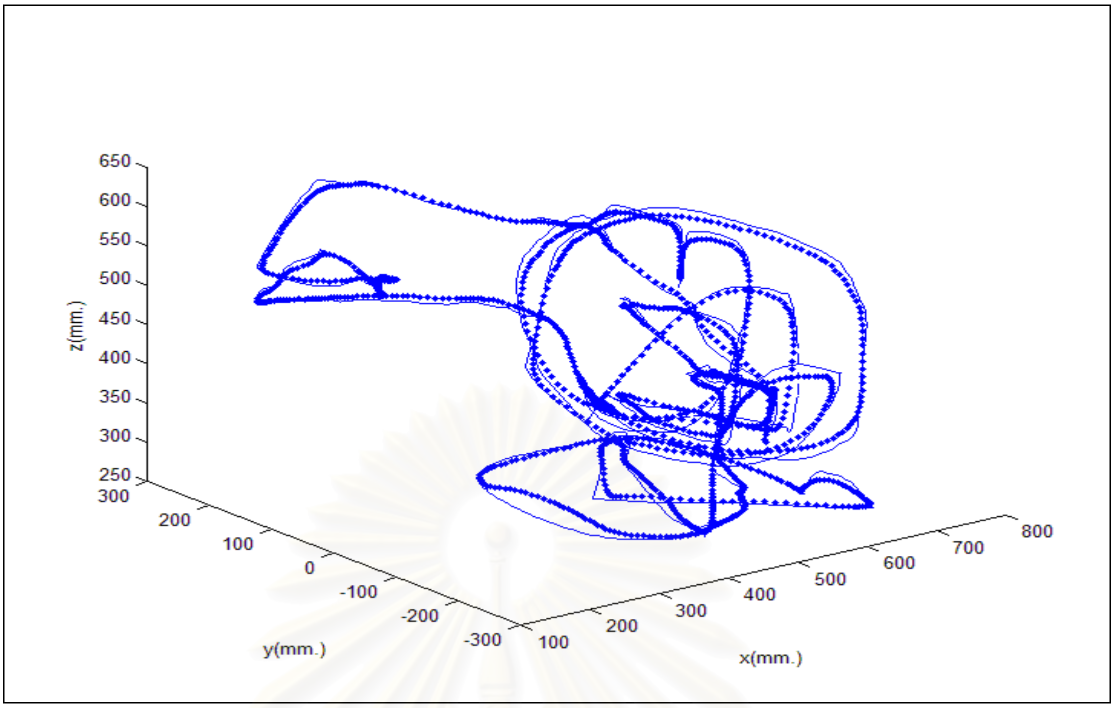


รูปที่ 4.22: การผลทดสอบการจำลองการทำงานในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion ที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน

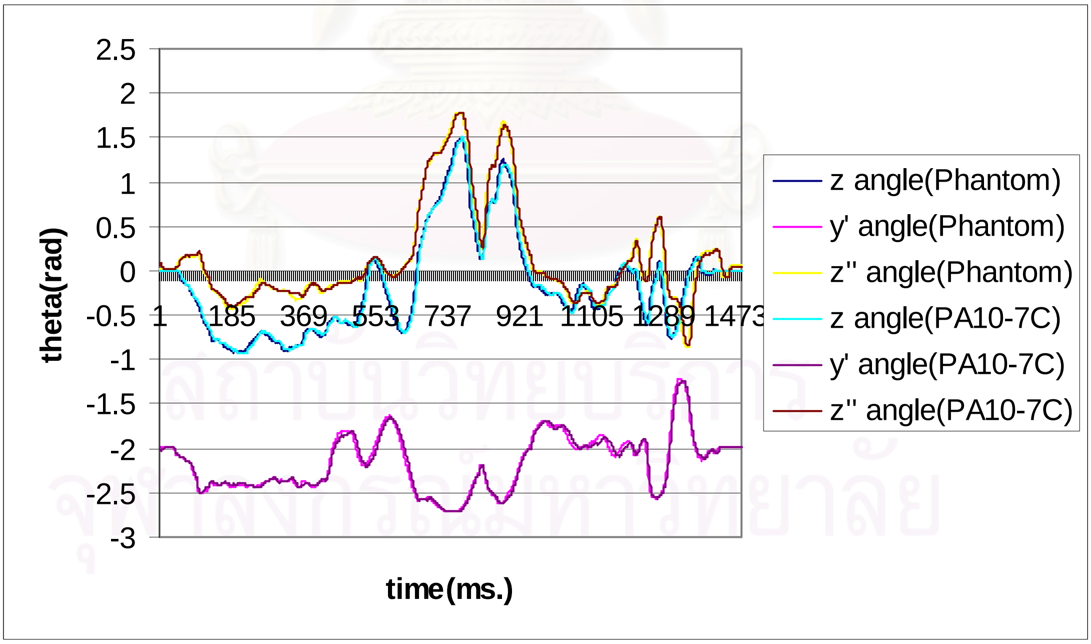
2. ทดสอบด้วยแขนกล Phantom Omni ในลักษณะการเคลื่อนที่แบบอิสระ และทำการทดลองในลักษณะเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.1.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/6$ เรเดียนจะได้



รูปที่ 4.23: ค่ามุมทั้ง 7 แกน จากการส่งค่าทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ ของปลายแขนกล Phantom ไปยังสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ของ PA10-7C เปรียบเทียบกับค่ามุมทั้ง 7 ที่ได้จากการเคลื่อนที่จริงของ PA10-7C ผ่านโปรแกรม visual c++ ที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน



รูปที่ 4.24: เส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom เทียบกับ PA10-7C โดยเส้น “--“ แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของแขนกล Phantom และ “.” แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของ PA10-7C ในลักษณะ freeform ที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน



รูปที่ 4.25: การเปรียบเทียบการเรียงตัวของตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom โดยเป็นการคำนวณมุมออยเลอร์ในรูปแบบ ZYZ ที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน

จากผลการทดลองการเคลื่อนที่ในทุกระนาบโดยเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี 200 มิลลิเมตร บนระนาบ YZ ดังรูปที่ 4.1, 4.2 และ 4.3 แสดงการเคลื่อนที่ที่ระนาบ θ= 0 เรเดียน, รูปที่ 4.8, 4.9 และ 4.10 แสดงการเคลื่อนที่ที่ระนาบ θ= $\pi/2$ เรเดียน, รูปที่ 4.14, 4.15 และ 4.16 แสดงการเคลื่อนที่ที่ระนาบ θ= $\pi/3$ เรเดียน และ รูปที่ 4.20, 4.21 และ 4.22 แสดงการเคลื่อนที่ที่ระนาบ θ= $\pi/6$ เรเดียน ซึ่งผลลัพธ์ที่มุม θ ต่าง ๆ กันจะมีลักษณะคล้ายกัน ซึ่งอธิบายไว้ในหัวข้อ 4.1.1 และสรุปได้ว่าสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่หามาได้สามารถใช้เพื่อคำนวณหาค่ามุมการเคลื่อนที่ของจุดต่อของแขนกล PA10-7C ในพิกัด joint space ที่ต้องการเพื่อให้ได้เส้นทางการเคลื่อนที่ของปลายแขนเป็นไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่ที่กำหนดแสดงให้เห็นว่าสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่ใช้ในการควบคุมนั้นมีความถูกต้องแม่นยำ

เมื่อทำการทดลองด้วยการเคลื่อนที่ในลักษณะอิสระ (freeform) โดยใช้แขนกล Phantom ในการเคลื่อนที่ตามที่ต้องการและส่งค่าไปทำการคำนวณด้วยสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ จะได้ค่าการเคลื่อนที่ที่ต้องการของแต่ละจุดต่อ และส่งค่าที่ได้ไปทำการทดสอบการเคลื่อนที่จริงกับแขนกล PA10-7C ในทุกระนาบการทดลอง โดยผลลัพธ์แสดงในรูปที่ 4.5, 4.6 และ 4.7 เป็นผลการทดลองที่ระนาบ θ= 0 เรเดียน, รูปที่ 4.11, 4.12 และ 4.13 เป็นผลการทดลองที่ระนาบ θ= $\pi/2$ เรเดียน, รูปที่ 4.17, 4.18 และ 4.19 เป็นผลการทดลองที่ระนาบ θ= $\pi/3$ เรเดียน และ รูปที่ 4.23, 4.24 และ 4.25 ซึ่งเป็นผลการทดลองที่ระนาบ θ= $\pi/6$ เรเดียน ซึ่งจะได้ผลการทดลองในลักษณะเดียวกัน และได้อธิบายไว้ในหัวข้อ 4.1.1 กล่าวคือสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ที่หามาได้สามารถใช้เพื่อคำนวณหาค่ามุมการเคลื่อนที่ของจุดต่อของแขนกล PA10-7C ในพิกัด joint space ที่ต้องการเพื่อให้ได้เส้นทางการเคลื่อนที่ของปลายแขนเป็นไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่ที่กำหนดในลักษณะอิสระได้ โดยมีจุดที่น่าสนใจคือ จะเห็นได้ว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ ซึ่งสร้างได้จากแขนกล Phantom และส่งไปทำการทดลองกับแขนกล PA10-7C จะมีเวลาหน่วงในการส่งค่ากลับน้อยกว่ามาก เมื่อเทียบกับเส้นทางการเคลื่อนที่จริงที่ได้จากการส่งค่ากลับของแขนกล PA10-7C ซึ่งผลกระทบเนื่องจากเวลาหน่วงนั้นทำให้ตำแหน่งปลายแขนและการเรียงตัวของตำแหน่งปลายแขนระหว่างแขนกล PA10-7C กับแขนกล Phantom มีการเลื่อมกันอยู่บ้าง โดยการเรียงตัวจะใช้มุมออยเลอร์ในรูปแบบ ZYZ ซึ่งการผิดพลาดนี้ก็เนื่องมาจากเวลาหน่วงดังที่กล่าวมาแล้วนั่นเอง

4.2 การทดสอบสมการโดยใช้สมการความเร็วในการควบคุมแขนกล

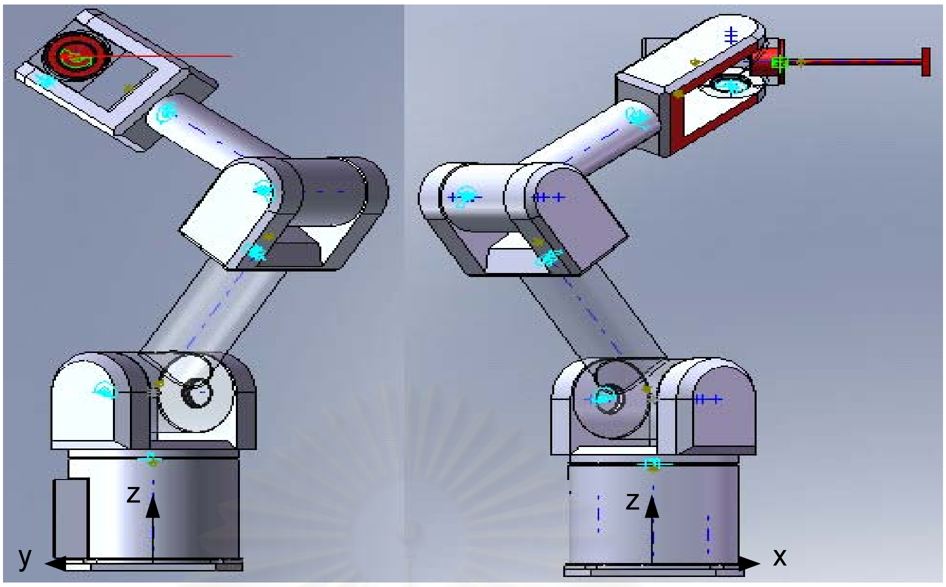
งานวิจัยนี้จะทำการทดสอบเส้นทางการเคลื่อนที่ใน 4 ลักษณะคือ 1) เส้นทางการเคลื่อนที่ในลักษณะเส้นตรงเป็นระยะ 200 มิลลิเมตรตามแนวแกน Y ด้วยความเร็ว 20 มิลลิเมตรต่อวินาที 2) เส้นตรงตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตรด้วยความเร็ว 20 มิลลิเมตรต่อวินาที 3) เส้นเอียงทำมุม 45 องศากับแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ตามแนวแกน Y และ Z ด้วยความเร็ว 28.28 มิลลิเมตรต่อวินาที และ 4) วงกลม รัศมี 150 mm. บนระนาบ YZ ด้วย

ความเร็วเชิงมุมของเส้นรัศมี 0.2π เรเดียนต่อวินาที โดยจะกำหนดค่าความเร็วใน cartesian space ที่ต้องการเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าความเร็วของแต่ละแกนของหุ่นยนต์ใน joint space จากสมการจาโคเบียนที่หาได้ ค่าความเร็วของแต่ละจุดต่อใน joint space ที่คำนวณได้นี้ จะใช้เป็นค่าตัวแปรที่นำไปทำการจำลองส่งค่าที่ได้ไปทำการจำลองการเคลื่อนที่ด้วยโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion แล้วนำเส้นทางที่เคลื่อนที่ได้จากการจำลองการเคลื่อนที่มาทำการเปรียบเทียบกับเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ได้จากเส้นทางการเคลื่อนที่ที่กำหนด และนำมาแสดงผล ทำการทดสอบที่ ค่าระนาบ θ ต่างๆ กัน

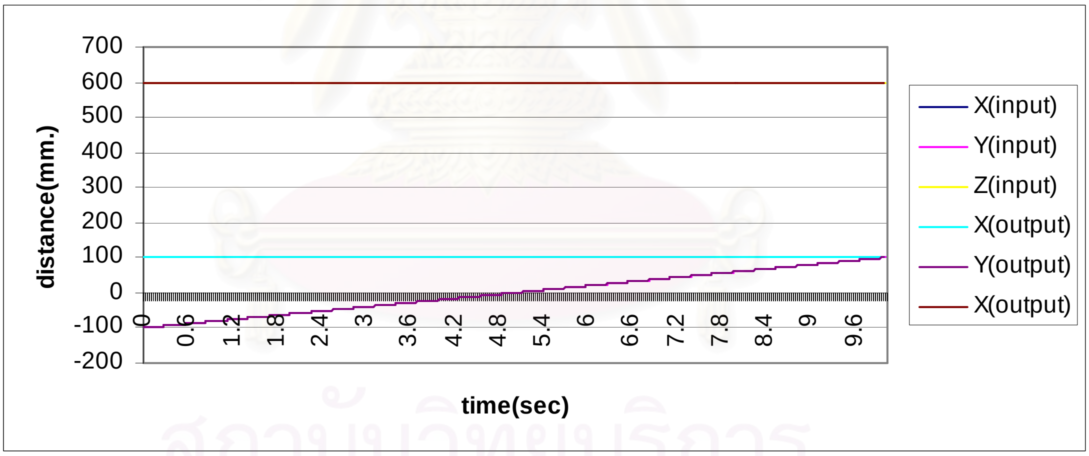
4.2.1 ทดสอบที่ระนาบ $\theta = 0$ เรเดียน

ทดสอบโดยการใช้เส้นทางการเคลื่อนที่ในลักษณะเส้นตรงเป็นระยะ 200 มิลลิเมตรตามแนวแกน Y ด้วยความเร็วคงที่ 20 มิลลิเมตรต่อวินาทีโดยจะกำหนดค่าความเร็วใน cartesian space ที่ต้องการลงในแต่ละแกน (X, Y, Z) ในกรณีนี้มีเฉพาะในแนวแกน Y นำค่านี้ไปใช้ในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion โดยใช้ข้อมูล 3D solid model ที่สร้างขึ้นสำหรับแขนกล PA10-7C เพื่อคำนวณหาตำแหน่งปลายแขนใน cartesian Space หรือ cartesian space แนวแกน X, Y, และ Z (ในกรณีนี้มีเฉพาะในแนวแกน Y) ดังแสดงในรูปที่ 4.27 และส่งค่าความเร็วใน cartesian space ที่ต้องการในแต่ละแกน (X, Y, Z) โดยจะให้เคลื่อนด้วยความเร็วคงที่ 20 มิลลิเมตรต่อวินาทีดังกล่าวลงไปยังสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วเพื่อคำนวณหาค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ต้องเคลื่อนที่เพื่อให้ปลายแขนมีการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงเป็นระยะ 200 มิลลิเมตรตามแนวแกน Y ด้วยความเร็ว 20 มิลลิเมตรต่อวินาทีตามต้องการ ส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ที่ได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วไปทดลองจำลองการเคลื่อนที่ในโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion ดังแสดงในรูปที่ 4.26 แล้วนำเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ได้จากการจำลองการเคลื่อนที่ คำนวณหาตำแหน่งปลายแขนใน cartesian Space นำค่าตำแหน่งปลายแขนในแนวแกน X, Y, และ Z นี้ไปเปรียบเทียบกับตำแหน่งที่ได้จากการจำลองการเคลื่อนที่ก่อนหน้านี้ ผลที่ได้แสดงในรูปที่ 4.27 จะเห็นว่าค่าทั้งสองนั้นมีค่าใกล้เคียงกันมากจนเกือบทับกันทั้ง 3 แกน

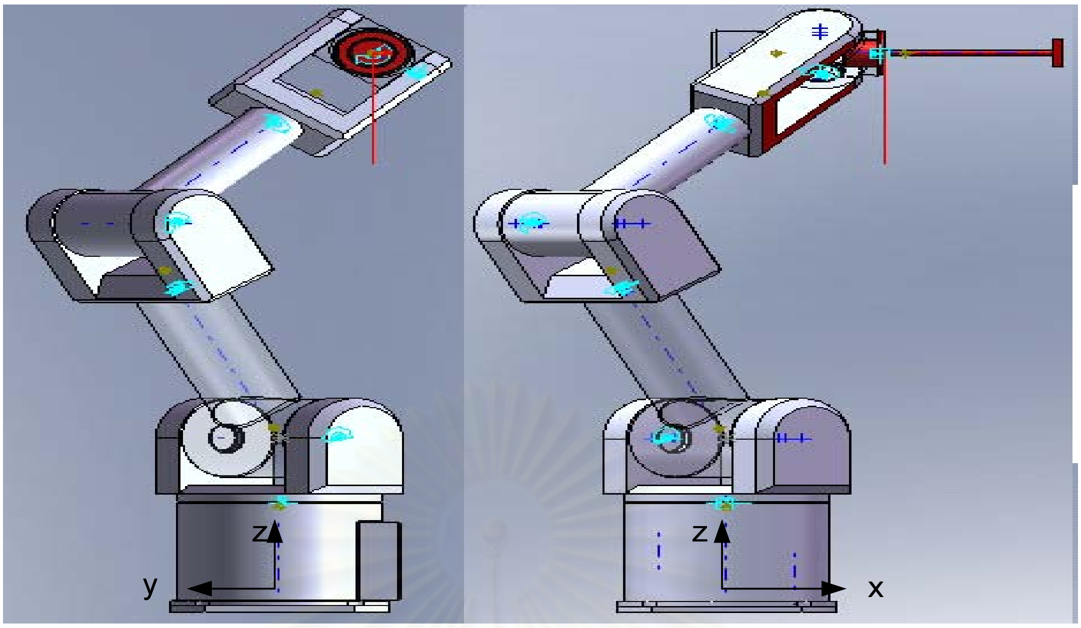
จากนั้นทำการทดสอบในลักษณะเดียวกับข้างต้นโดยทดลองเปลี่ยนเส้นทางการเคลื่อนที่ในหลายๆการเคลื่อนที่ตามที่ได้ออกแบบไว้ข้างต้น เพื่อทดสอบความถูกต้องของสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว รูปที่ 4.28-4.29 แสดงผลลัพธ์สำหรับกรณีเส้นทางการเคลื่อนที่ที่ปลายแขนเป็นเส้นตรงตามแนวแกน z เป็นระยะทาง 200 มิลลิเมตรด้วยความเร็ว 20 มิลลิเมตรต่อวินาทีในทำนองเดียวกัน รูปที่ 4.30-4.31 สำหรับเส้นเอียง ระยะ 200 มิลลิเมตรตามแนวแกน Y และ Z ด้วยความเร็ว 28.28 มิลลิเมตรต่อวินาที และรูปที่ 4.32-4.33 สำหรับทางเดินที่เป็นวงกลมรัศมี 150 mm. บนระนาบ YZ ด้วยความเร็วเชิงมุมของเส้นรัศมี 0.2π เรเดียนต่อวินาที ซึ่งผลลัพธ์ก็มีลักษณะเช่นเดียวกัน โดยมีค่าใกล้เคียงกันมาก



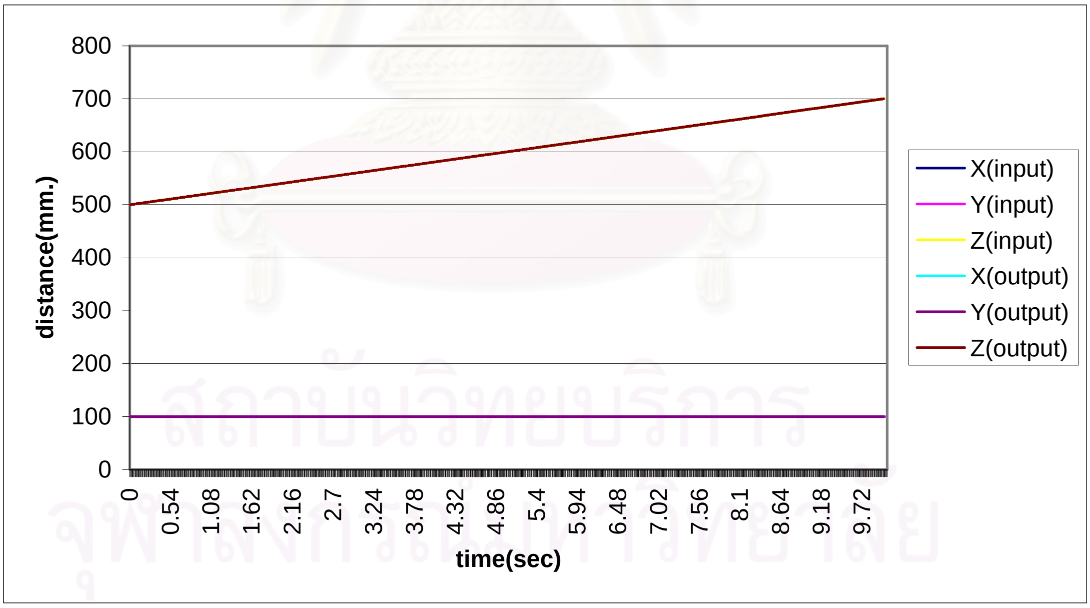
รูปที่ 4.26: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



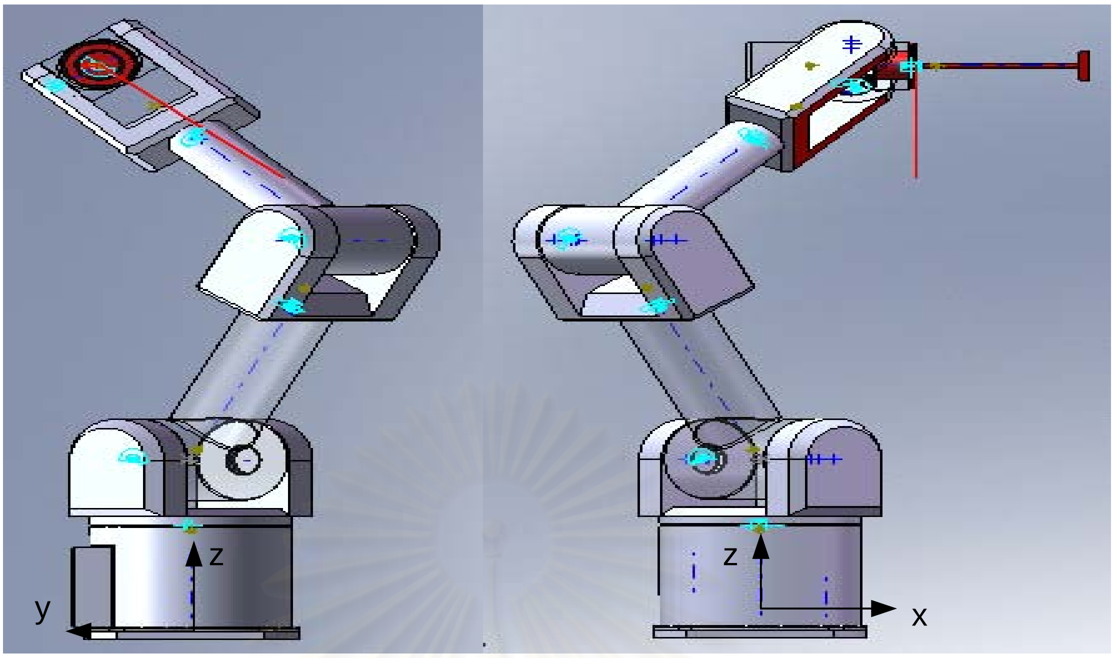
รูปที่ 4.27: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



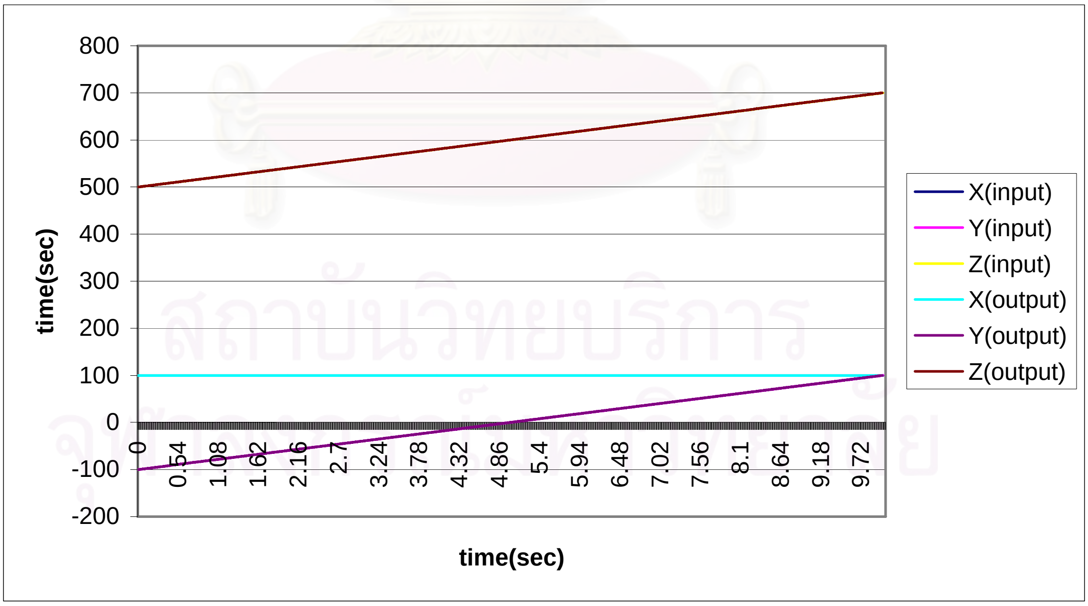
รูปที่ 4.28: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



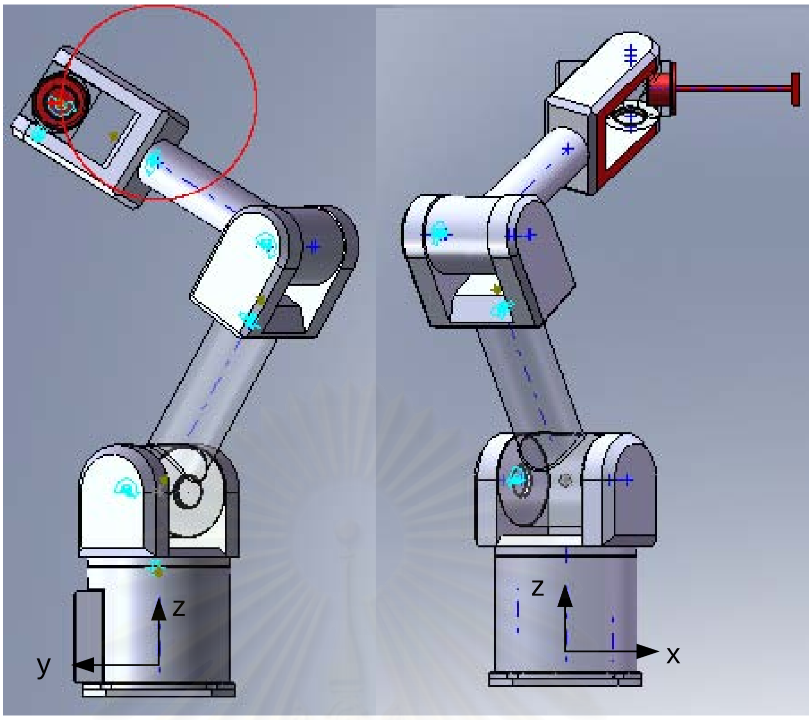
รูปที่ 4.29: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



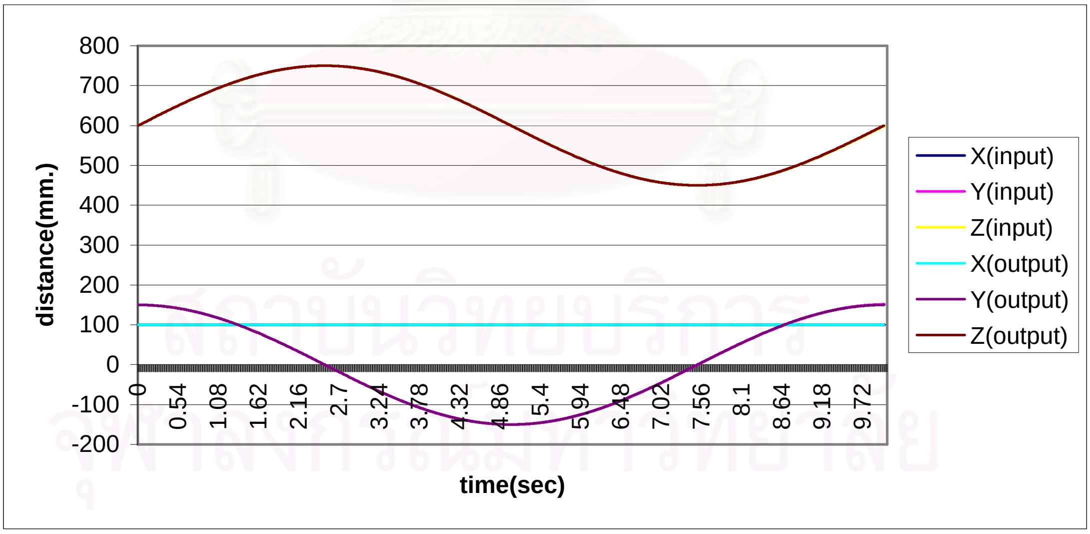
รูปที่ 4.30: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y และแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 28.28 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



รูปที่ 4.31: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y และแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 28.28มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



รูปที่ 4.32: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วความเร็วเชิงมุมของเส้นรัศมีใน cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาทีที่ระนาบ θ=0 เรเดียน



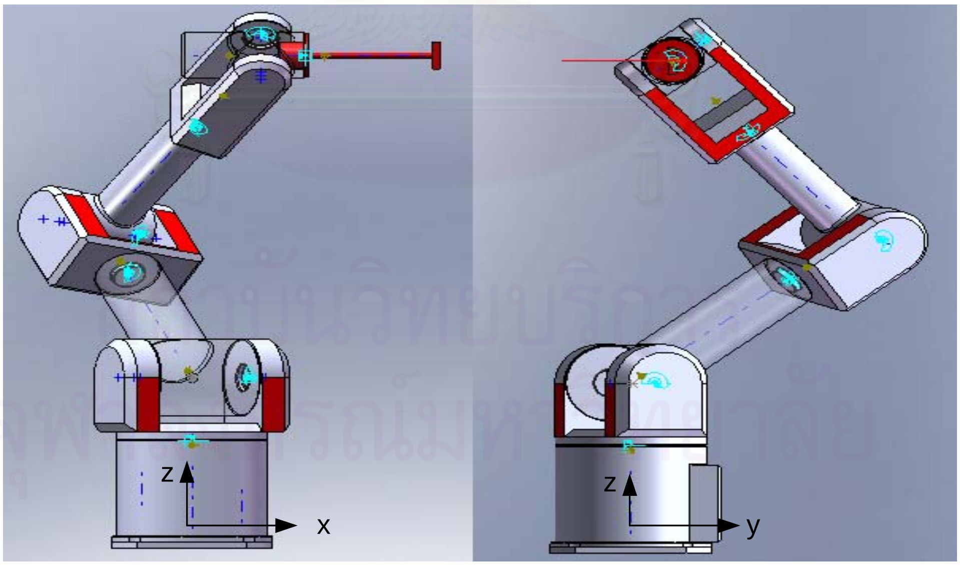
รูปที่ 4.33: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาทีกับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ θ=0 เรเดียน

ผลการทดลองข้างต้นเป็นการทดลองที่ระนาบ $\theta = 0$ โดยมีรูปแบบการเคลื่อนที่หลากหลายดังกล่าวแล้ว จะเห็นว่าจากกราฟแสดงการเปรียบเทียบตำแหน่งในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าตำแหน่งของการเคลื่อนที่ซึ่งกำหนดให้ เมื่อเทียบกับตำแหน่งการเคลื่อนที่ซึ่งได้จากการกำหนดค่าความเร็วของจุดต่อแต่ละจุดต่อใน joint space ซึ่งได้มาจากการกำหนดตำแหน่งการเคลื่อนที่และความเร็วที่ต้องการใน cartesian space ไปในสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วนั้น มีค่าใกล้เคียงกันมากจนเกือบทับกันทั้ง 3 แกนสามารถสรุปได้ว่าสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วหรือสมการจาโคเบียนที่หามาได้นั้นสามารถใช้ในการควบคุมแขนกลบนระนาบ $\theta=0$ เรเดียนได้

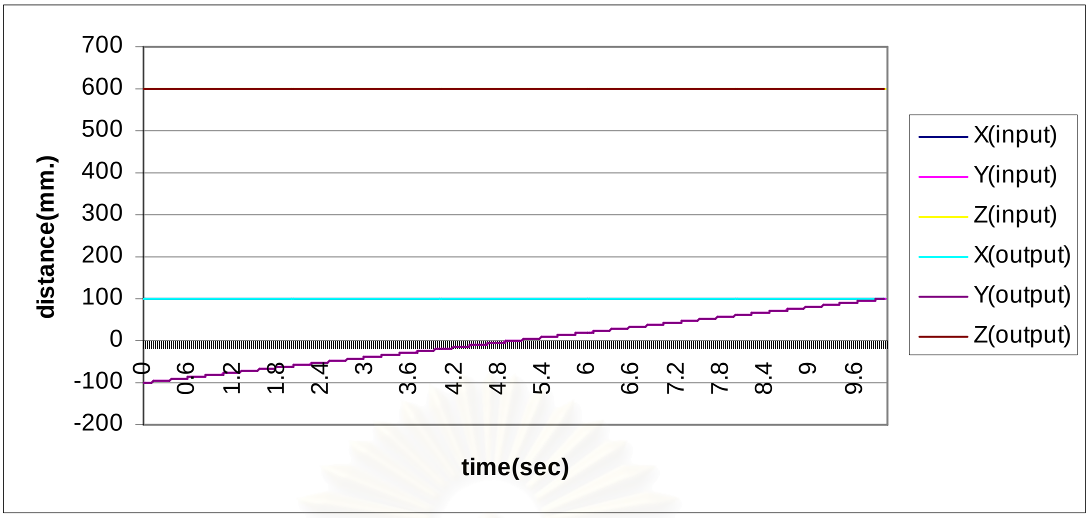
เพื่อแสดงให้เห็นว่าสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่หามาได้ถูกต้องจริงและสามารถใช้ได้ในทุกการเคลื่อนที่ในทุกๆระนาบ θ จะทำการทดสอบในลักษณะเดียวกับข้างต้นโดยการทดลองเปลี่ยนค่าระนาบของการเคลื่อนที่ θ ในหลายๆระนาบเพื่อทดสอบความถูกต้องของสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่หามาได้ และแสดงผลการทดลองในหัวข้อถัดไป คือ ในหัวข้อ 4.2.2 – 4.2.4 สำหรับกรณีระนาบ θ เท่ากับ $\pi/2$, $\pi/3$ และ $\pi/6$ เรเดียน ตามลำดับ

4.2.2 ทดสอบที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน

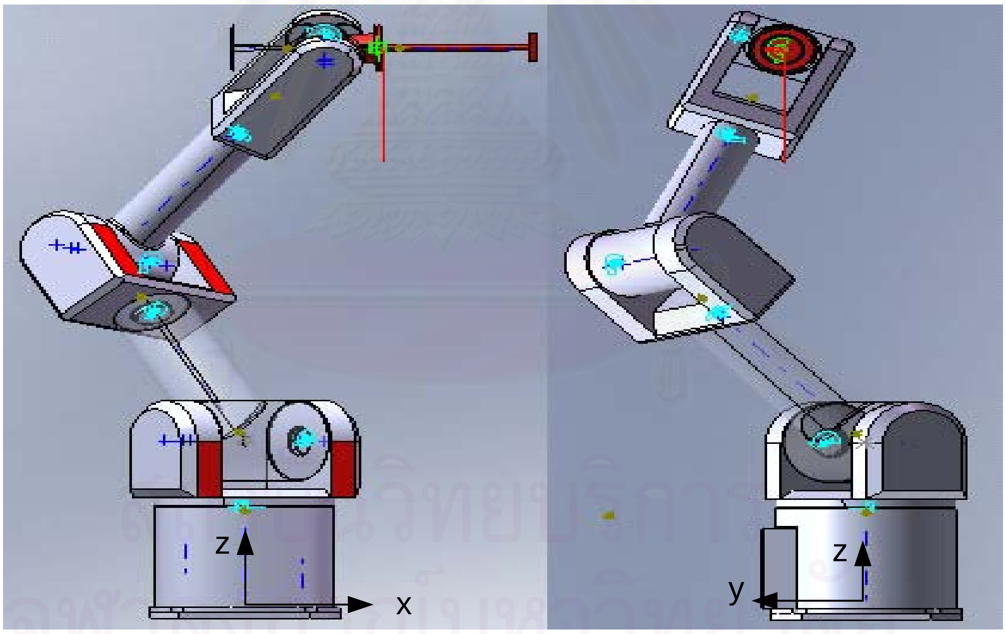
ทำการทดลองในลักษณะเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.2.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/2$ เรเดียนจะได้



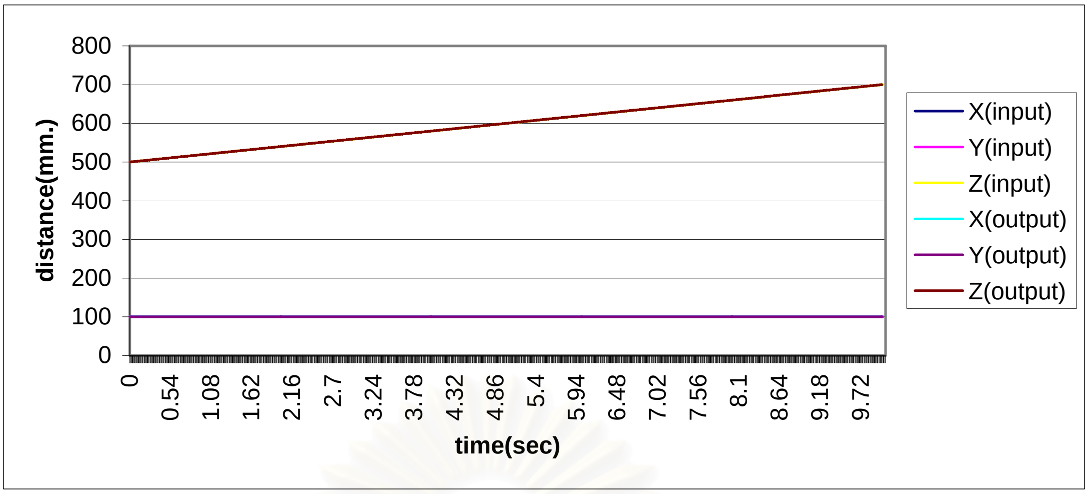
รูปที่ 4.34: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่างๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta=\pi/2$ เรเดียน



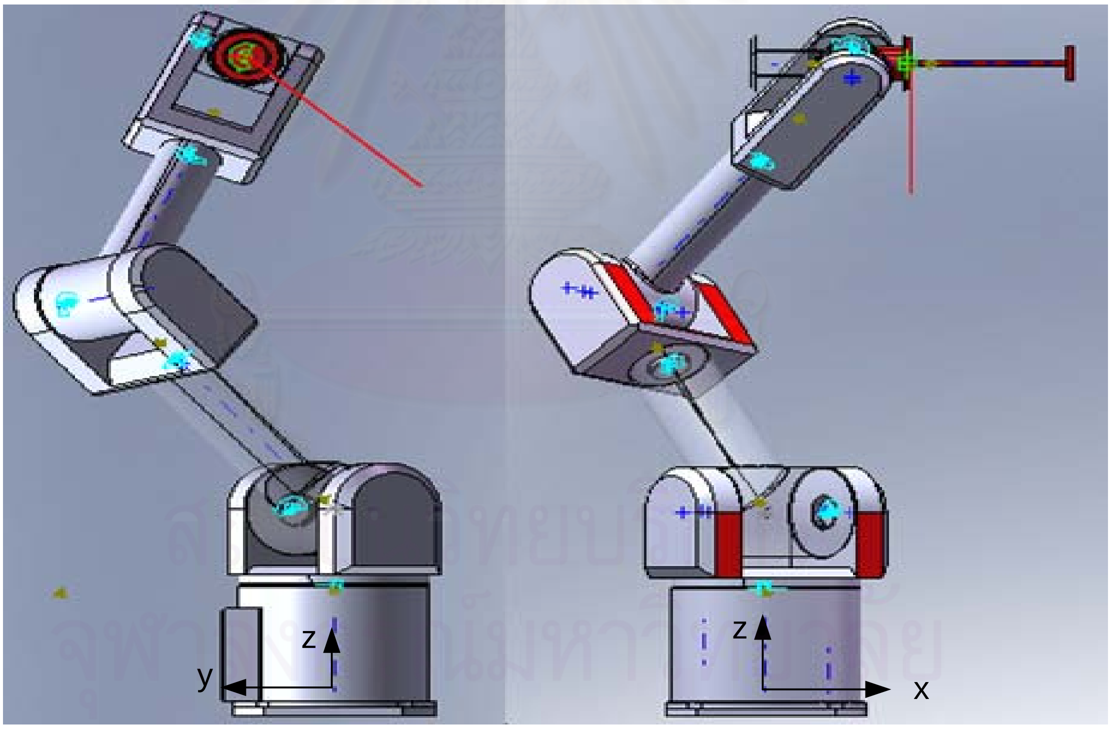
รูปที่ 4.35: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน



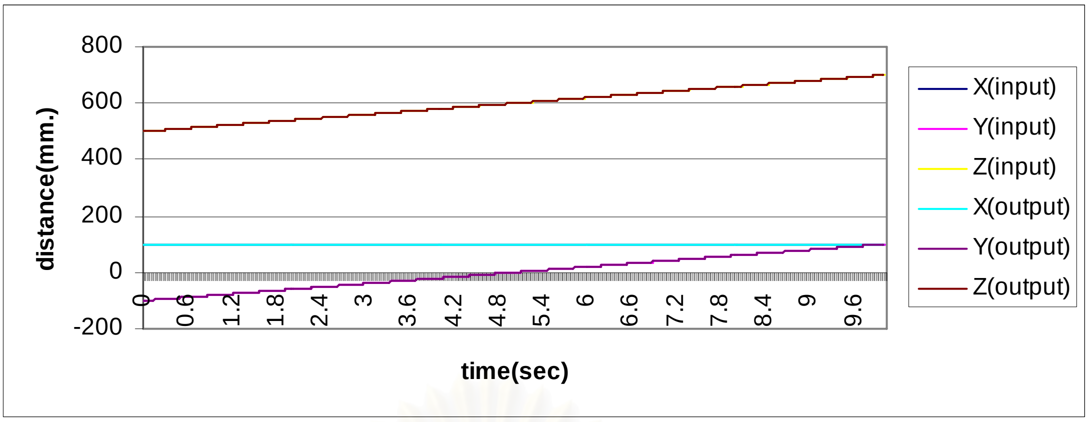
รูปที่ 4.36: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน



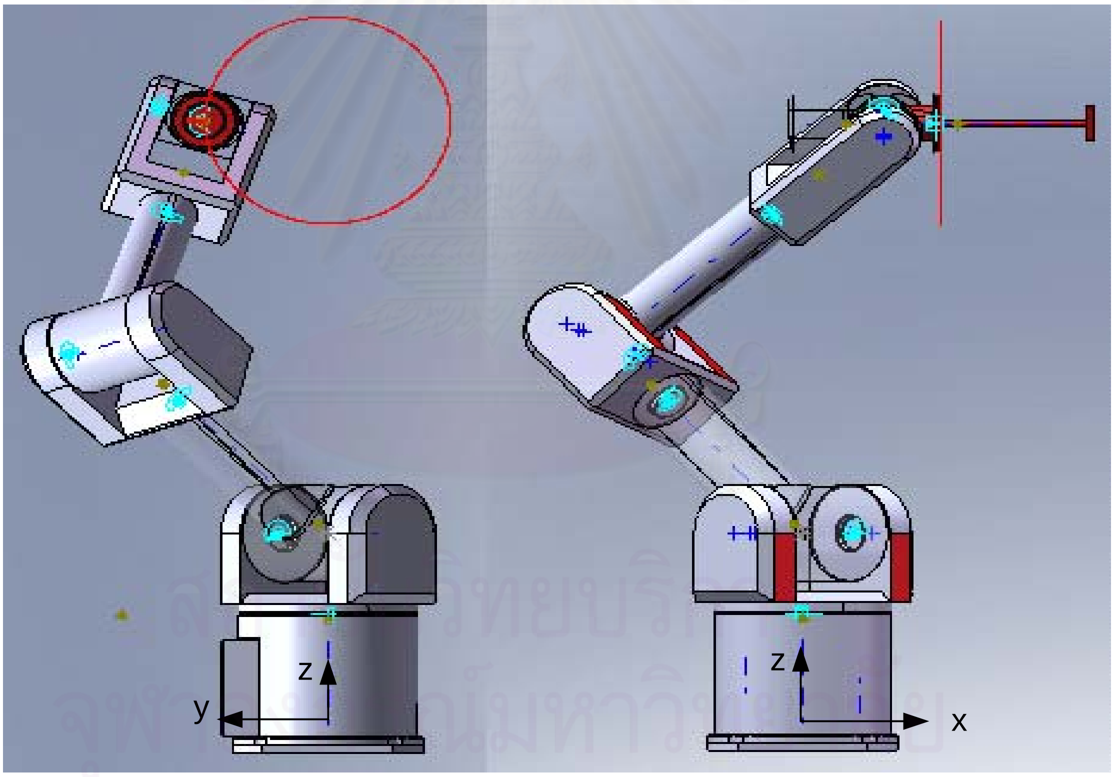
รูปที่ 4.37: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน



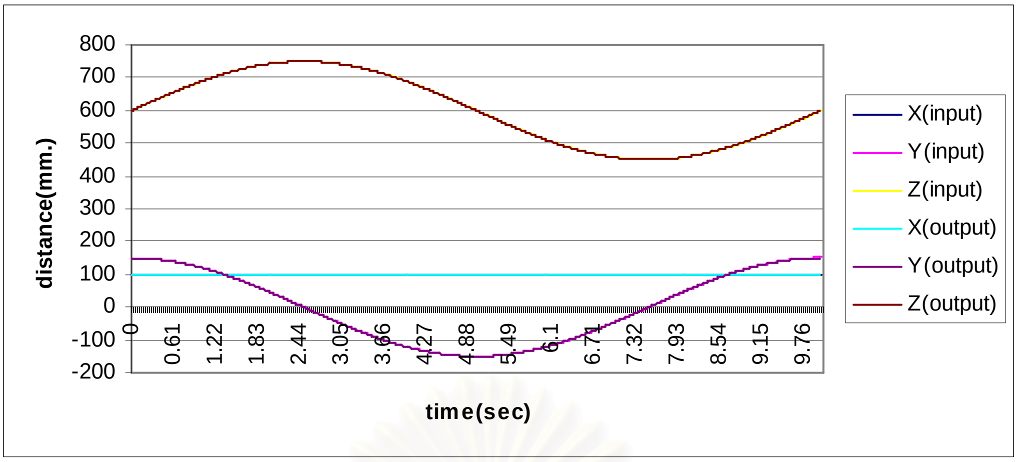
รูปที่ 4.38: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y และแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 28.28 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน



รูปที่ 4.39: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y และแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 28.28มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน



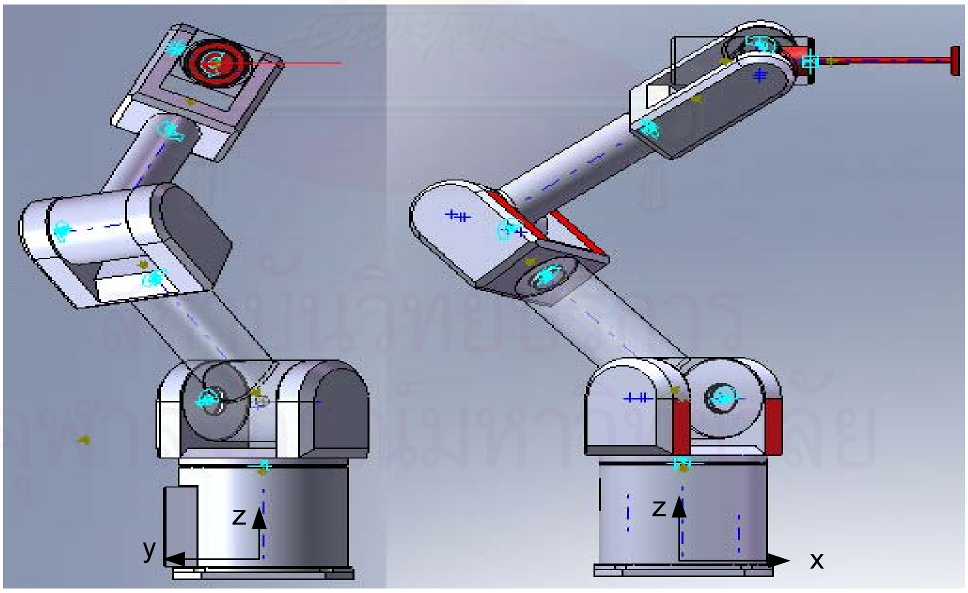
รูปที่ 4.40: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วเชิงมุมของเส้นรัศมีใน Cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาทีที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน



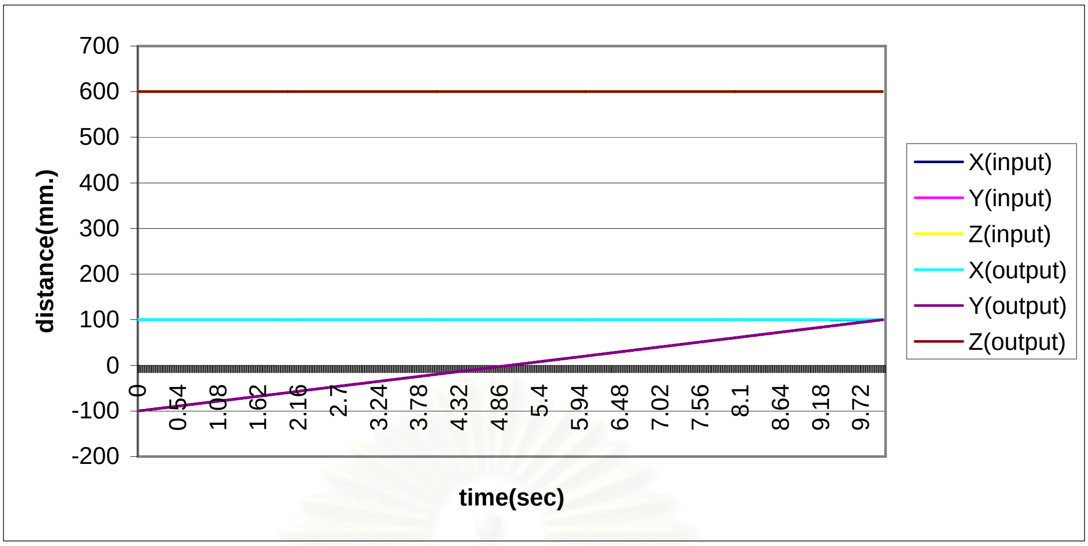
รูปที่ 4.41: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/2$ เรเดียน

4.2.3 ทดสอบที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน

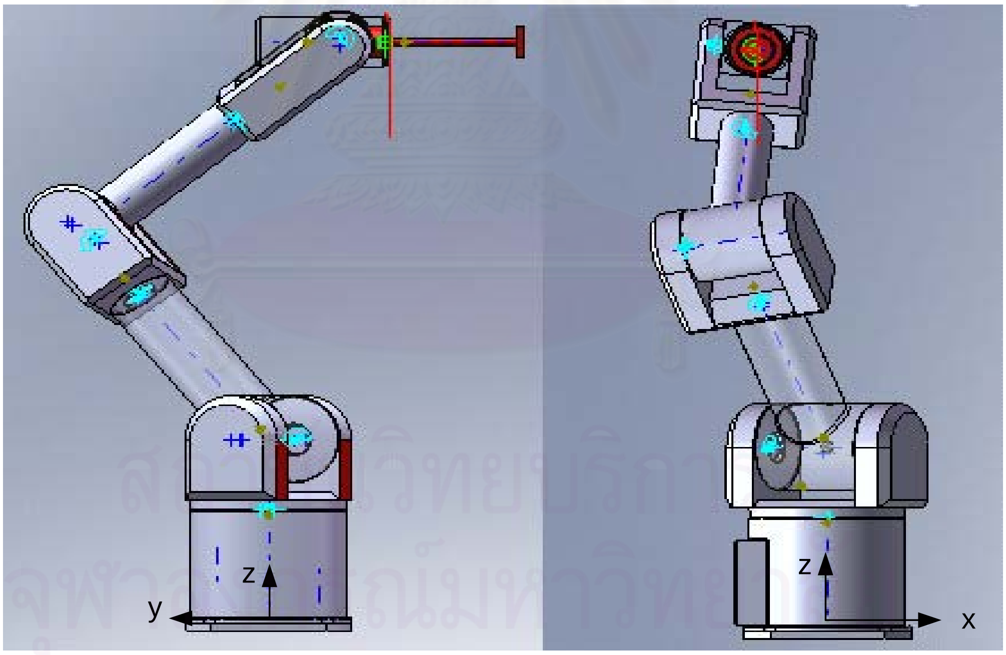
ทำการทดลองในลักษณะเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.2.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/3$ เรเดียนจะได้



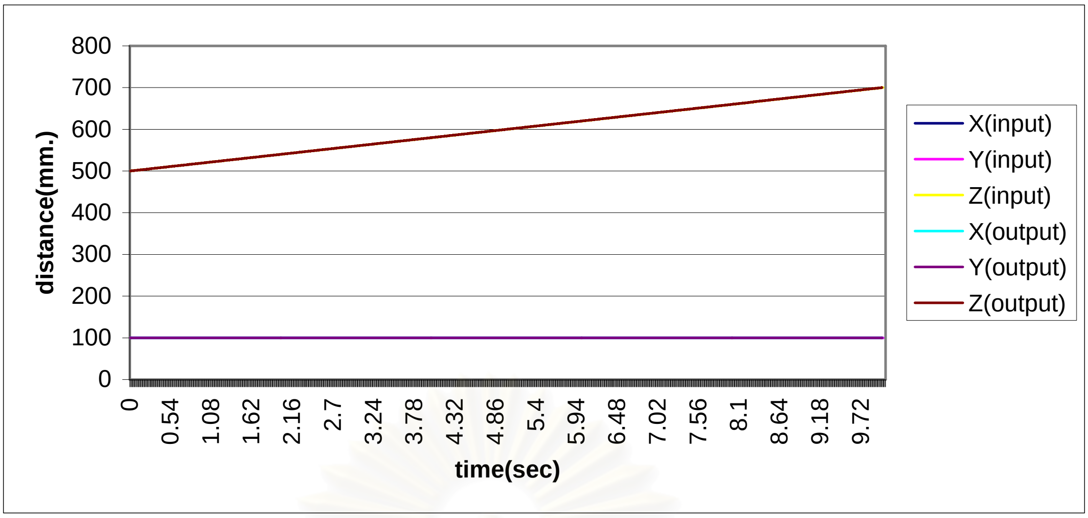
รูปที่ 4.42: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่างๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



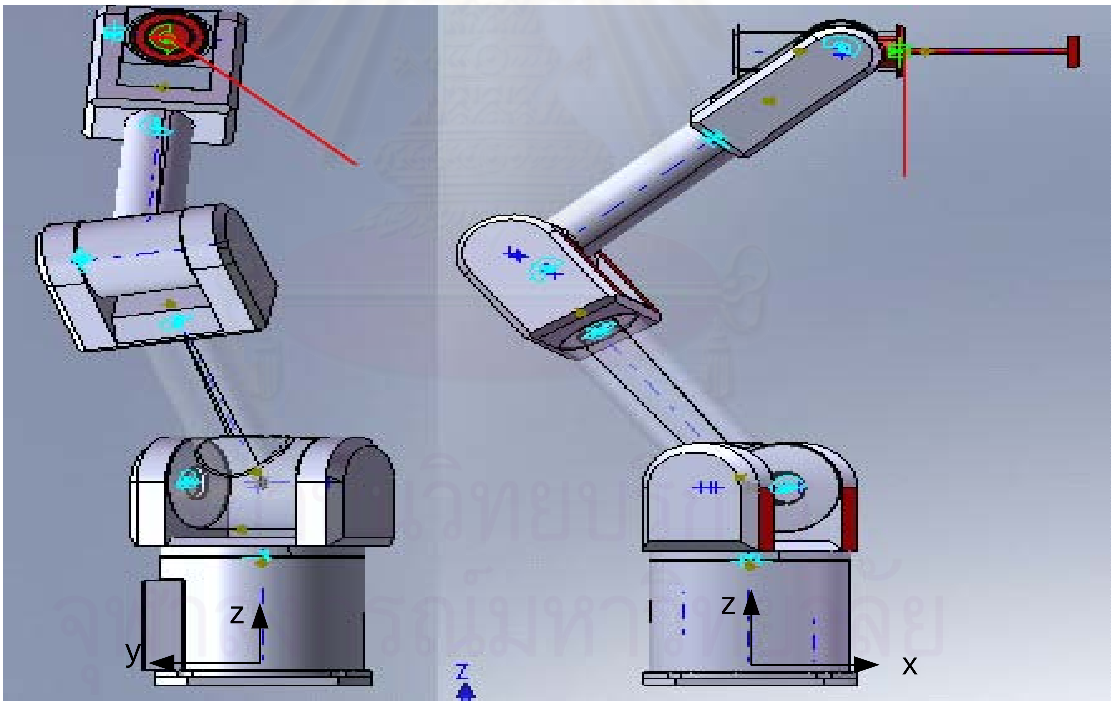
รูปที่ 4.43: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



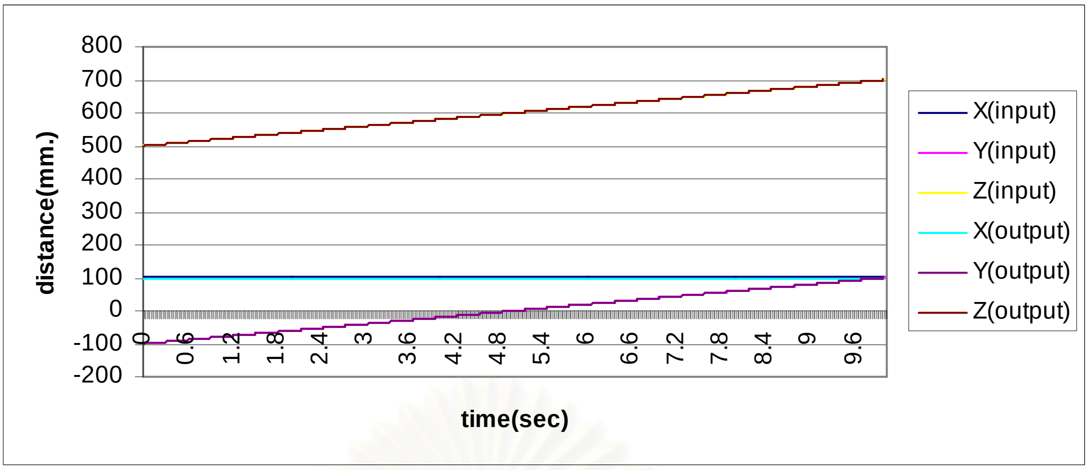
รูปที่ 4.44: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



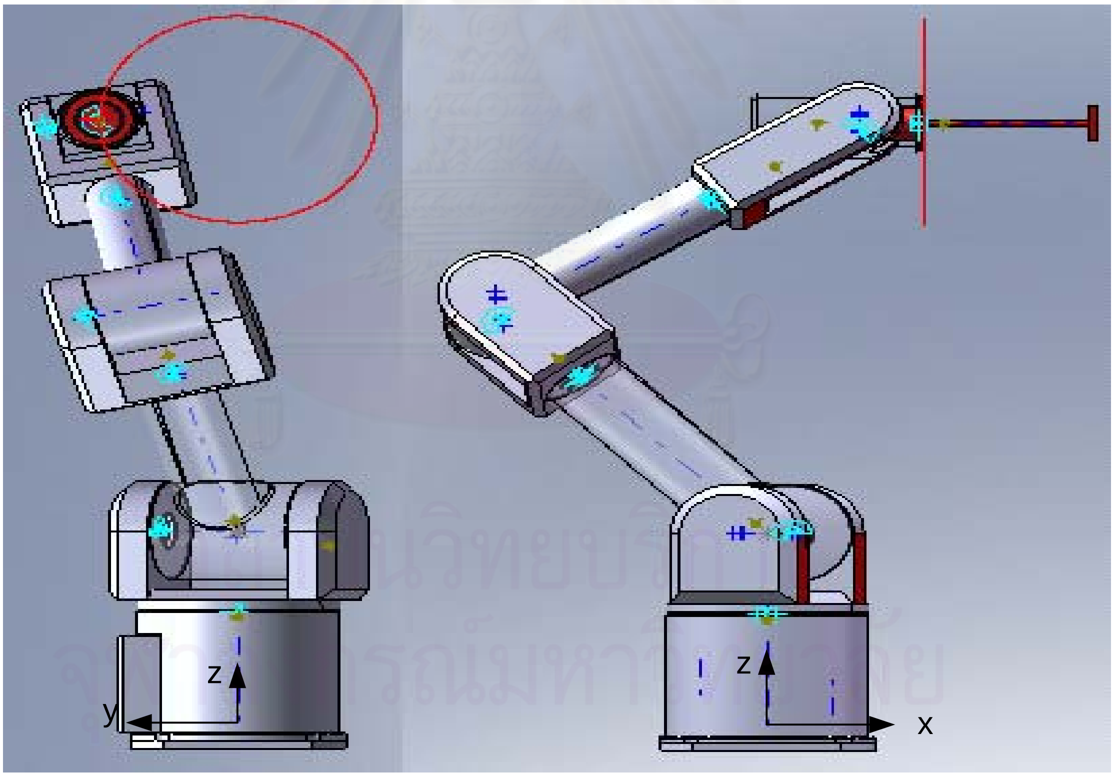
รูปที่ 4.45: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



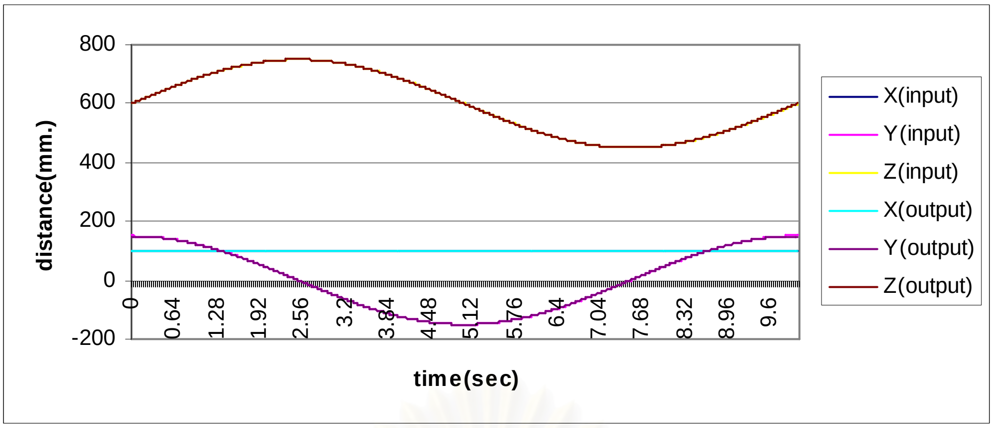
รูปที่ 4.46: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y และแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 28.28 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



รูปที่ 4.47: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y และแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 28.28มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



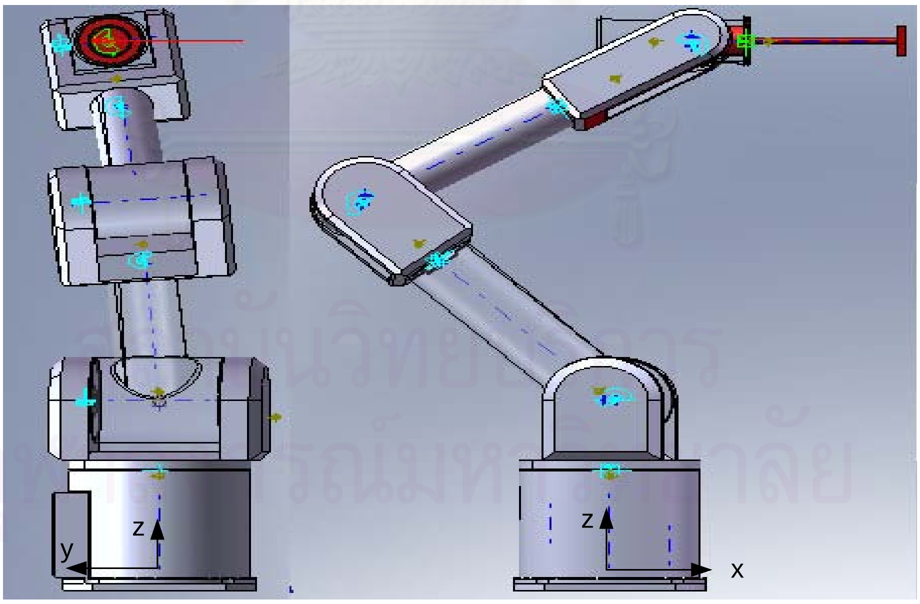
รูปที่ 4.48: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วเชิงมุมของเส้นรัศมีใน cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาทีที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน



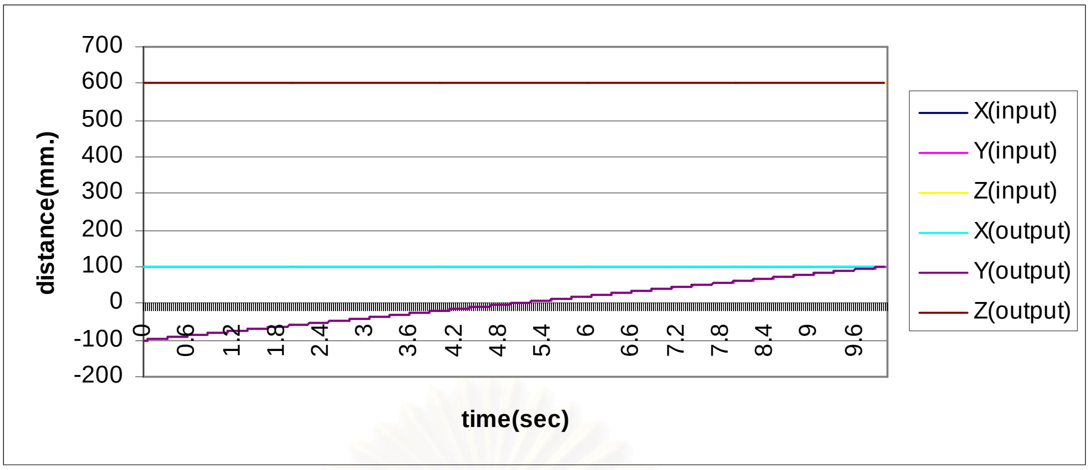
รูปที่ 4.49: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลานแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/3$ เรเดียน

4.2.4 ทดสอบที่ $\theta = \pi/6$ เรเดียน

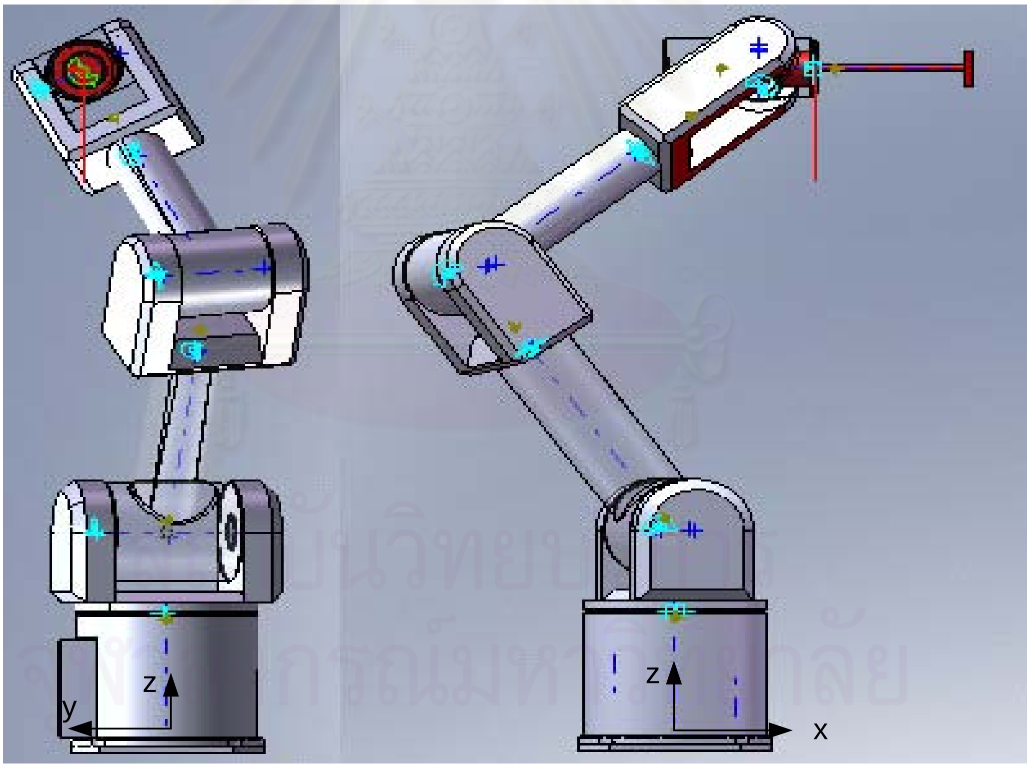
ทำการทดลองในลักษณะเดียวกับการทดลองในหัวข้อ 4.2.1 โดยเปลี่ยนค่าระนาบ θ เป็น $\pi/6$ เรเดียนจะได้



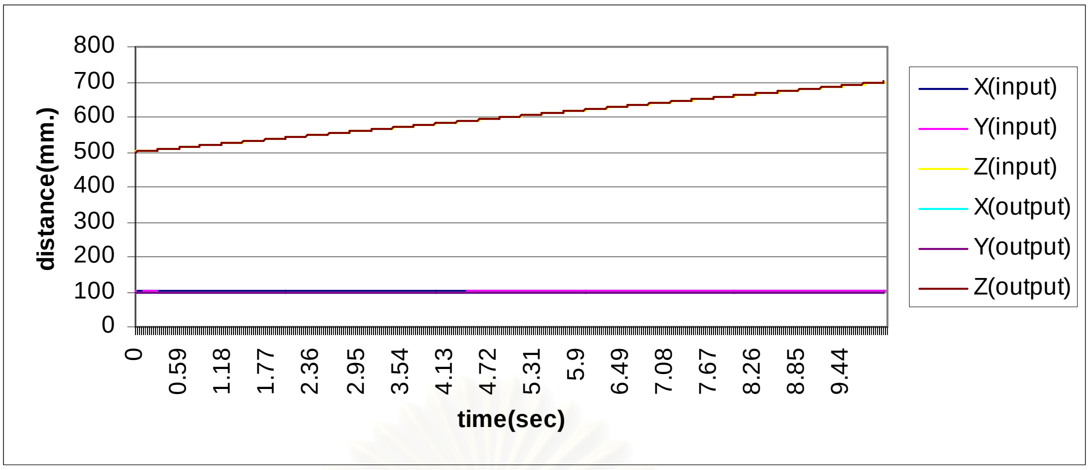
รูปที่ 4.50: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน



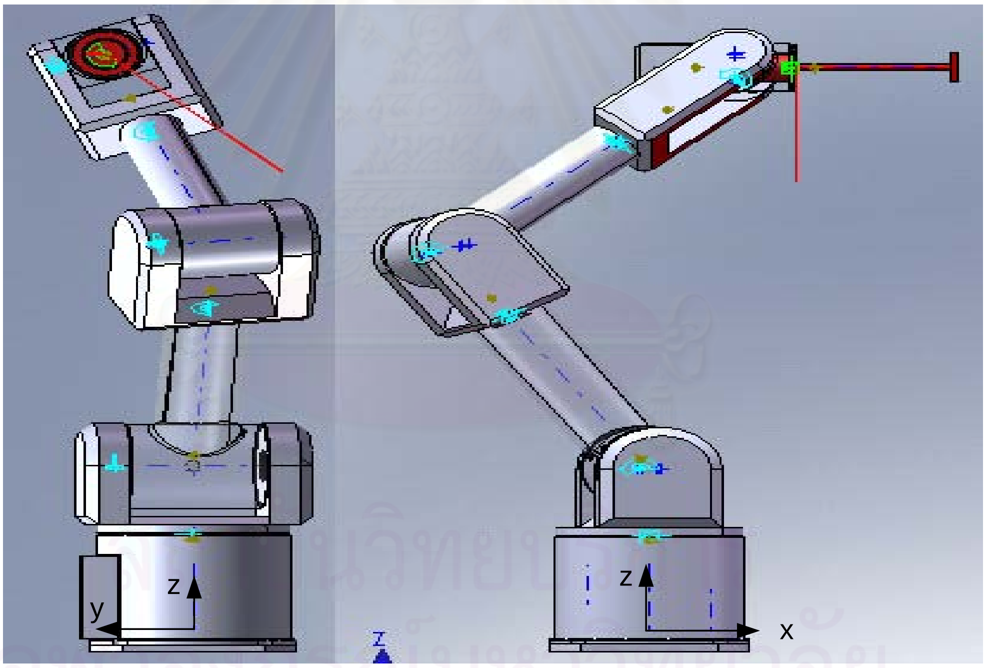
รูปที่ 4.51: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน



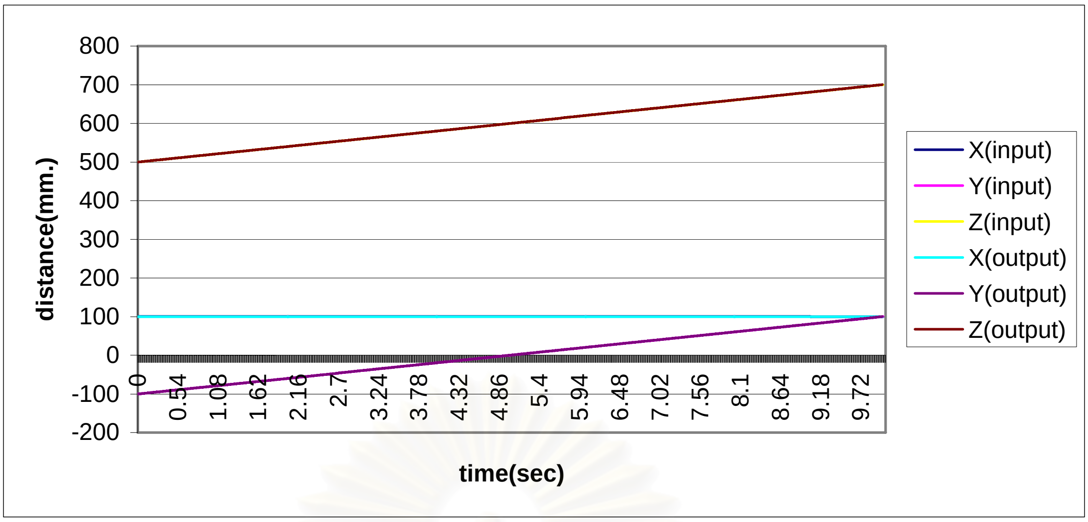
รูปที่ 4.52: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน



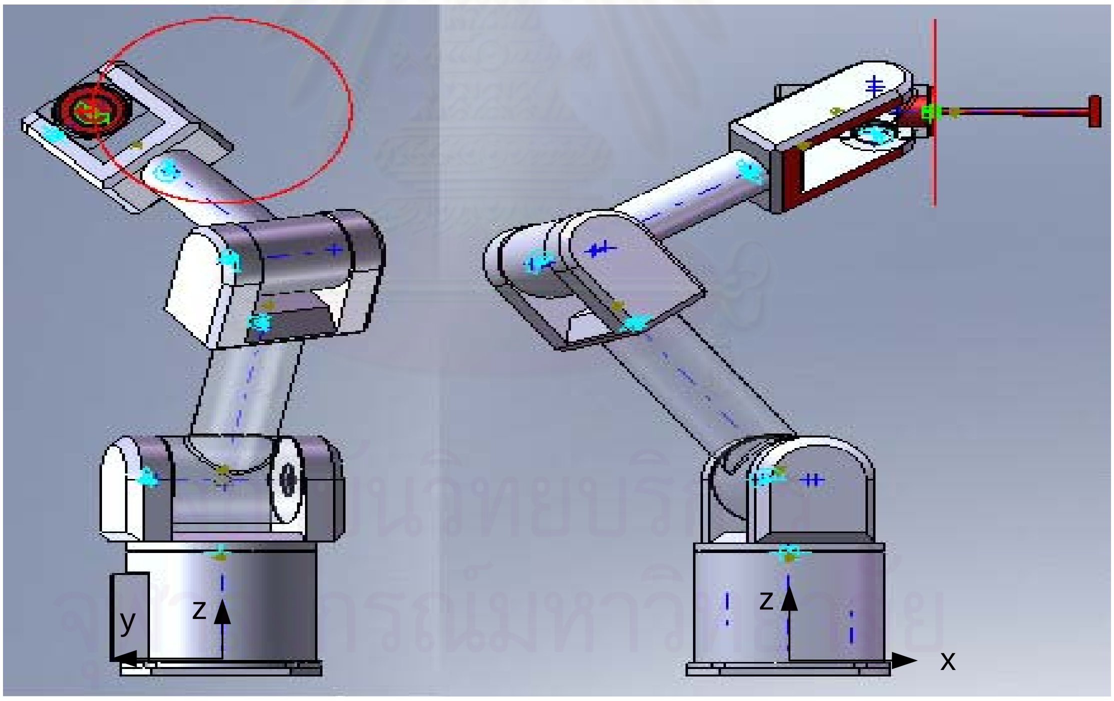
รูปที่ 4.53: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 20 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน



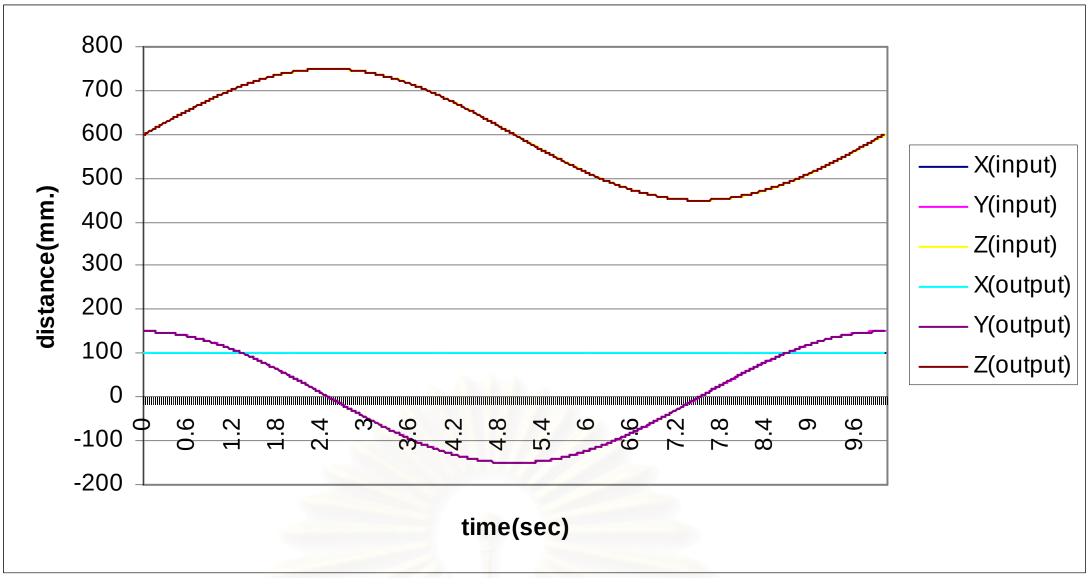
รูปที่ 4.54: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y และแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 28.28 มิลลิเมตรต่อวินาที ที่ระนาบ $\theta=\pi/6$ เรเดียน



รูปที่ 4.55: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดให้เคลื่อนที่ตามแนวแกน Y และแกน Z ระยะ 200 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 28.28 มิลลิเมตรต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน



รูปที่ 4.56: การทดลองการจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกล PA10-7C โดยส่งค่าความเร็วเชิงมุมใน joint space ที่จุดต่อต่าง ๆ ซึ่งได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว โดยกำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วเชิงมุมของเส้นรัศมีใน cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาทีที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน



รูปที่ 4.57: การเปรียบเทียบตำแหน่งของปลายแขนกลในพิกัด cartesian space ระหว่างค่าที่กำหนดการเคลื่อนที่วงกลมในระนาบ YZ รัศมี 150 มิลลิเมตร ที่ความเร็วใน cartesian space 0.2π เรเดียนต่อวินาที กับค่าที่คำนวณหาได้จากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่ระนาบ $\theta = \pi/6$ เรเดียน

จากการทดลองจำลองการเคลื่อนที่ ทั้ง 4 การทดลองในทุกระนาบการทดลองที่กำหนดไป คือ ที่ θ= 0 เรเดียน ดังรูปที่ 4.26, 4.28, 4.30 และ4.32, ที่ $\theta = \pi/2$ เรเดียน ดังรูปที่ 4.34, 4.36, 4.38 และ 4.40, ที่ $\theta = \pi/3$ เรเดียน ดังรูปที่ 4.42, 4.44, 4.46 และ4.48 และที่ $\theta = \pi/6$ เรเดียน ดังรูปที่ 4.50, 4.52, 4.54 และ4.56 และทำการแสดงการทดลองเป็นกราฟดังแสดงในรูปที่4.27, 4.29, 4.31, 4.33, 4.35, 4.37, 4.39, 4.41, 4.43, 4.45, 4.47, 4.49, 4.51, 4.53, 4.55 และรูปที่ 4.57 ซึ่งเป็นการแสดงการเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการเคลื่อนที่ที่กำหนดกับตำแหน่งการเคลื่อนที่ที่ได้มาจากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว จะเห็นว่ากราฟแสดงตำแหน่งการเคลื่อนที่ที่กำหนดและกราฟที่แสดงการเคลื่อนที่ที่ได้จากการการจำลองการเคลื่อนที่ โดยใช้ค่าความเร็วในการเคลื่อนที่ของแต่ละจุดต่อใน joint space ที่ได้จากการคำนวณจากสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วออกมานั้นใกล้เคียงกันจบเกือบจะทับกันพอดี แสดงให้เห็นว่าสมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วที่หามาได้นี้สามารถนำไปใช้ในการควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ได้ หรือสรุปได้ว่า สมการความสัมพันธ์เชิงความเร็ว ที่ทำการคำนวณหรือหามานั้นมีความถูกต้องแม่นยำเพียงพอ

4.3 การทดสอบสมการโดยใช้สมการการเคลื่อนที่ในการควบคุมแขนกล

จากสมการการเคลื่อนที่ที่ได้พัฒนาขึ้นตามรายละเอียดในบทที่ 3 ในหัวข้อ 3.3 ซึ่งมีความซับซ้อนมาก งานวิจัยนี้ได้พัฒนาโปรแกรมจากสมการที่ (3.3) โดยมีรายละเอียดของสมการย่อยอื่นที่จำเป็นที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.3 สมการการเคลื่อนที่สามารถเขียนได้ดังนี้ คือ

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{6} b_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i \text{ โดยที่ } i = 1,2,\ldots,6 \tag{4.3.1}$$

และโปรแกรมนี้จะใช้ในการจำลองการเคลื่อนที่โดยกำหนดการเคลื่อนที่อ้างอิงให้ ดังหัวข้อถัดไป

4.3.1 ทดสอบความถูกต้องของโครงสร้างของสมการการเคลื่อนที่

การทดสอบความถูกต้องของสมการพลศาสตร์ของแขนกลนั้นสามารถพิจารณาได้หลายส่วน เช่นความผิดผลาดจากค่าพารามิเตอร์ของตัวแขน เช่น ความยาวแขน จุดต่อต่าง ๆ หรือค่าความแม่นยำของเทอมต่าง ๆ ที่ประกอบอยู่ในสมการพลศาสตร์ของแขนกลที่หามาได้ ค่าความผิดผลาดหรือไม่แน่นอนนี้เรียกว่า parametric uncertainties นอกจากค่าความผิดผลาดนี้แล้วก็อาจจะมีค่าความผิดผลาดอันเนื่องมาจากตัวระบบซึ่งหมายถึงระดับหรือ order ของระบบหรือเรียกว่า unstructured uncertainties หรือ unmodeled dynamics ซึ่งค่าความผิดนี้สามารถลดได้โดยใช้ตัวควบคุมแบบ robust control หรือแบบ adaptive control แต่การควบคุมทั้งสองแบบนี้จำเป็นจะต้องมีคุณสมบัติหนึ่งที่ใช้สำหรับการประกันความเสถียรภาพของตัวควบคุมนั่นคือ Skew Symmetric Matrix ของความสัมพันธ์ของเมทริกซ์ $\mathbf{N(q,\dot{q})}$ ซึ่งจะมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\mathbf{N(q,\dot{q}) = \dot{B}(q) - 2C(q,\dot{q})}$$

ความสัมพันธ์นี้จะมีประโยชน์มากในการออกแบบตัวควบคุมแบบ Robust และตัวควบคุมแบบ Adaptive และเนื่องจากว่าไม่สามารถหาสมการพลศาสตร์ของระบบได้แม่นยำถูกต้องร้อยเปอร์เซนต์ ดังนั้น จำเป็นต้องหาแบบจำลองที่มีโครงสร้างถูกต้องและสามารถใช้ในระบบควบคุมขั้นสูงต่อไป จึงต้องแน่ใจว่าโครงสร้างของสมการพลศาสตร์ที่หามาได้มีเมทริกซ์ $\mathbf{N(q,\dot{q})}$ ที่มีลักษณะเป็น Skew-Symmetric

ซึ่งเมื่อเทียบพจน์กับสมการ (3.3) จะสามารถหา เมทริกซ์ $\mathbf{N(q,\dot{q})}$ ได้จาก

$$n_{ij} = \dot{b}_{ij} - 2c_{ij} = \sum_{k-1}^{n}\left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k \tag{4.3.2}$$

โดยสมการที่ (4.3.2) จะได้ เมทริกซ์ $\mathbf{N(q,\dot{q})}$ จากนั้นทดสอบความเป็น Skew-Symmetry จาก

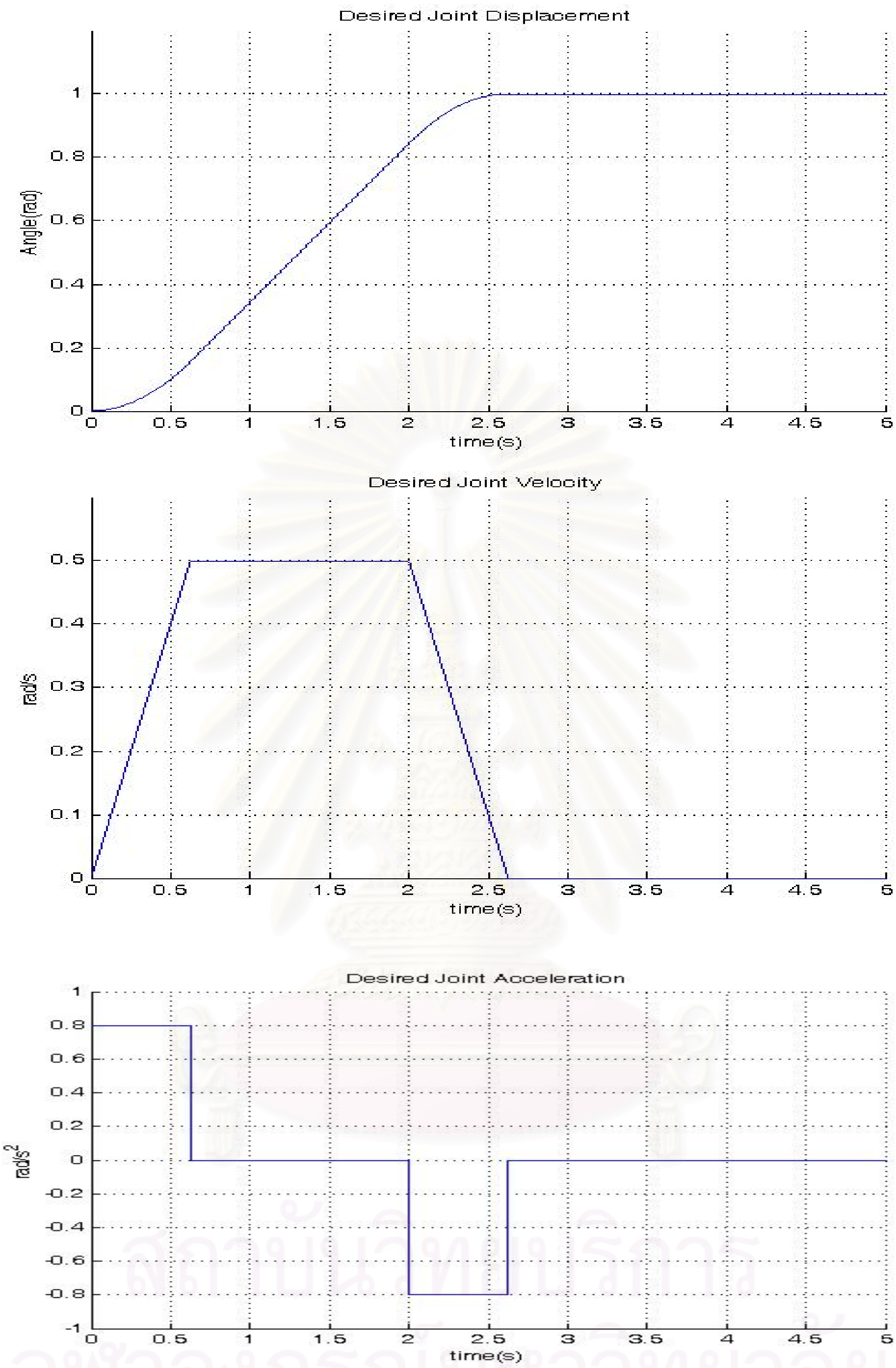
$$n_{ij} = -n_{ji}$$

ทดสอบผ่านโปรแกรม Matlab v2007b

จากการวิเคราะห์ผ่านโปรแกรมดังกล่าวข้างต้นได้ผลคือ สมการการเคลื่อนที่ที่ได้จาก (3.3) โดยแทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆของหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C จากภาคผนวก (ข) เป็นเมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติความเป็น Skew-Symmetry ทำให้ทราบว่าสมการการเคลื่อนที่มีโครงสร้างที่ถูกต้อง

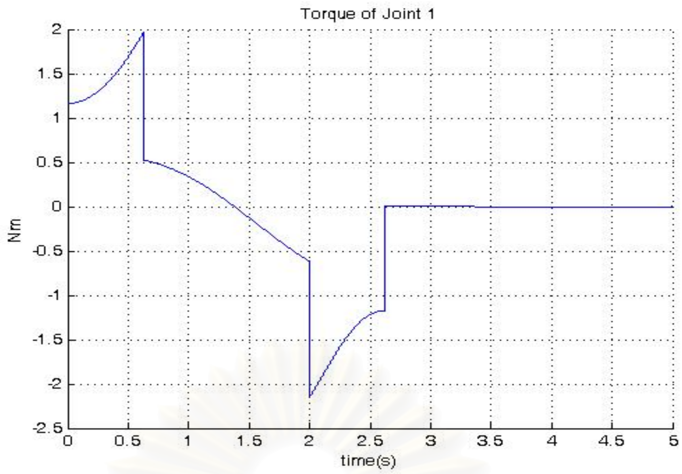
4.3.2 ทดสอบโดยแทนค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆลงในสมการการเคลื่อนที่

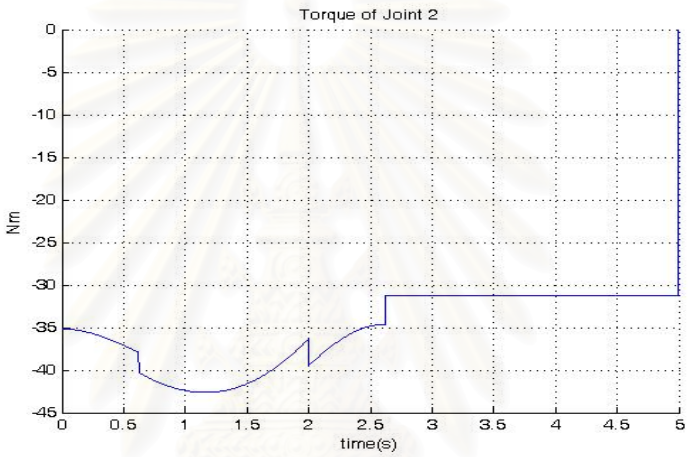
ในหัวข้อนี้ จะทดสอบดูแนวโน้มการทำงานของสมการการเคลื่อนที่สมการที่ (4.3.1) และตรวจสอบความมีเสถียรภาพของสมการโดยวิธีการจำลองการเคลื่อนที่ โดยจะกำหนดค่าเส้นทางเดินอ้างอิง (reference path) ของจุดต่อต่างๆ โดยจะทดสอบกับสมการการเคลื่อนที่สำหรับแขนกล 6 แกน กำหนดให้จุดต่อที่ 3 ยังไม่มีการเคลื่อนที่ มี angular velocity profile เป็นแบบคางหมูดังแสดงในรูปที่ 4.58 ข โดยกำหนดในส่วนของความเร็วเชิงมุมคงที่เท่ากับ 0.5 เรเดียนต่อวินาที และความเร่งเชิงมุมเท่ากับความหน่วงมีค่าเท่ากับ 0.8 เรเดียนต่อวินาที^{2} ดังแสดงในรูปที่ 4.58ค จาก velocity profile นี้สามารถนำไปใช้คำนวณหา position profile ของจุดต่อต่างๆ ได้ตามรูปที่ 4.58 ก จากค่าการเคลื่อนที่อ้างอิงที่แสดงในรูปที่ 4.58 นี้ กับค่าพารามิเตอร์ของตัวแขนหุ่นยนต์ เราสามารถนำไปแทนในสมการที่ (4.3.1) และหาแก้สมการเพื่อค่าแรงบิดทั้ง 7 จุดต่อได้จากสมการนี้ ดังแสดงในรูปที่ 4.59 ผลลัพธ์จากการคำนวณหาค่าแรงบิดที่แต่ละจุดต่อนี้ จะเห็นว่ามีความเสถียร และแรงบิดที่ได้ก็มีลักษณะไปในทางเดียวกับความเร่งอ้างอิงตามรูป 4.58 ค กล่าวคือมีช่วงที่แรงบิดเพิ่มขึ้น แรงบิดคงที่และแรงบิดลดลง ซึ่งทำให้พอจะมั่นใจในระดับหนึ่งว่าสมการพลศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ที่หามาได้นี้หรือสมการที่ (4.3.1) มีความถูกต้องในระดับหนึ่ง ซึ่งในความเป็นจริงแล้วคุณสมบัติ Skew Symmetric matrix ในหัวข้อ 4.3.1 นั้นมีความสำคัญมากกว่า เนื่องจากจะมีบทบาทมากสำหรับการออกแบบระบบควบคุมขั้นสูงต่อไป

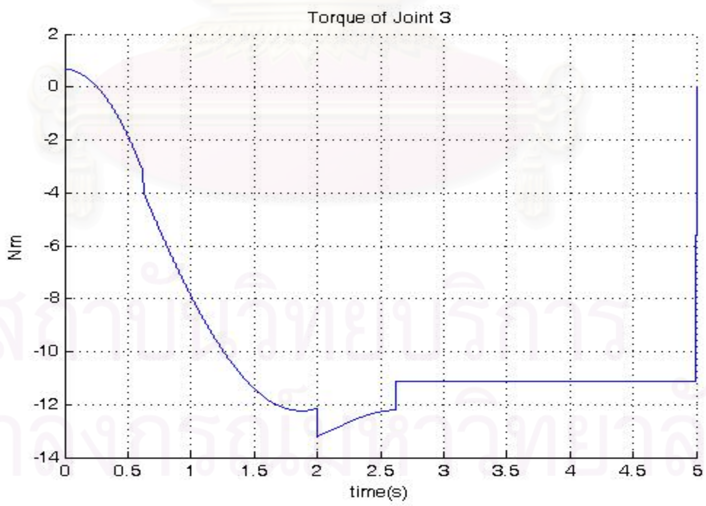


รูป 4.58: ค่ามุม ความเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุมที่ใช้ในการทดสอบความเสถียรของสมการการเคลื่อนที่

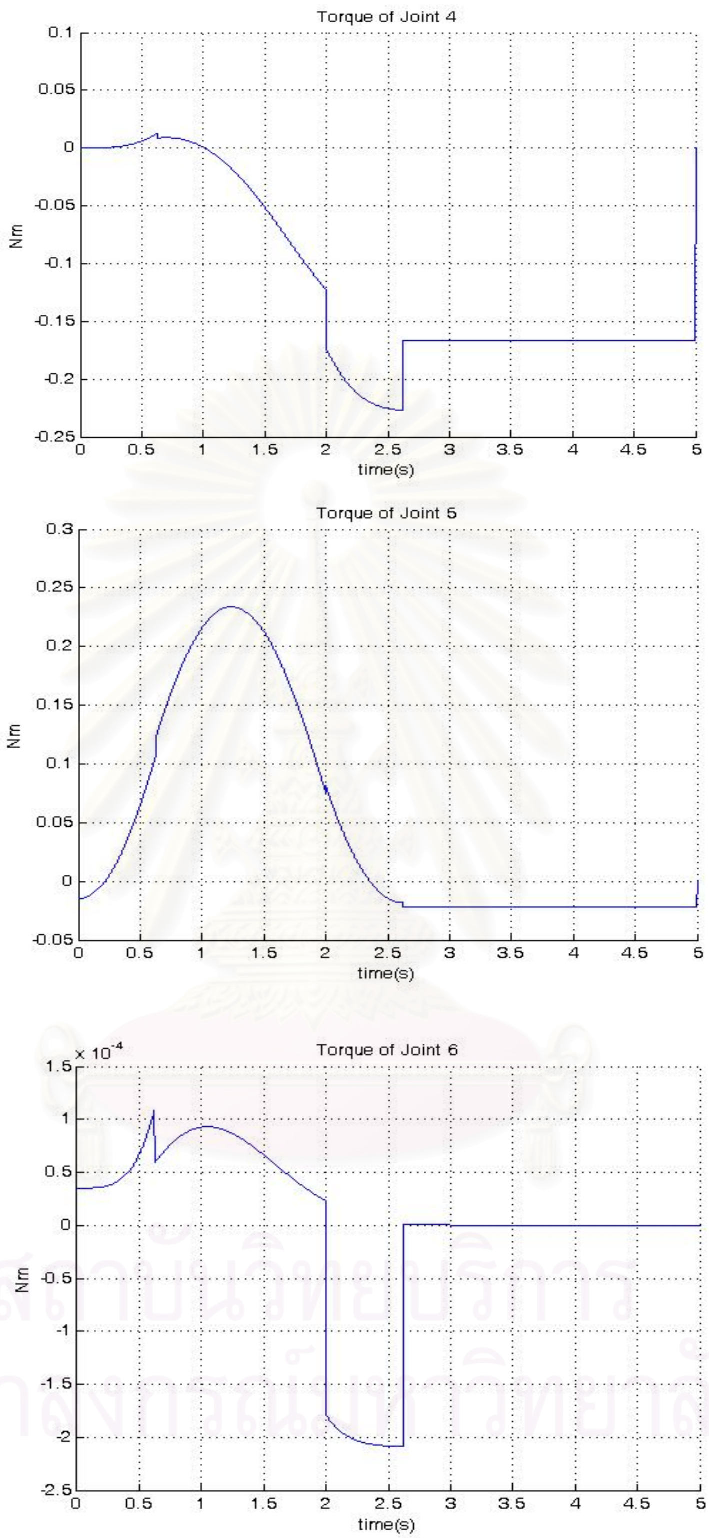
เมื่อทำการส่งค่าต่าง ๆที่กำหนดลงในสมการ 4.3.1 จะได้ค่าแรงบิดของแต่ละแกนแสดงในรูปที่ 4.59







สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.59: ค่าแรงบิดของทั้ง 6 แกนที่ได้จากสมการการเคลื่อนที่โดยการแทนค่ามุม ความเร็ว และความเร่งในสมการ (4.3.1)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยเพื่อหาสมการที่มีความสำคัญสำหรับการนำไปพัฒนาใช้ในการควบคุมแขนกล 7 แกน ที่มีลักษณะการตั้งแกนในรูปแบบเดียวกับหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C ทั้งโดยการควบคุมผ่านทางคิเนแมติกส์ และ ทางไดนามิกส์ โดยในส่วนของการควบคุมผ่านทางคิเนแมติกส์ สามารถควบคุมได้ผ่านสมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ และ สมการเชิงความเร็ว และการควบคุมทางด้านไดนามิกส์สามารถควบคุมผ่านสมการการเคลื่อนที่ที่หามาได้ ซึ่งทั้งหมดที่กล่าวมานั้นได้ทำการวิเคราะห์ คำนวณ ทดสอบจำลองการเคลื่อนที่ และทำการเขียนโปรแกรมในการควบคุมแขนกล PA10-7C อย่างง่าย เพื่อให้เป็นแนวทางในการนำสมการต่าง ๆที่ได้ทดลองไว้ไปใช้งานต่อไป โดยได้ทำการวิเคราะห์ทั้งหมดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สามารถสรุปได้ ดังนี้

1. ได้หาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ประเภท redundant robot ที่มีลักษณะโครงสร้างเช่นเดียวกับแขนกล PA10-7C การวิเคราะห์สมการทั้งหมดประกอบด้วย

ก. สมการฟอร์เวิร์สคิเนแมติกส์

ข. สมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์

ค. สมการความสัมพันธ์เชิงความเร็วระหว่างตัวแปรจุดต่อ และตัวแปร cartesian coordinate หรือการหาสมการจาโคเบียน

ง. สมการการเคลื่อนที่

ซึ่งจากผลการทดลองแสดงให้เห็นว่าชุดสมการดังกล่าวสามารถนำไปใช้ได้จริง และได้ทำการวิเคราะห์ตำแหน่ง singularity ไว้เพื่อให้ผู้ที่สนใจต้องการนำไปใช้ในการควบคุมแขนกลลักษณะดังกล่าวสามารถควบคุมแขนกลและสามารถเลือกเส้นทางการเคลื่อนที่เพื่อให้สามารถเคลื่อนที่หลีกเลี่ยงการตำแหน่งที่ผ่านจุดที่จะเกิด singularity โดยใช้ความสามารถของ redundant axis ที่มีเพิ่มอยู่ในหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C ได้

2. ได้ทำการจำลองการเคลื่อนที่ผ่านโปรแกรม Solidwork Cosmos Motion โดยใช้ข้อมูล 3D solid model ที่สร้างขึ้นสำหรับแขนกล PA10-7C เพื่อสามารถวิเคราะห์และตรวจสอบการใช้งานก่อนทดสอบจริงกับแขนกล PA10-7C และเพื่อแสดงถึงประสิทธิภาพในการใช้งานจริงกับหุ่นยนต์แขนกลประเภท redundant robot

3. ได้ทำโปรแกรมทดสอบเบื้องต้นผ่านระบบปฏิบัติการวินโดวส์ด้วย Microsoft® Visual C++ อย่างง่าย เพื่อควบคุมหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C ให้เคลื่อนที่ตามเส้นทางที่ต้องการ เช่น เพื่อเลือกเส้นทางการเคลื่อนที่ให้หลีกเลี่ยงตำแหน่งที่จะทำให้เกิด singularity ได้

5.2 ข้อเสนอแนะ

ข้อจำกัดของงานวิทยานิพนธ์นี้มีหลายประการ เช่น ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ผ่านสมการต่าง ๆที่หามาได้ของหุ่นยนต์ที่มีจุดต่อมากกว่า 6 จุดต่อหรือที่เรียกว่าแขนหุ่นยนต์แบบ redundant robot โดยมีลักษณะโครงสร้างเช่นเดียวกับแขนกล PA10-7C ซึ่งมีจุดต่อทั้งหมด 7 จุดต่อ ซึ่งมีผลให้สมการต่าง ๆที่ใช้ในการควบคุมหุ่นยนต์แขนกลลักษณะนี้มีความยาวและซับซ้อนมาก โดยเฉพาะในส่วนของการวิเคราะห์สมการอินเวิร์สคิเนแมติกส์ และสมการไดนามิกส์นั้น เมื่อพิจารณาจากสมการที่คำนวณได้จะเห็นว่าเป็น เมทริกซ์ ที่มีขนาดใหญ่ ดังนั้นสำหรับการนำไปใช้ในการควบคุมในลักษณะ real-time จะเป็นปัญหา จึงมีความจำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยประมวลผลกลางที่มีความเร็วสูงเพื่อการคำนวณการเคลื่อนที่ให้ทันในแต่ละเวลาชุ่ม (sampling time) และ เนื่องจากระบบปฏิบัติการวินโดวส์เอ็กซ์พีที่ใช้ในงานวิทยานิพนธ์นี้เป็นระบบปฏิบัติการที่ไม่มีความแน่นอนในเรื่องของเวลาการคำนวณหากเป็นการนำไปใช้งานซึ่งเรื่องของตำแหน่งของเวลาเป็นสิ่งที่จำเป็น อาจจะต้องมีการเปลี่ยนไปใช้ระบบปฏิบัติการที่มีคุณสมบัติด้านการจัดการเวลาจริง (real-time OS)

การส่งคำสั่งในการควบคุมแรงของแต่ละจุดต่อของหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C ไม่สามารถทำการควบคุมโดยตรงได้ผ่านกล่องควบคุม (controller) และบอร์ดควบคุมการเคลื่อนที่ (motion control CPU board) ที่ทางบริษัท MHI ให้มา จึงจำเป็นต้องใช้บอร์ดควบคุมอื่น เช่น Arcnet card ซึ่งมีลักษณะการส่งข้อมูลไปยังกล่องควบคุมที่ยุ่งยาก จำเป็นต้องมีโปรแกรมเพื่อควบคุมตัวบอร์ดควบคุม อีกที ซึ่งต้องใช้ความรู้ในการเขียนโปรแกรมในระดับสูง งานวิจัยนี้จึงแสดงผลในลักษณะการเช็คความถูกต้องของโครงสร้างของสมการการเคลื่อนที่แทน ดังนั้นผู้ที่ต้องการนำหุ่นยนต์แขนกล PA10-7Cไปประยุกต์ในการควบคุมแรงด้วยจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องออกแบบและพัฒนาโปรแกรมให้สามารถใช้ตัวบอร์ดควบคุมอื่นๆ เช่น Arcnet card เพื่อใช้ต่อยอดในการควบคุมแขนกลในส่วนของการควบคุมแรงต่อไป

ทฤษฎีและขั้นตอนวิธีที่ระบุไว้ในงานวิทยานิพนธ์นี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ทันทีเพื่อเป็นพื้นฐานความรู้ในการวิจัยขั้นสูงและการพัฒนาเพื่อนำไปใช้กับแขนกลแบบ redundant โดยใช้แขนกล PA10-7C เป็นมาตรฐาน เช่น การนำไปใช้กับระบบ Visual tracking moving target โดยพัฒนานำระบบการมองเห็นมาใช้ร่วมกับแขนกล PA10-7Cต่อไป

ศึกษาแนวทางในการควบคุมแขนกลเพื่อให้สามารถเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่ง singularity แล้วหุ่นยนต์แขนกลยังสามารถเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางที่ต้องการได้ ซึ่งแนวทางการควบคุมแขนกลเพื่อผ่านตำแหน่ง singularity ก็ยังคงเป็นสิ่งที่น่าสนใจในการวิจัยต่อไป

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

[1] John M. Hollerbach. Optimum Kinematic Design for a Seven Degree Of Freedom Manipulator. Robotics Research, Kyoto, Japan, Aug. 20-23, 1984: 215-222.

[2] Lorenzo Sciavicco and Bruno Siciliano. Modeling and Control of Robot Manipulators,Int. Edition, 1996.

[3] Craig, J.J. Introduction to Robotics Mechanics and Control. Third edition. USA : Pearson Prentice Hall, 2005.

[4] Hollerbach, J. M., and Sahar, G., Wrist partitioned inverse kinematic accelerations and manipulation dynamics, Int. Robotics Research 2(1983): 61-76.

[5] Lorenzo Sciavicco.,and Bruno Siciliano.A Solution to the Inverse Kinematic Problem for Redundant Manipulators. IEEE Transactions on Robotics and Automation 4, 4(August 1988): 403-410.

[6] D. N. Nenchev, Y. Tsumaki and M. Uchiyama.singularity-consistent parameterization of robot motion and control. The International Journal of Robotics Research 19, 2(February 2000): 159-182.

[7] K. Kreutz-Delgodo.,and M. Long, H. Seraji. Kinematic Analysis of 7 DOF Anthropomorphic Arms. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990:824-830

[8] วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ. การควบคุมระบบพลศาสตร์.พิมพ์ครั้งที่ 2.กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2548.

[9] Sangveraphunsiri, V., Tantawiroon, N. 2003. Novel design of a 4dof parallel robot Proc. JSAE Annual Congress, Yokohama, Japan.

[10] Viboon Sangveraphunsiri, Tawee, Ngamvilaikorn. Design and Development of a Six DOF Master-Slave Human-Assisted Manipulator Arm. JSAE Annual Congress, Yokohama, Japan, July, 2002.

[11] Chalongrath Pholsiri. Task-Based Decision Making and Control of Robotic Manipulators. The University of Texas at Austin(December 2004):236-240

ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

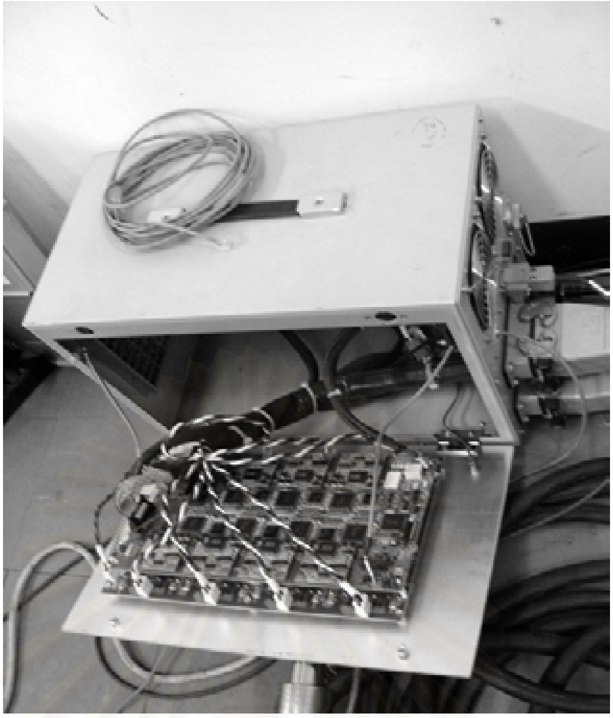
อุปกรณ์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

อุปกรณ์ที่ใช้ประกอบด้วยอุปกรณ์หลักๆ ดังต่อไปนี้

1. แขนกลของบริษัท Mitsubishi heavy industrial,Ltd. รุ่น PA10-7C ซึ่งเป็นแขนกล 7 แกน

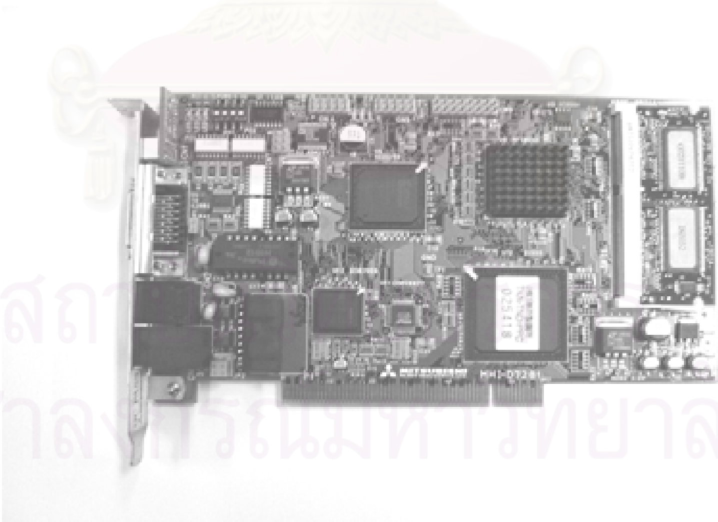
รูปที่ ก.1: แขนกลของบริษัท Mitsubishi heavy industrial,Ltd. รุ่น PA10-7C

2. ชุดควบคุม (robot control unit) ของแขนกล PA10-7C รุ่น PA10-7C-CNT ของบริษัท Mitsubishi heavy industrial,Ltd. พร้อมสายสัญญาณ 1 ชุด



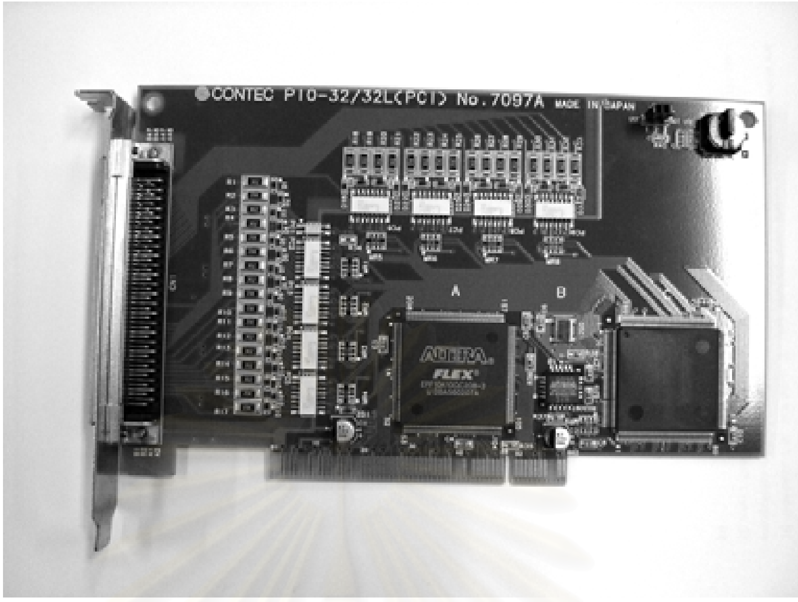
รูปที่ ก.2: ชุดควบคุม (robot control unit) ของกับแขนกล PA10-7C รุ่น PA10-7C-CNT

3. motion control CPU board รุ่น MHI-D7281 ของบริษัท Mitsubishi heavy industrial,Ltd.



รูปที่ ก.3: motion control CPU board รุ่น MHI-D7281

4. DIO board รุ่น PIO-32/32L ของบริษัท CONTEC



รูปที่ ก.4: DIO board รุ่น PIO-32/32L

5. หุ่น PhantomOmni ของบริษัท SensAble Technologies, Inc.,

รูปที่ ก.5: หุ่น Phantom Omni

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ข

พารามิเตอร์ต่าง ๆที่สำคัญของหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C[11]

1. จุดศูนย์ถ่วงของแขนกลแต่ละแกน(cg.) และมวลของแขนกลแต่ละแกน

ระยะตามแกน	x	y	z	mass
Links 1	0	0	-0.010	9.22
Links 2	0	-0.200	0	4.51
Links 3	0	0	-0.035	5.64
Links 4	0	-0.115	0	2.04
Links 5	0	0	-0.084	2.61
Links 6	0	-0.042	0	2.07
Links 7	0	0	0.022	1.05

ตารางที่ ข.1: จุดศูนย์ถ่วงของแขนกลแต่ละแกน (cg.) ในหน่วย เมตร โดยเทียบกับแกนของแต่ละข้อต่อ และมวลของแขนกลแต่ละแกนในหน่วย กิโลกรัม

2. โมเมนต์ความเฉื่อยของแขนกลแต่ละแกน (Moment of Inertia)

$$link1\begin{bmatrix} 0.122706 & 0 & 0 \\ 0 & 0.122706 & 0 \\ 0 & 0 & 0.550564 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots, link2\begin{bmatrix} 0.055035 & 0 & 0 \\ 0 & 0.055035 & 0 \\ 0 & 0 & 0.018144 \end{bmatrix}$$

$$link3\begin{bmatrix} 0.008124 & 0 & 0 \\ 0 & 0.008124 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00572413 \end{bmatrix} \cdots\cdots, link4\begin{bmatrix} 0.008124 & 0 & 0 \\ 0 & 0.008124 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00572413 \end{bmatrix}$$

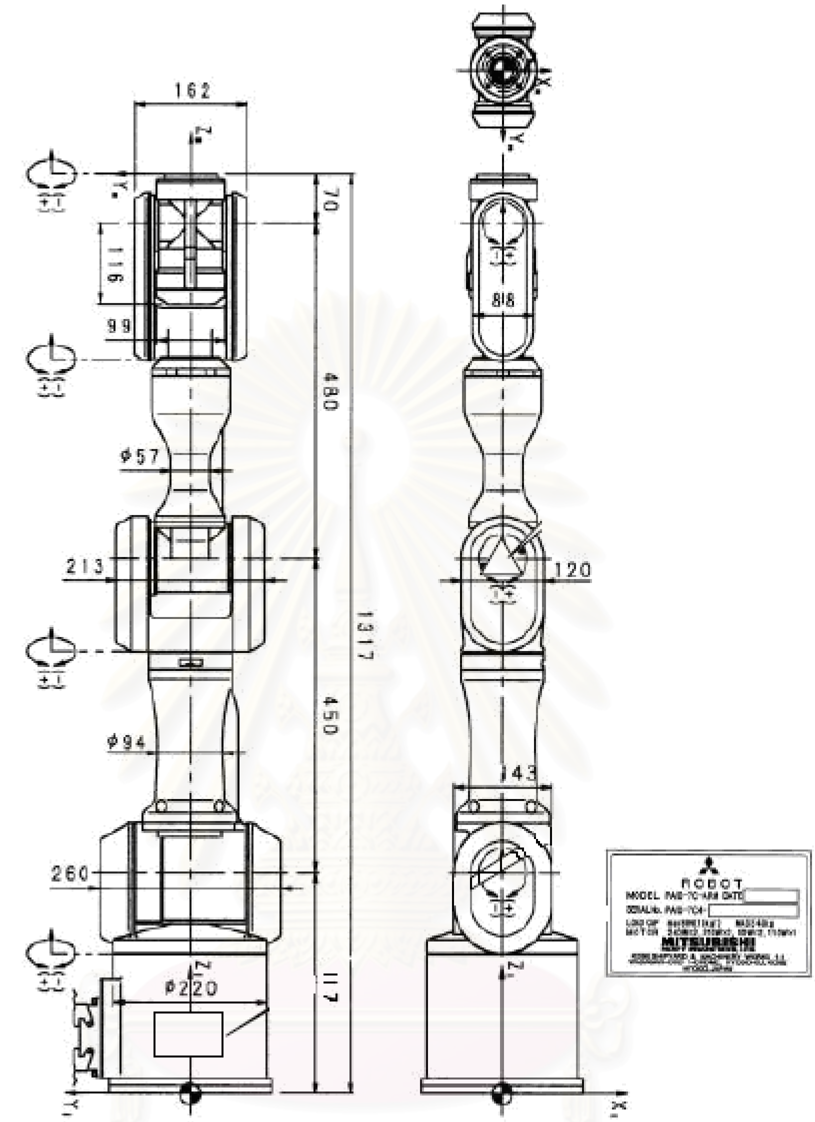
$$link5\begin{bmatrix} 0.002546007 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002546007 & 0 \\ 0 & 0 & 0.002747347 \end{bmatrix}, link6\begin{bmatrix} 0.002977 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002977 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001141 \end{bmatrix}$$

$$link7\begin{bmatrix} 0.0005294 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005294 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0004 \end{bmatrix}$$

โดยค่าโมเมนต์ความเฉื่อยมีหน่วยเป็น กิโลกรัม.เมตร^2 ($kg \cdot m^2$)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3. ระยะของแขนกล



รูปที่ ข.1: ระยะขนาดของหุ่นยนต์แขนกล PA10-7C

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายณัฐศร พรหมเพ็ชร เกิดเมื่อวันที่ 14 กันยายน ปีพ.ศ.2524 เป็นชาวกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล จากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์เมื่อปีพ.ศ.2544 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปีการศึกษา 2546

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย