

อัลกอริทึมคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาสำหรับระบบควบคุมพารามิเตอร์กระจาย



นางสาวกรรณก งามสิริธนากุล

ศูนย์วิทยทรัพยากร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า  
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2551

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

TIME-RESPONSE ALGORITHMS FOR DISTRIBUTED-PARAMETER CONTROL SYSTEMS



Miss Kornkanok Ngamsiritanakul

ศูนย์วิทยทรัพยากร

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2008

Copyright of Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย


หัวข้อวิทยานิพนธ์ อัลกอริทึมคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาสำหรับระบบควบคุมพารามิเตอร์  
กระจาย

โดย นางสาวกรรณก งามสิริธนากุล

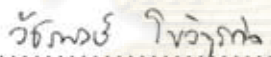
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า


อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยดำเนินการ  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท

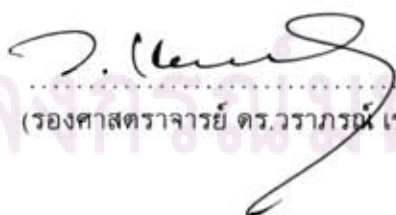
  
..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

  
..... ประธานกรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.วัชรพงษ์ ไชวουργกิจ)

  
..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์ )

  
..... กรรมการ  
(ดร.คาร์ณ เมฆมดา)

  
..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย  
(รองศาสตราจารย์ ดร.วารกรณ์ ไชววิศิษฐ์)

กรรณก งามสิริธนากุล: อัลกอริทึมคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาสำหรับระบบควบคุมพารามิเตอร์  
กระจาย (TIME-RESPONSE ALGORITHMS FOR DISTRIBUTED-PARAMETER CONTROL  
SYSTEMS) อ. ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ.ดร.สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์ , 59 หน้า

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้พัฒนาอัลกอริทึมเชิงตัวเลขสำหรับคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบ  
ควบคุมป้อนกลับที่ประกอบด้วยตัวควบคุมเชิงมิติจำกัด และกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อน  
และสมการคลื่น โดยการประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่งของสมการความร้อนและสมการ  
คลื่นด้วยผลต่างอันดับ ซึ่งส่งผลให้ระบบควบคุมป้อนกลับที่ถูกแสดงแทนด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตมี  
ขนาดใหญ่และเป็นเมทริกซ์มากเลขศูนย์ สูตรวนซ้ำ  $IMN$  ได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณผลตอบสนอง  
เชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่ถูกแสดงแทนด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต เนื่องจากสูตรวนซ้ำ  
 $IMN$  เป็นวิธีที่มีความแม่นยำและเป็นวิธีที่เหมาะสมสำหรับระบบที่แข็งแกร่ง ลักษณะโครงสร้างพิเศษที่  
พบอยู่ในสมการเชิงเส้นพีชคณิตของสูตรวนซ้ำ  $IMN$  ได้ถูกนำมาใช้ประโยชน์ในการพัฒนาแบบแผนของ  
การแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษที่ส่งผลให้จำนวนครั้งในการดำเนินการของการแยกตัวประกอบและ  
การแทนค่าในแต่ละขั้นของการวนซ้ำอยู่ในอันดับ  $O(k)$  เมื่อ  $k$  คือมิติของระบบ และมีความแม่นยำด้วย  
ค่าคลาดเคลื่อนที่อยู่ในอันดับ  $O(\delta^2)$  เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์  
สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith เสนอก่อนหน้านี้ นอกจากนี้อัลกอริทึมของวิธีผลต่างอันดับและ  
สูตรวนซ้ำ  $IMN$  ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษและวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสม  
เชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith เสนอก่อนหน้านี้ได้ถูกพัฒนาและสร้างคลังสำหรับโปรแกรม  
MATLAB ในรูปของ mex-function เพื่อสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบระบบควบคุมแบบใช้  
คอมพิวเตอร์ช่วยต่อไป

# ศูนย์วิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา ..... วิศวกรรมไฟฟ้า .....  
สาขาวิชา ..... วิศวกรรมไฟฟ้า .....  
ปีการศึกษา ..... 2551 .....

ลายมือชื่อนิสิต ..... *Born* .....  
ลายมือชื่อที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก .....  
..... *Dr. Sunsanatong* .....

##4970205821: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: DISTRIBUTED-PARAMETER SYSTEMS / DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS /  $I_{MN}$  APPROXIMANTS / HEAT EQUATION / WAVE EQUATION

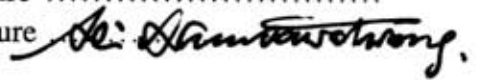
KORNKANOK NGAMSIRITANAKUL: TIME-RESPONSE ALGORITHMS FOR DISTRIBUTED-PARAMETER CONTROL SYSTEMS. THESIS PRINCIPAL ADVISOR: ASST. PROF. SUCHIN ARUNSAWATWONG, Ph.D., 59 pp.

This thesis develops numerical algorithms for calculating the time-responses of a feedback control system comprising a finite dimensional controller and a plant described either by a heat or wave equation. By approximating the spatial derivatives of the associated partial differential equation with finite differences, the feedback interconnection is represented as a large linear differential-algebraic system with sparse matrices. The  $I_{MN}$  recursions, which are suitable for stiff differential equations, are employed in solving such DAEs. The special structure in the associated linear algebraic equations of the  $I_{MN}$  recursion is exploited by developing a special LU-factorization scheme. It is found that the factorization and the substitution for each step of recursion requires only  $\mathcal{O}(\hat{n})$  arithmetic operations, where  $\hat{n}$  is the system's dimension. The developed methods are compared with Smith's method, which is also based on  $I_{MN}$  approximants for solving mixed ordinary and partial differential systems problem. Finally, MATLAB mex-functions for computing the time responses are developed as library functions, based on the new methods and Smith's method. The library provides useful tools for computer-aided control systems design.

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department ..... Electrical Engineering  
Field of Study ..... Electrical Engineering  
Academic Year ..... 2008

Student's Signature ..... 

Advisor's Signature ..... 



## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ด้วยความช่วยเหลือของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้สละเวลาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ที่ทำให้นิสิตมีแนวความคิดในการทำวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยจึงใคร่ขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ โชติพิรุณกิจ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ดร. วราภรณ์ เชาว์วิศิษฐ์ และอาจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านในสาขาระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้พื้นฐานในวิชาทางระบบควบคุม อันเป็นพื้นฐานในการศึกษาและทำวิทยานิพนธ์นี้

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้ทั้งกำลังทรัพย์และกำลังใจตลอดเวลา รวมทั้งให้โอกาสผู้วิจัยได้ศึกษาต่อในระดับปริญญาโทมาจนบัดนี้

ขอขอบคุณเพื่อนๆ รุ่นพี่ รุ่นน้องในห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุมทั้งในภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ที่ได้ให้กำลังใจและคำปรึกษา จนผู้วิจัยได้ทำวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับทรัพยากรต่างๆ ในการศึกษา ค้นคว้าและวิจัย

ศูนย์วิทยุทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ญ
บทที่	
<b>1 บทนำ.....</b>	<b>1</b>
1.1 ความเป็นมา .....	1
1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา .....	3
1.3 วัตถุประสงค์ .....	4
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์ .....	4
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน .....	5
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ .....	5
1.7 โครงสร้างของวิทยานิพนธ์ .....	6
<b>2 ทฤษฎีพื้นฐาน.....</b>	<b>7</b>
2.1 ตัวแทนระบบควบคุมป้อนกลับ .....	7
2.1.1 การแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์ .....	7
2.1.2 การแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิต .....	7
2.2 ตัวประมาณ $I_{MN}$ .....	8
2.2.1 นิยามและคุณสมบัติของตัวประมาณ $I_{MN}$ .....	8
2.2.2 สูตรรวมซ้ำ $I_{MN}$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต .....	10
2.3 สรุป .....	11
<b>3 วิธีผลต่างอันดับและสูตรรวมซ้ำ <math>I_{MN}</math> สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต.....</b>	<b>12</b>
3.1 ระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร่อน .....	12
3.1.1 วิธีผลต่างอันดับ .....	13
3.1.2 การแยกตัวประกอบ LU .....	14
3.2 ระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่น .....	17

3.2.1	การแยกตัวประกอบ LU .....	18
3.3	สรุป .....	22
<b>4</b>	<b>วิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย .....</b>	<b>23</b>
4.1	รูปแบบมาตรฐาน .....	24
4.2	ขั้นตอนการคำนวณ .....	28
4.3	ระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อน .....	29
4.4	ระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่น .....	32
4.5	สรุป .....	36
<b>5</b>	<b>ตัวอย่างเชิงตัวเลข .....</b>	<b>37</b>
5.1	ปัญหาการควบคุมอุณหภูมิของแท่งเหล็ก .....	37
5.1.1	วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ $I_{MN}$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต .....	38
5.1.2	วิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย .....	40
5.2	ปัญหาการควบคุมตำแหน่งของเส้นเชือก .....	42
5.2.1	วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ $I_{MN}$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต .....	43
5.2.2	วิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย .....	45
5.3	สรุป .....	47
<b>6</b>	<b>บทสรุปและข้อเสนอแนะ .....</b>	<b>48</b>
6.1	บทสรุป .....	48
6.2	ข้อเสนอแนะ .....	49
6.3	ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ .....	49
	<b>รายการอ้างอิง .....</b>	<b>50</b>
	<b>ภาคผนวก .....</b>	<b>52</b>
	ภาคผนวก ก คลังบนโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function .....	53
	<b>ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....</b>	<b>59</b>


  
 ศูนย์วิทยทรัพยากร  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## สารบัญตาราง

หน้า

3.1	จำนวนการดำเนินการสำหรับการแยกตัวประกอบและการแทนค่า .....	17
3.2	จำนวนการดำเนินงานสำหรับการแยกตัวประกอบและการแทนค่า .....	22
5.1	แสดงเวลาที่ใช้ประมวลผลและค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ $q(l, t)$ .....	42
5.2	แสดงเวลาที่ใช้ประมวลผลและค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ $q(l, t)$ .....	47



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญภาพ

หน้า

1.1	ระบบควบคุมเชิงเส้นที่ไม่แปรผันตามเวลา .....	1
4.1	แสดงการแบ่ง $x$ เป็น $n_s$ ส่วน .....	24
4.2	แสดงความสัมพันธ์ที่จุดเชื่อมต่อในแต่ละส่วน .....	25
5.1	ปัญหาการควบคุมอุณหภูมิ .....	37
5.2	ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบที่ $x = l$ .....	38
5.3	ค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ $q(l, t)$ สำหรับ $\delta$ ค่าต่างๆ .....	39
5.4	เวลาที่ใช้ประมวลผลสำหรับ $n$ ค่าต่างๆ .....	39
5.5	ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบที่ $x = l$ .....	40
5.6	ค่าผิดพลาดของสัญญาณ $q(l, t)$ สำหรับ $\delta = 4.0, 2.0, 1.0$ และ $0.8$ .....	41
5.7	เปรียบเทียบค่าผิดพลาดของสัญญาณ $q(l, t)$ .....	41
5.8	ผลตอบสนองเชิงเวลาของสัญญาณ $q(l, t)$ .....	43
5.9	ค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ $q(l, t)$ สำหรับ $\delta$ ค่าต่างๆ .....	44
5.10	เวลาที่ใช้ประมวลผลสำหรับ $n$ ค่าต่างๆ .....	44
5.11	ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบที่ $x = l$ .....	45
5.12	ค่าผิดพลาดของสัญญาณ $q(l, t)$ สำหรับ $\delta = 0.1, 0.04, 0.02$ และ $0.01$ .....	46
5.13	เปรียบเทียบค่าผิดพลาดของสัญญาณ $q(l, t)$ .....	46
ก.1	ลักษณะการเชื่อมต่อระหว่างโปรแกรม MATLAB กับรูทีนการคำนวณจริง .....	53
ก.2	ลักษณะการรับส่งข้อมูลระหว่างโปรแกรม MATLAB กับรูทีนการคำนวณจริง .....	54

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

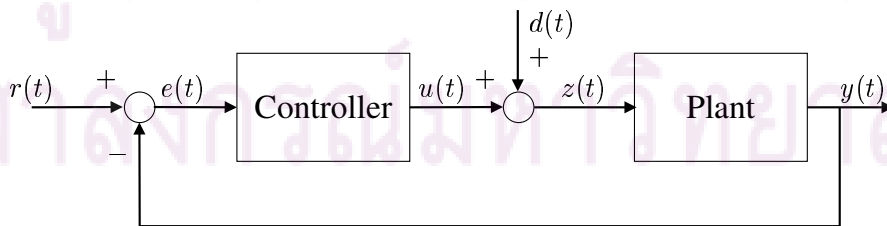
# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมา

ระบบพารามิเตอร์กระจาย (distributed-parameter system) [1] คือระบบที่ถูกแสดงแทนในทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ซึ่งเมื่อถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบสมการสถานะ (state equation) แล้วปริภูมิสถานะ (state space) มีมิติเป็นอนันต์ ตัวอย่างของระบบพารามิเตอร์กระจายเช่น ระบบไฮดรอลิก (hydraulic), ระบบท่อนำคลื่น (waveguides), ระบบสายส่ง (transmission line) หรืออุปกรณ์ที่ใช้ในกระบวนการทางเคมีเช่น เครื่องปฏิกรณ์ (reactor), เครื่องแลกเปลี่ยนความร้อน (heat exchanger) เป็นต้น (ดูเพิ่มเติมได้ใน [1])

การออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงตัวเลข (numerical optimization) เป็นวิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในการออกแบบระบบควบคุม ตัวอย่างเช่น วิธีการพารามิเตอร์เหมาะสมที่สุด (parameter optimization method) [2, 3, 4], วิธีอสมการ (the method of inequalities) [5, 6] เป็นต้น โดยในการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงตัวเลขนั้น ดัชนีสมรรถนะหลัก (principal performance index) ได้ถูกเขียนให้อยู่ในรูปเชิงฟังก์ชัน (functional) ของผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบ เช่น ค่าพุ่งเกินสูงสุด (maximum overshoot), เวลาเข้าที่ (settling time) เป็นต้น ดังนั้นในการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีดังกล่าวจำเป็นต้องคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบนั้นซ้ำๆ กันหลายครั้งในระหว่างการค้นหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม เห็นได้ชัดว่าประสิทธิภาพของกระบวนการในการออกแบบระบบควบคุมมีปัจจัยหลักที่ขึ้นอยู่กับ การคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบ ซึ่งส่งผลให้การพัฒนาอัลกอริทึมสำหรับคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาที่ให้ผลเร็ว เชื่อถือได้และมีประสิทธิภาพเป็นสิ่งที่สำคัญอย่างยิ่ง และนำไปสู่การสร้างคลัง (library) สำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function เพื่อสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบระบบควบคุมแบบใช้คอมพิวเตอร์ช่วย (computer-aided control systems design)



รูปที่ 1.1: ระบบควบคุมเชิงเส้นที่ไม่แปรผันตามเวลา

สำหรับงานวิจัยนี้พิจารณาระบบควบคุมป้อนกลับที่แสดงดังรูปที่ 1.1 ซึ่งประกอบด้วยกระบวนการและตัวควบคุม ในที่นี้กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) เนื่องจากระบบที่มีลักษณะทางกายภาพที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนและสมการคลื่นนั้นมีเกิดขึ้นมากมาย ตัวอย่างสำหรับสมการความร้อนเช่น การนำความร้อนในแท่งโลหะกลม (rod) หรือแท่งโลหะแบน (slab), การแพร่ของอนุภาค (ดูตัวอย่างใน [1, 7]) และตัวอย่างสำหรับสมการคลื่นเช่น การสั่นตามยาวในแท่ง (longitudinal vibrations in a bar) (ดูตัวอย่างใน [1]) ซึ่งสมการความร้อนและสมการคลื่นดังกล่าวแสดงแทนในทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยเมื่อใช้วิธีผลต่างอันตะ (finite difference method) ประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง (spatial derivative) แล้ว ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญขนาดใหญ่และแข็งเกร็ง (stiff) ที่สามารถแสดงแทนด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mu}(t) &= A_g \mu(t) + B_g z(t) \\ y(t) &= C_g \mu(t) \\ z(t) &= u(t) + d(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

เมื่อ  $\mu(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$  และ  $d(t)$  แสดงแทนสถานะของกระบวนการ, สัญญาณควบคุม, สัญญาณออก และสัญญาณรบกวน (disturbance) ตามลำดับ สำหรับส่วนของตัวควบคุมถูกอธิบายด้วยฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$  ที่เป็นฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) และมีค่าดังนี้

$$G_c(s) = \frac{b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \dots + a_{m-1} s + a_m} + d \quad (1.2)$$

โดยสัมประสิทธิ์  $d$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) เป็นจำนวนจริง ดังนั้นปริภูมิสถานะของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$  คือ

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_c \eta(t) + B_c e(t) \\ u(t) &= C_c \eta(t) + D_c e(t) \\ e(t) &= r(t) - y(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

เมื่อ  $\eta(t)$  และ  $r(t)$  แสดงแทนสถานะของตัวควบคุมและสัญญาณอ้างอิง (reference input) ตามลำดับ โดย  $A_c \in \mathbb{R}^{m \times m}$  เป็นเมทริกซ์คอมพานีเยน (companion matrix),  $B_c \in \mathbb{R}^m$ ,  $C_c^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $D_c \in \mathbb{R}$  ที่มีค่าดังนี้

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_m & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_c^T = \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}, \quad D_c = d$$

งานวิจัยนี้ได้พิจารณารูปแบบมาตรฐาน 2 รูปแบบที่นิยมใช้ในการแทนระบบควบคุมป้อนกลับ นั่นคือการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์ (differential representation) ดังสมการ (2.1) และการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิต (differential-algebraic representation) ดังสมการ (2.2) โดยในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้สมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตเพื่อแสดงแทนระบบควบคุมป้อนกลับ เนื่องจากการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตสามารถรักษาความเป็นปกติ (regularity) หรือความเป็นศูนย์มาก (sparsity) ของระบบดั้งเดิมไว้ได้ (ดูรายละเอียดในหัวข้อ 2.1) และเนื่องจากทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  มีความแม่นยำสูงและเป็นวิธีที่มีเสถียรภาพแบบ A [8, 9] ซึ่งเหมาะสมกับระบบที่เราพิจารณา ดังนั้นการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบสามารถคำนวณได้ด้วยการใช้ทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  [8, 10] (ดูรายละเอียดได้ในหัวข้อ 2.2.1) ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU (LU-factorization) แบบพิเศษที่ใช้จำนวนการดำเนินการ (operation) ของการคำนวณอยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(n)$  เมื่อ  $n$  คือมิติของระบบ (ดูรายละเอียดในการแยกตัวประกอบ LU สำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร่อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ได้ในหัวข้อ 3.1.2 และในหัวข้อ 3.2.1 ตามลำดับ)

## 1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณหาผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบที่ถูกอธิบายทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อนั้น วิธีหนึ่งที่ใช้กันอย่างแพร่หลายและเป็นที่ยอมรับกันดีคือวิธีผลต่างอันดับ (ดูตัวอย่างได้ใน [11]) ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและยังใช้ในการประมาณสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยวิธีที่ใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้นมีมากมาย ดังตัวอย่างเช่น วิธี Forward Euler, วิธี Fourth-Order Runge-Kutta ซึ่งเป็นวิธีที่ไม่มีเสถียรภาพแบบ A ที่ไม่เหมาะสมสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่แข็งแกร่ง และวิธี Backward Euler, วิธี Trapezoidal, วิธี Backward Differentiation Formula อันดับ 2, วิธี Implicit Runge-Kutta บางชนิด ล้วนเป็นวิธีที่มีเสถียรภาพแบบ A ซึ่งเหมาะสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่แข็งแกร่ง (ดูเพิ่มเติมได้ใน [12]) โดยเราจะกล่าวว่าวิธีเชิงตัวเลขนั้นมีเสถียรภาพแบบ A ก็ต่อเมื่อถ้าใช้วิธีการดังกล่าวกับสมการทดสอบสเกลาร์  $x' = \lambda x$  ด้วยค่าคงตัวเชิงซ้อน  $\lambda$  ที่มีส่วนจริงเป็นลบ (negative real part) แล้ว คำตอบเชิงตัวเลขที่คำนวณได้จะเข้าสู่ 0 เมื่อ  $n \rightarrow \infty$  สำหรับช่วงก้าว (step size)  $h > 0$  ใดๆ [13]

การแก้ปัญหาหาระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญขนาดใหญ่และแข็งแกร่งได้ถูกกล่าวไว้ใน [9] ว่าการใช้สูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  มีจำนวนของการดำเนินการในการแก้สมการเชิงเส้นสำหรับการวนซ้ำน้อยกว่าการใช้วิธี implicit Runge-Kutta บางชนิด (ดูรายละเอียดได้ใน [9]) ซึ่งสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  นั้นเหมาะสำหรับการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่แข็งแกร่ง เพราะสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  เป็นวิธีที่มีเสถียรภาพแบบ A (เมื่ออันดับของพจน์เศษและพจน์ส่วนของการแปลงลาปลาซเป็นไปตามเงื่อนไข  $N - 2 \leq M \leq N$ ) เนื่องจากระบบที่เราพิจารณาเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญขนาดใหญ่และแข็งแกร่ง ดังนั้นเราจึงเลือกสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  มาใช้ในการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตดังกล่าว โดย

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  และสอดคล้องกับงานวิจัยที่กำลังศึกษา อาทิเช่น

- Zakian และ Coleman [14] ได้ใช้สูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  ในการแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลขของพจน์ตรรกยะ (rational) พร้อมทั้งแสดงการนำไปใช้ประโยชน์ของโครงสร้างที่มีลักษณะพิเศษในเมทริกซ์  $A$  เมื่อเมทริกซ์  $A$  เป็นเมทริกซ์คอมพาเนียน ซึ่งนำไปสู่การแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษที่มีการดำเนินการของการคำนวณอยู่ในอันดับ  $O(n)$  เมื่อ  $n$  คือมิติของเมทริกซ์  $A$
- Smith [15] ได้เสนอและทดสอบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย ด้วยการใช้ทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแปลงลาปลาซผกผันด้วยทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$
- Inooka [16] ได้เสนอวิธีการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต เพื่อลดจำนวนในการคำนวณด้วยการใช้ทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  และได้เปรียบเทียบจำนวนครั้งของการดำเนินการระหว่างการแทนระบบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) กับการแทนระบบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต (differential-algebraic equations)
- Arunsawatwong และ Ngamsiritanakul [17] ได้เสนออัลกอริทึมคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาที่เร็วและเชื่อถือได้ สำหรับระบบป้อนกลับของการนำความร้อน (heat conduction) ด้วยการใช้สมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตแสดงแทนระบบป้อนกลับ และใช้ตัวประมาณ  $I_{MN}$  ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลา

### 1.3 วัตถุประสงค์

1. เพื่อพัฒนาอัลกอริทึมที่เชื่อถือได้และมีประสิทธิภาพ สำหรับการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมพารามิเตอร์กระจายที่มีกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดั่งสมการ (3.1) และสมการคลื่นดั่งสมการ (3.6)
2. เพื่อสร้างคลังสำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function สำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดั่งสมการ (3.1) และสมการคลื่นดั่งสมการ (3.6)

### 1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. พัฒนาอัลกอริทึมที่เชื่อถือได้และมีประสิทธิภาพเพื่อคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมพารามิเตอร์กระจายสำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดั่งสมการ (3.1) และสมการคลื่นดั่งสมการ (3.6) ด้วยการใช้ทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  ในหัวข้อ 2.2.1 ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษ



2. จำลองผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมพารามิเตอร์กระจาย สำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ด้วยอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนาบนคอมพิวเตอร์ผ่านโปรแกรม MATLAB
3. ทดสอบความแม่นยำของอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนาด้วยการเปรียบเทียบกับวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith [15] เสนอก่อนหน้านี้
4. สร้างคลังสำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function สำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6)

## 1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ค้นคว้าและศึกษาบทความเกี่ยวกับทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$
2. ค้นคว้าและศึกษาบทความเกี่ยวกับระบบพารามิเตอร์กระจาย
3. พัฒนาอัลกอริทึมที่เชื่อถือได้และมีประสิทธิภาพเพื่อคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมพารามิเตอร์กระจายสำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ด้วยการใช้ทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  ในหัวข้อ 2.2.1 ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษ
4. จำลองผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมพารามิเตอร์กระจาย สำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ด้วยอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนาบนคอมพิวเตอร์ผ่านโปรแกรม MATLAB
5. ศึกษาวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith [15] เสนอก่อนหน้านี้
6. ทดสอบความแม่นยำของอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนาโดยการเปรียบเทียบกับวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith [15] เสนอก่อนหน้านี้
7. นำอัลกอริทึมที่พัฒนามาสร้างคลังสำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function สำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6)

## 1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. อัลกอริทึมสำหรับคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมพารามิเตอร์กระจายที่เชื่อถือได้และมีประสิทธิภาพ เมื่อกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6)

2. คลังสำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function ที่สามารถใช้ได้จริง สำหรับกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดั่งสมการ (3.1) และสมการคลื่นดั่งสมการ (3.6)

## 1.7 โครงสร้างของวิทยานิพนธ์

ในบทถัดไปจะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ ซึ่งประกอบด้วยตัวแทนระบบควบคุมป้อนกลับและทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  ในบทที่ 3 ได้พัฒนาและอธิบายอัลกอริทึมของวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต เพื่อใช้ในการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดั่งสมการ (3.1) และสมการคลื่นดั่งสมการ (3.6) ในบทที่ 4 อธิบายอัลกอริทึมของวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith [15] เสนอก่อนหน้านี้ ในบทที่ 5 จะแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพและความน่าเชื่อถือของอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนาในบทที่ 3 ด้วยการทดสอบกับตัวอย่างเชิงตัวเลขพร้อมทั้งเปรียบเทียบผลคำตอบกับอัลกอริทึมในบทที่ 4 และในบทสุดท้ายเป็นบทสรุปและข้อเสนอแนะ

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 2

### ทฤษฎีพื้นฐาน

ในบทนี้ประกอบด้วยทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกคือตัวแทนระบบควบคุมป้อนกลับ ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นถึงข้อดีของการเลือกสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตมาแสดงแทนระบบควบคุมป้อนกลับ ด้วยการเปรียบเทียบระหว่างการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์ ซึ่งเป็นสมการที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายเทียบกับการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิต และส่วนที่สองจะอธิบายถึงนิยามและคุณสมบัติของตัวประมาณ  $I_{MN}$  ที่นำไปสู่สูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต

#### 2.1 ตัวแทนระบบควบคุมป้อนกลับ

##### 2.1.1 การแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์

ระบบควบคุมป้อนกลับในสมการ (1.1) และ (1.3) สามารถแสดงแทนได้ด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์ที่ถูกอธิบายด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= A_d \omega(t) + B_d f(t) \\ \rho(t) &= C_d \omega(t) + D_d f(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

โดยที่

$$A_d = \begin{bmatrix} A_g - B_g D_c C_g & B_g C_c \\ -B_c C_g & A_c \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} B_g D_c & B_g \\ B_c & 0 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ d(t) \end{bmatrix}$$
$$C_d = \begin{bmatrix} -C_g & 0 \\ -D_c C_g & C_c \end{bmatrix}, \quad D_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ D_c & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$$

##### 2.1.2 การแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิต

สำหรับการแทนระบบควบคุมป้อนกลับในสมการ (1.1) และ (1.3) ด้วยการใช้ตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิตนั้น สามารถอธิบายด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้ [18]

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= H\omega(t) + Rv(t) + \theta(t) \\ 0 &= P\omega(t) + Qv(t) + \psi(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

โดยที่

$$H = \begin{bmatrix} A_g & 0 \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} B_g & 0 \\ 0 & -B_c \end{bmatrix}, \quad \theta(t) = \begin{bmatrix} B_g d(t) \\ B_{cr}(t) \end{bmatrix}, \quad v(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & C_c \\ C_g & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & -D_c \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{bmatrix} D_{cr}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} \mu(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$$

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตได้ถูกสังเกตใน [16, 18] ถึงข้อดีหลักๆ ในการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตดังสมการ (2.2) ว่า เมทริกซ์  $H$ ,  $P$ ,  $Q$  และ  $R$  ไม่ได้เกิดจากผลการคูณใดๆ ของเมทริกซ์ในสมการ (1.1) และ (1.3) ดังนั้นความเป็นปกติหรือความเป็นศูนย์มากในเมทริกซ์ดั้งเดิมในสมการ (1.1) และ (1.3) ยังคงมีอยู่ในเมทริกซ์  $H$ ,  $P$ ,  $Q$  และ  $R$  ซึ่งต่างจากการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์ดังสมการ (2.1) ที่ไม่สามารถรักษาความเป็นปกติหรือความเป็นศูนย์มากในเมทริกซ์ดั้งเดิมไว้ได้

เนื่องจากสมการ (2.1) นั้นเทียบเท่ากับสมการ (2.2) ดังนั้นจะได้ว่า  $A_d = H - RQ^{-1}P$  โดยในการคำนวณเมทริกซ์ผกผันของ  $Q$  สามารถหาได้ดังนี้

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & D_c \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

สำหรับผลที่ได้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการศึกษาและการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalues) ของเมทริกซ์  $A_d$  ได้

## 2.2 ตัวประมาณ $I_{MN}$

### 2.2.1 นิยามและคุณสมบัติของตัวประมาณ $I_{MN}$

กำหนดให้  $\mathcal{X}$  แสดงแทนปริภูมิเชิงเส้นของฟังก์ชัน  $x$  ที่  $x$  ต่อเนื่องบนช่วง  $[0, \infty)$  และมีจำนวนจริง  $\sigma$  บางค่าที่ทำให้  $x(t) = \mathcal{O}(\exp\{\sigma t\})$  เมื่อ  $t \rightarrow \infty$  Zakian [8, 10] นิยามตัวประมาณ  $I_{MN}$  ของ  $x(t)$  ที่  $t \geq 0$  ด้วยปริพันธ์ (integral) ไม่ตรงแบบดังนี้

$$I_{MN}(x, t) \triangleq \int_0^\infty x(\lambda t) \sum_{i=1}^N K_i \exp\{-\alpha_i \lambda\} d\lambda, \quad t \in [0, \infty) \quad (2.4)$$

เมื่อ  $(\alpha_i, K_i)$  เป็นค่าคงตัวที่ถูกระบุและจำนวนเต็มบวก  $(M, N)$  คืออันดับของพจน์เศษและพจน์ส่วนของ การแปลงลาปลาซ  $\sum_{i=1}^N K_i \exp\{-\alpha_i \lambda\}$  สังเกตว่า  $I_{MN}$  เป็นตัวดำเนินการ (operator) ที่ขึ้นอยู่กับเซตของค่าคงตัว  $(\alpha_i, K_i)$

สำหรับในงานวิจัยนี้ได้จำกัดพิจารณาเพียงตัวประมาณ  $I_{MN}$  ลำดับขั้นเต็ม (full grade  $I_{MN}$  approximants) [8] โดยค่าคงตัว  $(\alpha_i, K_i)$  ถูกนิยามด้วย

$$\sum_{i=1}^N \frac{K_i}{z + \alpha_i} = e_{MN}^{-z} \quad \text{และ} \quad \operatorname{Re}(\alpha_i) > 0 \quad \forall i \quad (2.5)$$

เมื่อ  $e_{MN}^{-z}$  คือตัวประมาณ Padé อันดับ  $[M/N]$  ของ  $\exp\{-z\}$

โดยคุณสมบัติของตัวประมาณ  $I_{MN}$  ในรูปแบบทั่วไปและตัวประมาณ  $I_{MN}$  ที่มี *full grade* [8] มีคุณสมบัติหลักๆ 5 ข้อดังต่อไปนี้ [8, 9]

1. การเป็นเชิงเส้น (**linearity**) กำหนดให้  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$  และ  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  ถ้า  $I_{MN}(x_1, t)$  และ  $I_{MN}(x_2, t)$  มีจริง (exist) แล้ว

$$I_{MN}(a_1x_1 + a_2x_2, t) = a_1I_{MN}(x_1, t) + a_2I_{MN}(x_2, t) \quad (2.6)$$

2. ภาวะต่อเนื่อง (**continuity**) และความมีขอบเขต (**boundedness**) กำหนดให้  $x \in \mathcal{X}$  มีขอบเขตในช่วง  $[0, \infty)$  แล้วฟังก์ชัน  $I_{MN}(x)$  มีขอบเขตและต่อเนื่องในช่วง  $[0, \infty)$
3. ความแม่นยำ (**exactness**) กำหนดให้  $x$  เป็นพหุนามที่มีระดับชั้น (degree) ไม่เกิน  $M + N$  จะได้ว่า  $I_{MN}(x, t) = x(t)$  สำหรับทุกค่าที่  $t \geq 0$
4. ความแม่นยำ (**accuracy**) สำหรับ  $t$  ที่ค่ามากๆ กำหนดให้  $x \in \mathcal{X}$  และ  $\sigma < 0$  แล้วจะได้ว่า

$$I_{MN}(x, t) - x(t) = \mathcal{O}(t^{-(N-M)}), \quad t \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

5. ความแม่นยำสำหรับ  $t$  ที่ค่าน้อยๆ กำหนดให้  $x \in \mathcal{X}$  สมมติว่ามี  $\beta$  ค่าหนึ่งมากกว่า 0 ซึ่ง  $x^{(M+N)}$  ต่อเนื่องในช่วง  $[0, \beta]$ ,  $x^{(M+N+1)}$  มีจริงทุกๆ ที่ในช่วง  $(0, \beta)$  และมีขอบเขตในช่วง  $(0, \beta)$  แล้วจะได้ว่า

$$I_{MN}(x, t) - x(t) = \mathcal{O}(t^{M+N+1}), \quad t \rightarrow 0^+ \quad (2.8)$$

กำหนดให้  $X(s)$  แทนการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน  $x(t)$

$$X(s) \triangleq \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^\infty x(t) \exp\{-st\} dt \quad (2.9)$$

เมื่อ  $s$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ทำให้ปริพันธ์ในสมการ (2.9) ลู่เข้าสู่ค่าจำกัด ดังนั้นจากสมการ (2.4) สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$x(t) \simeq I_{MN}(x, t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N K_i X\left(\frac{\alpha_i}{t}\right), \quad t > 0 \quad (2.10)$$

เห็นได้ชัดว่าสมการ (2.10) คือสูตรที่ใช้สำหรับการแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลข ซึ่งสำหรับกรณี  $N$  เป็นจำนวนคู่ทำให้ค่าคงตัว  $(\alpha_i, K_i)$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค นั่นคือ  $\alpha_i = \alpha_{i+N/2}^*$ ,  $K_i = K_{i+N/2}^*$  ดังนั้นสูตรที่ใช้สำหรับการแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลขเป็นดังนี้

$$x(t) \simeq I_{MN}(x, t) = \frac{2}{t} \sum_{i=1}^{N/2} \operatorname{Re} \left\{ K_i X \left( \frac{\alpha_i}{t} \right) \right\}, \quad t > 0 \quad (2.11)$$

จากสูตรสำหรับการแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลขในสมการ (2.10) ได้นำไปสู่วิธีวงกว้าง (global method) และวิธีทีละขั้น (step-by-step method) สำหรับการคำนวณ  $x(t)$  กล่าวคือวิธีวงกว้างจะคำนวณ  $x(t)$  ด้วยการแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลขของ  $X(s)$  ในสมการ (2.10) และสำหรับวิธีทีละขั้นจะคำนวณ  $x(t_{r+1})$  ด้วยการแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลขของลำดับ  $\{X_{t_r}(s) : r = 1, 2, 3, \dots\}$  ที่ได้มาจากการวนซ้ำ เมื่อ  $X_{t_r}(s) \triangleq \mathcal{L}_\lambda[x(t_r + \lambda)]$  และ  $t_r$  คือการเลื่อนแกนเวลา (time shift) สังเกตว่าคุณสมบัติความแม่นยำของตัวประมาณ  $I_{MN}$  ที่เวลา  $t$  น้อยๆ ดังสมการ (2.8) ได้ถูกนำมาใช้ประโยชน์ในวิธีทีละขั้น

### 2.2.2 สูตรวนซ้ำ $I_{MN}$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต

พิจารณาระบบอนุพันธ์พีชคณิตในสมการ (2.2) สมมุติว่า  $\theta(t)$  และ  $\psi(t)$  เป็นฟังก์ชันที่รู้ค่าสำหรับ  $t \geq 0$  และกำหนดให้  $t_r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) แทนลำดับของจุดในช่วง  $[0, \infty)$  ที่ทำให้  $t_0 = 0, t_{r+1} = t_r + h$  เมื่อช่วงก้าว  $h$  เป็นค่าคงตัวที่มีค่ามากกว่า 0

กำหนดให้  $X_{t_r}(s)$  แทนการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน  $x(t_r + \lambda)$

$$X_{t_r}(s) \triangleq \int_0^\infty x(t_r + \lambda) \exp\{-s\lambda\} d\lambda \quad (2.12)$$

เมื่อ  $s$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ทำให้ปริพันธ์ในสมการ (2.12) ลู่เข้าสู่ค่าจำกัด

สำหรับค่า  $\omega(t)$  และ  $v(t)$  จะยังคงไม่เปลี่ยนแปลงสำหรับทุกๆ ค่า  $t$  ที่อยู่ในช่วง  $[t_r, t_{r+1}]$  เมื่อ  $\theta(t_r + \lambda)$  และ  $\psi(t_r + \lambda)$  ถูกแทนที่ด้วย  $\theta^*(t_r + \lambda)$  และ  $\psi^*(t_r + \lambda)$  ตามลำดับดังนี้

$$\theta^*(t_r + \lambda) = \begin{cases} \theta(t_r + \lambda), & \lambda \in [0, h] \\ a_r(\lambda), & \lambda > h \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\psi^*(t_r + \lambda) = \begin{cases} \psi(t_r + \lambda), & \lambda \in [0, h] \\ b_r(\lambda), & \lambda > h \end{cases} \quad (2.14)$$

โดยที่  $a_r(\lambda)$  และ  $b_r(\lambda)$  อยู่ภายใต้เงื่อนไข  $\Theta_{t_r}^*(s)$  และ  $\Psi_{t_r}^*(s)$  มีจริงสำหรับ  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$  หลังจากเปลี่ยนตัวแปรด้วยการกำหนดให้  $t = t_r + \lambda$  และแปลงลาปลาซของสมการ (2.2) ด้วย  $\theta(t_r + \lambda)$  และ  $\psi(t_r + \lambda)$  ที่ถูกแทนโดย  $\theta^*(t_r + \lambda)$  และ  $\psi^*(t_r + \lambda)$  ตามลำดับจะได้

$$\begin{bmatrix} (sI - H) & -R \\ -P & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{t_r}(s) \\ V_{t_r}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(t_r) + \Theta_{t_r}^*(s) \\ \Psi_{t_r}^*(s) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

สังเกตว่าผลการแปลงลาปลาซผกผันของ  $\Omega_{t_r}(s)$  และ  $V_{t_r}(s)$  มีค่าเท่ากับ  $\omega(t_{r+1})$  และ  $v(t_{r+1})$  ตามลำดับ ดังนั้นเมื่อใช้สูตรการแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลขสำหรับกรณี  $N$  เป็นจำนวนคู่ในสมการ (2.11) จะได้ตัวประมาณ  $\omega_{r+1}$  และ  $v_{r+1}$  ดังนี้



$$\begin{bmatrix} \omega_{r+1} \\ v_{r+1} \end{bmatrix} = \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{N/2} \operatorname{Re} \left\{ K_i \begin{bmatrix} \Omega_{t_r}(s_i) \\ V_{t_r}(s_i) \end{bmatrix} \right\}, \quad s_i = \left( \frac{\alpha_i}{h} \right) \quad (2.16)$$

โดยการรวมผลของสมการ (2.15) และ (2.16) จะได้สูตรวนซ้ำสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตนั้นคือ

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} (s_i I - H) & -R \\ -P & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{i,r} \\ V_{i,r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_r + \Theta_{t_r}^*(s_i) \\ \Psi_{t_r}^*(s_i) \end{bmatrix}, \quad s_i = \left( \frac{\alpha_i}{h} \right) \\ \begin{bmatrix} \omega_{r+1} \\ v_{r+1} \end{bmatrix} &= \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{N/2} \operatorname{Re} \left\{ K_i \begin{bmatrix} \Omega_{i,r} \\ V_{i,r} \end{bmatrix} \right\}, \quad N \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

ดังนั้นงานหลักในแต่ละขั้นของการวนซ้ำในสมการ (2.17) คือการแก้ผลตอบของระบบเชิงเส้นพีชคณิตสำหรับเวกเตอร์  $\Omega_{i,r}$  และ  $V_{i,r}$  โดยที่  $i = 1, 2, \dots, N/2$  สังเกตว่าเมื่อช่วงก้าว  $h$  เป็นค่าคงตัวจะส่งผลให้  $s_i$  เป็นค่าคงตัวสำหรับทุกๆ ขั้น  $r$  ด้วย นั้นหมายความว่า การใช้วิธีแยกตัวประกอบ LU สำหรับแก้ผลตอบของระบบเชิงเส้นพีชคณิตในสมการ (2.17) จะมีรูปแบบของตัวประกอบ  $L$  และ  $U$  เพียงรูปแบบเดียวที่ขึ้นกับตัวแปร  $s_i$  (ดูรายละเอียดในหัวข้อ 3.1.2 และ 3.2.1 สำหรับกรณีกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการที่ (3.1) และกรณีกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการคลื่นดังสมการที่ (3.6) ตามลำดับ)

## 2.3 สรุป

จากการเปรียบเทียบระหว่างการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิตกับการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์ สรุปได้ว่าการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิตสามารถรักษาความเป็นปกติหรือความเป็นศูนย์มากในเมทริกซ์ดั้งเดิมไว้ได้ ซึ่งต่างจากการแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่สามารถรักษาความเป็นปกติ หรือความเป็นศูนย์มากในเมทริกซ์ดั้งเดิม และเมื่อสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตที่มีพื้นฐานมาจากตัวประมาณ  $I_{MN}$  ถูกนำมาใช้ในการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลา จะพบลักษณะโครงสร้างที่พิเศษอยู่ในสมการเชิงเส้นพีชคณิตของสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  และได้ถูกนำมาใช้ประโยชน์ในการพัฒนาแบบแผนของการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษที่มีรูปแบบของตัวประกอบ  $L$  และ  $U$  เพียงรูปแบบเดียวที่ขึ้นกับตัวแปร  $s_i$  โดยรายละเอียดของการแยกตัวประกอบ LU จะกล่าวอยู่ในบทถัดไป

### บทที่ 3

## วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ $I_{MN}$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต

ในบทนี้ได้พัฒนาอัลกอริทึมคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาสำหรับระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ด้วยการใช้สมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตแสดงแทนระบบควบคุมป้อนกลับที่สามารถรักษาความเป็นปกติ หรือความเป็นศูนย์มากในเมทริกซ์ดั้งเดิมไว้ได้ และใช้สูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตที่มีพื้นฐานมาจากตัวประมาณ  $I_{MN}$  ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษ

### 3.1 ระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อน

พิจารณาระบบควบคุมป้อนกลับดังรูปที่ 1.1 เมื่อกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนและมีเงื่อนไขขอบดังนี้ [17]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t), & t > 0, x \in [0, l] \\ \frac{\partial}{\partial x} q(0, t) &= -\varphi z(t), & t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} q(l, t) &= 0, & t > 0 \\ y(t) &= q(l, t), & t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

เมื่อ  $\kappa > 0$  และ  $\varphi$  เป็นค่าคงตัว

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้พัฒนาในส่วนของความแม่นยำต่อจากงานวิจัยใน [17] ด้วยการใช้วิธีผลต่างอันดับที่มีค่าผิดพลาดอยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(\delta^2)$  เพื่อใช้ในการประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ในสมการ (3.1) ซึ่งต่อไปจะกล่าวถึงรายละเอียดสำหรับการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) หลังจากที่ประมาณอนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ด้วยการใช้วิธีผลต่างอันดับที่มีค่าผิดพลาดอยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(\delta^2)$  แล้ว จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญขนาดใหญ่และเป็นเมทริกซ์มากเลขศูนย์ เมื่อระบบป้อนกลับที่ประกอบด้วยกระบวนการที่ถูกประมาณและตัวควบคุมถูกแสดงแทนด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตดังสมการ (2.2) ต่อไปเราจะใช้สูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตในหัวข้อ 2.2.2 ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษที่ถูกพัฒนาขึ้น เพื่อแก้หาผลเฉลยของระบบเชิงอนุพันธ์พีชคณิตดังกล่าว

### 3.1.1 วิธีผลต่างอันดับ

การประมาณอนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ในสมการ (3.1) ด้วยวิธีผลต่างอันดับ (ดูตัวอย่างใน [11]) สามารถทำได้ โดยการกำหนดให้

$$x_{i+1} = x_i + \delta, \quad 0 \leq i \leq n, \quad (3.2)$$

เมื่อ  $\delta > 0$  คือผลต่างเอกกรุป (uniform difference) ใน  $x$  สำหรับค่า  $x$  ที่อยู่ในช่วง  $[0, l]$  นั่นคือ  $\delta = l/(n+1)$  ดังนั้นอนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ในสมการ (3.1) สำหรับทุกๆ ค่า  $i = 1, 2, \dots, n$  สามารถเขียนแทนด้วย

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q(x_i, t) &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x_i, t), & t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} q(x_0, t) &= -\varphi z(t), & t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} q(x_{n+1}, t) &= 0, & t > 0 \\ y(t) &= q(x_{n+1}, t) & t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

และอนุพันธ์ในสมการ (3.3) สามารถถูกประมาณได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x_i, t) &= \frac{q(x_{i-1}, t) - 2q(x_i, t) + q(x_{i+1}, t)}{\delta^2} + \mathcal{O}(\delta^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} q(x_0, t) &= \frac{-3q(x_0, t) + 4q(x_1, t) - q(x_2, t)}{2\delta} + \mathcal{O}(\delta^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} q(x_{n+1}, t) &= \frac{q(x_{n-1}, t) - 4q(x_n, t) + 3q(x_{n+1}, t)}{2\delta} + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

เมื่อแทนอนุพันธ์ในสมการ (3.3) ด้วยการประมาณในสมการ (3.4) จะได้

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}(x_i, t) &= \varepsilon [q(x_{i-1}, t) - 2q(x_i, t) + q(x_{i+1}, t)] \\ q(x_0, t) &= \frac{4}{3}q(x_1, t) - \frac{1}{3}q(x_2, t) + \frac{2}{3}\delta\varphi z(t) \\ q(x_{n+1}, t) &= -\frac{1}{3}q(x_{n-1}, t) + \frac{4}{3}q(x_n, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

โดยที่  $\varepsilon = \kappa/\delta^2$  และ  $i = 1, 2, \dots, n$

กำหนดให้  $\mu_i(t) = q(x_i, t)$  โดย  $i = 1, 2, \dots, n$  จะได้ปริภูมิสถานะสำหรับกระบวนการที่ถูกประมาณดังสมการ (1.1) โดยที่  $A_g \in \mathbb{R}^{n \times n}$  เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง (tridiagonal matrix),  $B_g \in \mathbb{R}^n$ ,  $C_g^T \in \mathbb{R}^n$  ที่มีค่าดังนี้



$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -D_1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -D_{n-2} & 1 & \\ & & & -D_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, & \mathbb{U}_{11} &= \begin{bmatrix} A_1 & -2\varepsilon/3 & & & \\ & A_2 & -\varepsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A_{n-1} & -\varepsilon \\ & & & & A_n \end{bmatrix} \\
\mathbb{L}_{22} &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ -E_1 & \cdots & -E_{m-1} & 1 & \end{bmatrix}, & \mathbb{U}_{22} &= \begin{bmatrix} s & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & s & -1 \\ & & & & C_1 \end{bmatrix} \\
\mathbb{L}_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -H_1 & -H_2 \end{bmatrix}, & \mathbb{U}_{13}^T &= \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_{n-1} & B_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbb{L}_{32} &= \begin{bmatrix} -F_1 & \cdots & -F_{m-1} & -F_m \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbb{U}_{23}^T &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbb{L}_{33} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_3 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbb{U}_{33} &= \begin{bmatrix} 1 & C_2 \\ 0 & C_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

และสมาชิก (element) ของเมทริกซ์  $\mathbb{L}$  และ  $\mathbb{U}$  คือ

$$\begin{aligned}
A_1 &= s + 2\varepsilon/3 \\
D_1 &= \varepsilon/A_1 \\
A_2 &= s + 2\varepsilon - (2/3)\varepsilon D_1 \\
A_i &= s + 2\varepsilon - \varepsilon D_{i-1}, & i = 3, 4, \dots, n-1 \\
D_1 &= \varepsilon/A_i, & i = 2, 3, \dots, n-2 \\
D_{n-1} &= (2/3)\varepsilon/A_{n-1} \\
A_n &= s + (2/3)\varepsilon - \varepsilon D_{n-1} \\
B_1 &= -(2/3)\varepsilon \delta \varphi \\
B_i &= B_{i-1} D_{i-1}, & i = 2, 3, \dots, n \\
E_1 &= -a_m/s \\
F_1 &= b_m/s \\
E_i &= -(a_{m+1-i} - E_{i-1})/s, \\
F_i &= (b_{m+1-i} + F_{i-1})/s, & \left. \vphantom{\begin{matrix} E_i \\ F_i \end{matrix}} \right\} i = 2, 3, \dots, m-1 \\
C_1 &= s + a_1 - E_{m-1} \\
F_m &= (b_1 + F_{m-1})/C_1 \\
C_2 &= d + F_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= (1/3)/A_{n-1} \\
H_2 &= ((4/3) + \varepsilon H_1)/A_n \\
H_3 &= -(B_{n-1}H_1 + B_n H_2) \\
C_3 &= 1 + C_2 H_3
\end{aligned}$$

ต่อไปเราจะนำตัวประกอบ  $L$  และ  $U$  มาใช้ในการแก้สมการเชิงเส้น  $Ax = b$  ให้มีประสิทธิภาพด้วยการใช้แบบแผนดังนี้

$$\begin{array}{ll}
z_i = b_i, & i = 1 \\
z_i = b_i + D_{i-1}z_{i-1}, & i = 2, 3, \dots, n, \\
\hline
z_i = b_i, & i = n + 1, n + 2, \dots, n + m - 1 \\
z_i = b_i + \sum_{j=1}^{m-1} E_j z_{n+j}, & i = n + m, \\
\hline
z_i = b_i + \sum_{j=1}^m F_j z_{n+j}, & i = n + m + 1, \\
z_i = b_i + H_1 z_{n-1} + H_2 z_n + H_3 z_{n+m+1}, & i = n + m + 2, \\
\hline
x_i = z_i / C_3, & i = n + m + 2, \\
x_i = z_i - C_2 x_{i+1}, & i = n + m + 1, \\
\hline
x_i = (z_i - x_{i+2}) / C_1, & i = n + m, \\
x_i = (z_i + x_{i+1}) / s, & i = n + m - 1, n + m - 2, \dots, n + 1, \\
\hline
x_i = (z_i - B_i x_{n+m+1}) / A_i, & i = n, \\
x_i = (z_i - B_i x_{n+m+1} + \varepsilon x_{i+1}) / A_i, & i = n - 1, n - 2, \dots, 2, \\
x_i = (z_i - B_1 x_{n+m+1} + (2\varepsilon/3)x_{i+1}) / A_i, & i = 1, \\
\hline
\end{array}$$

เมื่อ  $n$  และ  $m$  แทนมิติของเมทริกซ์  $A_g$  และ  $A_c$  ตามลำดับ

จากแบบแผนในการแก้สมการเชิงเส้น  $Ax = b$  เราพบว่าจำนวนการดำเนินการสำหรับการแยกตัวประกอบและการแทนค่าในแต่ละขั้นของการวนซ้ำในสมการ (2.17) อยู่ในอันดับ  $O(\hat{n})$  ของการดำเนินการเลขคณิตเชิงซ้อน (complex arithmetic operation) ที่แสดงดังตารางที่ 3.1 เมื่อ  $\hat{n} = n + m + 2$  คือมิติของระบบ ซึ่งตรงกันข้ามกับเมทริกซ์  $A$  กรณีทั่วไปที่ใช้จำนวนการดำเนินการสำหรับการแยกตัวประกอบและการแทนค่าอยู่ในอันดับ  $O(\hat{n}^3)$  และ  $O(\hat{n}^2)$  ของการดำเนินการเลขคณิตเชิงซ้อนตามลำดับ

โดยในการเก็บค่าต่อหนึ่งตัวแปรใช้หน่วยเก็บเท่ากับ 16 bytes เมื่อตัวแปรแต่ละตัวเป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex number) ดังนั้นสำหรับหน่วยเก็บ (storage) ของเมทริกซ์  $A$  ในสมการ (2.17) มีค่าเป็น  $32m + 112$  bytes และสำหรับกรณีเมทริกซ์  $A$  ทั่วไปมีค่าเป็น  $16\hat{n}^2$  bytes



ตารางที่ 3.1: จำนวนการดำเนินการสำหรับการแยกตัวประกอบและการแทนค่า

	complex additions/subtractions	complex multiplications/divisions
factorization	$\hat{n}$	$3\hat{n}$
substitution	$3\hat{n}$	$4\hat{n}$

### 3.2 ระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่น

พิจารณาระบบควบคุมป้อนกลับแสดงดังรูปที่ 1.1 เมื่อกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่นและมีเงื่อนไขขอบดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} q(x, t) &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) & t > 0, x \in [0, l] \\ q(0, t) &= 0, & t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} q(l, t) &= -\varphi z(t), & t > 0 \\ y(t) &= -\frac{\partial}{\partial t} q(l, t), & t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

เมื่อ  $\kappa > 0$  เป็นค่าคงตัว

จากวิธีผลต่างอันดับที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.1.1 ถูกลำมาใช้เพื่อประมาณอนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ในสมการ (3.6) สำหรับทุกๆ ค่า  $i = 1, 2, \dots, n + 1$  โดยสามารถแสดงแทนด้วย

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} q(x_i, t) &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x_i, t), & t > 0 \\ q(x_0, t) &= 0, & t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} q(x_{n+1}, t) &= -\varphi z(t), & t > 0 \\ y(t) &= -\frac{\partial}{\partial t} q(x_{n+1}, t), & t > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

และอนุพันธ์ในสมการ (3.7) สามารถถูกประมาณได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x_i, t) &= \frac{q(x_{i-1}, t) - 2q(x_i, t) + q(x_{i+1}, t)}{\delta^2} + \mathcal{O}(\delta^2), & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x_{n+1}, t) &= \frac{-q(x_{n-2}, t) + 4q(x_{n-1}, t) - 5q(x_n, t) + 2q(x_{n+1}, t)}{\delta^2} + \mathcal{O}(\delta^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} q(x_{n+1}, t) &= \frac{q(x_{n-1}, t) - 4q(x_n, t) + 3q(x_{n+1}, t)}{2\delta} + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

เมื่อแทนอนุพันธ์ในสมการ (3.7) ด้วยการประมาณในสมการ (3.8) โดยที่  $\varepsilon = \kappa/\delta^2$  จะได้





และสมาชิกของเมทริกซ์  $L$  และ  $U$  คือ

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -2\varepsilon/s \\
 D_1 &= s - A_1 \\
 A_2 &= \varepsilon/s \\
 A_i &= \varepsilon/s, & i = 3, 5, 7, \dots, 4n - 9, 4n - 7 \\
 A_i &= -2\varepsilon/s, & i = 4, 8, 12, \dots, 4n - 8 \\
 A_{4n-5} &= (2/3)\varepsilon/s, \\
 A_{4n-4} &= -\varepsilon/s \\
 E_1 &= -A_2 \\
 E_i &= -A_{4i-3}, & i = 2, 3, \dots, n - 1 \\
 E_n &= (2/3)\delta\varepsilon\varphi \\
 A_i &= A_{i-3}/D_{(i-2)/4}, & i = 6, 10, 14, \dots, 4n - 6 \\
 D_i &= s - A_{4i-4} + E_{i-1}A_{4i-2}, & i = 2, 3, \dots, n - 1 \\
 A_{4n-3} &= A_{4n-5}/D_{n-1} \\
 D_n &= s - A_{4n-4} + E_{n-1}A_{4n-3} \\
 D_{n+1} &= s \\
 B_1 &= -\varepsilon/s \\
 B_2 &= 4\varepsilon/s \\
 B_3 &= -3\varepsilon/s \\
 B_4 &= B_1/D_{n-2} \\
 B_i &= (B_{i-3} - B_{i-1}E_{i+n-7})/D_{i+n-6}, & i = 5, 6 \\
 F_1 &= -a_m/s \\
 G_1 &= b_m/s \\
 E_{n+1} &= E_n B_6 + (4/3)\delta\varepsilon\varphi \\
 F_i &= -(a_{m+1-i} - F_{i-1})/s, \\
 G_i &= (b_{m+1-i} + G_{i-1})/s, & \left. \vphantom{\begin{matrix} F_i \\ G_i \end{matrix}} \right\} i = 2, 3, \dots, m - 1 \\
 C_1 &= s + a_1 - F_{m-1} \\
 G_m &= (b_1 + G_{i-1})/C_1 \\
 C_2 &= d + G_m \\
 H_1 &= -1/D_{n+1} \\
 H_2 &= -E_{n+1}H_1 \\
 C_3 &= 1 + C_2H_2
 \end{aligned}$$

ต่อไปเราจะนำตัวประกอบ  $L$  และ  $U$  มาใช้ในการแก้สมการเชิงเส้น  $Ax = b$  ให้มีประสิทธิภาพด้วยการใช้แบบแผนดังนี้

$$\begin{array}{ll}
 z_i & = b_i, & i = 1, 2, \dots, n+1 \\
 \hline
 z_i & = b_i + A_1 z_1 + A_2 z_2, & i = n+2 \\
 z_{i+n+1} & = b_{i+n+1} + A_{4i-5} z_{i-1} + A_{4i-4} z_i + A_{4i-3} z_{i+1} + A_{4i-2} z_{i+n}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \\
 z_i & = b_i + A_{4n-5} z_{n-1} + A_{4n-4} z_n + A_{4n-3} z_{2n}, & i = 2n+1, \\
 z_i & = b_i + B_1 z_{n-2} + B_2 z_{n-1} + B_3 z_n + B_4 z_{2n-1} + B_5 z_{2n} + B_6 z_{2n+1}, & i = 2n+2, \\
 \hline
 z_i & = b_i, & i = 2n+3, 2n+4, \dots, \\
 & & 2n+m+1 \\
 z_i & = b_i + \sum_{j=1}^{m-1} F_j z_{2n+2+j}, & i = 2n+m+2, \\
 \hline
 z_i & = b_i + \sum_{j=1}^m G_j z_{2n+2+j}, & i = 2n+m+3, \\
 z_i & = b_i + H_1 z_{2n+2} + H_2 z_{2n+m+3}, & i = 2n+m+4, \\
 \hline
 x_i & = z_i / C_3, & i = 2n+m+4, \\
 x_i & = z_i - C_2 x_{i+1}, & i = 2n+m+3, \\
 \hline
 x_i & = (z_i - x_{2n+m+4}) / C_1, & i = 2n+m+2, \\
 x_i & = (z_i + x_{i+1}) / s, & i = 2n+m+1, 2n+m, \dots, \\
 & & 2n+3, \\
 \hline
 x_i & = (z_i - E_{i-n-1} x_{2n+m+3}) / D_{i-n-1}, & i = 2n+2, 2n+1 \\
 x_i & = (z_i - E_{n-1} x_{2n+1}) / D_{n-1}, & i = 2n, \\
 x_i & = (z_i - E_{i-n-1} x_{i+1}) / D_{i-n-1}, & i = 2n-1, 2n-2, \dots, n+2, \\
 \hline
 x_i & = (z_i + x_{i+n+1}) / s, & i = n+1, n, \dots, 1, \\
 \hline
 \end{array}$$

เมื่อ  $2n+2$  และ  $m$  แทนมิติของเมทริกซ์  $A_g$  และ  $A_c$  ตามลำดับ

จากแบบแผนในการแก้สมการเชิงเส้น  $Ax = b$  เราพบว่ากรณีที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่นดังสมการ (3.6) มีจำนวนการดำเนินการสำหรับการแยกตัวประกอบและการแทนค่าในแต่ละขั้นของการวนซ้ำในสมการ (2.17) อยู่ในอันดับ  $O(\hat{n})$  ของการดำเนินการเลขคณิตเชิงซ้อนที่แสดงดังตารางที่ 3.2 เมื่อ  $\hat{n} = 2n+m+4$  คือมิติของระบบ ซึ่งตรงกันข้ามกับเมทริกซ์  $A$  กรณีทั่วไปที่มีจำนวนการดำเนินการสำหรับการแยกตัวประกอบและการแทนค่าอยู่ในอันดับ  $O(\hat{n}^3)$  และ  $O(\hat{n}^2)$  ของการดำเนินการเลขคณิตเชิงซ้อนตามลำดับ

โดยในการเก็บค่าต่อหนึ่งตัวแปรใช้หน่วยเก็บเท่ากับ 16 bytes เมื่อตัวแปรแต่ละตัวเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นสำหรับหน่วยเก็บของเมทริกซ์  $A$  ในสมการ (2.17) ในกรณีที่กระบวนการถูกอธิบายด้วย

สมการคลื่นดังสมการ (3.6) มีค่าเป็น  $32m + 160$  bytes และเมื่อเทียบกับกรณีเมทริกซ์  $A$  ทั่วไปมีค่าเป็น  $16\hat{n}^2$  bytes

ตารางที่ 3.2: จำนวนการดำเนินงานสำหรับการแยกตัวประกอบและการแทนค่า

	complex additions/subtractions	complex multiplications/divisions
factorization	$\hat{n}$	$4\hat{n}$
substitution	$3\hat{n}$	$4\hat{n}$

### 3.3 สรุป

จากการประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่งของสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ด้วยวิธีผลต่างอันดับที่มีค่าผิดพลาดอยู่ในอันดับ  $O(\delta^2)$  ส่งผลให้การเชื่อมต่อระหว่างกระบวนการที่ถูกประมาณกับตัวควบคุมถูกแสดงแทนด้วย ระบบสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตที่มีขนาดใหญ่และเป็นเมทริกซ์มากเลขศูนย์ โดยเมื่อสุตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตถูกนำมาใช้คำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต พบว่าลักษณะโครงสร้างที่พิเศษถูกพบอยู่ในสมการเชิงเส้นพีชคณิตของสุตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  และถูกนำมาใช้ประโยชน์ในการพัฒนาแบบแผนของการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษที่มีรูปแบบของตัวประกอบ L และ U เพียงรูปแบบเดียวที่ขึ้นกับตัวแปร  $s_i$  นอกจากนี้ยังส่งผลให้การแยกตัวประกอบและการแทนค่าในแต่ละขั้นของการวนซ้ำต้องการจำนวนการดำเนินการที่อยู่ในอันดับ  $O(\hat{n})$  ของการดำเนินการ เมื่อ  $\hat{n}$  คือมิติของระบบ ดังนั้นเราจึงพัฒนาอัลกอริทึมของวิธีผลต่างอันดับและสุตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษสำหรับระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสำหรับระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ด้วยการสร้างคลังสำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function ซึ่งรายละเอียดในการสร้างและการใช้งานได้ถูกอธิบายไว้อยู่ในภาคผนวก ก

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 4

### วิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย

เมื่อสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยถูกวิเคราะห์ด้วยการแปลงลาปลาซจะเกิดพจน์อตรรกยะ (irrational terms) ขึ้น ซึ่งในการแปลงลาปลาซผกผันของพจน์อตรรกยะทางเชิงวิเคราะห์นั้นทำได้ยากและต้องใช้คณิตศาสตร์ขั้นสูงในการแปลงลาปลาซผกผัน Zakian [19] จึงเสนอวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแปลงลาปลาซผกผันเพื่อลดความยุ่งยากในการแปลงลาปลาซผกผันของพจน์อตรรกยะที่เกิดขึ้น

โดยการกำหนดรูปแบบมาตรฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบนั้นต้องครอบคลุมถึงสมการในรูปแบบต่างๆ ตัวอย่างเช่น สมการการแพร่ความร้อน, สมการคลื่น, สมการคาน เป็นต้น ซึ่ง Zakian [19] ได้เลือกใช้รูปแบบมาตรฐานในการวิเคราะห์ระบบที่มีรูปแบบของเมทริกซ์ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = D_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) q(x, t), \quad 0 < t < \infty, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.1)$$

$$M_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) q(0, t) + N_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) q(l, t) = F_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) f(t) \quad (4.2)$$

เมื่อ  $D_0$ ,  $M_0$ ,  $N_0$  และ  $F_0$  คือพหุนามในเทอมของ  $\frac{\partial}{\partial t}$  ซึ่ง  $M_0$ ,  $N_0$  และ  $F_0$  สามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบที่  $x = 0$  และ  $x = l$  และเมื่อแปลงลาปลาซเทียบตัวแปร  $t$  ของสมการ (4.1) และ (4.2) โดยคิดค่าเริ่มต้นที่  $t = 0$  มีค่าเป็น 0 จะได้

$$\frac{d}{dx} Q(x, s) = D_0(s) Q(x, s), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.3)$$

$$M_0(s) Q(0, s) + N_0(s) Q(l, s) = F_0(s) F(s) \quad (4.4)$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (4.3) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$Q(x, s) = \exp\{D_0(s)x\} [M_0(s) + N_0(s) \exp\{D_0(s)l\}]^{-1} F_0(s) F(s) \quad (4.5)$$

จากสมการ (4.5) Zakian คำนวณผลตอบสนองเชิงเวลา  $q(x, t)$  ด้วยการใช้สูตรแปลงลาปลาซผกผันเชิงตัวเลขในสมการ (2.10)

$$q(x, t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{NT} K t_i Q \left( x, \frac{\alpha_i}{t} \right) \quad (4.6)$$

และประมาณพจน์  $\exp\{D_0(s)x\}$  และ  $\exp\{D_0(s)l\}$  ดังนี้

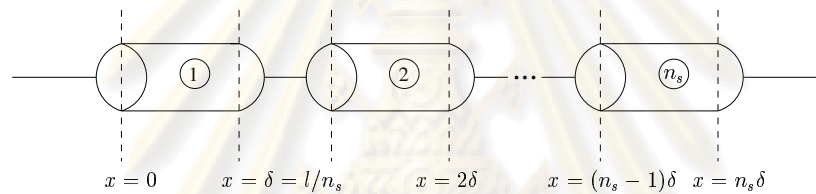
$$\exp \left\{ D_0 \left( \frac{\alpha_i}{t} \right) x \right\} = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{NX} K x_j \left[ \left( \frac{\beta_j}{x} \right) I - D_0 \left( \frac{\alpha_i}{t} \right) \right]^{-1} \quad (4.7)$$



เมื่อ  $(MX, NX)$  และ  $(MT, NT)$  คืออันดับของการประมาณในโดเมน  $x$  และโดเมน  $t$  ตามลำดับ และ  $(Kx_j, \beta_j)$  และ  $(Kt_i, \alpha_i)$  คือค่าคงตัวที่ถูกระบุสำหรับโดเมน  $x$  และโดเมน  $t$  ตามลำดับ

จากการศึกษาวิจัยของ Zakian ใน [19] พบว่าการประมาณพจน์  $\exp\{D_0(s_i)x\}$  นั้นมีข้อจำกัดที่ส่งผลต่อความแม่นยำในการคำนวณหาผลเฉลย ซึ่งหมายความว่าถ้า  $x$  ยิ่งมีค่ามากขึ้นความแม่นยำในการประมาณก็จะมีค่าน้อยลง ต่อมา Smith [15] ได้วิจัยและพัฒนาต่อยอดจากงานที่ Zakian เสนอเพื่อแก้ปัญหาในการประมาณพจน์  $\exp\{D_0(s_i)x\}$  ซึ่งส่งผลให้อัลกอริทึมมีประสิทธิภาพในการคำนวณมากยิ่งขึ้น โดยรายละเอียดจะกล่าวในลำดับถัดไป

#### 4.1 รูปแบบมาตรฐาน



รูปที่ 4.1: แสดงการแบ่ง  $x$  เป็น  $n_s$  ส่วน

Smith [15] ได้พัฒนางานวิจัยต่อจาก Zakian โดยพิจารณาสมการ (4.1) และ (4.2) ด้วยการแบ่ง  $x$  ออกเป็น  $n_s$  ส่วน ซึ่งในแต่ละส่วนยาวเท่ากับ  $\delta = l/n_s$  และนิยามตัวแปรสถานะใหม่ในแต่ละส่วน  $[q(x', t)]_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_s$  โดยที่  $x' \in [0, \delta]$  ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} [q(x', t)]_1 &\triangleq q(x, t), & x \in [0, \delta] \\ [q(x', t)]_2 &\triangleq q(x, t), & x \in [\delta, 2\delta] \\ &\vdots & \vdots \\ [q(x', t)]_k &\triangleq q(x, t), & x \in [(k-1)\delta, k\delta] \\ &\vdots & \vdots \\ [q(x', t)]_{n_s} &\triangleq q(x, t), & x \in [(n_s-1)\delta, n_s\delta] \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

เมื่อ  $[q(x', t)]_k$  เป็นสัญลักษณ์แสดงแทนตัวแปรสถานะใหม่ในส่วนที่  $k$  และจากการแบ่งส่วนของ  $x$  ทำให้ได้รูปแบบมาตรฐานในสมการที่ (4.1) และ (4.2) ใหม่ดังนี้



$$f^*(t_r + \lambda) = \begin{cases} f(t_r + \lambda), & \lambda \in [0, h] \\ a_r(\lambda), & \lambda > h \end{cases}$$

โดยที่  $a_r(\lambda)$  อยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า  $F_{t_r}^*(s)$  มีจริงสำหรับ  $\text{Re}(s) \geq \hat{\alpha}_{MN}/h$  ดังนั้นเมื่อแทน  $t = t_r + \lambda$  ในสมการที่ (4.9), (4.10) และ (4.11) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x}[q(x', t_r + \lambda)]_k = D_0 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) [q(x', t_r + \lambda)]_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} M_0 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) [q(0, t_r + \lambda)]_1 + N_0 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) [q(\delta, t_r + \lambda)]_{n_s} &= F_0 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) f^*(t_r + \lambda) \\ [q(0, t_r + \lambda)]_k - [q(\delta, t_r + \lambda)]_{(k-1)} &= 0, \quad k = 2, 3, \dots, n_s \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

และเมื่อแปลงลาปลาซของสมการที่ (4.12) และ (4.13) ในส่วนของ  $\lambda$  จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[Q_{t_r}(x', s)]_k = D_0(s)[Q_{t_r}(x', s)]_k - \sum_{i=1}^{r_1} D_i(s)[q_\lambda^{(i-1)}(x', t_r)]_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} M_0(s)[Q_{t_r}(0, s)]_1 + N_0(s)[Q_{t_r}(\delta, s)]_{n_s} &= F^*(s) \\ [Q_{t_r}(0, s)]_k - [Q_{t_r}(\delta, s)]_{(k-1)} &= 0, \quad k = 2, 3, \dots, n_s \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

$$\text{เมื่อ } F^*(s) = F_0(s)F_{t_r}^*(s) - \sum_{i=1}^{r_4} F_i(s)f_\lambda^{(i-1)}(t_r) + \sum_{i=1}^{r_2} M_i(s)[q_\lambda^{(i-1)}(0, t_r)]_1 + \sum_{i=1}^{r_3} N_i(s)[q_\lambda^{(i-1)}(\delta, t_r)]_{n_s}$$

โดยนิยาม  $[Q_{t_r}(x', s)]_k \triangleq \int_0^\infty [q(x', t_r + \lambda)]_k \exp\{-s\lambda\} d\lambda$  ซึ่งหมายความว่า  $[Q_{t_r}(x', s)]_k$  คือการแปลงลาปลาซในทอม  $\lambda$  ของ  $[q(x', t_r + \lambda)]_k$  สำหรับค่า  $x$  ที่กำหนด และ  $[q_\lambda^{(i-1)}(x', t_r)]_k$  คือสัญลักษณ์แสดงแทนอนุพันธ์อันดับที่  $(i-1)$  ของ  $[q(x', t_r)]_k$  โดยที่  $r_1, r_2, r_3$  และ  $r_4$  คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่เกิดขึ้นใน  $D_0 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right), M_0 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right), N_0 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)$  และ  $F_0 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)$  ตามลำดับ

ซึ่งผลเฉลยของสมการที่ (4.14) สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} [Q_{t_r}(x', s)]_k &= \exp\{D_0(s)x'\}[Q_{t_r}(0, s)]_k - \int_0^{x'} \exp\{D_0(s)(x' - X)\} \sum_{i=1}^{r_1} D_i(s)[q_\lambda^{(i-1)}(X, t_r)]_k dX \\ &= \exp\{D_0(s)x'\}[Q_{t_r}(0, s)]_k - \exp\{D_0(s)x'\} * [C(x', s)]_k \\ &= E(x', s)[Q_{t_r}(0, s)]_k - [B(x', s)]_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\text{โดยที่ } [C(x', s)]_k = \sum_{i=1}^{r_1} D_i(s)[q_\lambda^{(i-1)}(x', t_r)]_k$$

$$E(x', s) = \exp\{D_0(s)x'\}$$

$$[B(x', s)]_k = E(x', s) * [C(x', s)]_k$$

ดังนั้นจากสมการที่ (4.16) ผลเฉลยสำหรับที่  $x' = \delta$ ,

$$[Q_{t_r}(\delta, s)]_k = E(\delta, s)[Q_{t_r}(0, s)]_k - [B(\delta, s)]_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (4.17)$$

และเมื่อแทนค่า  $[Q_{t_r}(\delta, s)]_k$  จากสมการที่ (4.17) ลงในสมการที่ (4.15) จะได้

$$\left. \begin{aligned} M_0(s)[Q_{t_r}(0, s)]_1 + N_0(s)E(\delta, s)[Q_{t_r}(0, s)]_{n_s} &= F^*(s) + N_0(s)[B(\delta, s)]_{n_s} \\ [Q_{t_r}(0, s)]_k - E(\delta, s)[Q_{t_r}(0, s)]_{k-1} &= -[B(\delta, s)]_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n_s \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

จากสมการที่ (4.18) สามารถรวมเงื่อนไขขอบในแต่ละส่วนทั้งหมด  $n_s$  ส่วน ให้เป็นสมการเดียวดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_0(s) & 0 & \cdots & 0 & N_0(s)E(\delta, s) \\ -E(\delta, s) & I & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -E(\delta, s) & I & \\ & & & -E(\delta, s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Q_{t_r}(0, s)]_1 \\ [Q_{t_r}(0, s)]_2 \\ \vdots \\ [Q_{t_r}(0, s)]_{(n_s-1)} \\ [Q_{t_r}(0, s)]_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^*(s) + N_0(s)[B(\delta, s)]_{n_s} \\ -[B(\delta, s)]_1 \\ \vdots \\ [B(\delta, s)]_{(n_s-2)} \\ -[B(\delta, s)]_{(n_s-1)} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

โดยค่า  $[Q_{t_r}(0, s)]_k$  สำหรับ  $k = 1, 2, \dots, n_s$  สามารถคำนวณได้ด้วยการแก้หาผลเฉลยสมการ (4.19) และเมื่อทำการแปลงลาปลาซในส่วนของ  $x'$  ของสมการที่ (4.16) จะได้

$$\begin{bmatrix} [\tilde{Q}_{t_r}(p, s)]_1 \\ [\tilde{Q}_{t_r}(p, s)]_2 \\ [\tilde{Q}_{t_r}(p, s)]_3 \\ \vdots \\ [\tilde{Q}_{t_r}(p, s)]_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}(p, s) & & & & \\ & \tilde{E}(p, s) & & & \\ & & \tilde{E}(p, s) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tilde{E}(p, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Q_{t_r}(0, s)]_1 \\ [Q_{t_r}(0, s)]_2 \\ [Q_{t_r}(0, s)]_3 \\ \vdots \\ [Q_{t_r}(0, s)]_{n_s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\tilde{B}(p, s)]_1 \\ [\tilde{B}(p, s)]_2 \\ [\tilde{B}(p, s)]_3 \\ \vdots \\ [\tilde{B}(p, s)]_{n_s} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

เมื่อ  $[\tilde{Q}_{t_r}(p, s)]_k \triangleq \mathcal{L}_{x'}\{[Q_{t_r}(x', s)]_k\}$ ,  $[\tilde{B}(p, s)]_k \triangleq \mathcal{L}_{x'}\{[B(x', s)]_k\}$ , สำหรับ  $k = 1, 2, \dots, n_s$  และ  $\tilde{E}(p, s) \triangleq \mathcal{L}_{x'}\{E(x', s)\}$  โดยค่า  $[\tilde{B}(p, s)]_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_s$  สามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} [\tilde{B}(p, s)]_k &= \mathcal{L}'_x\{E(x', s) * [C(x', s)]_k\} \\ &= \mathcal{L}'_x\{E(x', s)\} \mathcal{L}'_x\{[C(x', s)]_k\} \\ &= \tilde{E}(p, s) [\tilde{C}(p, s)]_k \end{aligned} \quad (4.21)$$

## 4.2 ขั้นตอนการคำนวณ

ดังนั้นจากสมการที่ (4.20) เราจะสามารถหาค่าของเชิงเวลาของระบบที่ตำแหน่ง  $x' = \delta$  ได้ด้วยการแปลงลาปลาซผกผัน 2 ชั้น ซึ่งขั้นตอนการคำนวณเป็นดังนี้

1. คำนวณหาค่าคงตัวของสัมประสิทธิ์ในการแปลงลาปลาซผกผัน  $s_i = \alpha_i/h$ ,  $p_j = \beta_j/\delta$  สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, NT/2$ ,  $j = 1, 2, \dots, NX$
2. คำนวณหาค่า (สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, NT/2$ )
  - (a)  $D_a(s_i)$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, r_1$
  - (b)  $M_a(s_i)$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, r_2$
  - (c)  $N_a(s_i)$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, r_3$
  - (d)  $F_a(s_i)$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, r_4$
3. ป้อนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (สำหรับ  $k = 1, 2, \dots, n_s$ )
  - (a)  $Q_\lambda^{(a)}(p_j, t_0)$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, r_1 - 1$
  - (b)  $q_\lambda^{(a)}(0, t_0)$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, r_2 - 1$
  - (c)  $q_\lambda^{(a)}(l, t_0)$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, r_3 - 1$
  - (d)  $f_\lambda^{*(a)}(t_0)$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots, r_4 - 1$
4. คำนวณหาค่า  $E(\delta, s_i)$  สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, NT/2$  จาก

$$E(\delta, s_i) = \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{NX} K x_j [p_j I - D_0(s_i)]^{-1}$$

5. คำนวณหาตัวประกอบ  $L$  และ  $U$  ของ (สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, NT/2$ )

$$\begin{bmatrix} M_0(s) & 0 & \cdots & 0 & N_0(s)E(\delta, s) \\ -E(\delta, s) & I & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -E(\delta, s) & I & \\ & & & -E(\delta, s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [Q_{t_r}(0, s)]_1 \\ [Q_{t_r}(0, s)]_2 \\ \vdots \\ [Q_{t_r}(0, s)]_{(n_s-1)} \\ [Q_{t_r}(0, s)]_{n_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F^*(s) + N_0(s)[B(\delta, s)]_{n_s} \\ -[B(\delta, s)]_1 \\ \vdots \\ [B(\delta, s)]_{(n_s-2)} \\ -[B(\delta, s)]_{(n_s-1)} \end{bmatrix}$$

6. อันดับแรกให้  $r = 0$  ( $t_{r+1} = t_r + h$ , เมื่อ  $t_0 = 0$ )

- (a) คำนวณหาค่า

$$[\tilde{C}(p_j, s_i)]_k = \sum_{a=1}^{r_1} D_a(s_i) [Q_\lambda^{(a-1)}(p_j, 0)]_k, \text{ สำหรับ } j = 1, 2, \dots, NX, k = 1, 2, \dots, n_s$$

(b) คำนวณหาค่า

$$[B(\delta, s_i)]_k = \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{NX} K x_j [p_j I - D_0(s_i)]^{-1} [\tilde{C}(p_j, s_i)]_k, \text{ สำหรับ } k = 1, 2, \dots, n_s$$

(c) คำนวณหาค่า

$$F^*(s_i) = F_0(s_i) F_{t_r}^*(s_i) - \sum_{i=1}^{r_4} F_i(s) f_{\lambda}^{*(i-1)}(t_r) + \sum_{i=1}^{r_2} M_i(s) [q_{\lambda}^{(i-1)}(0, t_r)]_1 + \sum_{i=1}^{r_3} N_i(s) [q_{\lambda}^{(i-1)}(\delta, t_r)]_{n_s}$$

(d) คำนวณหาค่า  $[Q_{t_r}(0, s_i)]_k$  ด้วยการแทนค่าของตัวประกอบ  $L(s_i)$ ,  $U(s_i)$  ของสมการในข้อ 5

(e) คำนวณหาค่า (สำหรับ  $j = 1, 2, \dots, NX$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_s$ )

$$[\tilde{Q}_{t_r}(p_j, s_i)]_k = [p_j I - D_0(s_i)]^{-1} [Q_{t_r}(0, s_i)]_k - [\tilde{B}(p_j, s_i)]_k$$

$$[\tilde{Q}_{t_r, \lambda}^{(a)}(p_j, s_i)]_k = s_i^a [\tilde{Q}_{t_r}(p_j, s_i)]_k - \sum_{v=1}^a s_i^{a-v} [Q_{\lambda}^{(v-1)}(p_j, 0)]_k$$

(f) คำนวณหาค่า

$$[Q_{t_r}(\delta, s_i)]_k = \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{NX} \text{Re}\{K x_j [\tilde{Q}_{t_r}(p_j, s_i)]_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s$$

(g) คำนวณหาค่า (สำหรับ  $k = 1, 2, \dots, n_s$  และ  $a = 0, 1, 2, \dots, r_1$ )

$$[Q_{t_r, \lambda}^{(a)}(p_j, t_{r+1})]_k = \frac{1}{h} \sum_i \{K t_i [\tilde{Q}_{t_r, \lambda}^{(a)}(p_j, s_i)]_k + \overline{K t_i [\tilde{Q}_{t_r, \lambda}^{(a)}(\bar{p}_j, s_i)]_k}\}$$

(h) ทำซ้ำข้อ (a)–(g) สำหรับ  $i = 1, 2, \dots, NT/2$  แล้วคำนวณหา (สำหรับ  $k = 1, 2, \dots, n_s$ )

$$[q_{\lambda}^{(a)}(0, t_{r+1})]_k = \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{NT/2} \text{Re}\{K t_i \{s_i^a [Q_{t_r}(0, s_i)]_k - \sum_{v=1}^a [q_{\lambda}^{(v-1)}(0, t_r)]_k\}\}, \quad a = 1, 2, \dots, r_2$$

$$[q_{\lambda}^{(a)}(\delta, t_{r+1})]_k = \frac{2}{\delta} \sum_{j=1}^{NX/2} \text{Re}\{K x_j \{p_j^a [Q_{t_r}(p_j, t_{r+1})]_k - \sum_{v=1}^a [q_{\lambda}^{(v-1)}(\delta, t_r)]_k\}\}, \quad a = 1, 2, \dots, r_3$$

$$f_{\lambda}^{*(a-1)}(t_{r+1}), \quad a = 1, 2, \dots, r_4$$

$$[q(\delta, t_{r+1})]_k = \frac{2}{\delta} \sum_{j=1}^{NX/2} \text{Re}\{K x_j [Q_{t_r}(p_j, t_{r+1})]_k\}$$

(i) ทำซ้ำข้อ (a)–(h) โดยการเพิ่มค่า  $r = r + 1$

### 4.3 ระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อน

พิจารณาระบบควบคุมป้อนกลับดังรูปที่ 1.1 เมื่อกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนที่มีเงื่อนไขขอบดังสมการ (3.1) และมีตัวควบคุมถูกอธิบายด้วยฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการ (1.2)

โดยเราสามารถจัดระบบควบคุมย้อนกลับดังกล่าวเข้าสู่รูปแบบมาตรฐานดังสมการ (4.1) และ (4.2) ได้ด้วยการกำหนดให้

$$\left. \begin{aligned} q_1(x, t) &= q(x, t) \\ q_2(x, t) &= -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

เมื่อหาผลต่างเชิงอนุพันธ์เทียบกับ  $x$  ของสมการ (4.22) จะได้

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} q_1(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = -\varphi q_2(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} q_2(x, t) &= \frac{-1}{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) = \frac{-1}{\varphi \kappa} \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = \frac{-1}{\varphi \kappa} \frac{\partial}{\partial t} q_1(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

จากสมการ (4.23) และเงื่อนไขขอบในสมการ (3.1) ทำให้สามารถจัดเข้าสู่รูปแบบมาตรฐานดังสมการ (4.1) และ (4.2) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} q_1(x, t) \\ q_2(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi \\ \frac{-1}{\varphi \kappa} \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x, t) \\ q_2(x, t) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & \left( \frac{\partial^m}{\partial t^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{\partial}{\partial t} + a_m \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0, t) \\ q_2(0, t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \left( d \frac{\partial^m}{\partial t^m} + (a_1 d + b_1) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + (a_{m-1} d + b_{m-1}) \frac{\partial}{\partial t} + a_m d + b_m \right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(l, t) \\ q_2(l, t) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \left( d \frac{\partial^m}{\partial t^m} + (a_1 d + b_1) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + (a_{m-1} d + b_{m-1}) \frac{\partial}{\partial t} + a_m d + b_m \right) r(t) + d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.25)$$

พิจารณาสมการ 4.24 และ 4.25 เมื่อแบ่ง  $x$  ออกเป็น  $n_s$  ส่วน โดยในแต่ละส่วนยาวเท่ากับ  $\delta = l/n_s$  ทำให้สามารถนิยามตัวแปรสถานะใหม่ในแต่ละส่วนเป็น

$$[q(x', t)]_k \triangleq \begin{bmatrix} q_{1k}(x', t) \\ q_{2k}(x', t) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s$$

โดยที่  $x' \in [0, \delta]$  และจากการแบ่ง  $x$  จะได้รูปแบบมาตรฐานและเงื่อนไขขอบเป็นดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} q_{1k}(x', t) \\ q_{2k}(x', t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi \\ \frac{-1}{\varphi \kappa} \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1k}(x', t) \\ q_{2k}(x', t) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (4.26)$$



$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & \left( \frac{\partial^m}{\partial t^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{\partial}{\partial t} + a_m \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}(0, t) \\ q_{21}(0, t) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \left( d \frac{\partial^m}{\partial t^m} + (a_1 d + b_1) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + (a_{m-1} d + b_{m-1}) \frac{\partial}{\partial t} + a_m d + b_m \right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1n_s}(\delta, t) \\ q_{2n_s}(\delta, t) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \left( d \frac{\partial^m}{\partial t^m} + (a_1 d + b_1) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + (a_{m-1} d + b_{m-1}) \frac{\partial}{\partial t} + a_m d + b_m \right) r(t) + d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} q_{1k}(0, t) \\ q_{2k}(0, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{1(k-1)}(\delta, t) \\ q_{2(k-1)}(\delta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2, 3, \dots, n_s \quad (4.28)$$

จากทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  ในหัวข้อ 2.2.1 กำหนดให้  $t_r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) แทนลำดับของจุดในช่วง  $[0, \infty)$  ที่ทำให้  $t_0 = 0$ ,  $t_{r+1} = t_r + h$  เมื่อช่วงก้าว  $h$  เป็นค่าคงตัวที่มีค่ามากกว่า 0 และเมื่อ  $r(t_r + \lambda)$  และ  $d(t_r + \lambda)$  ถูกแทนที่ด้วย  $r^*(t_r + \lambda)$  และ  $d^*(t_r + \lambda)$  ตามลำดับ สำหรับ  $t \in [t_r, t_{r+1}]$  โดยที่  $r = 0, 1, 2, \dots$  ดังนี้

$$r^*(t_r + \lambda) = \begin{cases} r(t_r + \lambda), & \lambda \in [0, h] \\ a_r(\lambda), & \lambda > h \end{cases} \quad (4.29)$$

$$d^*(t_r + \lambda) = \begin{cases} d(t_r + \lambda), & \lambda \in [0, h] \\ b_r(\lambda), & \lambda > h \end{cases} \quad (4.30)$$

โดยที่  $a_r(\lambda)$  และ  $b_r(\lambda)$  อยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า  $R_{t_r}^*(s)$  และ  $D_{t_r}^*(s)$  มีจริงสำหรับ  $\text{Re}(s) \geq \hat{\alpha}_{MN}/h$  ดังนั้นเมื่อแทน  $t = t_r + \lambda$  ในสมการ (4.26), (4.27) และ (4.28) แล้วทำการแปลงลาปลาซในส่วนของ  $\lambda$  สำหรับค่า  $\lambda$  ใดๆ ที่กำหนดจะได้

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} Q_{1k}(x', s) \\ Q_{2k}(x', s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi \\ \frac{-1}{\varphi \kappa} s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1k}(x', s) \\ Q_{2k}(x', s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{\varphi \kappa} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1k}(x', t_r) \\ q_{2k}(x', t_r) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & (s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}(0, s) \\ Q_{21}(0, s) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} (ds^m + (a_1 d + b_1) s^{m-1} + \dots + (a_{m-1} d + b_{m-1}) s + a_m d + b_m) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1n_s}(\delta, s) \\ Q_{2n_s}(\delta, s) \end{bmatrix} = F^*(s) \quad (4.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{1k}(0, s) \\ Q_{2k}(0, s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{1(k-1)}(\delta, s) \\ Q_{2(k-1)}(\delta, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2, 3, \dots, n_s \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
\text{เมื่อ } F^*(s) = & \begin{bmatrix} (ds^m + (a_1d + b_1)s^{m-1} + \dots + (a_{m-1}d + b_{m-1})s + a_md + b_m) R_{t_r}^*(s) + D_{t_r}^*(s) \\ 0 \end{bmatrix} \\
- & \begin{bmatrix} ds^{m-1} + (a_1d + b_1)s^{m-2} + \dots + (a_{m-1}d + b_{m-1}) \\ 0 \end{bmatrix} r^*(t_r) \\
- \dots - & \begin{bmatrix} ds + a_1d + b_1 \\ 0 \end{bmatrix} r_{\lambda}^{*(m-2)}(t_r) - \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} r_{\lambda}^{*(m-1)}(t_r) \\
+ & \begin{bmatrix} 0 & (s^{m-1} + a_1s^{m-2} + \dots + a_{m-2}s + a_{m-1}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}(0, t_r) \\ q_{21}(0, t_r) \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} 0 & (s^{m-2} + a_1s^{m-3} + \dots + a_{m-2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}'_{\lambda}(0, t_r) \\ q_{21}'_{\lambda}(0, t_r) \end{bmatrix} \\
+ \dots + & \begin{bmatrix} 0 & s + a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}^{m-2}_{\lambda}(0, t_r) \\ q_{21}^{m-2}_{\lambda}(0, t_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}^{m-1}_{\lambda}(0, t_r) \\ q_{21}^{m-1}_{\lambda}(0, t_r) \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} (ds^{m-1} + (a_1d + b_1)s^{m-2} + \dots + (a_{m-2}d + b_{m-2})s + a_{m-1}d + b_{m-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1n_s}(\delta, t_r) \\ q_{2n_s}(\delta, t_r) \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} (ds^{m-2} + (a_1d + b_1)s^{m-3} + \dots + a_{m-2}d + b_{m-2}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_{1n_s\lambda}(\delta, t_r) \\ q'_{2n_s\lambda}(\delta, t_r) \end{bmatrix} \\
+ \dots + & \begin{bmatrix} (ds + a_1d + b_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1n_s\lambda}^{m-2}(\delta, t_r) \\ q_{2n_s\lambda}^{m-2}(\delta, t_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1n_s\lambda}^{m-1}(\delta, t_r) \\ q_{2n_s\lambda}^{m-1}(\delta, t_r) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

จากสมการ (4.31), (4.32) และ (4.33) สามารถหาค่า  $D_0(s)$ ,  $D_1$ ,  $M_0(s)$ ,  $N_0(s)$ ,  $F_0(s)$ ,  $M_a(s)$ ,  $N_a(s)$ ,  $F_a(s)$  สำหรับ  $a = 1, 2, \dots, m$  ได้ ดังนั้นในการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร่อนดังสมการ (3.1) สามารถคำนวณได้ด้วยการใช้ขั้นตอนวิธีที่แสดงอยู่ในหัวข้อ 4.2

#### 4.4 ระบบควบคุมป้อนกลับที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่น

พิจารณาระบบควบคุมป้อนกลับดังรูปที่ 1.1 เมื่อกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่นที่มีเงื่อนไขขอบดังสมการ (3.6) และมีตัวควบคุมที่ถูกอธิบายดังสมการ (1.2) โดยเราสามารถจัดระบบควบคุมป้อนกลับดังกล่าวเข้าสู่รูปแบบมาตรฐานดังสมการ (4.1) และ (4.2) ด้วยการกำหนดให้

$$\left. \begin{aligned} q_1(x, t) &= q(x, t) \\ q_2(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) \\ q_3(x, t) &= -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

เมื่อหาผลต่างเชิงอนุพันธ์เทียบกับ  $x$  ของสมการ (4.34) จะได้

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} q_1(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = -\varphi q_3(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} q_2(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) = -\varphi \frac{\partial}{\partial t} q_3(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} q_3(x, t) &= \frac{-1}{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) = \frac{-1}{\varphi \kappa} \frac{\partial^2}{\partial t^2} q(x, t) = \frac{-1}{\varphi \kappa} \frac{\partial}{\partial t} q_2(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

จากสมการ (4.35) และเงื่อนไขขอบในสมการ (3.6) ทำให้สามารถจัดเข้าสู่รูปแบบมาตรฐานดังสมการ (4.1) และ (4.2) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} q_1(x, t) \\ q_2(x, t) \\ q_3(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varphi \\ 0 & 0 & -\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\ 0 & \frac{-1}{\varphi \kappa} \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(x, t) \\ q_2(x, t) \\ q_3(x, t) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0, t) \\ q_2(0, t) \\ q_3(0, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left( -d \frac{\partial^m}{\partial t^m} - (a_1 d + b_1) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} - \dots - a_m d - b_m \right) & \left( \frac{\partial^m}{\partial t^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_m \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(l, t) \\ q_2(l, t) \\ q_3(l, t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left( d \frac{\partial^m}{\partial t^m} + (a_1 d + b_1) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_m d + b_m \right) r(t) + \left( \frac{\partial^m}{\partial t^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_m \right) d(t) \end{bmatrix} \quad (4.37) \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ (4.36) และ (4.37) เมื่อแบ่ง  $x$  ออกเป็น  $n_s$  ส่วน โดยในแต่ละส่วนยาวเท่ากับ  $\delta = l/n_s$  ทำให้สามารถนิยามตัวแปรสถานะใหม่ในแต่ละส่วนเป็น

$$[q(x', t)]_k \triangleq \begin{bmatrix} q_{1k}(x', t) \\ q_{2k}(x', t) \\ q_{3k}(x', t) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s$$

โดยที่  $x' \in [0, \delta]$  และจากการแบ่ง  $x$  จะได้รูปแบบมาตรฐานและเงื่อนไขขอบเป็นดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} q_{1k}(x', t) \\ q_{2k}(x', t) \\ q_{3k}(x', t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varphi \\ 0 & 0 & -\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\ 0 & \frac{-1}{\varphi \kappa} \frac{\partial}{\partial t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1k}(x', t) \\ q_{2k}(x', t) \\ q_{3k}(x', t) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}(0, t) \\ q_{21}(0, t) \\ q_{31}(0, t) \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-d \frac{\partial^m}{\partial t^m} - (a_1 d + b_1) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} - \dots - a_m d - b_m\right) & \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_m\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1n_s}(\delta, t) \\ q_{2n_s}(\delta, t) \\ q_{3n_s}(\delta, t) \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(d \frac{\partial^m}{\partial t^m} + (a_1 d + b_1) \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_m d + b_m\right) r(t) + \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_m\right) d(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} q_{1k}(0, t) \\ q_{2k}(0, t) \\ q_{3k}(0, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{1(k-1)}(\delta, t) \\ q_{2(k-1)}(\delta, t) \\ q_{3(k-1)}(\delta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2, 3, \dots, n_s \quad (4.40)$$

จากทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  ในหัวข้อ 2.2.1 กำหนดให้  $t_r$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ) แทนลำดับของจุดในช่วง  $[0, \infty)$  ที่ทำให้  $t_0 = 0$ ,  $t_{r+1} = t_r + h$  เมื่อช่วงก้าว  $h$  เป็นค่าคงตัวที่มีค่ามากกว่า 0 และเมื่อ  $r(t_r + \lambda)$  และ  $d(t_r + \lambda)$  ถูกแทนที่ด้วย  $r^*(t_r + \lambda)$  และ  $d^*(t_r + \lambda)$  ตามลำดับ สำหรับ  $t \in [t_r, t_{r+1}]$  โดยที่  $r = 0, 1, 2, \dots$  ดังสมการ (4.29) และ (4.30) ดังนั้นเมื่อแทน  $t = t_r + \lambda$  ในสมการ (4.38), (4.39) และ (4.40) แล้วทำการแปลงลาปลาซในส่วนของ  $\lambda$  สำหรับค่า  $\lambda$  ใดๆ ที่กำหนดจะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} Q_{1k}(x', s) \\ Q_{2k}(x', s) \\ Q_{3k}(x', s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varphi \\ 0 & 0 & -\varphi s \\ 0 & \frac{-1}{\varphi \kappa} s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1k}(x', s) \\ Q_{2k}(x', s) \\ Q_{3k}(x', s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varphi \\ 0 & \frac{-1}{\varphi \kappa} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1k}(x', t_r) \\ q_{2k}(x', t_r) \\ q_{3k}(x', t_r) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n_s \quad (4.41) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1n_s}(0, s) \\ Q_{2n_s}(0, s) \\ Q_{3n_s}(0, s) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-ds^m - (a_1 d + b_1)s^{m-1} - \dots - a_m d - b_m) & (s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1n_s}(\delta, s) \\ Q_{2n_s}(\delta, s) \\ Q_{3n_s}(\delta, s) \end{bmatrix} = F^*(s) \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{1k}(0, t) \\ Q_{2k}(0, s) \\ Q_{3k}(0, s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{1(k-1)}(\delta, s) \\ Q_{2(k-1)}(\delta, s) \\ Q_{3(k-1)}(\delta, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 2, 3, \dots, n_s \quad (4.43)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d s^m + (a_1 d + b_1) s^{m-1} + \dots + (a_{m-1} d + b_{m-1}) s + (a_m d + b_m) \end{bmatrix} R_{t_r}^*(s) \\ &- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d s^{m-1} + (a_1 d + b_1) s^{m-2} + \dots + (a_{m-1} d + b_{m-1}) \end{bmatrix} r^*(t_r) \\ &- \dots - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d s + (a_1 d + b_1) \end{bmatrix} r_{\lambda}^{*(m-2)}(t_r) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} r_{\lambda}^{*(m-1)}(t_r) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m \end{bmatrix} D_{t_r}^*(s) \\ &- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s^{m-1} + a_1 s^{m-2} + \dots + a_{m-1} \end{bmatrix} d^*(t_r) - \dots - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s + a_1 \end{bmatrix} d_{\lambda}^{*(m-2)}(t_r) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d_{\lambda}^{*(m-1)}(t_r) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-d s^{m-1} - (a_1 d + b_1) s^{m-2} - \dots - a_{m-1} d - b_{m-1}) & (s^{m-1} + a_1 s^{m-2} + \dots + a_{m-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1n_s}(\delta, t_r) \\ q_{2n_s}(\delta, t_r) \\ q_{3n_s}(\delta, t_r) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-d s^{m-2} - (a_1 d + b_1) s^{m-3} - \dots - a_{m-2} d - b_{m-2}) & (s^{m-2} + a_1 s^{m-3} + \dots + a_{m-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_{1n_s \lambda}(\delta, t_r) \\ q'_{2n_s \lambda}(\delta, t_r) \\ q'_{3n_s \lambda}(\delta, t_r) \end{bmatrix} \\ &+ \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-d s - a_1 d - b_1) & (s + a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1n_s \lambda}^{m-2}(\delta, t_r) \\ q_{2n_s \lambda}^{m-2}(\delta, t_r) \\ q_{3n_s \lambda}^{m-2}(\delta, t_r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1n_s \lambda}^{m-1}(\delta, t_r) \\ q_{2n_s \lambda}^{m-1}(\delta, t_r) \\ q_{3n_s \lambda}^{m-1}(\delta, t_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จากสมการ (4.41), (4.42) และ (4.43) สามารถหาค่า  $D_0(s)$ ,  $D_1$ ,  $M_0$ ,  $N_0(s)$ ,  $F_0(s)$ ,  $N_a(s)$ ,  $F_a(s)$  สำหรับ  $a = 1, 2, \dots, m$  ได้ ดังนั้นในการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่นดังสมการ (3.6) สามารถคำนวณได้ด้วยการใช้ขั้นตอนวิธีที่แสดงอยู่ในหัวข้อ 4.2

#### 4.5 สรุป

จากการศึกษาอัลกอริทึมของวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith เสนอไว้ก่อนหน้านี้ พบว่ารายละเอียดขั้นตอนการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาค่อนข้างซับซ้อน เนื่องจากอัลกอริทึมดังกล่าวเป็นการใช้ทฤษฎีพื้นฐานของการแปลงลาปลาซ นั่นคือการแปลงลาปลาซในส่วนของ  $t$  และ  $x$  แล้วจึงใช้ทฤษฎีตัวประมาณ  $I_{MN}$  ในการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองชั้น โดยขั้นตอนในการแปลงลาปลาซจำเป็นต้องอ้างอิงถึงค่าเริ่มต้น ทำให้จำนวนของค่าเริ่มต้นที่ใช้ขึ้นอยู่กับอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่เกิดขึ้น (คือ  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  และ  $r_4$ ) ในแต่ละส่วนของรูปแบบมาตรฐาน (คือ  $D_0(\frac{\partial}{\partial \lambda})$ ,  $M_0(\frac{\partial}{\partial \lambda})$ ,  $N_0(\frac{\partial}{\partial \lambda})$  และ  $F_0(\frac{\partial}{\partial \lambda})$ ) ซึ่งส่งผลต่อรายละเอียดขั้นตอนในการคำนวณและการปรับ (update) ค่าเริ่มต้นที่ใช้ในรอบ  $r$  ถัดไป นอกจากนี้เรายังได้นำอัลกอริทึมของวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่คำนวณผลตอบสนองเชิงเวลา สำหรับระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) ในหัวข้อ 4.3 และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ในหัวข้อ 4.4 มาสร้างคลังสำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function เพื่อนำไปใช้เปรียบเทียบผลคำตอบกับอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนาในบทที่ 3 โดยรายละเอียดในการสร้างและการใช้งานได้ถูกอธิบายไว้อยู่ในภาคผนวก ก

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

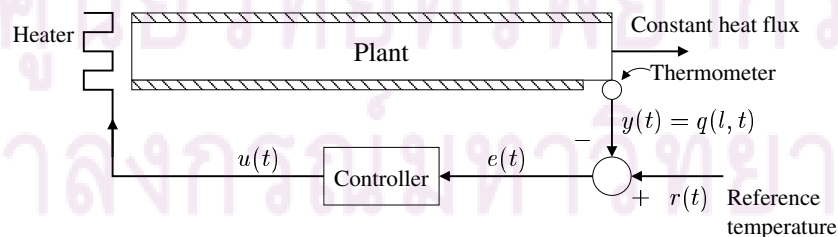
## บทที่ 5

### ตัวอย่างเชิงตัวเลข

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราได้พัฒนาอัลกอริทึมเพื่อคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) อยู่ในบทที่ 3 และได้อธิบายวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยไว้ในบทที่ 4 โดยในบทนี้เราจะยกตัวอย่างเชิงตัวเลข 2 ตัวอย่าง เพื่อทดสอบความน่าเชื่อถือและความแม่นยำของวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตซึ่งเป็นวิธีที่เราพัฒนาด้วยการเปรียบเทียบผลเฉลยกับวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith เสนอไว้ สำหรับตัวอย่างแรกคือปัญหาการควบคุมอุณหภูมิของแท่งเหล็กและตัวอย่างที่สองคือปัญหาการควบคุมการสั่นของเส้นเชือก เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) ตามลำดับ

#### 5.1 ปัญหาการควบคุมอุณหภูมิของแท่งเหล็ก

พิจารณาระบบควบคุมอุณหภูมิที่แสดงดังรูปที่ 5.1 [1, 15, 17] เมื่อแท่งเหล็กบางถูกหุ้มด้วยฉนวนตลอดความยาว  $l$  ยกเว้นที่ตำแหน่งปลายของแท่งเหล็กบาง สมมติว่าฟลักซ์ความร้อน (heat flux) ที่ตำแหน่งปลาย  $x = l$  เป็นค่าคงตัว กระบวนการที่เกิดขึ้นถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) โดยที่  $\kappa = 1.115 \text{ cm}^2 \cdot \text{W}^2 / \text{J} \cdot \text{K}$ ,  $\varphi = 0.078 \text{ cm} \cdot \text{W} / \text{K}$  และแท่งเหล็กบางยาว  $l = 20 \text{ cm}$  (ดูรายละเอียดใน [15, 17]) อุณหภูมิอ้างอิง (reference temperature)  $r(t)$  เป็นขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (unit step), ไม่มีสัญญาณรบกวน  $d(t) = 0$  และตัวควบคุมเฟสนำหน้า (phase lead controller)  $G_c(s) = 9.6(s + 0.02)/(s + 0.06)$  ได้ถูกใช้ในการควบคุมอุณหภูมิ

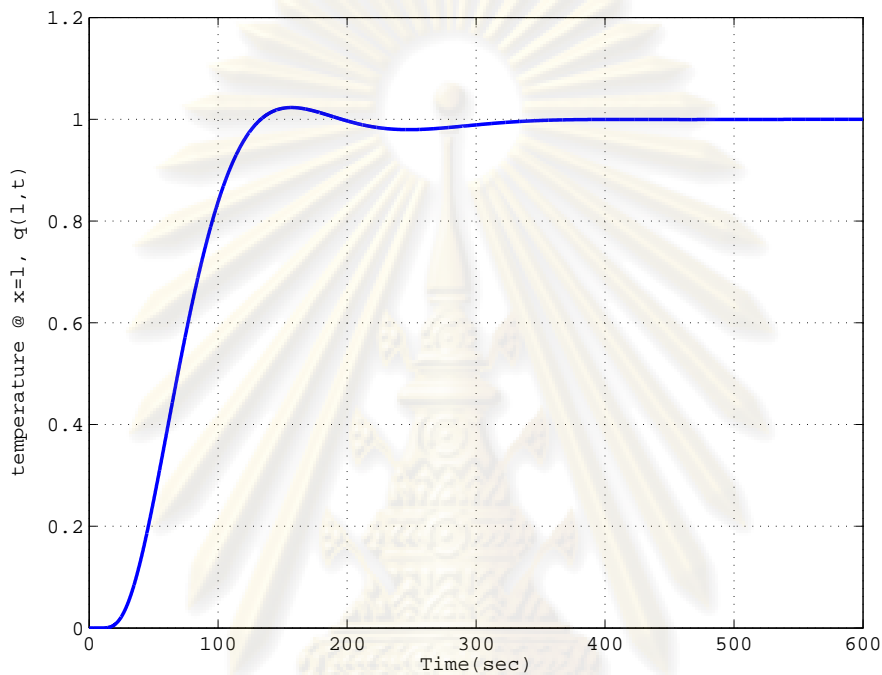


รูปที่ 5.1: ปัญหาการควบคุมอุณหภูมิ



### 5.1.1 วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ $I_{MN}$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต

วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  ในสมการ (2.17) ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 ถูกนำมาใช้กับปัญหาดังกล่าวด้วยค่า  $\delta = 0.002$  ( $n = 9999$ ),  $h = 0.1$  และ  $(M, N) = (3, 4)$  โดยสัญญาณ  $q(l, t)$  ได้แสดงดังรูปที่ 5.2

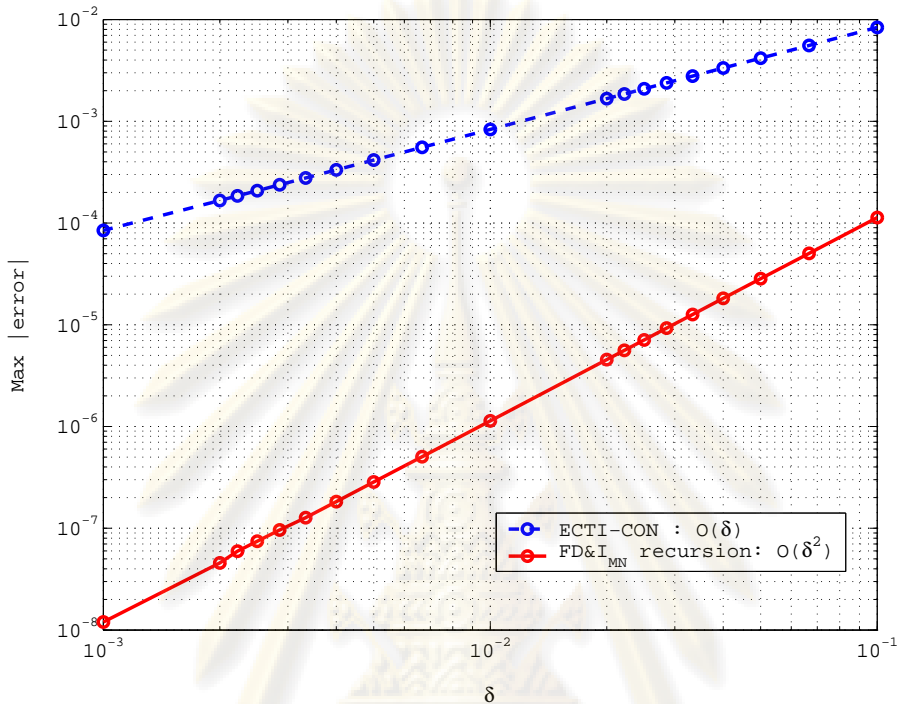


รูปที่ 5.2: ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบที่  $x = l$

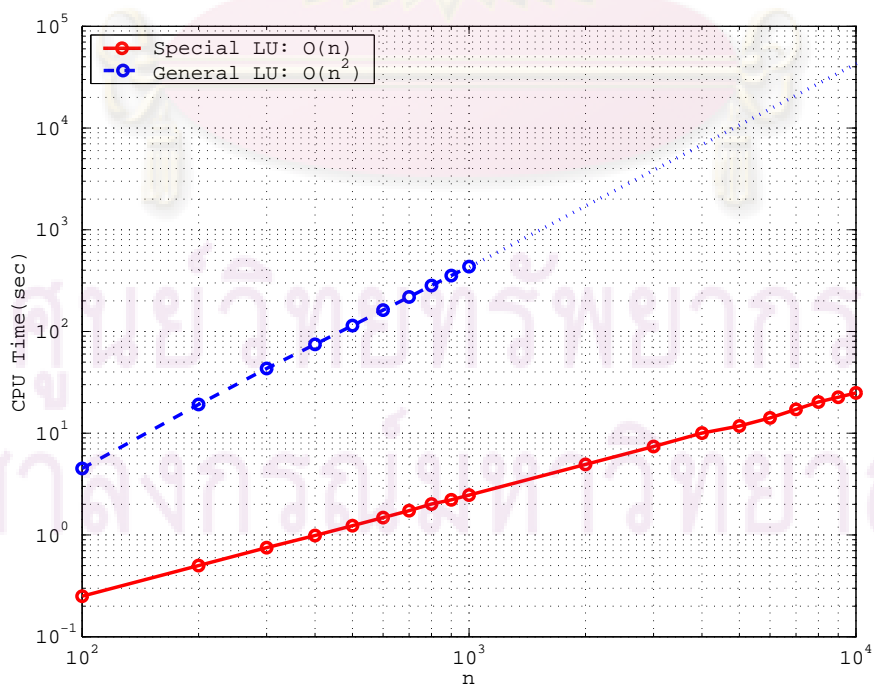
ค่าผิดพลาดสูงสุด (maximum error) ของสัญญาณ  $q(l, t)$  สำหรับ  $\delta$  ค่าต่างๆ ได้แสดงดังรูปที่ 5.3 โดยค่าผิดพลาดที่ได้เกิดจากการเปรียบเทียบระหว่างสัญญาณ  $q(l, t)$  ที่เกิดจากการใช้วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตกับสัญญาณ  $[q(\delta, t)]_{n_s}$  ที่เกิดจากการใช้วิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยค่า  $n_s = 150$  เมื่อเส้นปะแสดงค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  ที่เกิดจากการใช้อัลกอริทึมที่เสนออยู่ใน [17] ซึ่งประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ด้วยค่าคลาดเคลื่อนที่อยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(\delta)$  และเส้นทึบแสดงค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  ที่เกิดจากการใช้อัลกอริทึมที่เราพัฒนาในบทที่ 3 ซึ่งมีการประมาณอนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ด้วยค่าคลาดเคลื่อนที่อยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(\delta^2)$  จากรูปแสดงให้เห็นว่าอัลกอริทึมที่เราพัฒนามีความแม่นยำขึ้นด้วยค่าผิดพลาดสูงสุดอยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(\delta^2)$  (ความชัน  $\approx 2$ ) ต่างจากอัลกอริทึมที่เสนออยู่ใน [17] ซึ่งมีความแม่นยำด้วยค่าผิดพลาดสูงสุดอยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(\delta)$  (ความชัน  $\approx 1$ )

จากการจับเวลาในการประมวลผลด้วยฟังก์ชันภายในโปรแกรม MATLAB สำหรับ  $n$  ค่าต่างๆ ได้ถูกแสดงดังรูปที่ 5.4 โดยเส้นปะและเส้นไขว้ปลาแสดงเวลาในการประมวลผลที่เกิดจากการใช้การแยกตัวประกอบ LU แบบทั่วไปและเส้นทึบแสดงเวลาในการประมวลผลที่เกิดจากการใช้การแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 จากรูปแสดงให้เห็นว่าการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาด้วยวิธีผลต่างอันดับ

และสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 ใช้เวลาในการประมวลผลอยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(n)$  วินาที (ความชัน  $\approx 1$ ) ซึ่งต่างจากเมื่อใช้การแยกตัวประกอบ LU แบบทั่วไปจะใช้เวลาในการประมวลผลที่อยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(n^2)$  วินาที (ความชัน  $\approx 2$ )



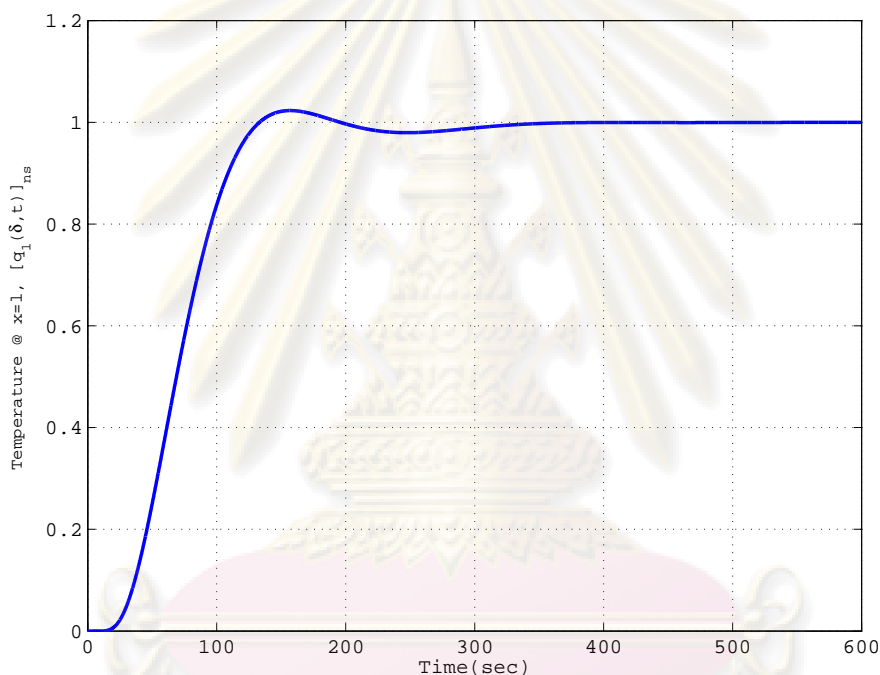
รูปที่ 5.3: ค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  สำหรับ  $\delta$  ค่าต่างๆ



รูปที่ 5.4: เวลาที่ใช้ประมวลผลสำหรับ  $n$  ค่าต่างๆ

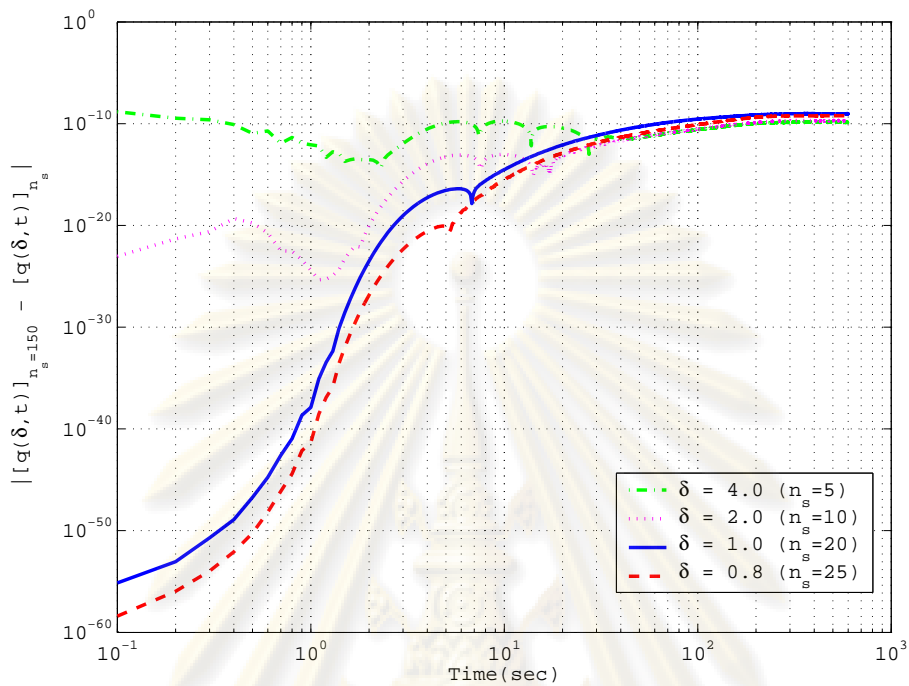
### 5.1.2 วิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยในหัวข้อ 4.3 ถูกนำมาใช้กับปัญหาดังกล่าวด้วยค่า  $\delta = 2$  ( $n_s = 10$ ),  $h = 0.1$ ,  $(MX, NX) = (5, 6)$  และ  $(MT, NT) = (3, 4)$  โดยสัญญาณ  $q(l, t)$  แสดงดังรูปที่ 5.5 ค่าผิดพลาดของสัญญาณ  $q(l, t)$  สำหรับ  $\delta = 4$  ( $n_s = 5$ ),  $\delta = 2$  ( $n_s = 10$ ),  $\delta = 1$  ( $n_s = 20$ ) และ  $\delta = 0.8$  ( $n_s = 25$ ) แสดงดังรูปที่ 5.6 โดยค่าผิดพลาดที่ได้เกิดจากการเปรียบเทียบระหว่างสัญญาณ  $[q(\delta, t)]_k$  กับสัญญาณ  $[q(\delta, t)]_{n_s=150}$  ซึ่งจากรูปแสดงให้เห็นว่าเมื่อ  $\delta$  มีค่าลดลง ค่าผิดพลาดในจำนวนผลตอบสนองเชิงเวลามีความแม่นยำมากขึ้นในช่วงเวลา  $t$  น้อยๆ แต่ในช่วงเวลา  $t \rightarrow \infty$  ค่าผิดพลาดในจำนวนผลตอบสนองเชิงเวลามีค่าประมาณคงเดิม

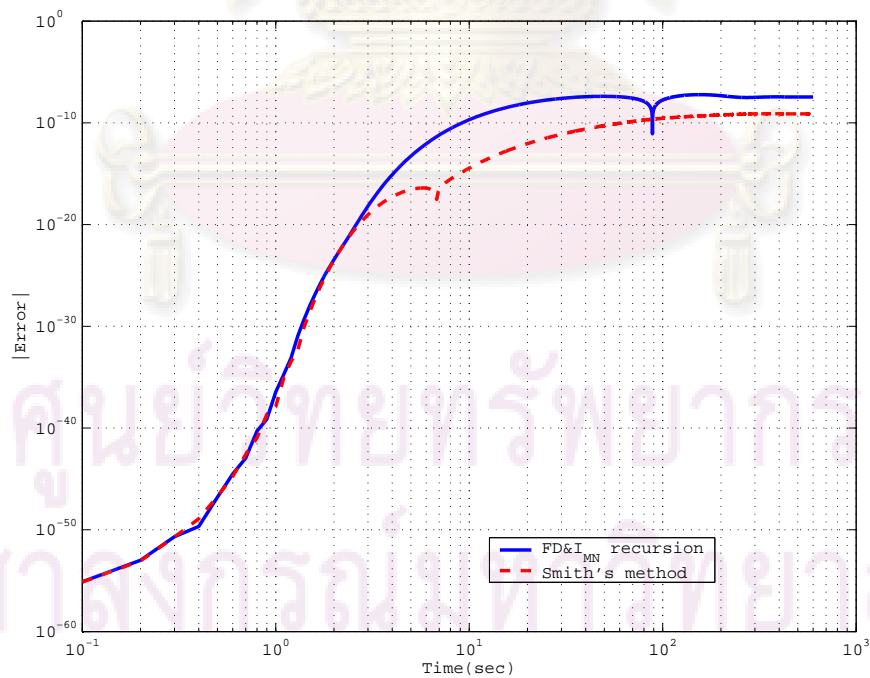


รูปที่ 5.5: ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบที่  $x = l$

ค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  และเวลาที่ใช้ในการประมวลผลที่  $\delta$  ค่าต่างๆ สำหรับวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 ที่  $h = 0.1$ ,  $(M, N) = (3, 4)$  และวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่  $h = 0.1$ ,  $(MX, NX) = (5, 6)$  และ  $(MT, NT) = (3, 4)$  ถูกแสดงดังตารางที่ 5.1 เมื่อจับเวลาในการประมวลผลด้วยฟังก์ชันภายในโปรแกรม MATLAB และเวลาสิ้นสุดเป็น 600 วินาที โดยค่าคลาดเคลื่อนของวิธีทั้ง 2 ถูกเปรียบเทียบดังรูปที่ 5.7 โดยเส้นปะแสดงค่าคลาดเคลื่อนของวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 เมื่อ  $\delta = 0.002$  ( $n = 9999$ ),  $h = 0.1$ ,  $(M, N) = (3, 4)$  และเส้นทึบแสดงค่าคลาดเคลื่อนของวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและระบบเชิงอนุพันธ์ย่อยเมื่อ  $\delta = 2$  ( $n_s = 10$ ),  $h = 0.1$ ,  $(MX, NX) = (5, 6)$  และ  $(MT, NT) = (3, 4)$



รูปที่ 5.6: ค่าผิดพลาดของสัญญาณ  $q(l, t)$  สำหรับ  $\delta = 4.0, 2.0, 1.0$  และ  $0.8$



รูปที่ 5.7: เปรียบเทียบค่าผิดพลาดของสัญญาณ  $q(l, t)$

ตารางที่ 5.1: แสดงเวลาที่ใช้ประมวลผลและค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$

$\delta$	CPU time(sec)		max error	
	FD& $I_{MN}$ recursion	Smith's method	FD& $I_{MN}$ recursion	Smith's method
4.00	0.016	0.281	$1.691 \times 10^{-1}$	$1.475 \times 10^{-9}$
2.00	0.023	0.562	$4.039 \times 10^{-2}$	$2.056 \times 10^{-10}$
1.00	0.047	1.235	$1.069 \times 10^{-2}$	$9.683 \times 10^{-10}$
0.80	0.047	1.656	$6.931 \times 10^{-3}$	$1.051 \times 10^{-10}$
0.50	0.093	2.844	$2.758 \times 10^{-3}$	$5.988 \times 10^{-10}$
0.40	0.121	3.891	$1.776 \times 10^{-3}$	$2.181 \times 10^{-10}$
0.25	0.187	7.422	$7.004 \times 10^{-4}$	$1.024 \times 10^{-10}$
0.20	0.233	11.109	$4.496 \times 10^{-4}$	$1.582 \times 10^{-10}$
0.002	24.437	-	$4.321 \times 10^{-8}$	-

จากตารางที่ 5.1 แสดงให้เห็นว่าวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith เสนอไว้ก่อนหน้านี้ มีความแม่นยำกว่าเมื่อเทียบกับวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 และแม่นยำด้วยค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  ประมาณ 9–10 ตัวเลขนัยสำคัญ ซึ่งวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 นั้น มีค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  อยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(\delta^2)$  นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นว่าวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 เมื่อเปรียบเทียบด้วยค่าผิดพลาดสูงสุดที่ตัวเลขนัยสำคัญใกล้เคียงกัน

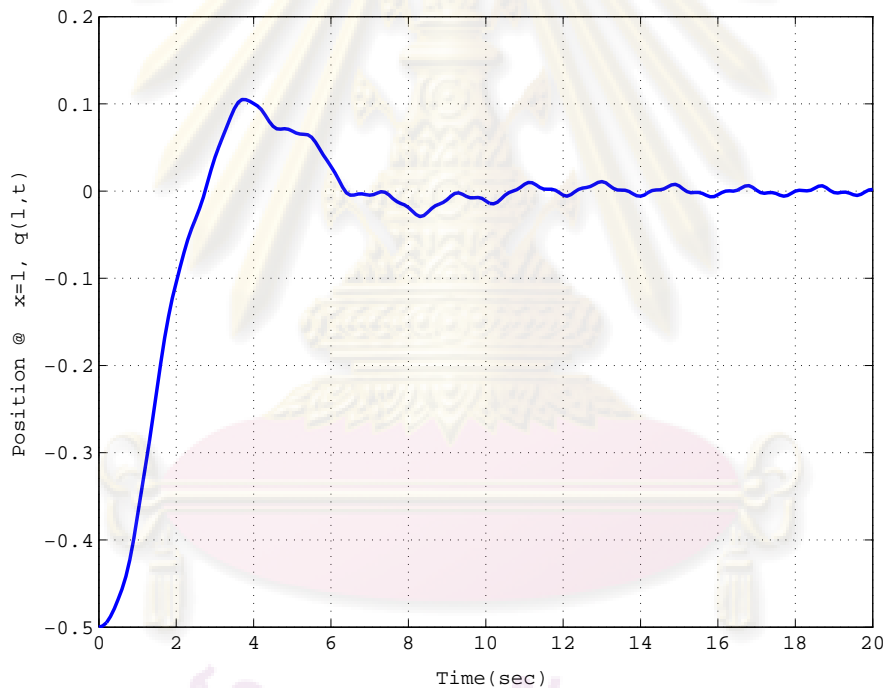
## 5.2 ปัญหาการควบคุมตำแหน่งของเส้นเชือก

พิจารณาเส้นเชือก (string) ที่มีกระบวนการถูกอธิบายทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการคลื่น โดยปราศจากการสูญเสีย (loss) เมื่อความยาวเส้นเชือก (string length)  $l = 1$ , ความหนาแน่นของมวล (mass density)  $\rho = 1$  และความตึงของเส้นเชือก (string tension)  $T = 1$  (ดูรายละเอียดใน [20]) สมมติว่าเส้นเชือกถูกตรึง (fixed) ที่ปลายข้างหนึ่ง และถูกทำให้เสถียรด้วยการควบคุมพลวัตที่ขอบ (dynamic boundary control) ที่ปลายอีกข้างหนึ่ง

โดยระบบที่พิจารณาสารภาพทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยสมการที่ (3.6) เมื่อ  $\kappa = 1$ ,  $\varphi = 1$  เงื่อนไขเริ่มต้น  $q(x, 0) = -0.5 \sin(0.5\pi x)$  และ  $\dot{q}(x, 0) = 0$  สำหรับ  $x \in [0, 1]$  สัญญาณรบกวน  $d(t) = \cos(10t)$ , ไม่มีสัญญาณอ้างอิง  $r = 0$  และตัวควบคุม  $G_k(s) = 0.1 + (100s + 100)/(s^2 + 2s + 100)$  ถูกใช้ในการควบคุม [20]

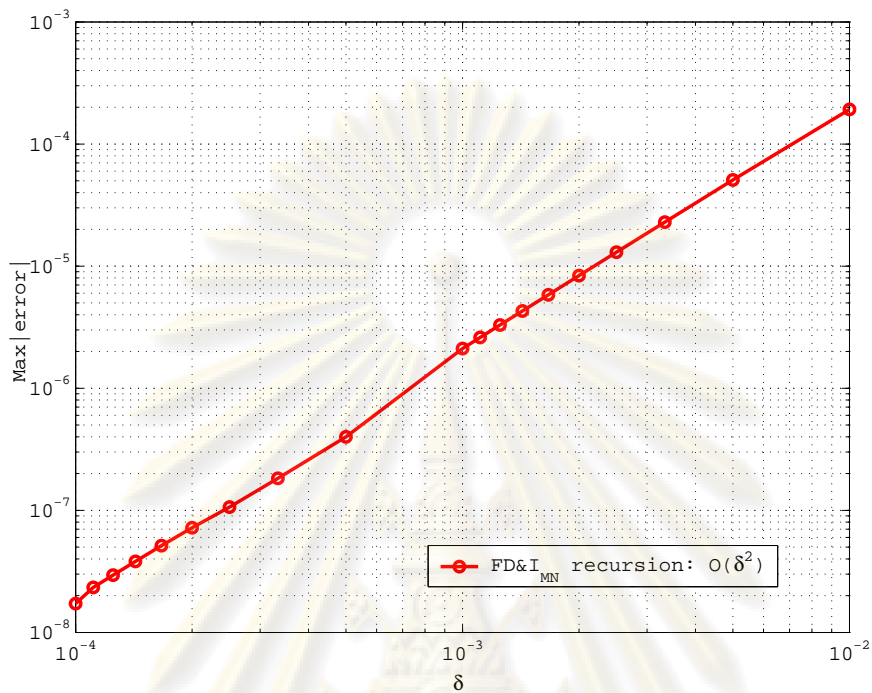
### 5.2.1 วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ $I_{MN}$ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต

วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  ในสมการ (2.17) ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.2.1 ถูกนำมาใช้กับปัญหาดังกล่าวด้วย  $\delta = 0.0001$  ( $n = 9999$ ),  $h = 0.1$  และ  $(M, N) = (3, 4)$  โดยสัญญาณ  $q(l, t)$  แสดงดังรูปที่ 5.8 และค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  สำหรับ  $\delta$  ค่าต่างๆ แสดงดังรูปที่ 5.9 โดยค่าผิดพลาดที่ได้เกิดจากการเปรียบเทียบระหว่างสัญญาณ  $q(l, t)$  ที่เกิดจากการใช้วิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตกับสัญญาณ  $[q(\delta, t)]_{n_s}$  ที่เกิดจากการใช้วิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยค่า  $n_s = 150$  จากรูปแสดงให้เห็นว่าวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.2.1 มีความแม่นยำด้วยค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  อยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(\delta^2)$  (ความชัน  $\approx 2$ )

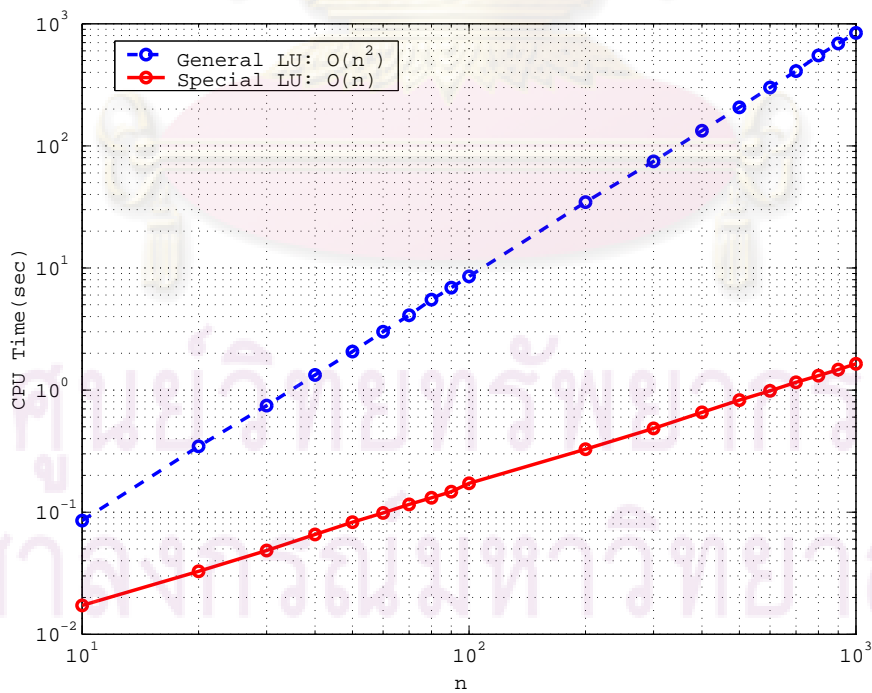


รูปที่ 5.8: ผลตอบสนองเชิงเวลาของสัญญาณ  $q(l, t)$

จากการจับเวลาที่ใช้ในการประมวลผลด้วยฟังก์ชันภายในโปรแกรม MATLAB สำหรับ  $n$  ค่าต่างๆ ได้ถูกแสดงดังรูปที่ 5.10 โดยเส้นปะและเส้นทึบแสดงแทนเวลาที่ใช้ในการประมวลผลสำหรับ  $n$  ค่าต่างๆ ที่เกิดจากการใช้การแยกตัวประกอบ LU แบบทั่วไปและการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.2.1 ตามลำดับ จากรูปแสดงให้เห็นว่าการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาด้วยวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.2.1 ใช้เวลาในการประมวลผลอยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(n)$  วินาที (ความชัน  $\approx 1$ ) ซึ่งต่างจากเมื่อใช้การแยกตัวประกอบ LU แบบทั่วไปจะใช้เวลาในการประมวลผลที่อยู่ในอันดับ  $\mathcal{O}(n^2)$  วินาที (ความชัน  $\approx 2$ )



รูปที่ 5.9: ค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  สำหรับ  $\delta$  ค่าต่างๆ

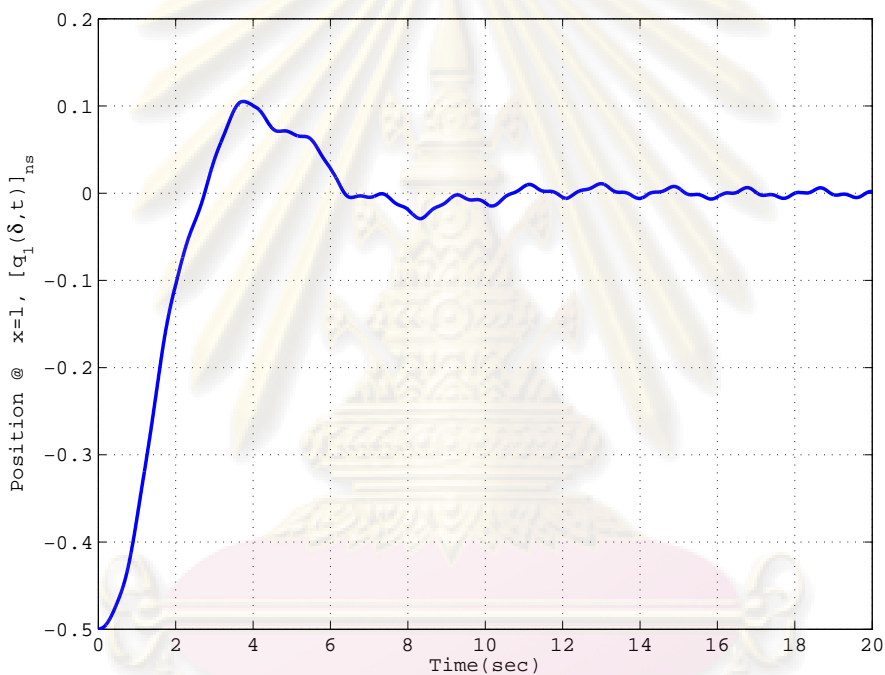


รูปที่ 5.10: เวลาที่ใช้ประมวลผลสำหรับ  $n$  ค่าต่างๆ



### 5.2.2 วิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย

วิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและระบบเชิงอนุพันธ์ย่อยผสมในหัวข้อ 4.4 ถูกนำมาใช้กับปัญหาดังกล่าวด้วยค่า  $\delta = 0.1$  ( $n_s = 10$ ),  $h = 0.1$ ,  $(MX, NX) = (9, 10)$  และ  $(MT, NT) = (3, 4)$  โดยสัญญาณ  $q(l, t)$  แสดงดังรูปที่ 5.11 ค่าผิดพลาดของสัญญาณ  $q(l, t)$  สำหรับ  $\delta$  ค่าต่างๆ แสดงดังรูปที่ 5.12 โดยค่าผิดพลาดที่ได้เกิดจากการเปรียบเทียบระหว่างสัญญาณ  $[q(\delta, t)]_k$  กับสัญญาณ  $[q(\delta, t)]_{n_s}$  ซึ่งจากรูปแสดงให้เห็นว่าเมื่อ  $\delta$  มีค่าลดลงค่าผิดพลาดในจำนวนผลตอบสนองเชิงเวลามีความแม่นยำมากขึ้นในช่วงเวลา  $t \rightarrow 0^+$  แต่ในช่วงเวลา  $t \rightarrow \infty$  ค่าผิดพลาดในจำนวนผลตอบสนองเชิงเวลามีค่าประมาณคงเดิม

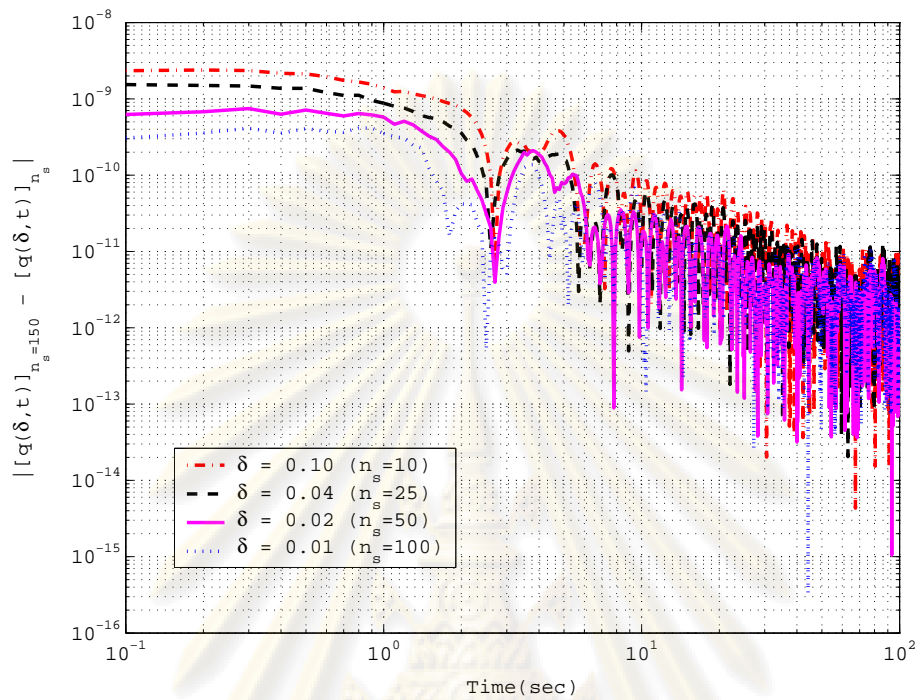


รูปที่ 5.11: ผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบที่  $x = l$

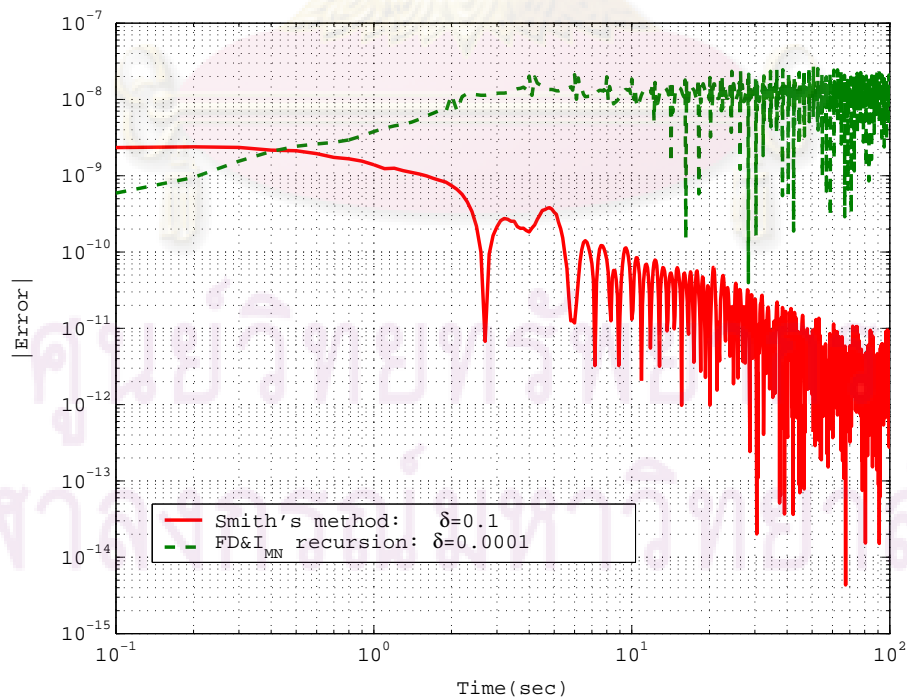
ค่าผิดพลาดสูงสุดของ  $q(l, t)$  และเวลาที่ใช้ในการประมวลผลที่  $\delta$  ค่าต่างๆ สำหรับวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.2.1 ที่  $h = 0.1$ ,  $(M, N) = (3, 4)$  และวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบเชิงอนุพันธ์สามัญและระบบเชิงอนุพันธ์ย่อยผสมที่  $h = 0.1$ ,  $(MX, NX) = (9, 10)$  และ  $(MT, NT) = (3, 4)$  ถูกแสดงดังตารางที่ 5.2 เมื่อจับเวลาในการประมวลผลด้วยฟังก์ชันภายในโปรแกรม MATLAB และเวลาสิ้นสุดเป็น 100 วินาที

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีทั้ง 2 ถูกเปรียบเทียบแสดงดังรูปที่ 5.13 โดยเส้นปะแสดงค่าคลาดเคลื่อนของวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.2.1 เมื่อ  $\delta = 0.0001$  ( $n = 9999$ ),  $h = 0.1$ ,  $(M, N) = (3, 4)$  และเส้นทึบแสดงค่าคลาดเคลื่อนของวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย เมื่อ

$\delta = 0.1 (n_s = 10)$ ,  $h = 0.1$ ,  $(MX, NX) = (9, 10)$  และ  $(MT, NT) = (3, 4)$



รูปที่ 5.12: ค่าผิดพลาดของสัญญาณ  $q(l, t)$  สำหรับ  $\delta = 0.1, 0.04, 0.02$  และ  $0.01$



รูปที่ 5.13: เปรียบเทียบค่าผิดพลาดของสัญญาณ  $q(l, t)$

ตารางที่ 5.2: แสดงเวลาที่ใช้ประมวลผลและค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$

$\delta$	CPU time(sec)		max error	
	FD& $I_{MN}$ recursion	Smith's method	FD& $I_{MN}$ recursion	Smith's method
0.25	0.005	0.062	$9.898 \times 10^{-2}$	$1.083 \times 10^{-7}$
0.20	0.005	0.094	$6.818 \times 10^{-2}$	$3.072 \times 10^{-9}$
0.10	0.016	0.188	$1.592 \times 10^{-2}$	$2.391 \times 10^{-9}$
0.04	0.032	0.516	$2.624 \times 10^{-3}$	$1.538 \times 10^{-9}$
0.025	0.047	0.938	$1.063 \times 10^{-3}$	$9.290 \times 10^{-10}$
0.020	0.066	1.266	$7.195 \times 10^{-4}$	$7.441 \times 10^{-10}$
0.010	0.094	4.125	$2.262 \times 10^{-4}$	$4.142 \times 10^{-10}$
0.0001	17.750	-	$1.723 \times 10^{-8}$	-

จากตารางที่ 5.2 แสดงให้เห็นว่าวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith เสนอไว้ก่อนหน้านี้นี้ มีความแม่นยำกว่าเมื่อเทียบกับวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.2.1 และแม่นยำด้วยค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  ประมาณ 9–10 ตัวเลขนัยสำคัญ ซึ่งวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 นั้น มีค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  อยู่ในอันดับ  $O(\delta^2)$  นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นว่าวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อย ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่าวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 เมื่อเปรียบเทียบด้วยค่าผิดพลาดสูงสุดที่ตัวเลขนัยสำคัญใกล้เคียงกัน

### 5.3 สรุป

จากตัวอย่างเชิงตัวเลขทั้ง 2 ตัวอย่าง เมื่อเปรียบเทียบค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  และเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผล สามารถสรุปได้ว่าวิธีเชิงตัวเลขสำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ Smith เสนอไว้ก่อนหน้านี้นี้ มีความแม่นยำกว่าวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษ นอกจากนี้ยังใช้เวลาในการประมวลผลไม่นาน เนื่องจาก  $n_s$  มีค่าเท่ากับ 10 (คือ  $\delta = 2$ ) ก็เพียงพอสำหรับการประมาณในกรณีที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร่อนดั่งสมการ (3.1) และมีค่าเท่ากับ 10 (คือ  $\delta = 0.1$ ) สำหรับกรณีที่กระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลื่นดั่งสมการ (3.6) จากการทดสอบความแม่นยำของวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษพบว่าค่าผิดพลาดสูงสุดของสัญญาณ  $q(l, t)$  อยู่ในอันดับ  $O(\delta^2)$  และใช้เวลาในการประมวลผลที่อยู่ในอันดับ  $O(\hat{n})$  เมื่อ  $\hat{n}$  คือมิติของระบบ ซึ่งน้อยกว่าเมื่อเทียบกับกรณีที่ใช้การแยกตัวประกอบ LU แบบทั่วๆ ไปที่ใช้เวลาในการประมวลผลอยู่ในอันดับ  $O(\hat{n}^2)$

## บทที่ 6

### บทสรุปและข้อเสนอแนะ

#### 6.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้พัฒนาอัลกอริทึมสำหรับคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่ประกอบด้วยตัวควบคุมเชิงมิติจำกัด และกระบวนการที่ถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนและสมการคลื่นดังสมการ (3.1) และ (3.6) ตามลำดับ ด้วยการประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่งของสมการความร้อนและสมการคลื่นด้วยผลต่างอันดับ ส่งผลให้ระบบควบคุมป้อนกลับที่ถูกแสดงแทนด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตขนาดใหญ่และเป็นเมทริกซ์มากเลขศูนย์ โดยจากการเปรียบเทียบเมื่อแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิตกับตัวแทนเชิงอนุพันธ์พบว่า การแทนระบบควบคุมป้อนกลับด้วยตัวแทนเชิงอนุพันธ์พีชคณิตสามารถรักษาความเป็นปกติหรือความเป็นศูนย์มากของเมทริกซ์ดั้งเดิมไว้ได้ และเนื่องจากสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  เป็นวิธีที่มีความแม่นยำและเป็นวิธีที่เหมาะสมสำหรับระบบที่แข็งแกร่ง ดังนั้นสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตจึงถูกนำมาใช้ในการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่ถูกแสดงแทนด้วยสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต โดยลักษณะโครงสร้างพิเศษที่พบอยู่ในสมการเชิงเส้นพีชคณิตของสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  ถูกนำมาใช้ประโยชน์ในการพัฒนาแบบแผนของการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษ ที่ส่งผลให้จำนวนการดำเนินการของการแยกตัวประกอบและการแทนค่าในแต่ละขั้นของการวนซ้ำอยู่ในอันดับ  $O(k)$  ของการดำเนินการ เมื่อ  $k$  คือมิติของระบบ

นอกจากนั้นในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทดสอบความแม่นยำและความน่าเชื่อถือของอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนาด้วยการเปรียบเทียบผลเฉลยกับวิธีเชิงตัวเลขของ Smith [15] สำหรับแก้ระบบผสมเชิงอนุพันธ์สามัญและเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เสนอไว้ก่อนหน้านี้ ซึ่งเป็นวิธีที่มีความแม่นยำสูงและใช้เวลาในการประมวลผลไม่นาน โดยจากการเปรียบเทียบพบว่าอัลกอริทึมที่ถูกพัฒนามีความแม่นยำด้วยค่าผิดพลาดสูงสุดที่อยู่ในอันดับ  $O(\delta^2)$  และมีรูปแบบของลำดับขั้นตอนในการคำนวณไม่ซับซ้อนทำให้ง่ายต่อการนำไปประยุกต์ซึ่งตรงกันข้ามกับวิธีที่ Smith เสนอไว้ที่มีรูปแบบของลำดับขั้นตอนในการคำนวณค่อนข้างจะซับซ้อนทำให้การพัฒนางานวิจัยต่อยอดหรือนำไปประยุกต์ใช้นั้นทำได้ยาก ตัวอย่างเช่น การนำไปประยุกต์ใช้กับระบบ 2 มิติ (two-dimensional system) เป็นต้น ดังนั้นวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิตร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษจึงถูกพัฒนาด้วยการสร้างคลังสำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูป mex-function เพื่อสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบระบบควบคุมแบบใช้คอมพิวเตอร์ช่วยต่อไปได้

## 6.2 ข้อเสนอแนะ

หลังจากที่ได้พัฒนาอัลกอริทึมที่สามารถให้ผลตอบที่เร็วและมีความแม่นยำสำหรับคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร่อนดังสมการ (3.1) และสมการคลื่นดังสมการ (3.6) แล้ว และได้นำอัลกอริทึมดังกล่าวไปพัฒนาสร้างคลังสำหรับโปรแกรม MATLAB ในรูป mex-function ทำให้คลังที่สร้างขึ้นมีประโยชน์อย่างมากในการนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงตัวเลข เนื่องจากประสิทธิภาพของกระบวนการในการออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงตัวเลขนั้น มีปัจจัยหลักที่ขึ้นอยู่กับการคำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบ ซึ่งต้องการการคำนวณที่ให้ผลเร็วและแม่นยำ นอกจากนี้ในการพัฒนาอัลกอริทึมนี้ยังสามารถต่อยอดงานวิจัยได้ดังนี้

1. สามารถพัฒนาในส่วนของความแม่นยำให้แม่นยำขึ้นได้ โดยการใช้วิธีผลต่างอันดับประมาณพจน์อนุพันธ์เทียบตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ด้วยค่าคลาดเคลื่อนที่อยู่ในอันดับ  $O(\delta^4)$  หรือ  $O(\delta^6)$  เป็นต้น
2. สามารถนำรูปแบบการคำนวณไปประยุกต์ใช้กับระบบป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคาน หรือนำไปประยุกต์กับระบบ 2 มิติ

## 6.3 ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

S. Arunsawatwong and K. Ngamsiritanakul. Fast Time-Response Algorithm for Heat Conduction Feedback Systems Using  $I_{MN}$  Approximants. in *Proceedings of the 5th Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications, and Information Technology Conference (ECTI-CON)*. (Krabi, Thailand). (2008): 605–608.

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## รายการอ้างอิง

- [1] R. J. Schwarz and B. Friedland. *Linear Systems*. New York: McGraw-Hill. 1965.
- [2] E. Polak and D. Q. Mayne. An algorithm for optimization problems with functional inequality constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-21. 2. (1976): 184–193.
- [3] E. Gonzaga, E. Polak, and R. Trahan. An improved algorithm for optimization problems with functional inequality constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-25. 1. (1980): 49–54.
- [4] E. J. Davison and I. J. Ferguson. The design of controllers for the multivariable robust servomechanism problem using parameter optimization methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*. AC-26. 1. (1981): 93–110.
- [5] V. Zakian and U. Al-Naib. Design of dynamical and control systems by the method of inequalities. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. 120. 11. (1973): 1421–1427.
- [6] V. Zakian. *Control Systems Design: A New Framework*. London: Springer-Verlag. 2005.
- [7] R. G. Rice and D. D. Do. *Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers*. New York: John Wiley & Sons. 1994.
- [8] V. Zakian. Properties of  $I_{MN}$  and  $J_{MN}$  approximants and applications to numerical inversion of Laplace transforms and initial-value problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 50. (1975): 191–222.
- [9] S. Arunsawatwong. Stability of Zakian  $I_{MN}$  recursions for linear delay differential equations. *BIT*. 38. (1998): 219–233.
- [10] V. Zakian. Numerical inversion of Laplace transform. *Electronics Letters*. 5. (1969): 120–121.
- [11] D. Kincaid and W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Pacific Grove: Brooks/Cole. 2002.
- [12] J. C. Butcher. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Chichester: John Wiley & Sons. 2003.
- [13] C. Gear. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. New Jersey: Prentice Hall. 1971.



- [14] V. Zakian and R. Coleman. Numerical inversion of rational Laplace transforms. *Electronics Letters*. 7. 26. (1971): 777–778.
- [15] G. K. Smith. *A Numerical Method for Solving Mixed Ordinary and Partial Differential Systems*. PhD thesis. UMIST. Manchester. UK. 1973.
- [16] H. Inooka. Improved time-response algorithm for the method of inequalities. *International Journal of Control*. 35. (1982): 127–138.
- [17] S. Arunsawatwong and K. Ngamsiritanakul. Fast time-response algorithm for heat conduction feedback systems using  $I_{MN}$  approximants. in *Proceedings of the 5th Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications, and Information Technology Conference (ECTI-CON)*. (Krabi, Thailand). (2008): 605–608.
- [18] V. Zakian. New formulation for the method of inequalities. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. 126. (1979): 579-584. (reprinted in *Systems and Control Encyclopedia*, 1987, Pergamon Press, vol. 5, pp. 3206–3215).
- [19] V. Zakian and G. K. Smith. Solution of distributed parameter problem using numerical inversion of Laplace transforms. *Electronics Letters*. 6. 20. (1970): 647–648.
- [20] O. Morgül. A dynamic control law for the wave equation. *Automatica*. 30. 11. (1994): 1785–1792.



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## ภาคผนวก ก

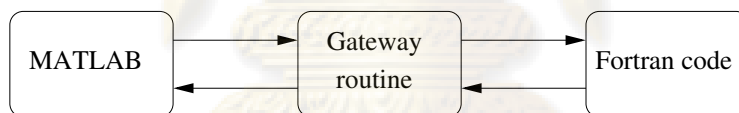
### คลังบนโปรแกรม MATLAB ในรูปของ mex-function

เนื่องจากกระบวนการวนซ้ำ (loops) ของโปรแกรม MATLAB มีความเร็วในการคำนวณไม่ดีเท่าภาษา FORTRAN ดังนั้น MATLAB จึงได้สร้างโปรแกรมที่เป็น mex-files ขึ้น เพื่อใช้สำหรับเชื่อมต่อโปรแกรมภายนอก โดยจะทำการประมวลผลบนโปรแกรม MATLAB ทำให้โปรแกรมที่สร้างขึ้นมีความเร็วสูงกว่าเดิมและสะดวกมากยิ่งขึ้นในการใช้งาน

#### การสร้าง mex-files

##### 1. ส่วนประกอบของ mex-files

- รหัสต้นทาง (source code) สำหรับ MATLAB ที่ประกอบด้วย routine ของการคำนวณ ซึ่งรหัส (code) ที่สร้างขึ้นนี้จะถูกเรียกรหัส routine (gateway routine) (routine gateway ทำหน้าที่เชื่อมต่อระหว่าง routine การคำนวณจริงกับ MATLAB)



รูปที่ ก.1: ลักษณะการเชื่อมต่อระหว่างโปรแกรม MATLAB กับ routine การคำนวณจริง

- routine gateway จะต้องมีจุดเข้า (entry point) ของ routine gateway ชื่อ mexFunction โดยเมื่อฟังก์ชัน mex-files เริ่มประมวลผล โปรแกรม MATLAB จะเรียกฟังก์ชันนี้ขึ้นมาใช้งาน โดย mexFunction จะประกอบด้วยสี่อินพุตที่มีรูปแบบดังนี้

```
subroutine mexFunction(nlhs, plhs, nrhs, prhs)  
integer plhs(*), prhw(*), nlhs, nrhs
```

##### 2. อินพุตและเอาต์พุตของ mex-files

ใน mex-files จะมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในการผ่านข้อมูลระหว่างอินพุตและเอาต์พุตคือ nrhs, nlhs, prhs และ plhs โดยพารามิเตอร์ prhs และ plhs จะเป็นเวกเตอร์ที่ชี้แต่ละค่าตัวแปรในอินพุตและเอาต์พุตตามลำดับ ส่วนพารามิเตอร์ nrhs และ nlhs จะเป็นจำนวนอินพุตและเอาต์พุตตามลำดับ ตัวอย่างเช่น

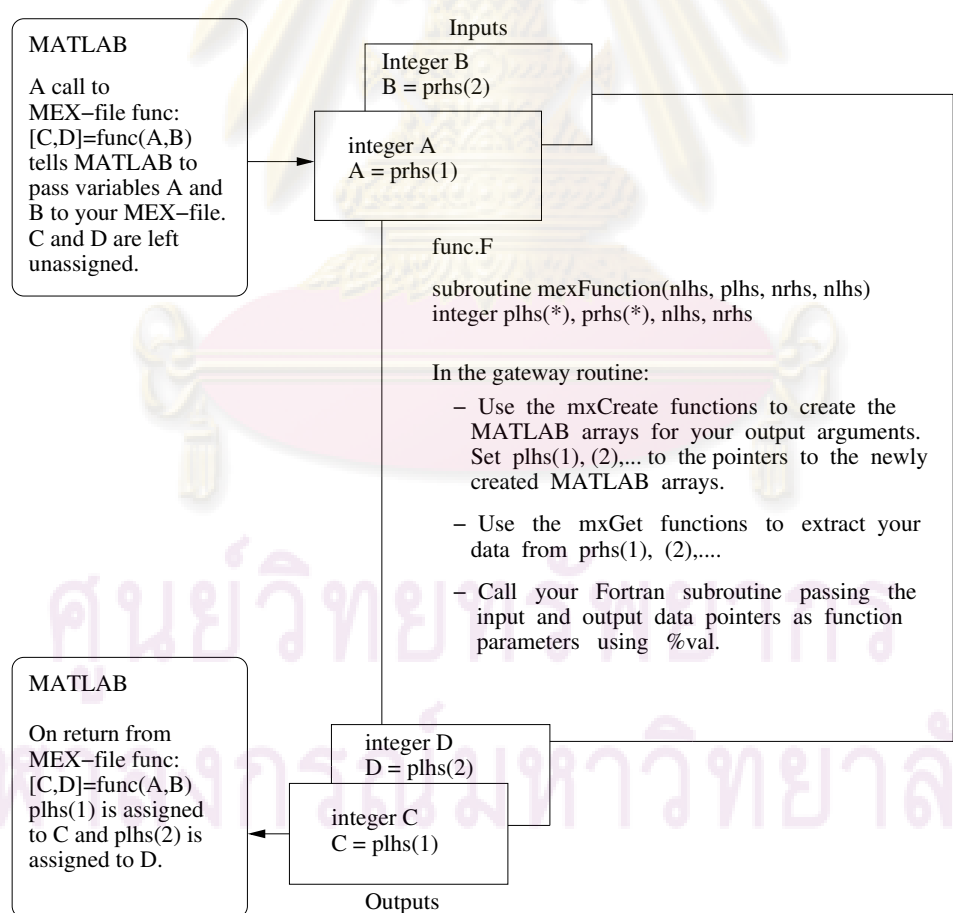
$$[C,D] = \text{func}(A,B)$$

นั่นคือ nlhs เท่ากับ 2 (คือ C และ D) และ nrhs เท่ากับ 2 (คือ A และ B) ส่วน plhs จะเป็นตัวชี้ (pointer) ของอาร์เรย์ข้อมูลเอาต์พุตซึ่งอยู่ทางซ้ายมือ (ตัวชี้ของ C และ D) และ prhs จะเป็นตัวชี้อาร์เรย์ข้อมูลอินพุตซึ่งอยู่ทางขวามือ (ตัวชี้ของ A และ B)

### 3. การรับส่งข้อมูล ฟังก์ชันที่ใช้ในการรับส่งข้อมูลของ Mex-files ประกอบด้วยฟังก์ชันต่างๆ ดังนี้

Fuction	Description
mxGetPr	Assign pointers to the various parameters
mxCopyPtrToReal8	Copy right hand arguments to local arrays or variables
mxCreateDoubleMatrix	Create a matrix for return argument
mxCopyReal8ToPtr	Copy output which is stored in local array to matrix output

และสำหรับรูทีนเกิดเวทีในการรับส่งข้อมูลสามารถอธิบายด้วยแผนภาพดังนี้



รูปที่ ก.2: ลักษณะการรับส่งข้อมูลระหว่างโปรแกรม MATLAB กับรูทีนการคำนวณจริง

## การใช้งานโปรแกรม Mex-files ที่สร้างขึ้น

การนำ Mex-files ที่สร้างขึ้นไปใช้ในการประมวลผลนั้น จะต้องทำการแปลโปรแกรม (compile) ก่อน โดยเมื่อ Mex-files ถูกแปลโปรแกรมแล้วก็จะสามารถประมวลผลได้ภายในโปรแกรม MATLAB เช่นเดียวกับ M-file และฟังก์ชันภายใน (built-in function) ทั่วไป ซึ่งโปรแกรมที่เป็น M-file จะมีรูปแบบแฟ้มข้อมูล (file) เป็น .m แต่ Mex-files จะมีรูปแบบแฟ้มข้อมูลขึ้นอยู่กับแพลตฟอร์ม (platform) ตัวอย่างเช่น บนแพลตฟอร์ม Windows จะมีรูปแบบแฟ้มข้อมูลเป็น .dll (สำหรับโปรแกรม MATLAB 6.5) และเป็น .mex32 (สำหรับโปรแกรม MATLAB 7.0 ขึ้นไป)

## การใช้งานโปรแกรม heat.dll

ในหัวข้อนี้จะอธิบายถึงความหมายของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้ในโปรแกรม heat.dll ที่สร้างขึ้น จากขั้นตอนการคำนวณของวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.1.2 เพื่อใช้คำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร้อนดังสมการ (3.1) โดยรายละเอียดความหมายของพารามิเตอร์ต่างๆ มีดังนี้

MATLAB CALL:  $[T, Y] = \text{heat} (\kappa, \varphi, l, \text{time}, nt, nx, mc, ac, bc, dc)$

- เมื่อ  $\kappa$  และ  $\varphi$  คือค่าคงตัวสเกลาร์ที่ถูกกำหนดจากคุณสมบัติทางกายภาพดังสมการ (3.1)
- $l$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนความยาวของ  $x$
- $\text{time}$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนเวลาสิ้นสุด
- $nx$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนมิติของกระบวนการ - 1
- $nt$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนมิติของเวลา
- $mc$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนมิติของตัวควบคุม
- $ac$  คือเวกเตอร์แถว  $[ac_1, ac_2, \dots, ac_{mc}]$  ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$
- $bc$  คือเวกเตอร์แถว  $[bc_1, bc_2, \dots, bc_{mc}]$  ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$
- $dc$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$

$$\text{โดยที่ } G_c(s) = dc + \frac{bc_1 s^{mc-1} + bc_2 s^{mc-2} + \dots + bc_{mc-1} s + bc_{mc}}{s^m + ac_1 s^{mc-1} + \dots + ac_{mc-1} s + ac_m}$$

$T$  คือเวกเตอร์เอาต์พุต  $[t_0, t_1, \dots, t_{nt}]$

$Y$  คือเวกเตอร์เอาต์พุต  $[q(l, t_0), q(l, t_1), \dots, q(l, t_{nt})]$

## การใช้งานโปรแกรม heatSmith.dll

ในหัวข้อนี้จะอธิบายถึงความหมายของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้ในโปรแกรม heatSmith.dll ที่สร้างขึ้น จากขั้นตอนการคำนวณของวิธีเชิงตัวเลขสำหรับระบบเชิงอนุพันธ์สามัญและระบบเชิงอนุพันธ์ย่อยผสมในหัวข้อ 4.3 เพื่อใช้คำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการความร่อนดังสมการ (3.6) โดยรายละเอียดความหมายของพารามิเตอร์ต่างๆ มีดังนี้

MATLAB CALL:

$[T, Y] = \text{heatSmith} (\kappa, \varphi, l, \text{time}, nt, ns, ac, bc, dc)$

เมื่อ  $\kappa$  และ  $\varphi$  คือค่าคงตัวสเกลาร์ที่ถูกกำหนดจากคุณสมบัติทางกายภาพดังสมการ (3.1)

$l$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนความยาวของ  $x$

$\text{time}$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนเวลาสิ้นสุด

$ns$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนจำนวนของการแบ่ง  $x$

$nt$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนมิติของเวลา

$ac$  คือเวกเตอร์แถว  $[ac_1, ac_2, \dots, ac_{mc}]$  ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$

$bc$  คือเวกเตอร์แถว  $[bc_1, bc_2, \dots, bc_{mc}]$  ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$

$dc$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$

$$\text{โดยที่ } G_c(s) = dc + \frac{bc_1 s^{mc-1} + bc_2 s^{mc-2} + \dots + bc_{mc-1} s + bc_{mc}}{s^m + ac_1 s^{m-1} + \dots + ac_{m-1} s + ac_m}$$

$T$  คือเวกเตอร์เอาต์พุต  $[t_0, t_1, \dots, t_{nt}]$

$Y$  คือเวกเตอร์เอาต์พุต  $[q(\delta, t_0)]_{ns}, [q(\delta, t_1)]_{ns}, \dots, [q(\delta, t_{nt})]_{ns}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## การใช้งานโปรแกรม wave.dll

ในหัวข้อนี้จะอธิบายถึงความหมายของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้ในโปรแกรม wave.dll ที่สร้างขึ้น จากขั้นตอนการคำนวณของวิธีผลต่างอันดับและสูตรวนซ้ำ  $I_{MN}$  สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พีชคณิต ร่วมกับการแยกตัวประกอบ LU แบบพิเศษในหัวข้อ 3.2.1 เพื่อใช้คำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการถูกอธิบายด้วยสมการคลิ่นดังสมการ (3.6) โดยรายละเอียดความหมายของพารามิเตอร์ต่างๆ มีดังนี้

MATLAB CALL:

$[T, Y] = \text{wave} (\kappa, \varphi, l, \text{time}, nt, nx, mc, ac, bc, dc)$

- เมื่อ  $\kappa$  และ  $\varphi$  คือค่าคงตัวสเกลาร์ที่ถูกกำหนดจากคุณสมบัติทางกายภาพดังสมการ (3.1)
- $l$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนความยาวของ  $x$
- $\text{time}$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนเวลาสิ้นสุด
- $nx$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนมิติของกระบวนการ - 1
- $nt$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนมิติของเวลา
- $mc$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนมิติของตัวควบคุม
- $ac$  คือเวกเตอร์แถว  $[ac_1, ac_2, \dots, ac_{mc}]$  ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$
- $bc$  คือเวกเตอร์แถว  $[bc_1, bc_2, \dots, bc_{mc}]$  ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$
- $dc$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$

$$\text{โดยที่ } G_c(s) = dc + \frac{bc_1 s^{mc-1} + bc_2 s^{mc-2} + \dots + bc_{mc-1} s + bc_{mc}}{s^m + ac_1 s^{mc-1} + \dots + ac_{mc-1} s + ac_m}$$

- $T$  คือเวกเตอร์เอาต์พุต  $[t_0, t_1, \dots, t_{nt}]$
- $Y$  คือเวกเตอร์เอาต์พุต  $[q(l, t_0), q(l, t_1), \dots, q(l, t_{nt})]$

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## การใช้งานโปรแกรม waveSmith.dll

ในหัวข้อนี้จะอธิบายถึงความหมายของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ใช้ในโปรแกรม waveSmith.dll ที่สร้างขึ้น จากขั้นตอนการคำนวณของวิธีเชิงตัวเลขสำหรับระบบเชิงอนุพันธ์สามัญและระบบเชิงอนุพันธ์ย่อย ผสมในหัวข้อ 4.4 เพื่อใช้คำนวณผลตอบสนองเชิงเวลาของระบบควบคุมป้อนกลับที่มีกระบวนการ ถูกอธิบายด้วยสมการคลื่นดังสมการ (3.6) โดยรายละเอียดความหมายของพารามิเตอร์ต่างๆ มีดังนี้

MATLAB CALL:

$[T, Y] = \text{waveSmith} (\kappa, \varphi, l, \text{time}, nt, nx, mc, ac, bc, dc)$

เมื่อ  $\kappa$  และ  $\varphi$  คือค่าคงตัวสเกลาร์ที่ถูกกำหนดจากคุณสมบัติทางกายภาพดังสมการ (3.6)

$l$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนความยาวของ  $x$

$\text{time}$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนเวลาสิ้นสุด

$ns$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนจำนวนของการแบ่ง  $x$

$nt$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนมิติของเวลา

$ac$  คือเวกเตอร์แถว  $[ac_1, ac_2, \dots, ac_{mc}]$  ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$

$bc$  คือเวกเตอร์แถว  $[bc_1, bc_2, \dots, bc_{mc}]$  ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$

$dc$  คือสเกลาร์ที่แสดงแทนสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน  $G_c(s)$

$$\text{โดยที่ } G_c(s) = dc + \frac{bc_1 s^{mc-1} + bc_2 s^{mc-2} + \dots + bc_{mc-1} s + bc_{mc}}{s^m + ac_1 s^{mc-1} + \dots + ac_{mc-1} s + ac_m}$$

$T$  คือเวกเตอร์เอาท์พุต  $[t_0, t_1, \dots, t_{nt}]$

$Y$  คือเวกเตอร์เอาท์พุต  $[q(\delta, t_0)]_{ns}, [q(\delta, t_1)]_{ns}, \dots, [q(\delta, t_{nt})]_{ns}$

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวกรรณก งามสิริธนากุล เกิดเมื่อวันที่ 1 ตุลาคม พ.ศ. 2527 จังหวัดกรุงเทพมหานคร เป็นบุตรของนายพิชัย งามสิริธนากุล และนางวนิดา แซ่ใจ้ว สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องครักษ์ เมื่อปีการศึกษา 2548 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ในปีการศึกษาถัดมา ณ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม



คุณย์วิทย์ทรัพย์ากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย