บทที่ 2

ทฤษฎี

<u>วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์</u>

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ (Huebner and Thornton,1982) เป็นระเบียบวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximated solution) ซึ่งมีลำดับขั้นตอนดังนี้

ก. หาสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้นที่เหมาะสมกับปัญหา,เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

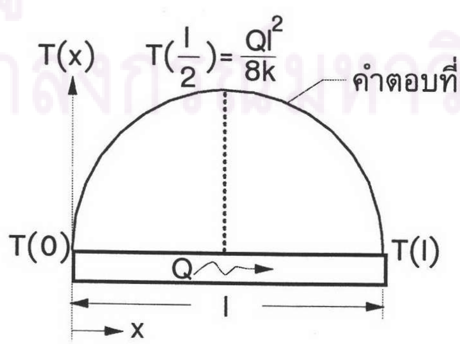
ข. แยกแยะผลิตภัณฑ์เป็นชิ้นส่วนเล็ก ๆหรือที่เรียกว่าเอลิเมนต์ให้มีจำนวนมาก

ค. กำหนดลักษณะผลลัพธ์ในชิ้นส่วนเล็ก ๆนั้นให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันโดยประมาณอย่างง่าย ๆ

ง. ทำการพิจารณาทีละเอลิเมนต์โดยการแทนฟังก์ชันนี้ในสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้นและอาศัยคณิตศาสตร์ชั้นสูง (Kreyszig,1993) ช่วยจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์จนเป็นสมการสำหรับเอลิเมนต์ (Element equation) ขึ้นมา

จ. รวมสมการต่าง ๆเข้าด้วยกัน (Assemblage) เป็นสมการระบบรวม (System of equations)

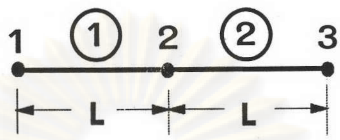
เช่น กรณีการแลกเปลี่ยนความร้อนที่เข้าสู่สภาวะสมดุลทางความร้อนใน 1 มิติ ของแท่งทรงกระบอกตันที่สามารถผลิตความร้อนได้เองตลอดเวลา (Internal heat generation,Q) และต้องการคำนวณอุณหภูมิที่ตำแหน่งตรงกลาง



ปัญหาเช่นนี้จะมีสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้นที่เหมาะสม (Incropera and DeWitt,1985) คือ

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = Q$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต คือ T(0)=T(l)=0
จากนั้นทำการแยกแยะผลิตภัณฑ์ออกเป็น 2 เอลิเมนต์โดยแต่ละเอลิเมนต์ยาวเท่ากับ L ดังรูป



และกำหนดผลลัพธ์ที่ต้องการทราบค่า(อุณหภูมิ,T(x))ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโดยประมาณอย่างง่ายๆคือ

$$T(x) = N_1T_1 + N_2T_2$$

โดย

$$N_1 = 1-\frac{x}{L}$$

$$N_2 = \frac{x}{L}$$

แทนฟังก์ชันดังกล่าวลงในสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น จากนั้นทำการแก้สมการและจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

สมการสำหรับเอลิเมนต์ที่ 1

$$\frac{k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k\dfrac{dT(0)}{dx} \\ k\dfrac{dT(L)}{dx} \end{Bmatrix} + QL\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

สมการสำหรับเอลิเมนต์ที่ 2

$$\frac{k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k\dfrac{dT(0)}{dx} \\ k\dfrac{dT(L)}{dx} \end{Bmatrix} + QL\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

เมื่อรวมสมการสำหรับเอลิเมนต์ทั้งหมดให้เป็นสมการระบบรวม จะได้ดังนี้

$$\frac{k}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k\dfrac{dT(0)}{dx} \\ 0 \\ k\dfrac{dT(l)}{dx} \end{Bmatrix} + QL\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 1 \\ \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

หรือ $$\left[K_c\right]\left\{T\right\} = \left\{Q_c\right\} + \left\{Q_Q\right\}$$

จากนั้นทำการพิจารณาเงื่อนไขต่างๆพร้อมกับการแก้สมการระบบรวมแล้วพบว่า

$$T_2 = \frac{QL^2}{2K} = \frac{Ql^2}{8k}$$

ซึ่งสำหรับปัญหานี้คำตอบที่ได้จะตรงกับคำตอบที่แท้จริง

<u>การแลกเปลี่ยนความร้อนที่ขึ้นกับเวลา</u>

1. สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น

สมการการถ่ายเทความร้อนที่ขึ้นกับเวลาของของแข็งใน 3 มิติ มีสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น (Incropera and DeWitt,1985) ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{x_i}\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + Q = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.1}$$

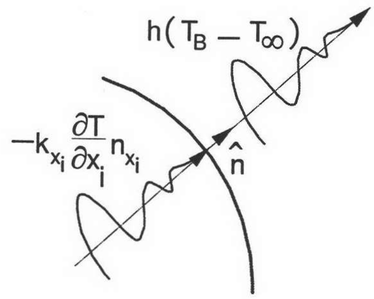
โดย ρ คือความหนาแน่นเชิงมวล , c คือความร้อนจำเพาะ , k_{x_i} คือเทนเซอร์ (Tensor) ของค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน , Q คือความร้อนที่ผลิตได้เอง , T คืออุณหภูมิที่แปรผันกับระยะในแกน x_i และเวลา t , x_i คือ ระยะในแนวแกนหลัก เช่น x,y,z ในระนาบคาร์ทีเซียนเป็นต้น

การแก้สมการหาค่าตัวแปรอุณหภูมิจำเป็นต้องระบุเงื่อนไขต่างๆไปพร้อมๆกันเงื่อนไขต่างๆดังกล่าว ได้แก่ เงื่อนไขเริ่มต้น ก็คือ

$$T(x_i, 0) = T_0(x_i) \tag{2.2}$$

และเงื่อนไขขอบเขตบนพื้นผิวโครงสร้างที่อาจประกอบด้วย

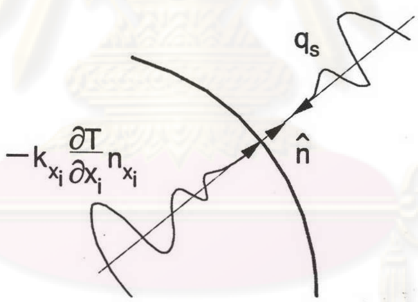
ก. ผิวโครงสร้างมีการพาความร้อนสู่อุณหภูมิรอบข้าง



$$-k_{x_i}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_{x_i} = h\left(T_B - T_\infty\right) \tag{2.3}$$

โดยตัวห้อย B หมายถึง บริเวณพื้นผิวโครงสร้าง (Surface) , n_i คือองค์ประกอบของเวคเตอร์ในแนวตั้งฉากกับผิว, h คือ ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน และ T_∞ คือ อุณหภูมิเฉลี่ยภายนอก

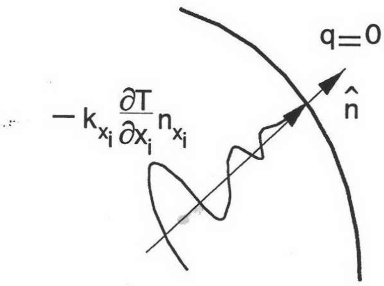
ข. ความร้อนจากภายนอกตกกระทบผิวโครงสร้าง



$$k_{x_i}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_{x_i} = q_s \tag{2.4}$$

โดย q_s คือ ความร้อนที่เกิดจากภายนอก

ค. พื้นผิวโครงสร้างถูกหุ้มฉนวนไว้



$$k_{x_i}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_{x_i} = 0 \tag{2.5}$$

2. สมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์

ผลลัพธ์ที่ต้องการทราบคือ อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งสามารถแทนอุณหภูมิด้วยฟังก์ชันโดยประมาณอย่างง่าย ๆ ได้ดังนี้

$$T = \sum_{i=1}^{m} N_i T_i$$

$$= \lfloor N \rfloor_{1xm} \{T(t)\}_{mx1} \tag{2.6}$$

โดย m เป็นจำนวนจุดต่อในแต่ละเอลิเมนต์, $\lfloor N \rfloor$ คือค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions) ในรูปเมตริกซ์ขนาด 1xm และ $\{T(t)\}$ เป็นค่าอุณหภูมิที่เวลาใดเวลาหนึ่งในรูปเมตริกซ์ขนาด mx1 เช่น กรณีเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (Tetrahedron) มีค่าอุณหภูมิอยู่ในรูปฟังก์ชันโดยประมาณดังนี้

$$T = \sum_{i=1}^{4} N_i T_i = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4$$

$$= \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

จากนั้นนำวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residual , MWR) (Huebner and Thornton,1982) มาใช้ กล่าวคือนำสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ 2.1 มาคูณด้วยฟังก์ชั่นน้ำหนัก (weighting function) แบบบับโนพกาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) และ

ทำการอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ ซึ่งจะได้สมการออกมาดังนี้

$$\int_{\Omega^{(e)}} N(\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}(k_{x_i}\frac{\partial T}{\partial x_i})-Q)d\Omega \quad = \quad 0 \qquad (2.8)$$

เมื่อนำสมการ 2.7 แทนลงในสมการ 2.8 จะได้รูปแบบสมการออกมาใหม่ ดังนี้

เทอมที่ 1 เทอมที่ 2 เทอมที่ 3

$$\int_{\Omega^{(e)}}\left\{N\right\}\rho c\left\lfloor N\right\rfloor\left\{\dot{T}\right\}d\Omega-\int_{\Omega^{(e)}}\left\{N\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{x_i}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor\left\{T\right\}\right)d\Omega-\int_{\Omega^{(e)}}\left\{N\right\}Q\,d\Omega$$

$$= \quad 0 \qquad (2.9)$$

จากนั้นทำการอินทิเกรทบายพาทในเทอมที่ 2 ของสมการ 2.9 และพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น, เงื่อนไขขอบเขตที่พื้นผิวโครงสร้างไปพร้อมๆกัน แล้วทำการจัดรูปแบบใหม่ได้ว่า

$$[C]\left\{\dot{T}\right\}+[K]\left\{T\right\} \quad = \quad \left\{R\right\} \qquad (2.10)$$

ซึ่ง

$$\left[C\right] = \int_{\Omega^{(e)}}\left\{N\right\}\rho c\left\lfloor N\right\rfloor d\Omega \qquad (2.11)$$

$$\left[K\right] = \int_{\Omega^{(e)}}\left\{\frac{\partial N}{\partial x_i}\right\}\left(k_{x_i}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor\right)d\Omega+\int_{\Gamma^{(e)}}\left\{N\right\}h\left\lfloor N\right\rfloor d\Gamma \qquad (2.12)$$

$$\left\{R\right\} = \int_{\Gamma^{(e)}}\left\{N\right\}\left(k_{x_i}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_i\right)d\Gamma+\int_{\Gamma^{(e)}}\left\{N\right\}hT_{\infty}\,d\Gamma+\int_{\Omega^{(e)}}\left\{N\right\}Q\,d\Omega\,+$$

$$\int_{\Gamma^{(e)}}\left\{N\right\}q_s\,d\Gamma \qquad (2.13)$$

โดย k คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน , h คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน ,T_{∞} คือ อุณหภูมิเฉลี่ยภายนอก , ตัวห้อย $\Gamma^{(e)}$ หมายถึง การพิจารณาที่ขอบเขตของแต่ละเอลิเมนต์ , n_i คือ องค์ประกอบเวคเตอร์ในแนวตั้งฉากกับผิว

สำหรับการพิจารณาอุณหภูมิที่ขึ้นกับเวลา หากทำการแบ่งช่วงเวลาให้เล็กที่สุดจะ

สามารถกำหนดให้อุณหภูมิกับเวลามีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงได้ (ปราโมทย์ เดชะอำไพ , 2537) ซึ่งมีลักษณะความสัมพันธ์ต่างๆดังนี้

$$\left\{\dot{T}_\theta\right\} = \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \qquad (2.14)$$

$$\left\{T_\theta\right\} \cong (1-\theta)\left\{T\right\}_n + \theta\{T\}_{n+1} \qquad (2.15)$$

$$\left\{R_\theta\right\} \cong (1-\theta)\left\{R\right\}_n + \theta\{R\}_{n+1} \qquad (2.16)$$

$$t_\theta = t_n + \theta\Delta t \qquad (2.17)$$

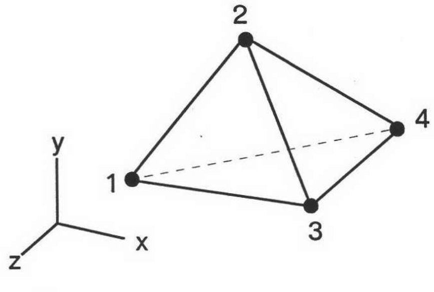
โดย θ คือค่าคงที่ซึ่งอยู่ในช่วงตั้งแต่ 0 ถึง 1, Δt เป็นช่วงของเวลา , T_n เป็นอุณหภูมิที่ช่วงเวลา n , T_{n+1} เป็นอุณหภูมิที่ช่วงเวลา n + 1 และเมื่อนำความสัมพันธ์เหล่านี้แทนลงในสมการ 2.10 จะได้ว่า

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\left[C\right]+\theta\left[K\right]\right)\left\{T\right\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}\left[C\right]-(1-\theta)\left[K\right]\right)\left\{T\right\}_n + (1-\theta)\left\{R\right\}_n + \theta\{R\}_{n+1} \qquad (2.18)$$

3. ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

สำหรับการพิจารณาอุณหภูมิที่ขึ้นกับเวลานี้จะใช้วิธีของ Euler ซึ่งกำหนดไว้ว่า $\theta = 0$ และ $\{R\}$ ที่ช่วงเวลา n และ n+1 มีค่าเท่ากัน ดังนั้นสมการ 2.18 จะลดรูปเหลือ

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\left[C\right]\right)\left\{T\right\}_{n+1} = \left(\frac{1}{\Delta t}\left[C\right]-\left[K\right]\right)\left\{T\right\}_n + \left\{R\right\} \qquad (2.19)$$



รูปที่ 2.1 แสดงลักษณะของเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า

จากสมการ 2.19 สามารถแยกแยะเมตริกซ์ในแต่ละเทอมสำหรับเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าดังแสดงในรูป 2.1 ได้ดังนี้

$$\left[C\right] = \frac{\rho c V}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$\left[K\right] = \left[K_c\right] + \left[K_h\right]$$

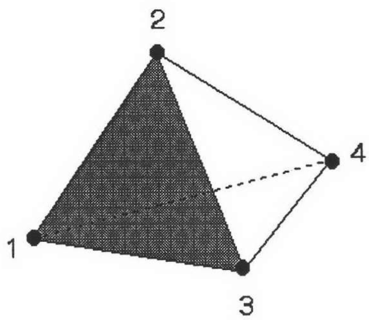
$$K_{c_{ij}} = \frac{k}{36V}(b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j) \qquad i,j=1,2,3,4 \tag{2.21}$$

$$V = \text{ปริมาตรของเอลิเมนต์} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{2.22}$$

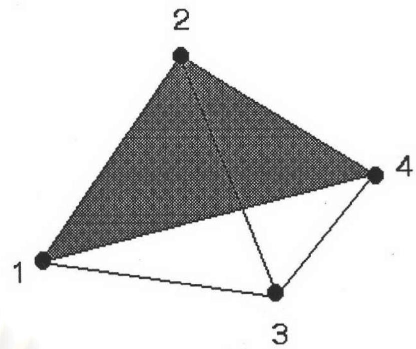
$$a_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad c_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$b_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad d_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.23}$$

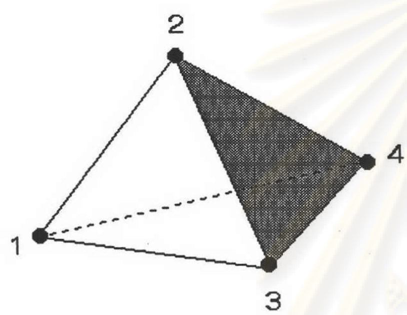
และค่าคงที่ตัวอื่นๆ a_i, b_i, c_i, d_i เมื่อ i=2,3,4 ก็มีลักษณะเหมือนกับสมการ 2.23 ซึ่งสามารถหาออกมาได้โดยวิธีการวนสลับเปลี่ยนตัวเลข (cyclic permutation) (Rao,1989)



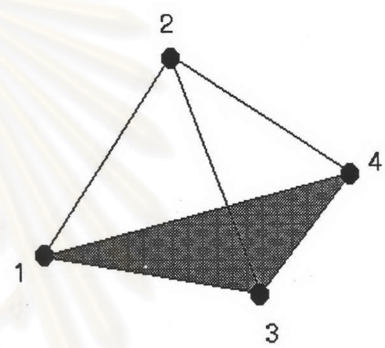
(ก) ด้านที่ 1 ของเอลิเมนต์



(ข) ด้านที่ 2 ของเอลิเมนต์



(ค) ด้านที่ 3 ของเอลิเมนต์



(ง) ด้านที่ 4 ของเอลิเมนต์

รูปที่ 2.2 แสดงตำแหน่งด้านทั้งสี่ของเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า

กรณีที่เกิดการถ่ายเทความร้อนบนด้านที่ 1 ของเอลิเมนต์ พบว่า

$$\left[K_h\right] = \frac{h\Delta_{123}}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Δ_{123} คือ พื้นที่ผิวของด้านที่ประกอบด้วยจุดต่อ 1-2-3 ดังแสดงในรูป 2.2 ก

$$\left\{R\right\} = \left\{Q_c\right\} + \left\{Q_h\right\} + \left\{Q_{q_s}\right\} + \left\{Q_Q\right\} \tag{2.25}$$

$$\left\{Q_h\right\} = \frac{hT_{\infty}\Delta_{123}}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\end{Bmatrix} \qquad (2.26)$$

$$\left\{Q_{q_s}\right\} = \frac{q_s\Delta_{123}}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\end{Bmatrix} \qquad (2.27)$$

$$\left\{Q_Q\right\} = \frac{QV}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix} \qquad (2.28)$$

<u>ความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิ</u>

1. สมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น

สมการความสมดุลของของแข็ง (Equillibrium equation) (Timoshenko and Goodier,1951) ที่มีความยืดหยุ่นใน 3 มิติ มีสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้นอยู่ในรูป

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \qquad (2.29)$$

โดย σ_{ij} คือ เทนเซอร์ความเค้น (Stress tensor) สมการนี้จะถูกพิจารณาไปพร้อม ๆกับการพิจารณา: (1) การใช้เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ที่เหมาะสมซึ่งอาจประกอบด้วยการกำหนดค่าเคลื่อนที่ (Specified displacement component)หรือแรงที่กระทำบนพื้นผิว (Surface tractions) , (2) การใช้ความสัมพันธ์ค่าความเครียดกับค่าการเคลื่อนที่ (Strain-displacement relation) และ (3)การใช้กฎทั่วไปของฮุค (Generalized hook's Law) (Timoshenko and Goodier,1951) เช่น

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e + 2G\varepsilon_{ij} - (3\lambda+2G)\delta_{ij}\alpha(T-T_o) \tag{2.30}$$

โดย T_0 คือ อุณหภูมิอ้างอิงที่ความเค้นเป็นศูนย์ , α คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน , ε_{ij} คือค่าความเครียด , δ_{ij} แทน Kronecker delta ซึ่ง

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } i=j \\ 0 & \text{สำหรับ } i\neq j \end{cases} \tag{2.31}$$

λ และ G (Timoshenko and Goodier,1951) คือ ค่าคงที่ Lame ซึ่ง

$$\lambda = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{2.32}$$

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

υ คือ อัตราส่วนของปัวส์ซง (Poisson Ratio) , E คือ ค่าคงที่ของการยืดหยุ่น (Modulus of elasticity)

2. สมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์

ค่าการเคลื่อนที่(displacement)สามารถจัดอยู่ในรูปฟังก์ชันโดยประมาณอย่างง่ายๆได้ดังนี้

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} N_i u_i$$

$$= \lfloor N \rfloor_{1xm} \{\delta\}_{mx1} \tag{2.33}$$

โดย δ คือ ค่าการเคลื่อนที่ (displacement) เช่น u,v,w เป็นต้น

จากทฤษฎีพลังงานศักดิ์รวม (Total potential energy) พบว่า

$$\pi = U + V \tag{2.34}$$

U คือ พลังงานความเครียด (Strain energy)

V คือ พลังงานศักดิ์เนื่องจากแรงกระทำ (Potential energy due to applied force)

สำหรับพลังงานความเครียด

$$U = \int_V \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{oij})\sigma_{ij}\,dV$$

$$= \int_V \frac{1}{2}(\lfloor \varepsilon_{ij} \rfloor - \lfloor \varepsilon_o \rfloor)\{\sigma\}dV \tag{2.35}$$

จากสมการความสัมพันธ์ความเค้นกับความเครียด (Stress-strain relation)

$$\sigma_{ij} = E(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{oij}) \tag{2.36}$$

สมการ 2.36 สามารถจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon_{ij}\} - \{\varepsilon_{oij}\}) \tag{2.37}$$

โดย $[D]$ คือ เมตริกซ์ความแข็งของวัสดุ

$\{\varepsilon_{ij}\}$ คือ เมตริกซ์ความเครียด

$\{\varepsilon_{oij}\}$ คือ เมตรกซ์ความเครียดชั้นต้น (prestrain)

เมื่อนำสมการ 2.37 แทนลงในสมการ 2.35 จะได้ว่า

$$U = \int_V \frac{1}{2}(\lfloor \varepsilon_{ij} \rfloor - \lfloor \varepsilon_{oij} \rfloor)[D](\{\varepsilon_{ij}\} - \{\varepsilon_{oij}\})dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \lfloor \varepsilon \rfloor [D]\{\varepsilon\}dV - \int_V \lfloor \varepsilon \rfloor [D]\{\varepsilon_o\}dV + \frac{1}{2}\int_V \lfloor \varepsilon_o \rfloor [D]\{\varepsilon_o\}dV$$

(2.38)

สำหรับพลังงานศักดิ์เนื่องจากแรงกระทำพบว่า

$$V = -\text{work}$$

กรณีพลังงานศักดิ์ที่เกิดจากแรงจะมีค่าดังนี้

$$V = -\int_V (F_x u + F_y v + F_z w)\,dV$$

$$= -\int_V \lfloor u \quad v \quad w \rfloor \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} dV$$

$$= -\int_V \lfloor \bar{\delta} \rfloor \{F\}\,dV \tag{2.39}$$

ส่วนกรณีพลังงานศักดิ์เกิดจากแรงดันหรือแรงดึงที่ผิวโครงสร้างในแนวตั้งฉาก

$$V = -\int_s (S_x u + S_y v + S_z w)\,dS$$

$$= -\int_s \lfloor \bar{\delta} \rfloor \{S\}\,dS \tag{2.40}$$

จากนั้นนำสมการ 2.38 และ 2.40 แทนลงในสมการ 2.34 จะได้ว่า

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V \lfloor \varepsilon \rfloor [D] \{\varepsilon\}\,dV - \int_V \lfloor \varepsilon \rfloor [D] \{\varepsilon_o\}\,dV + \int_V \lfloor \varepsilon_o \rfloor [D] \{\varepsilon_o\}\,dV - \int_V \lfloor \bar{\delta} \rfloor \{F\}\,dV - \int_s \lfloor \bar{\delta} \rfloor \{S\}\,dS \tag{2.41}$$

และจากสมการความสัมพันธ์ความเครียดกับค่าการเคลื่อนที่ (Strain-displacement relation)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{2.42}$$

สมการ 2.42 สามารถจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ดังนี้

$$\left\{ \varepsilon_{ij} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ u_{i,j} - u_{j,i} \right\} \tag{2.43}$$

เมื่อนำสมการ 2.33 แทนลงในสมการ 2.43 และจัดรูปใหม่เป็น

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left[B \right]\left\{ \delta \right\} \tag{2.44}$$

โดย [B] คือ เมตริกซ์ของค่าความเครียดกับค่าการเคลื่อนที่
จากนั้นนำสมการ 2.33 และ 2.44 แทนลงในสมการ 2.41 แล้วจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\pi = \frac{1}{2}\lfloor \delta \rfloor \left[K \right]\left\{ \delta \right\} - \lfloor \delta \rfloor \left\{ F_o \right\} + \frac{1}{2}\int_v \lfloor \varepsilon_o \rfloor \left[D \right]\left\{ \varepsilon_o \right\} dV$$

$$- \lfloor \delta \rfloor \left\{ F_B \right\} - \lfloor \delta \rfloor \left\{ F_T \right\} \tag{2.45}$$

โดย

$$\left[K \right] = \int_v \left[B \right]^T \left[D \right]\left[B \right] dV \tag{2.46}$$

$$\left\{ F_o \right\} = \int_v \left[B \right]^T \left[D \right]\left\{ \varepsilon_o \right\} dV \tag{2.47}$$

$$\left\{ F_B \right\} = \int_v \left[N \right]^T \left\{ F \right\} dV \tag{2.48}$$

$$\left\{ F_T \right\} = \int_s \left[N \right]^T \left\{ S \right\} ds \tag{2.49}$$

จากทฤษฎี Principle of minimum potential energy

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta_{ij}} = 0$$

$$= \left[K\right]\left\{\delta\right\} - \left\{F_o\right\} - \left\{F_B\right\} - \left\{F_T\right\} \qquad (2.50)$$

$$\left[K\right]\left\{\delta\right\} = \left\{F_o\right\} + \left\{F_B\right\} + \left\{F_T\right\} \qquad (2.51)$$

ค่า $\left\{F_B\right\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ จึงถูกตัดทิ้งไป ดังนั้น

$$\underset{(12x12)}{\left[K\right]}\underset{(12x1)}{\left\{\delta\right\}} = \underset{(12x1)}{\left\{F_o\right\}} + \underset{(12x1)}{\left\{F_T\right\}} \qquad (2.52)$$

เมื่อแทนสมการ 2.44 ลงในสมการ 2.37 จะได้สมการหาความเค้นออกมาดังนี้

$$\underset{(6x1)}{\left\{\sigma\right\}} = \underset{(6x6)}{\left[D\right]}\underset{(6x12)}{\left[B\right]}\underset{(12x1)}{\left\{\delta\right\}} - \underset{(6x6)}{\left[D\right]}\underset{(6x1)}{\left\{\varepsilon_o\right\}} \qquad (2.53)$$

3. ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

จากสมการ 2.52 และ 2.53 สามารถแยกแยะเมตริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ทรงสี่หน้าในแต่ละเทอมดังนี้

$$\underset{(12x12)}{\left[K\right]} = V\underset{(12x6)}{\left[B\right]^T}\underset{(6x6)}{\left[D\right]}\underset{(6x12)}{\left[B\right]} \qquad (2.54)$$

$$\left[B\right] = \left[\left[B_1\right] \quad \left[B_2\right] \quad \left[B_3\right] \quad \left[B_4\right]\right] \qquad (2.55)$$

$$\left[B_i\right] = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} \qquad i=1,2,3,4 \qquad (2.56)$$

$$
\left[D\right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}
\begin{bmatrix}
(1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\
\nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\
\nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (\frac{1-2\nu}{2}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{1-2\nu}{2}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{1-2\nu}{2})
\end{bmatrix}
\tag{2.57}
$$

$$
\left\{F_o\right\} = V\left[B\right]^T\left[D\right]\left\{\alpha\right\}\left(\frac{T_1+T_2+T_3+T_4}{4} - T_0\right) \tag{2.58}
$$

$$
\left\{F_T\right\} = \frac{\Delta_{123}}{3}
\begin{Bmatrix}
S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_x \\ S_y \\ S_z \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{Bmatrix}
\tag{2.59}
$$

$$\left\{\alpha\right\} = \alpha \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.60}$$

การประดิษฐ์โปรแกรมแลกเปลี่ยนความร้อนจะอาศัยสมการ 2.19 ถึง 2.28 เพื่อหาการกระจายของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ส่วนการประดิษฐ์โปรแกรมวิเคราะห์ความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิจะใช้สมการ 2.52 ถึง 2.60 เพื่อหาค่าการเคลื่อนที่และความเค้นที่เกิดขึ้น