

บทที่ 2

แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

จากที่กล่าวไว้แล้ว แบบจำลองเชิงเส้นสามารถแทนระบบไม่เชิงเส้นได้ โดยมีตัวแปรชุดหนึ่งเป็นตัวกำหนดจุดทำงาน เมื่อแบ่งตามที่มา ตัวแปรนี้สามารถแบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม คือเกิดจากความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ (parametric uncertainty) และเกิดจากการละเลยพลวัตในช่วงความถี่สูง (unmodelled dynamic uncertainty) [16] โดยทั่วไปพิจารณาตัวแปรชุดนี้เป็นความไม่แน่นอนที่ไม่สามารถวัดค่าได้ แต่ตัวแปรทั้งสองกลุ่มนี้บางส่วนสามารถวัดค่าในขณะปฏิบัติงานจริง จึงเกิดแนวความคิดของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

ในบทนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ โดยจำกัดฟังก์ชันของตัวแปรกำหนดให้อยู่ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น และเปรียบเทียบแบบจำลองนี้กับแบบจำลองเชิงเส้นและแบบจำลองไม่เชิงเส้น

2.1 รูปแบบของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

โดยทั่วไประบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ หมายถึงระบบเชิงเส้นที่พารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงตามตัวแปรชุดหนึ่ง เรียกตัวแปรที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ของระบบนี้ว่าตัวแปรกำหนด หรือกล่าวได้ว่าพารามิเตอร์ของระบบเป็นฟังก์ชันของตัวแปรกำหนด สมการสถานะของระบบเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}(\bar{\theta}(t))x(t) + \bar{B}_1(\bar{\theta}(t))w(t) + \bar{B}_2(\bar{\theta}(t))u(t) \\ z(t) &= \bar{C}_1(\bar{\theta}(t))x(t) + \bar{D}_{11}(\bar{\theta}(t))w(t) + \bar{D}_{12}(\bar{\theta}(t))u(t) \\ y(t) &= \bar{C}_2(\bar{\theta}(t))x(t) + \bar{D}_{21}(\bar{\theta}(t))w(t) + \bar{D}_{22}(\bar{\theta}(t))u(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

โดยที่ $x \in \mathbb{R}^n$ คือตัวแปรสถานะของพลาเน็ต

$w \in \mathbb{R}^{n_w}$ คือสัญญาณเข้าภายนอก

$u \in \mathbb{R}^{n_u}$ คือสัญญาณควบคุม

$z \in \mathbb{R}^{n_z}$ คือสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม

$y \in \mathbb{R}^{n_y}$ คือสัญญาณออกที่วัดได้

$\bar{\theta}(t)$ เป็นตัวแปรกำหนด

ระบบที่มีสมการสถานะเป็นดังนี้สามารถพิจารณาได้หลายมุมมอง มุมมองที่น่าสนใจมีอยู่ 2 มุมมอง คือ

1. ระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา
2. ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามเวลา หรือระบบที่มาจากการทำระบบไม่เชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้น

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบดังกล่าว ขึ้นอยู่กับตัวแปรกำหนดและรูปแบบฟังก์ชันของพหุนามิเตอร์ของแบบจำลอง หากไม่มีข้อจำกัดใดๆ การออกแบบตัวควบคุมสำหรับแบบจำลองลักษณะนี้เป็นไปได้ยาก ในวิทยานิพนธ์นี้จึงจำกัดรูปแบบฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น (linear fractional transformation, LFT) ซึ่งการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นมีนิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 2.1 สำหรับเมทริกซ์ $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ กำหนดให้การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นล่าง (lower LFT),

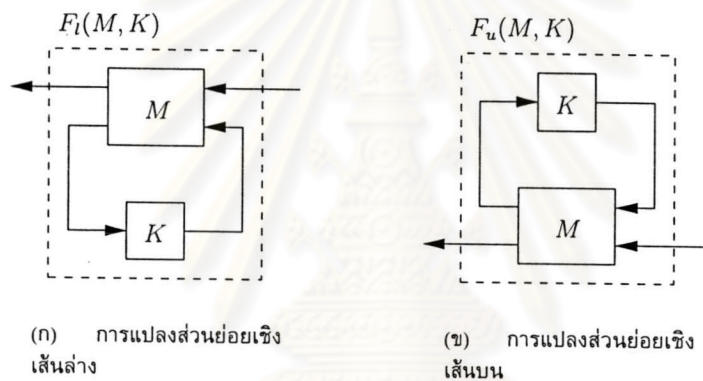
$F_l(M, K)$ เป็นดังนี้

$$F_l(M, K) = M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21}$$

และการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบน (upper LFT), $F_u(M, K)$ เป็นดังนี้

$$F_u(M, K) = M_{22} + M_{21}K(I - M_{11}K)^{-1}M_{12}$$

เมื่อ K และ M เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่มีขนาดเหมาะสม, $(I - M_{11}K)^{-1}$ และ $(I - M_{22}K)^{-1}$ หาค่าได้



รูปที่ 2.1: การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น

ระบบที่เลือกใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ เป็นระบบที่อยู่ในรูปการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นที่มีข้อกำหนดดังนี้

1. ระบบสามารถทำเสถียรได้ (stabilizable) และสามารถตรวจจับได้ (detectable)
2. ระบบไม่มีการส่งผ่านสัญญาณควบคุมไปยังสัญญาณที่วัดได้โดยตรง ($D_{22} = 0$)
3. จำนวนสัญญาณเข้าภายนอกเท่ากับจำนวนสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม ($n_z = n_w$)

เงื่อนไขในข้อแรกเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ เพื่อที่จะสามารถออกแบบตัวควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณออกที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพได้ ส่วนเงื่อนไขที่สองนั้นเป็นเงื่อนไขที่กำหนดเพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น และในเงื่อนไขสุดท้ายนั้น ในกรณีที่จำนวนสัญญาณเข้าภายนอกมีค่าไม่เท่ากับจำนวนสัญญาณออกที่ต้องการควบคุม สามารถทำให้จำนวนทั้งสองจำนวนนี้มีค่าเท่ากันได้ โดยการเพิ่มจำนวนของแถวหรือหลักด้วยเมทริกซ์ศูนย์

ระบบดังสมการที่ (2.1) แทนด้วยพลาเน็ต $G(s)$ ที่มีสมการสถานะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_\theta w_\theta(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_\theta(t) &= C_\theta x(t) + D_{\theta\theta} w_\theta(t) + D_{\theta 1} w(t) + D_{\theta 2} u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{1\theta} w_\theta(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{2\theta} w_\theta(t) + D_{21} w(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

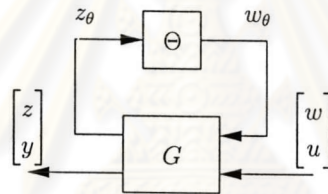
ตัวแปรกำหนดเงื่อนไขดังสมการ (2.3)

$$w_\theta(t) = \Theta(t) z_\theta(t) \quad (2.3)$$

โดยที่ $\Theta(t) \in \bar{\Theta}$ เป็นตัวแปรกำหนดของพลาเน็ต และ $\bar{\Theta}$ มีโครงสร้างตามสมการ (2.4)

$$\bar{\Theta} \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \theta_1(t)I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2(t)I_{m_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta_r(t)I_{m_r} \end{bmatrix} : \theta_i(t) \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.4)$$

โดยที่ $n_\theta = \sum_{i=1}^r m_i$



รูปที่ 2.2: ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น

2.2 แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์และแบบจำลองอื่นๆ

ในหัวข้อนี้จะเปรียบเทียบแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ กับแบบจำลองเชิงเส้นและแบบจำลองไม่เชิงเส้น ระบบที่ใช้ในการเปรียบเทียบคือระบบลูกตุ้มผกผันบนรถ

- แบบจำลองไม่เชิงเส้น จากสมการที่ (ค.3) และ (ค.4) ได้แบบจำลองไม่เชิงเส้นเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{-F \cos \phi - 0.02 \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + 5.88 \sin \phi}{0.12 - 0.02 \cos^2 \phi} \\ \ddot{x} &= \frac{F + 0.02 \dot{\phi}^2 \sin \phi - 0.98 \sin \phi \cos \phi}{0.6 - 0.1 \cos^2 \phi} \end{aligned}$$

- แบบจำลองเชิงเส้น ได้จากการทำสมการที่ (ค.3) และ (ค.4) ให้เป็นเชิงเส้นรอบจุดสมดุล $\phi^* = 0$ และ $x^* = 0$ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= 58.5\phi - 10F \\ \ddot{x} &= -1.96\phi + 2F \end{aligned}$$

- แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ จากภาคผนวก ค สมการที่ (ค.18)–(ค.21) ได้สมการสถานะของระบบเป็นดังนี้

$$\dot{x}_1 = 5.88x_2 - r_y F - \frac{0.04r_y \dot{r}_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} x_1 - \left(0.02\ddot{r}_y + \frac{0.0008r_y \dot{r}_y^2}{0.12 - 0.02r_y^2} \right) x_2 \quad (2.5)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{r_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} x_1 + \frac{0.02r_y \dot{r}_y}{(0.12 - 0.02r_y^2)} x_2 \quad (2.6)$$

$$\dot{x}_3 = 9.8x_2 \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_4 = x_3 \quad (2.8)$$

ในการเปรียบเทียบนี้ ถือเอาผลตอบของแบบจำลองไม่เชิงเส้นเป็นบรรทัดฐาน และเปรียบเทียบผลตอบที่ได้จากแบบจำลองเชิงเส้นกับแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และต้องการเพียงทดสอบแบบจำลอง จึงไม่คำนึงถึงลักษณะของผลตอบ ดังนั้นจึงจำลองผลโดยเปลี่ยนเพียงค่าสถานะเริ่มต้นของมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มเท่านั้น ส่วนค่าสถานะเริ่มต้นอื่นๆ ให้มีค่าเป็นศูนย์

เมื่อสัญญาณควบคุมได้จากมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มของแต่ละแบบจำลอง

สัญญาณควบคุม F ได้จากตัวควบคุมพีดี (PD controller) ที่ใช้มุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มของแบบจำลองนั้นๆ เป็นสัญญาณเข้า ดังนี้

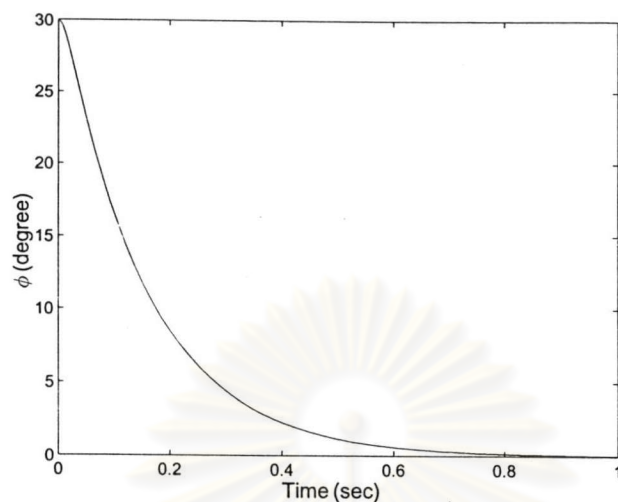
$$F(t) = K_P \phi(t) + K_D \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.9)$$

โดยที่ $K_P = 70$ และ $K_D = 10$

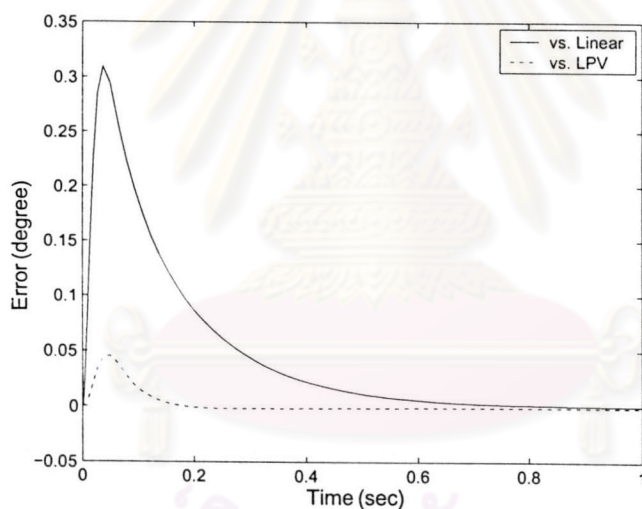
- เมื่อสถานะเริ่มต้นเป็น $\phi_0 = 30^\circ$

ผลตอบของมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มของแบบจำลองทั้งสามแตกต่างกันไม่มาก ดังแสดงในรูปที่ 2.3 และรูปที่ 2.4 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองเชิงเส้นและแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ เมื่อเทียบกับแบบจำลองไม่เชิงเส้น

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

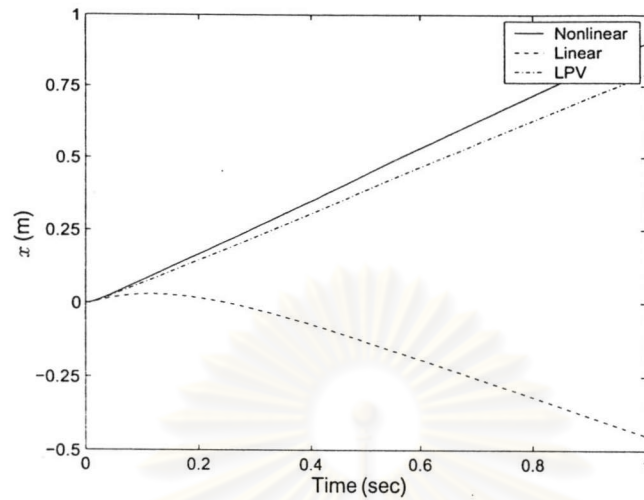


รูปที่ 2.3: มุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม เมื่อ $\phi_0 = 30^\circ$

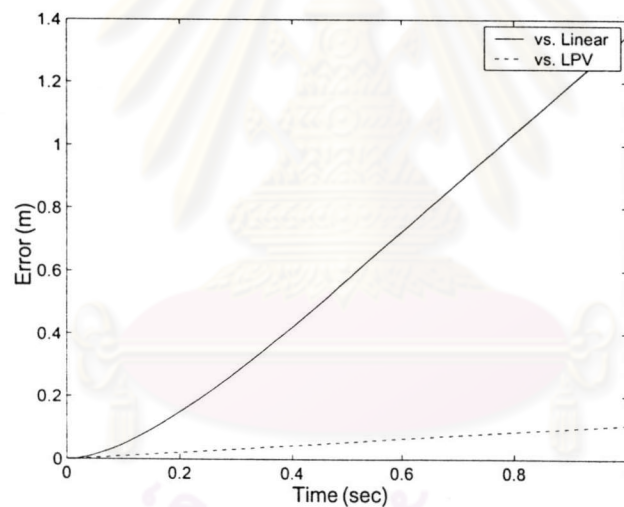


รูปที่ 2.4: ความคลาดเคลื่อนของมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม เมื่อ $\phi_0 = 30^\circ$

ผลตอบของระยะทางที่รถเคลื่อนที่แสดงในรูปที่ 2.5 และความคลาดเคลื่อนแสดงในรูปที่ 2.6 พบว่าแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ ให้ผลตอบใกล้เคียงกับแบบจำลองไม่เชิงเส้นมากกว่าแบบจำลองเชิงเส้น



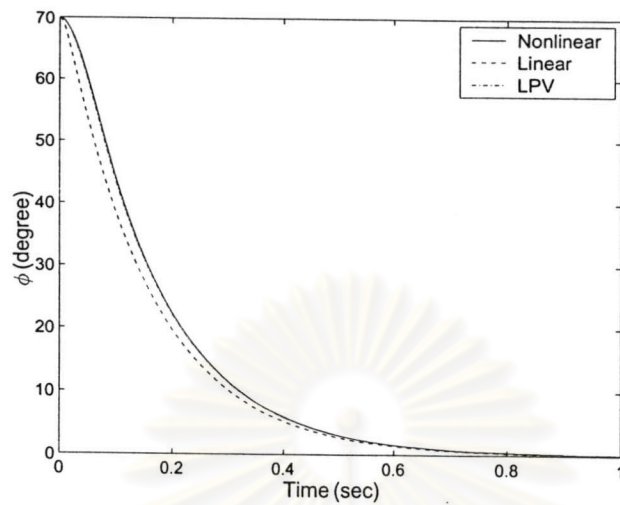
รูปที่ 2.5: ระยะทางที่รถเคลื่อนที่ เมื่อ $\phi_0 = 30^\circ$



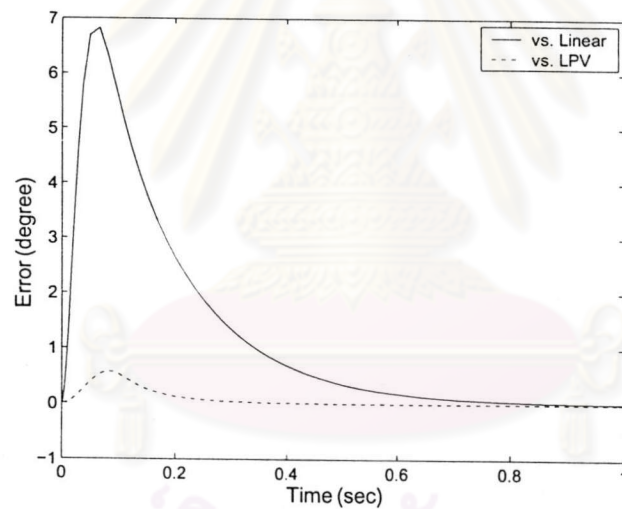
รูปที่ 2.6: ความคลาดเคลื่อนของระยะทางที่รถเคลื่อนที่ เมื่อ $\phi_0 = 30^\circ$

- เมื่อสถานะเริ่มต้นเป็น $\phi_0 = 70^\circ$

จากรูปที่ 2.7 ผลตอบของมุมที่เบี่ยงเบนของแบบจำลองเชิงเส้นในช่วงเวลาวินาทีที่ 0 ถึงวินาทีที่ 0.4 แตกต่างจากผลตอบที่ได้จากแบบจำลองไม่เชิงเส้น ในขณะที่แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ยังคงให้ผลตอบที่ใกล้เคียงกับแบบจำลองไม่เชิงเส้น

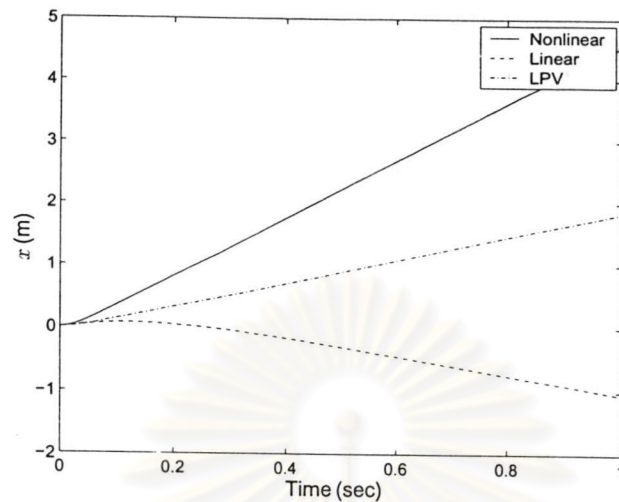


รูปที่ 2.7: มุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม เมื่อ $\phi_0 = 70^\circ$

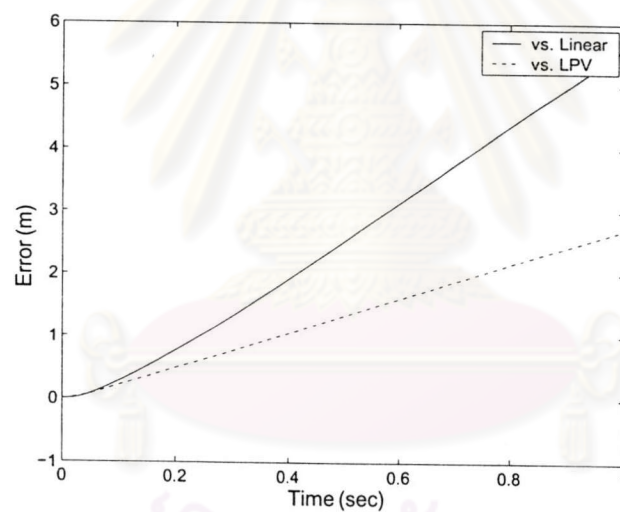


รูปที่ 2.8: ความคลาดเคลื่อนของมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม เมื่อ $\phi_0 = 70^\circ$

ผลตอบของระยะทางที่รถเคลื่อนที่ของแบบจำลองเชิงเส้น และผลตอบที่ได้จากแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 2.9 แตกต่างจากผลตอบที่ได้จากแบบจำลองไม่เชิงเส้นค่อนข้างมาก ทั้งนี้เนื่องจากแบบจำลองทั้งสองมีการประมาณให้เป็นเชิงเส้นในสมการที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของรถ



รูปที่ 2.9: ระยะทางที่รถเคลื่อนที่ เมื่อ $\phi_0 = 70^\circ$

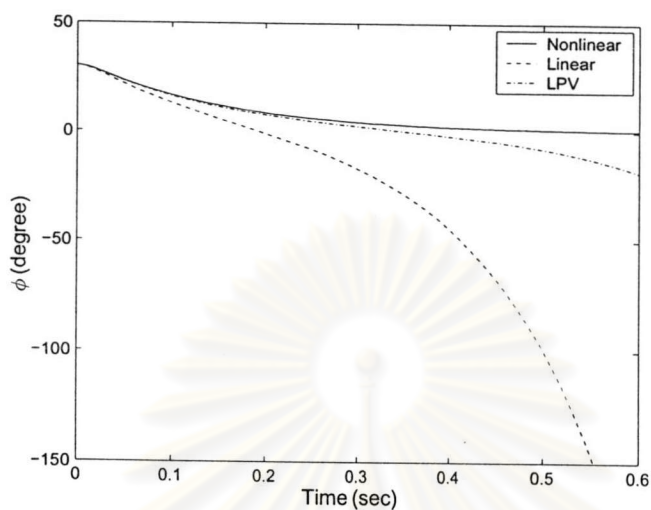


รูปที่ 2.10: ความคลาดเคลื่อนของระยะทางที่รถเคลื่อนที่ เมื่อ $\phi_0 = 70^\circ$

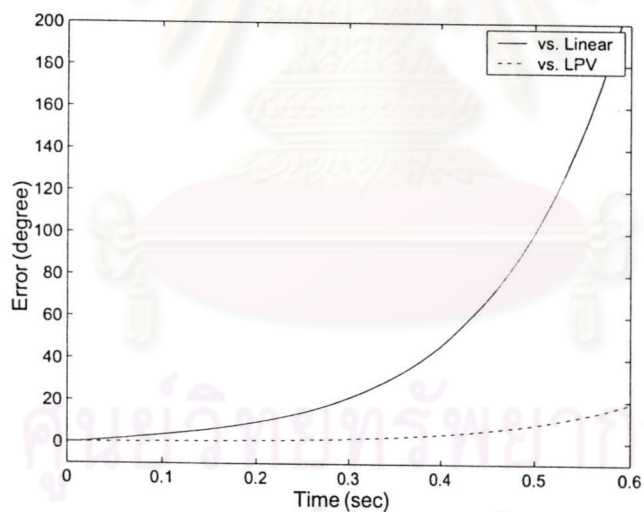
เมื่อสัญญาณควบคุมได้จากมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มของแบบจำลองไม่เชิงเส้น

สัญญาณควบคุม F ได้จากตัวควบคุมพีไอดีที่ใช้มุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้มของแบบจำลองไม่เชิงเส้น ดังสมการที่ (2.9) ในกรณีนี้สัญญาณควบคุม F ของแต่ละแบบจำลองจะมีค่าเหมือนกัน จากผลการจำลอง พบว่าผลตอบของแบบจำลองเชิงเส้นต่างจากแบบจำลองไม่เชิงเส้นมาก และผลตอบของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ใกล้เคียงกับแบบจำลองไม่เชิงเส้นในช่วงเวลาเริ่มต้นเท่านั้น

- เมื่อสถานะเริ่มต้นเป็น $\phi_0 = 30^\circ$

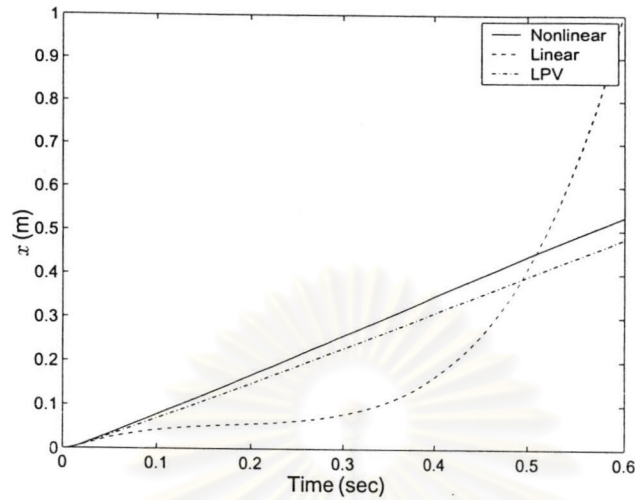


รูปที่ 2.11: มุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม เมื่อมุม $\phi_0 = 30^\circ$

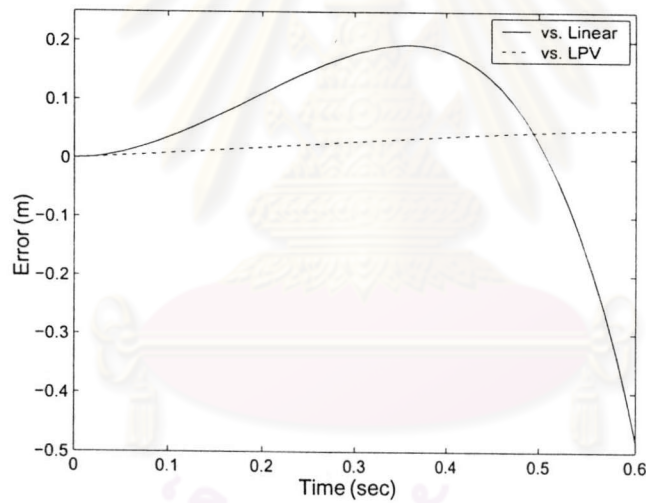


รูปที่ 2.12: ความคลาดเคลื่อนของมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม เมื่อ $\phi_0 = 30^\circ$

ผลตอบของระยทางที่รุดเคลื่อนที่แสดงในรูปที่ 2.13 และความคลาดเคลื่อนแสดงในรูปที่ 2.14 พบว่าแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ ให้ผลตอบใกล้เคียงกับแบบจำลองไม่เชิงเส้นมากกว่าแบบจำลองเชิงเส้น



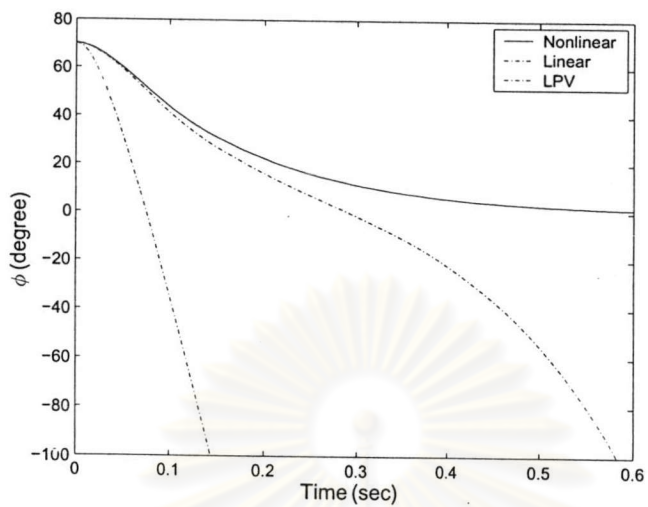
รูปที่ 2.13: ระยะทางที่รถเคลื่อนที่ เมื่อ $\phi_0 = 30^\circ$



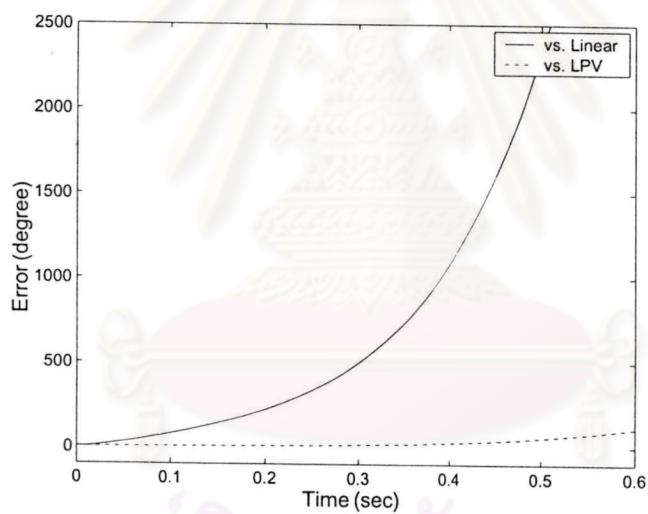
รูปที่ 2.14: ความคลาดเคลื่อนของระยะทางที่รถเคลื่อนที่ เมื่อ $\phi_0 = 30^\circ$

- เมื่อสถานะเริ่มต้นเป็น $\phi_0 = 70^\circ$

ในกรณีนี้ จะเห็นความแตกต่างระหว่างแบบจำลองต่างๆ อย่างชัดเจน แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ให้ผลตอบที่คลาดเคลื่อนจากแบบจำลองไม่เชิงเส้นอย่างมาก แต่ก็ยังคงให้ผลตอบที่ใกล้เคียงกับแบบจำลองไม่เชิงเส้นมากกว่าแบบจำลองเชิงเส้น

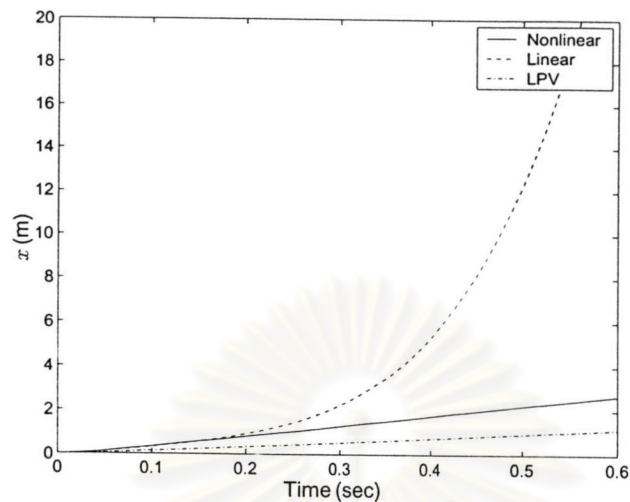


รูปที่ 2.15: มุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม เมื่อ $\phi_0 = 70^\circ$

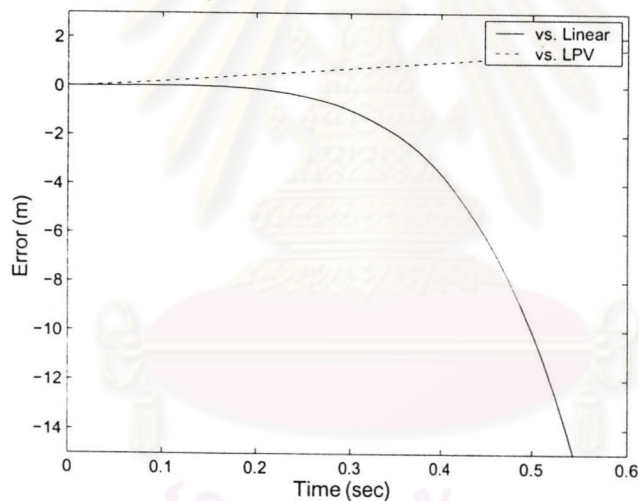


รูปที่ 2.16: ความคลาดเคลื่อนของมุมที่เบี่ยงเบนของลูกตุ้ม เมื่อ $\phi_0 = 70^\circ$

ผลตอบของระยะทางที่รถเคลื่อนที่เป็นดังรูปที่ 2.17 และ 2.18



รูปที่ 2.17: ระยะทางที่รถเคลื่อนที่ เมื่อ $\phi_0 = 70^\circ$



รูปที่ 2.18: ความคลาดเคลื่อนของระยะทางที่รถเคลื่อนที่ เมื่อ $\phi_0 = 70^\circ$

2.3 สรุป

ในบทนี้แสดงรูปแบบของแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ และเปรียบเทียบผลตอบที่ได้จากแบบจำลองไม่เชิงเส้น แบบจำลองเชิงเส้น และแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ของระบบลูกตุ้มผกผันบนรถ

ในหัวข้อสุดท้ายแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ ให้ผลตอบใกล้เคียงกับผลตอบจากพลาเน็ตไม่เชิงเส้นมากกว่าผลตอบของแบบจำลองเชิงเส้น ทั้งนี้แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ก็ยังมีข้อจำกัด ในกรณีที่มีการประมาณเชิงเส้นบางส่วน ผลตอบที่เกี่ยวข้อง

กับส่วนที่มีการประมาทนั้นจะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น และแบบจำลองนี้ยังคงไม่สามารถครอบคลุมทุก
ช่วงการทำงาน



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย