บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแผนแบบการทดลองจัตุรัสละตินที่มีอิทธิพลปัจจัยคงที่ กรณีเก็บข้อมูลระยะยาว ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ วิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีการประมาณแบบสองขั้น มีข้อกำหนด คือ ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร ที่ความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันรูปแบบอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง ขนาดของแผนแบบการทดลองจะแบ่งเป็น 3 ขนาด คือ 3x3 4x4 และ 5x5 กำหนดค่าอัตตสหสัมพันธ์ทั้งทิศทางเดียวกันและทิศทางตรงกันข้าม กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความผันแปรเป็น 3 ระดับ คือ 10% 20% และ 30% ระยะเวลาการเก็บซ้ำ 3 4 6 และ 9 โดยจะทำการจำลองข้อมูลตามสถานการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนด แล้วทำการประมาณค่าพารามิเตอร์จากข้อมูลที่ได้และทำการเปรียบเทียบว่าวิธีการประมาณค่าวิธีใดให้ค่าประมาณใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุด โดยจะพิจารณาจากค่ารากที่สองของความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย RMSE วิธีประมาณที่ให้ค่าน้อยกว่าแสดงว่าวิธีนั้นเหมาะสมกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยรายละเอียดในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการดำเนินการวิจัยตามลำดับขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดค่าพารามิเตอร์
2. การจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร
3. การประมาณค่าพารามิเตอร์
4. การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์
5. ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

3.1 การกำหนดค่าพารามิเตอร์

เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยโดยใช้การจำลองข้อมูลขึ้นมาช่วยในการวิจัยแทนการพิสูจน์ทางทฤษฎี ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่เป็นไปได้ในทางปฏิบัติจริง โดยจะทำการกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังนี้

1. กำหนดขนาดของแผนแบบการทดลองจัตุรัสละตินเมื่ออิทธิพลปัจจัยเป็นแบบคงที่โดยกำหนด 3 ระดับ คือ 3x3 4x4 และ 5x5
2. กำหนดระยะเวลาการเก็บซ้ำเมื่ออิทธิพลเป็นแบบคงที่ เป็น 3 4 6 และ 9
3. กำหนดระดับความสัมพันธ์เป็น 18 ระดับ คือ 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 และ -0.1 -0.2 -0.3 -0.4 -0.5 -0.6 -0.7 -0.8 -0.9

4. กำหนดสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างระยะเวลาเป็น 3 ระดับ คือ 10% 20% และ 30% จะได้ว่าค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในการจำลองเป็น 5 10 และ 15
5. กำหนดพารามิเตอร์อิทธิพลจากปัจจัยทดลอง โดยพิจารณาให้เป็นไปตามเงื่อนไข $\sum_{i=1}^{p}\tau_i = 0$ และกำหนดความแตกต่างระหว่างระดับปัจจัยโดยใช้ฟังก์ชัน ϕ_τ เป็นตัวกำหนด โดยปกติค่าของฟังก์ชัน ϕ จะอยู่ระหว่าง $[0,\ 3]$ และถ้าระดับปัจจัยแตกต่างกันมาก ๆ ค่าพารามิเตอร์ ϕ จะมีค่ามากกว่า 3 ได้

$$\phi_\tau = \frac{\sqrt{n^* \sum_{i=1}^{p} \tau_i^2 / p}}{\sigma}$$

n^* คือ จำนวนหน่วยทดลองที่ได้รับอิทธิพลปัจจัยทดลองระดับที่ i

เพื่อความสะดวกในการจำลองข้อมูลเรากำหนดให้ $\phi_\tau = 1.50$ คือ ความแตกต่างของระดับปัจจัยอยู่ระดับกลางและกำหนดพารามิเตอร์ τ_i ตามฟังก์ชันต่อไปนี้

กรณีที่1 เมื่อจำนวนระดับปัจจัยทดลอง (p) เป็นเลขคู่

$$\tau_i = \begin{cases} -\tau^* & \text{ถ้า i เป็นเลขคู่} \\ \tau^* & \text{ถ้า i เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

กรณีที่2 เมื่อจำนวนระดับปัจจัยทดลอง (p) เป็นเลขคี่

$$\tau_i = \begin{cases} -\tau^* & \text{ถ้า i เป็นเลขคู่} \\ \tau^* & \text{ถ้า i เป็นเลขคี่} \\ 0 & \text{เมื่อ i เท่ากับ p} \end{cases}$$

6. กำหนดพารามิเตอร์อิทธิพลปัจจัยบล็อกแรก โดยพิจารณาให้เป็นไปตามเงื่อนไข $\sum_{j=1}^{p}\alpha_j = 0$ กำหนดความแตกต่างระหว่างระดับบล็อกโดยใช้ฟังก์ชัน ϕ_α เป็นตัวกำหนด

$$\phi_\alpha = \frac{\sqrt{n^* \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 / p}}{\sigma}$$

n^* คือ จำนวนหน่วยทดลองที่ได้รับอิทธิพลบล็อกแรกระดับที่ j

เพื่อความสะดวกในการจำลองข้อมูลเรากำหนดให้ $\phi_\alpha = 2.50$ คือ ให้ความแตกต่างของระดับปัจจัยแบ่งบล็อกแรกอยู่ในระดับสูงและกำหนดพารามิเตอร์ α_j ตามฟังก์ชันต่อไปนี้

กรณีที่1 เมื่อจำนวนระดับบล็อกแรก (p) เท่ากับ 3

$$\alpha_j = \begin{cases} \alpha^* & \text{ถ้า j เป็นเลขคู่} \\ -\alpha^* & \text{ถ้า j เป็นเลขคี่} \\ 0 & \text{ถ้า j เท่ากับ p} \end{cases}$$

กรณีที่2 เมื่อจำนวนระดับบล็อกแรก (p) เท่ากับ 4 หรือ 5

$$\alpha_j = \begin{cases} -\alpha^{*} & \text{ถ้า j เป็นเลขคู่ และ } j <= 2 \\ -2\alpha^{*} & \text{ถ้า j เป็นเลขคี่ และ } j <= 2 \\ \alpha^{*} & \text{ถ้า j เป็นเลขคู่ และ } j > 2 \\ 2\alpha^{*} & \text{ถ้า j เป็นเลขคี่ 'และ } j > 2 \\ 0 & \text{กรณีที่ } j = 5 \end{cases}$$

7. กำหนดพารามิเตอร์อิทธิพลปัจจัยบล็อกสอง โดยพิจารณาให้เป็นไปตามเงื่อนไข $\sum_{k=1}^{p}\beta_k = 0$ กำหนดความแตกต่างระหว่างระดับบล็อกโดยใช้ฟังก์ชัน ϕ_β เป็นตัวกำหนด

$$\phi_\beta = \frac{\sqrt{n^{*}\sum_{k=1}^{p}\beta_k^2 / p}}{\sigma}$$

n^{*} คือ จำนวนหน่วยทดลองที่ได้รับอิทธิพลบล็อกสองระดับที่ k

เพื่อความสะดวกในการจำลองข้อมูลเรากำหนดให้ $\phi_\beta = 2.50$ คือ ให้ความแตกต่างของระดับปัจจัยแบ่งบล็อกที่สองอยู่ในระดับสูงและกำหนดพารามิเตอร์ β_k ตามฟังก์ชันต่อไปนี้

กรณีที่ เมื่อจำนวนระดับบล็อกที่สอง (p) เท่ากับ 3

$$\beta_k = \begin{cases} -\beta^{*} & \text{ถ้า k เป็นเลขคู่} \\ \beta^{*} & \text{ถ้า k เป็นเลขคี่} \\ 0 & \text{ถ้า k เท่ากับ p} \end{cases}$$

กรณีที่1 เมื่อจำนวนระดับบล็อกที่สอง (p) เท่ากับ 4 หรือ 5

$$\beta_k = \begin{cases} -\beta^{*} & \text{ถ้า k เป็นเลขคู่และ } k <= 2 \\ -2\beta^{*} & \text{ถ้า k เป็นเลขคี่และ } k <= 2 \\ \beta^{*} & \text{ถ้า k เป็นเลขคู่และ } k > 2 \\ 2\beta^{*} & \text{ถ้า k เป็นเลขคี่และ} k > 2 \\ 0 & \text{ถ้า } k = 5 \end{cases}$$

8. กำหนดพารามิเตอร์อิทธิพลปัจจัยระยะเวลาเก็บซ้ำ โดยพิจารณาให้เป็นไปตามเงื่อนไข $\sum_{\ell=1}^{b}\gamma_\ell = 0$ กำหนดความแตกต่างระหว่างระดับระยะเวลาโดยใช้ฟังก์ชัน ϕ_γ เป็นตัวกำหนด

$$\phi_\gamma = \frac{\sqrt{n^{*}\sum_{\ell=1}^{b}\gamma_\ell^2 / b}}{\sigma}$$

n^{*} คือ จำนวนหน่วยทดลองที่ได้รับอิทธิพลระยะเวลาที่ ℓ

เพื่อความสะดวกในการจำลองข้อมูลเรากำหนดให้ $\phi_{\gamma} = 2.50$ คือ ให้ความแตกต่างของระดับปัจจัยผลกระทบจากระยะเวลาอยู่ในระดับสูงและกำหนดพารามิเตอร์ γ_{ℓ} ตามฟังก์ชันต่อไปนี้

กรณีที่1 เมื่อจำนวนระยะเวลา (b) เป็นเลขคู่

$$\gamma_{\ell} = \begin{cases} -\gamma^{*} & \text{ถ้า } \ell \text{ เป็นเลขคู่} \\ \gamma^{*} & \text{ถ้า } \ell \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

กรณีที่2 เมื่อจำนวนระยะเวลา (b) เป็นเลขคี่

$$\gamma_{\ell} = \begin{cases} -\gamma^{*} & \text{ถ้า } \ell \text{ เป็นเลขคู่} \\ \gamma^{*} & \text{ถ้า } \ell \text{ เป็นเลขคี่} \\ 0 & \text{ถ้า } \ell \text{ เท่ากับ b} \end{cases}$$

9. กำหนดพารามิเตอร์อิทธิพลผลกระทบร่วมระหว่างระดับปัจจัยทดลองกับระยะเวลา โดยพิจารณาให้เป็นไปตามเงื่อนไข $\sum_{i=0}^{p}\sum_{\ell=1}^{b}(\tau\gamma)_{i\ell} = 0$ กำหนดความแตกต่างระหว่างระดับปัจจัย โดยใช้ฟังก์ชัน $\phi_{(\tau\gamma)}$ เป็นตัวกำหนด

$$\phi_{(\tau\gamma)} = \frac{\sqrt{n^{*}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{b}(\tau\gamma)_{i\ell}^{2} / pb}}{\sigma}$$

n^{*} จำนวนหน่วยทดลองที่ได้รับอิทธิพลร่วมระหว่างวิธีการทดลองระดับที่ i ระยะเวลา ℓ

เพื่อความสะดวกในการจำลองข้อมูลเรากำหนดให้ $\phi_{(\tau\gamma)} = 1.50$ คือ ให้ความแตกต่างของอิทธิพลผลกระทบร่วมอยู่ในระดับกลางและกำหนดพารามิเตอร์ $(\tau\gamma)_{i\ell}$ ตามฟังก์ชันต่อไปนี้

กรณีที่1 จำนวนระดับปัจจัยทดลอง (p)เป็นเลขคู่ และจำนวนระยะเวลา (b)เป็นเลขคู่

$$(\tau\gamma)_{i\ell} = \begin{cases} -(\tau\gamma)^{*} & \text{ถ้า } \left(\left(i < p \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ และ } \left(\ell < b \,\mathrm{Div}\, 2\right)\right) \text{ หรือ} \left(\left(i > p \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ และ } \left(\ell > b \,\mathrm{Div}\, 2\right)\right) \\ (\tau\gamma)^{*} & \text{ถ้า } \left(\left(i > p \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ และ } \left(\ell > b \,\mathrm{Div}\, 2\right)\right) \text{ หรือ } \left(\left(i < p \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ และ } \left(\ell < b \,\mathrm{Div}\, 2\right)\right) \end{cases}$$

กรณีที่2 จำนวนระดับปัจจัยทดลอง (p)เป็นเลขคู่ และจำนวนระยะเวลา (b)เป็นเลขคี่

$$(\tau\gamma)_{i\ell} = \begin{cases} -(\tau\gamma)^{*} & \text{ถ้า} \left(\left(i < p \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ และ } \left(\ell < b \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ หรือ } \left(i > p \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ และ } \left(\ell > b \,\mathrm{Div}\, 2\right)\right) \\ & \text{และ } \left(\ell \neq b\right) \\ 0 & \text{ถ้า} \left(\ell = b\right) \\ (\tau\gamma)^{*} & \text{ถ้า} \left(\left(i > p \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ และ } \left(\ell > b \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ หรือ } \left(i < p \,\mathrm{Div}\, 2\right) \text{ และ } \left(\ell < b \,\mathrm{Div}\, 2\right)\right) \\ & \text{และ} \left(\ell \neq b\right) \end{cases}$$

กรณีที่3 จำนวนระดับปัจจัยทดลอง (p)เป็นเลขคี่ และจำนวนระยะเวลา (b)เป็นเลขคู่

$$(\tau\gamma)_{i\ell} = \begin{cases} -(\tau\gamma)^{*} \text{ ถ้า } \left(\left(i < p \text{ Div } 2\right) \text{ และ } \left(\ell < b \text{ Div } 2\right) \text{ หรือ } \left(i > p \text{ Div } 2\right) \text{ และ } \left(\ell > b \text{ Div } 2\right)\right) \\ \quad \text{ และ } \left(i \neq p\right) \\ 0 \quad \text{ ถ้า } \left(i = p\right) \\ (\tau\gamma)^{*} \text{ ถ้า } \left(\left(i > p \text{ Div } 2\right) \text{ และ } \left(\ell > b \text{ Div } 2\right) \text{ หรือ } \left(i < p \text{ Div } 2\right) \text{ และ } \left(\ell < b \text{ Div } 2\right)\right) \\ \quad \text{ หรือ } \left(i \neq p\right) \end{cases}$$

กรณีที่4 จำนวนระดับปัจจัยทดลอง (p)เป็นเลขคี่ และจำนวนระยะเวลา (b) เป็นเลขคี่

$$(\tau\gamma)_{i\ell} = \begin{cases} -(\tau\gamma)^{*} \text{ ถ้า } \left(\left(i < p \text{ Div } 2\right) \text{ และ } \left(\ell < b \text{ Div } 2\right) \text{ หรือ } \left(i > p \text{ Div } 2\right) \text{ และ } \left(\ell > b \text{ Div } 2\right)\right) \\ \quad \text{ และ } \left(i \neq p\right) \text{ หรือ } \left(\ell \neq b\right) \\ 0 \quad \text{ ถ้า } \left(i = p\right) \text{ หรือ } \left(\ell = b\right) \\ (\tau\gamma)^{*} \text{ ถ้า } \left(\left(\left(i > p \text{ Div } 2\right) \text{ และ } \left(\ell > b \text{ Div } 2\right)\right) \text{ หรือ} \left(\left(i < p \text{ Div } 2\right) \text{ และ } \left(\ell < b \text{ Div } 2\right)\right)\right) \\ \quad \text{ และ } \left(\left(i \neq p\right) \text{ หรือ } \left(\ell \neq b\right)\right) \end{cases}$$

10. ทำการจัดหน่วยทดลองให้ได้รับวิธีการทดลองและบล็อกโดยแบ่งเป็นกรณีตามจำนวนระดับปัจจัยที่นำมาศึกษาและในการวัดซ้ำแต่ละระยะเวลา จัดหน่วยทดลองเหมือนเดิม

กรณี 3X3 จัตุรัสละติน เมื่อ A B และ C เป็นวิธีการทดลอง

บล็อกสอง	**บล็อกแรก**		
	ระดับที่1	**ระดับที่2**	**ระดับที่3**
ระดับที่1	A	C	B
ระดับที่2	B	A	C
ระดับที่3	C	B	A

Div หมายถึง การหารที่ต้องการผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มถ้ามีเศษจะทำการปัดทิ้ง เช่น 11 Div 2 มีค่าเท่ากับ 5

กรณี 4X4 จัตุรัสละติน เมื่อ A B C และ D เป็นวิธีการทดลอง

บล็อกสอง	**บล็อกแรก**			
	ระดับที่1	**ระดับที่2**	**ระดับที่3**	**ระดับที่4**
ระดับที่1	A	D	C	B
ระดับที่2	B	A	D	C
ระดับที่3	C	B	A	D
ระดับที่4	D	C	B	A

กรณี 5X5 จัตุรัสละติน เมื่อ A B C D และ E เป็นวิธีการทดลอง

บล็อกสอง	**บล็อกแรก**				
	ระดับที่1	**ระดับที่2**	**ระดับที่3**	**ระดับที่4**	**ระดับที่5**
ระดับที่1	A	E	D	C	B
ระดับที่2	B	A	E	D	C
ระดับที่3	C	B	A	E	D
ระดับที่4	D	C	B	A	E
ระดับที่5	E	D	C	B	A

เมื่อเราแทนค่าพารามิเตอร์ ϕ ในฟังก์ชันและทำการกำหนดขนาดของแผนการทดลอง ระยะเวลาการเก็บซ้ำ และกำหนดความแปรปรวนของการจำลอง จะทำให้เราทราบค่าพารามิเตอร์ $\tau_i, \alpha_j, \beta_k, \gamma_\ell$ และ $(\tau\gamma)_{i\ell}$ แล้วนำไปแทนค่าใน สมการที่ 2.1.1 จะทำให้เราได้พารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}_h$ เพื่อใช้ในการจำลองในขั้นตอนต่อไป

3.2 การจำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร

วิธีการจำลอง (Simulation Method) เป็นเทคนิคที่ถูกนำมาใช้แก้ปัญหาในหลายสาขา เช่น สาขาคณิตศาสตร์ สาขาฟิสิกส์ สาขาเคมี เป็นต้น โดยเทคนิคการจำลองจะใช้ตัวเลขสุ่ม (Random Number) เป็นพื้นฐาน โดยจะใช้เมื่อกรณีที่ไม่สามรถใช้การพิสูจน์ทางทฤษฎีได้ สำหรับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นนิยมใช้เทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo Simulation) และ ตัวเลขสุ่มที่ได้จากการจำลองเป็นเลขสุ่มที่มีการแจกแจง และเลขสุ่มแต่ละตัวที่ได้เป็นอิสระกัน

ในการวิจัยนี้ได้มีข้อตกลงเบื้องต้นว่าข้อมูลที่ได้มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร ในการจำลองข้อมูลตามขั้นตอนดังนี้

1. ผลิตเลขสุ่มให้มีการแจกแจงแบบปกติที่ค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน 1 ซึ่งเลขสุ่มที่ได้แต่ละตัวจะเป็นอิสระกัน

2. ทำการสร้างตัวเลขสุ่มให้มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรที่ค่าเฉลี่ย เวกเตอร์ $\underset{\sim}{0}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม Σ_h มีขั้นตอนดังนี้

2.1 ทำการแยกเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมด้วยวิธี Choresky Decomposition ซึ่งจะได้ว่า $\Sigma_h = CC'$ ซึ่งจะได้ว่า

$$C = \sigma_\varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{b-1} & \rho^{b-2} & \rho^{b-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 สร้างข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติที่ค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน 1 จากข้อ2 จำนวน b ตัวให้แทนด้วย $Z_1, Z_2, \cdots, Z_b$ จากนั้นให้

$$y_{h(1)} = Z_1C_{11}$$
$$y_{h(2)} = Z_1C_{21} + Z_2C_{22}$$
$$y_{h(3)} = Z_1C_{31} + Z_2C_{32} + Z_3C_{33}$$
$$\vdots$$
$$y_{h(b)} = Z_1C_{b1} + Z_{b2}C_2 + Z_3C_{b3} + \ldots + Z_bC_{bb}$$

2.3 จะได้ว่า $\underset{\sim}{y}_h \sim N_b\left(\underset{\sim}{0}, \Sigma_h\right)$ เมื่อต้องการข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรที่ค่าเฉลี่ยเวกเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}_h$ ทำได้โดยนำเวกเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}$ ไปบวกกับตัวแปรสุ่ม $\underset{\sim}{y}_h$ ให้ $\underset{\sim}{y}^*_h = \underset{\sim}{\mu}_h + \underset{\sim}{y}_h$ จะได้ว่า $\underset{\sim}{y}^*_h \sim N_b\left(\underset{\sim}{\mu}_h, \Sigma_h\right)$ เมื่อต้องการสร้างข้อมูลอีกก็สามารถทำซ้ำ จากข้อ 3 ได้ โดยจะได้ข้อมูลทีมีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรที่แต่ละชุดเป็นอิสระกัน

3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์

เมื่อเรากำหนดค่าพาราเตอร์และทำการจำลองข้อมูลแล้ว ขั้นตอนต่อไปคือ การประมาณค่าพารามิเตอร์ซึ่งในการวิจัยได้เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี โดยมีรายละเอียดวิธีการประมาณค่าดังนี้

3.3.1 **วิธีการประมาณแบบสองขั้น**

โดยขั้นแรกทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ จะได้ว่า

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}$$

จากนั้นประมาณค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น จะได้ว่า $\hat{\underset{\sim}{\varepsilon}}_{h} = \underset{\sim}{y}_{h} - X_h \hat{\underset{\sim}{\beta}}_{OLS}$ เพื่อที่จะนำไปประมาณค่าพารามิเตอร์อัตตสหสัมพันธ์

$$\hat{\rho}_{two} = \frac{\sum_{h=1}^{N}\sum_{\ell=2}^{b}\hat{e}_{h(\ell)}\hat{e}_{h(\ell-1)}}{\sum_{h=1}^{N}\sum_{\ell=2}^{b}\hat{e}^2_{h(\ell-1)}}$$

นำค่าพารามิเตอร์ $\hat{\rho}$ แทนค่าในเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม V_h จะได้ว่า

$$\hat{V}_h = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^2 & \cdots & \hat{\rho}^{b-1} \\ \hat{\rho} & (1+\hat{\rho}^2) & \hat{\rho}(1+\hat{\rho}^2) & \cdots & \hat{\rho}^{b-2}(1+\hat{\rho}^2) \\ \hat{\rho}^2 & \hat{\rho}(1+\hat{\rho}^2) & (1+\hat{\rho}^2+\hat{\rho}^4) & \cdots & \hat{\rho}^{b-3}(1+\hat{\rho}^2+\hat{\rho}^4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}^{b-1} & \hat{\rho}^{b-2}(1+\hat{\rho}^2) & \hat{\rho}^{b-3}(1+\hat{\rho}^2+\hat{\rho}^4) & \cdots & (1+\hat{\rho}^2+\hat{\rho}^4+\cdots+\hat{\rho}^{2(b-1)}) \end{bmatrix}_{bxb}$$

หาอินเวอร์สของเมทริกซ์ $\hat{V}_h$ แทนด้วย $\hat{V}_h^{-1}$ แล้วนำไปแทนค่าในเมทริกซ์ V^{-1} จะได้ว่า

$$\hat{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{V}_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{V}_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{V}_3^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{V}_N^{-1} \end{bmatrix}$$

ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{two}$ จะได้ว่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{two} = (X'\hat{V}^{-1}X)X'\hat{V}^{-1}\underset{\sim}{Y}$ จากนั้นทำการประมาณค่า $\hat{\sigma}^2_{two}$ โดยประมาณได้จาก

$$\hat{\sigma}^2_{two} = \frac{\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{two}\right)'\hat{V}^{-1}\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{two}\right)}{M-r}$$

3.3.2. **วิธีความควรจะเป็นสูงสุด**

ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\rho}_{mle}$ และ $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ ซึ่งจะทำการวนซ้ำตามขั้นตอนดังนี้

2.1 กำหนดพารามิเตอร์เริ่มต้น $\hat{\rho}, \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ และ $\underset{\sim}{\beta}$ กำหนดพารามิเตอร์เริ่มต้นเพื่อประมาณค่าด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด โดยนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีการประมาณแบบสองขั้น มาเป็นตัวเริ่มต้นในการประมาณ

2.2 นำพารามิเตอร์ $\hat{\rho}$ ไปแทนค่าในเมทริกซ์ V_h ให้แทนด้วย $\hat{V}_h$ หาอินเวอร์สจากนั้นนำไปแทนในเมทริกซ์ $\hat{V}^{-1}$ เหมือนวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น

2.3 นำค่าพารามิเตอร์ $\hat{\rho}$ ไปแทนค่าในเมทริกซ์ $\dfrac{\partial V_h}{\partial \rho}$ ให้แทนค่าด้วย $\dfrac{\partial \hat{V}_h}{\partial \rho}$ โดยใช้วิธีการหาอนุพันธ์รูปแบบผลคูณเพราะจะได้รูปร่างของเมทริกซ์ที่ง่ายต่อการเขียนโปรแกรมในการคำานวณเมทริก์ความแปรปรวนร่วมได้ว่า $V_{h(\ell'\ell)} = \rho^{|\ell'-\ell|}\sum_{L=0}^{b-1}\rho^{2L}$; $h = 1, 2, \cdots, N$ เมื่อ $b = \min(\ell, \ell')$ เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบกับ ρ จะได้ว่า

$$\frac{\partial V_{h(\ell'\ell)}}{\partial \rho} = \rho^{|\ell'-\ell|}\sum_{L=0}^{b-1}2\ell\rho^{2L-1} + \left(\sum_{L=0}^{b-1}\rho^{2L}\right)|\ell'-\ell|\,\rho^{|\ell'-\ell|}$$

จากนั้นนำค่า $\hat{\rho}$ แทนค่าจะได้ว่า

$$\frac{\partial \hat{V}_{h(\ell'\ell)}}{\partial \sigma} = \hat{\rho}^{|\ell'-\ell|}\sum_{L=0}^{b-1}2\ell\hat{\rho}^{2L-1} + \left(\sum_{L=0}^{b-1}\hat{\rho}^{2L}\right)|\ell'-\ell|\,\hat{\rho}^{|\ell'-\ell|}$$

2.4 ทำการคำนวณอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับพารามิเตอร์ $\hat{\rho}$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = \frac{1}{2\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)'\hat{V}_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}\hat{V}_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)$$

2.5 หาค่าคาดหวังของอนุพันธ์ครั้งที่สองของฟังก์ชันก์ความควรจะเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ ρ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} H_{\rho\rho} &= E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\rho\partial\rho}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\mathrm{tr}\left(\hat{V}_h^{-1}\frac{\partial \hat{V}_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial \hat{V}_h}{\partial \rho}\right) \end{aligned}$$

จากนั้นทำการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ $\hat{H}$ ให้แทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{H}^{-1}$ และทำการประมาณค่าพารามิเตอร์รอบถัดไปดังนี้

$$\hat{\rho}_{k+1} = \hat{\rho}_k + \left(\hat{H}\right)^{-1}\frac{\partial(\ln L)^k}{\partial \rho}$$

เมื่อได้ค่า $\hat{\rho}_{k+1}$ ให้นำค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\rho}_{k+1}$ ที่ได้ไปแทนค่าจากขั้นตอนที่ 2.2 ทำการวนซ้ำเรื่อย ๆ จนกระทั่งค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากรอบที่ k และรอบที่ $k+1$ มีค่าใกล้เคียงจึงหยุดการประมาณค่าได้ค่าพารามิเตอร์ $\hat{\rho}_{mle}$

2.6 การประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{mle}$ ทำได้โดยนำค่าพารามิเตอร์ $\hat{\rho}_{mle}$ ที่ได้จากการประมาณไปแทนค่าในเมทริกซ์ V_h เช่นเดียวกันกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\beta}_{two}$ แต่ใช้ค่า $\hat{\rho}_{mle}$ แทนค่า $\hat{\rho}_{two}$ จากนั้นทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{mle} = \left(X'\hat{V}^{-1}X\right)X'\hat{V}^{-1}\underset{\sim}{Y}$

3.4 การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

เมื่อเราทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละวิธีเสร็จ ขั้นตอนต่อไปคือ การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยเปรียบเทียบค่ารากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ซึ่งในแต่ละสถานการณ์เราจะทำซ้ำจำนวน 500 รอบ สามารถคำนวณค่า ได้ดังนี้

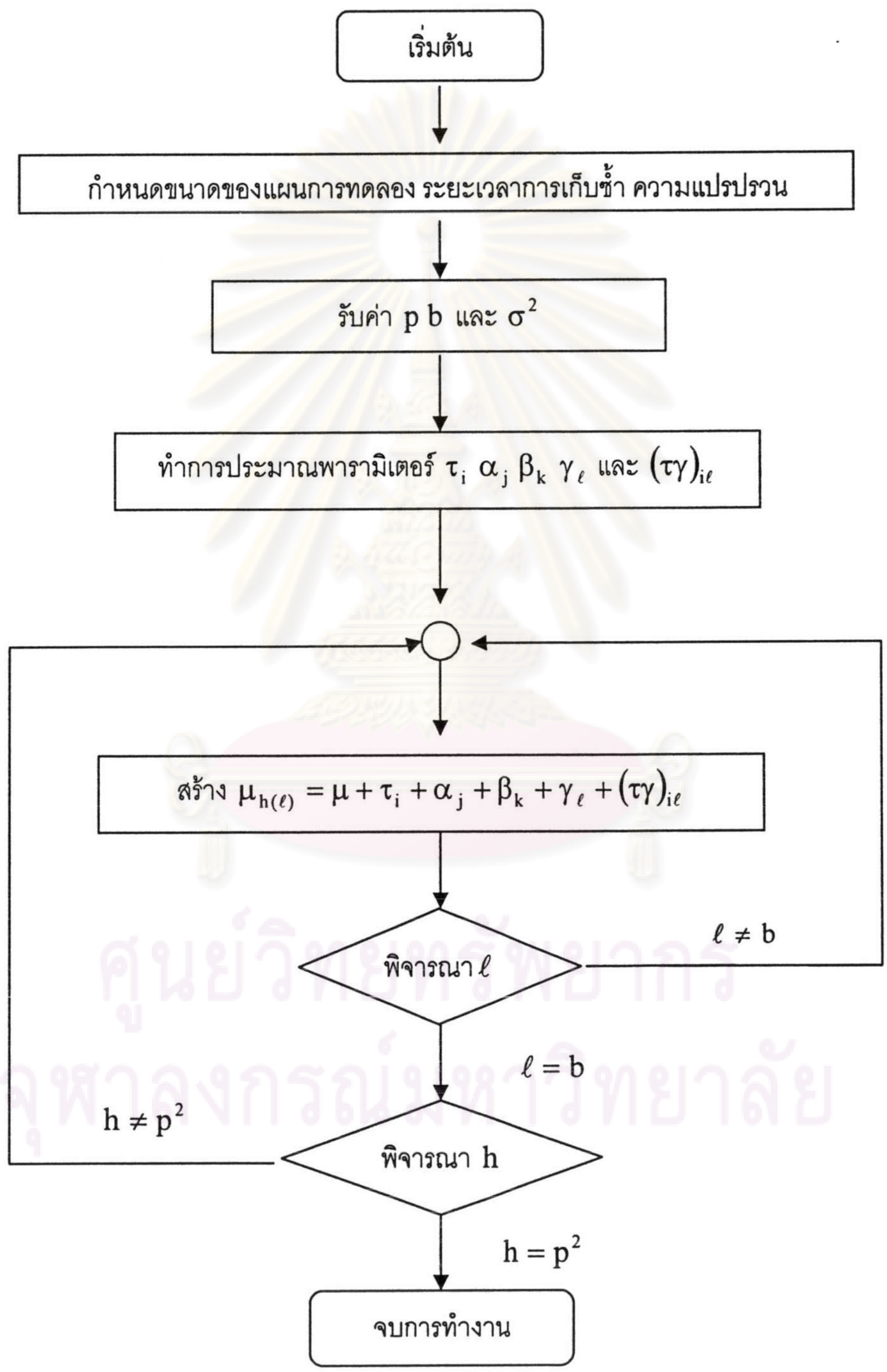
$$\mathrm{RMSE} = \frac{\sum_{j=1}^{500}\sqrt{\left(\underset{\sim}{y}^{*}_{j}-\underset{\sim}{\hat{y}}^{*}_{j}\right)'\left(\underset{\sim}{y}^{*}_{j}-\underset{\sim}{\hat{y}}^{*}_{j}\right)\Big/ M-r}}{500}$$

สำหรับการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ เกณฑ์การพิจารณา คือ วิธีประมาณวิธีใดให้ค่าน้อยกว่าแสดงว่าเหมาะสมกับการประมาณ

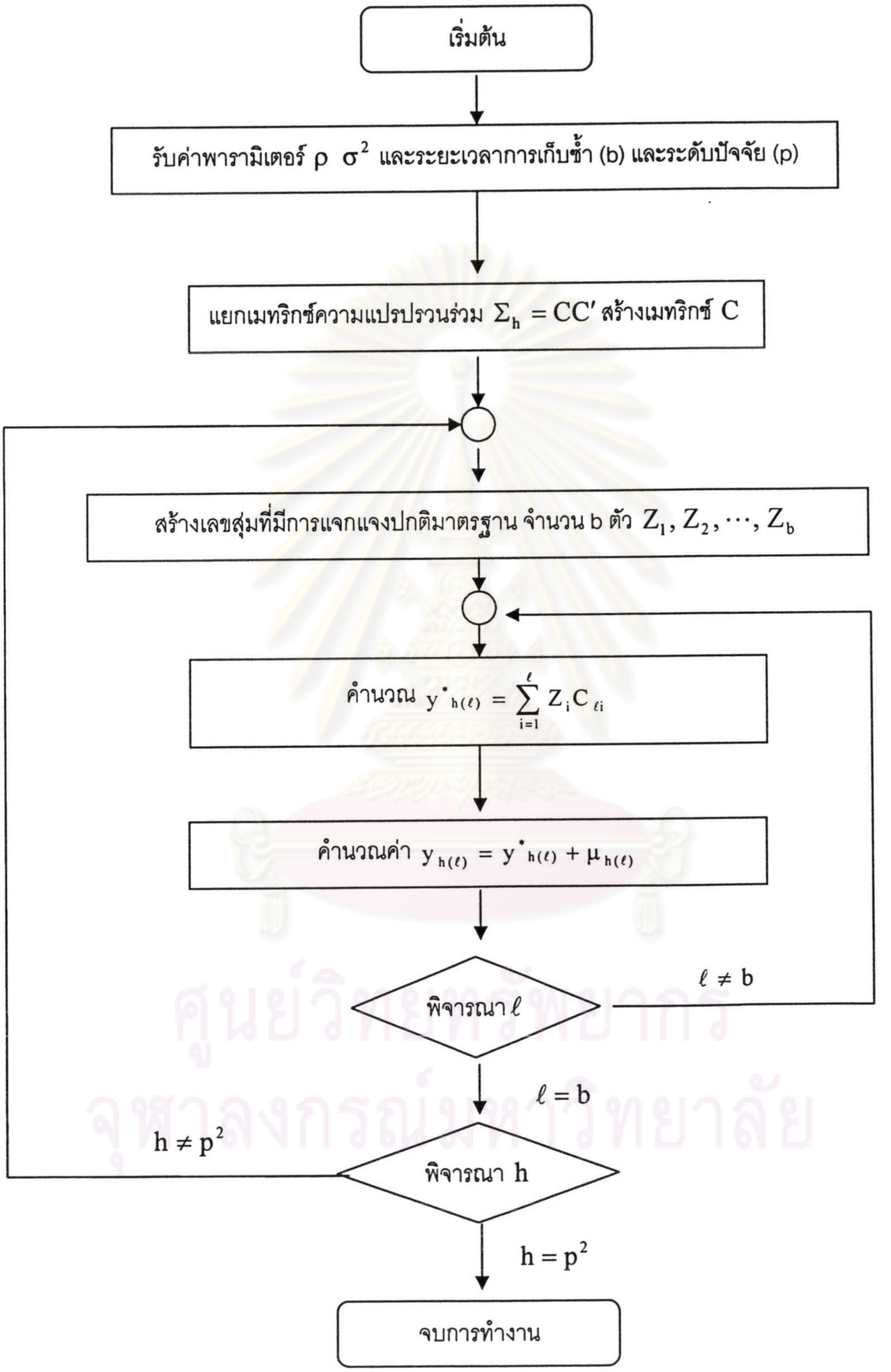
3.5 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

ในการวิจัยครั้งนี้ได้ใช้โปรแกรม S_PLUS200 ในการสร้างและประมวลข้อมูล การทำงานของโปรแกรมสามารถสรุปขั้นตอนการทำงานได้ดังนี้

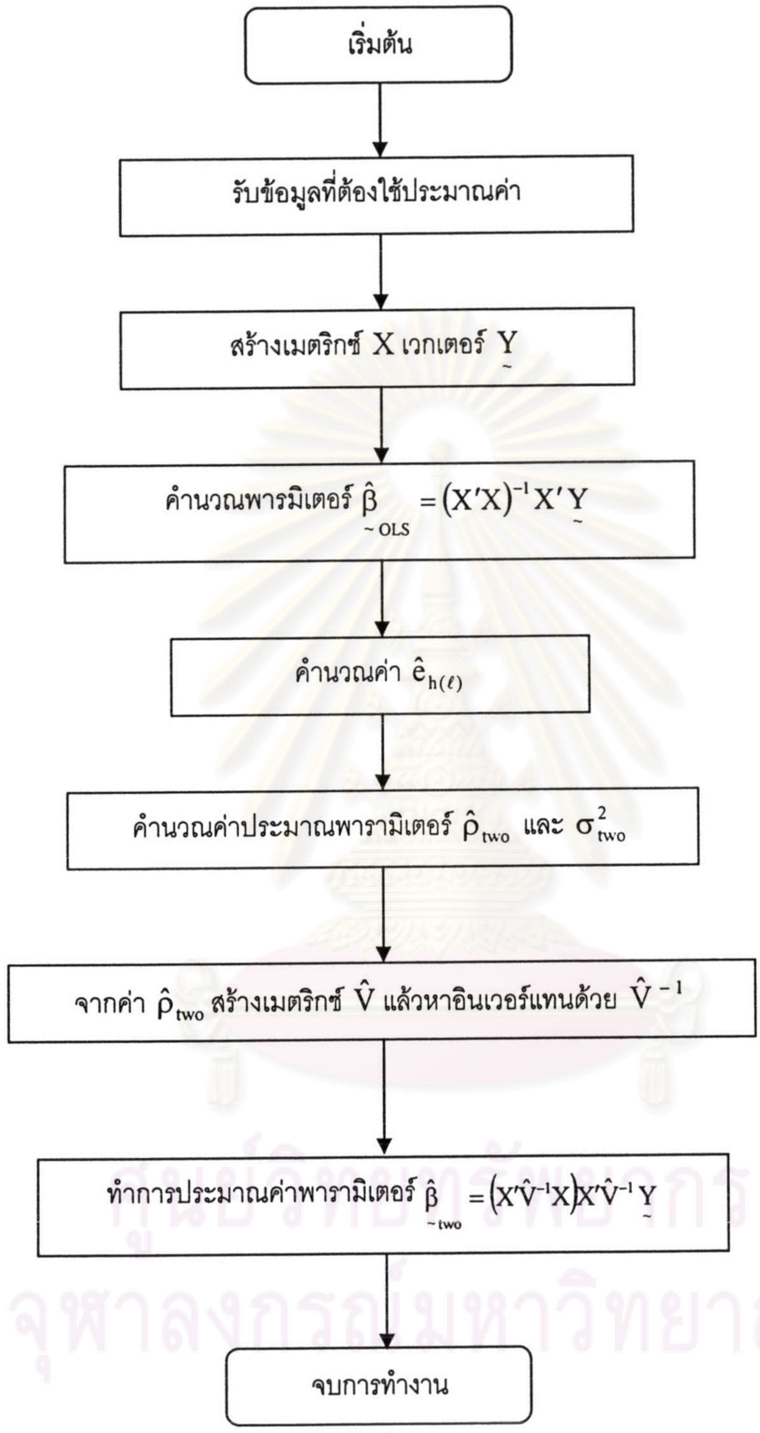
รูปที่ 3.5.1 แสดงขั้นตอนการสร้างเวกเตอร์ $\underset{\sim}{\mu}_h$



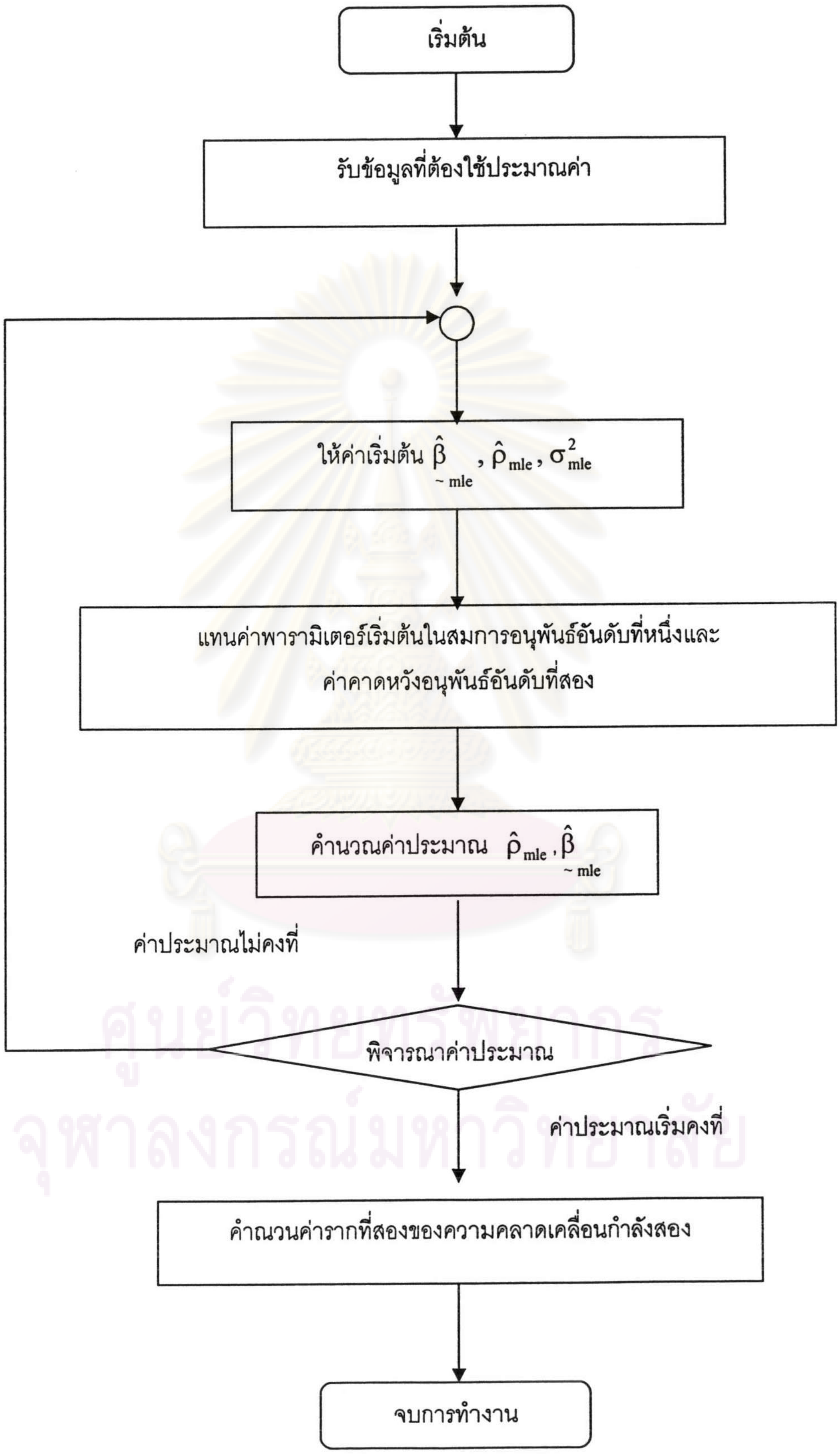
รูปที่3.5.2 สร้างข้อมูล $\underset{\sim h}{y}$ มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปรที่ค่าเฉลี่ย $\underset{\sim h}{\mu}$ ความแปรปรวน Σ_h



รูปที่3.5.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณแบบสองขั้น



รูปที่3.5.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด



รูปที่3.5.5 สรุปขั้นตอนการทำงานและการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์