บทที่2

ข้อมูลและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ตัวแบบที่ทำการศึกษา

$$Y_{h(\ell)} = \mu_{h(\ell)} + e_{h(\ell)}$$

หรือ

$$Y_{ijk(\ell)} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \beta_k + \gamma_\ell + (\tau\gamma)_{i\ell} + e_{ijk(\ell)} \qquad (2.1.1)$$

$$i = j = k = 1, 2, \cdots, p$$

$$\ell = 1, 2, \cdots, b$$

$Y_{ijk(\ell)}$ หมายถึง ค่าสังเกตปัจจัยทดลอง i ปัจจัยแบ่งบล็อกแรก j ปัจจัยแบ่งบล็อกที่สอง k เก็บซ้ำเวลาที่ ℓ

μ หมายถึง พารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยรวม

τ_i หมายถึง พารามิเตอร์ผลกระทบปัจจัยทดลอง i

α_j หมายถึง พารามิเตอร์ผลกระทบปัจจัยแบ่งบล็อกแรกระดับที่ j

β_k หมายถึง พารามิเตอร์ผลกระทบปัจจัยแบ่งบล็อกสองระดับที่ k

γ_ℓ หมายถึง พารามิเตอร์ผลกระทบจากการวัดซ้ำเวลาที่ ℓ

$(\tau\gamma)_{i\ell}$ หมายถึง พารามิเตอร์ผลกระทบร่วมระหว่างปัจจัยทดลองที่ i และการวัดซ้ำเวลาที่ ℓ

$e_{ijk(\ell)}$ หมายถึง ความคลาดเคลื่อนสุ่มของหน่วยทดลอง ปัจจัยทดลอง i ปัจจัยแบ่งบล็อกแรก j ปัจจัยแบ่งบล็อกที่สอง k และการวัดซ้ำเวลาที่ ℓ

หรือ

$Y_{h(\ell)}$ หมายถึง ค่าสังเกตจากหน่วยทดลอง h ในการวัดซ้ำครั้งที่ ℓ โดยมีจำนวนหน่วยทดลองทั้งหมด $N = p^2$ หน่วยทดลอง

$\mu_{h(\ell)}$ หมายถึง พารามิเตอร์ผลกระทบคงที่ทั้งหมดในหน่วยทดลอง h ในการวัดซ้ำระยะเวลาที่ ℓ

$e_{h(\ell)}$ หมายถึง ความคลาดเคลื่อนจากหน่วยทดลอง h ในการวัดซ้ำระยะเวลาที่ ℓ

ตามปกติความคลาดเคลื่อนในตัวแบบ $e_{h(\ell)}$ จะเป็นอิสระกันทุก ๆ ตัวและมีค่าเฉลี่ยที่ศูนย์ ความแปรปรวน σ^2 แต่เมื่อเราทำการเก็บข้อมูลจากหน่วยทดลองเดิมในบล็อกเดิมแล้วทำให้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการเก็บข้อมูลจะมีความสัมพันธ์กัน ซึ่งเราจะศึกษารูปแบบความสัมพันธ์ที่เป็นอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง

2.2 คุณสมบัติของความคลาดเคลื่อน

ในการวิจัยครั้งนี้เราจะศึกษารูปแบบความคลาดเคลื่อนของแต่ละหน่วยทดลองที่ได้รับอิทธิพลจากวิธีการทดลองและบล็อกเดิม มีรูปแบบความสัมพันธ์เป็นอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Order Auto Regressive Error : AR1) โดยสามารถเขียนรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$e_{h(\ell)} = \rho\, e_{h(\ell-1)} + \varepsilon_{h(\ell)} \quad \text{เมื่อ} \quad \begin{array}{l} h = 1, 2, \cdots, p^2 \\ \ell = 1, 2, \cdots, b \end{array}$$

โดยที่ $\varepsilon_{h(\ell)}$ เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบปกติ (Identical Independent Distribution) มีค่าเฉลี่ยที่ศูนย์และมีความแปรปรวน σ_ε^2 โดยปกติแล้วค่า $0 < \rho < 1$ แต่ค่าที่เป็นไปได้จะอยู่ระหว่าง $-1 < \rho < 1$ ซึ่งค่าจะเป็นลบแสดงว่าความสัมพันธ์ระหว่าง $e_{h(\ell)}$ และ $e_{h(\ell-1)}$ มีความสัมพันธ์กันในทิศทางตรงกันข้าม จากสมการ

$$e_{h(\ell)} = \rho\, e_{h(\ell-1)} + \varepsilon_{h(\ell)} \qquad (2.2.1)$$

เมื่อเราให้ความสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนหน่วยทดลองและบล็อกเดิมในเวลาถัดไปอีกหนึ่งระยะเวลาจะได้เป็น

$$e_{h(\ell-1)} = \rho\, e_{h(\ell-2)} + \varepsilon_{h(\ell-1)} \qquad (2.2.2)$$

$$e_{h(\ell-2)} = \rho\, e_{h(\ell-3)} + \varepsilon_{h(\ell-2)} \qquad (2.2.3)$$

$$e_{h(\ell-3)} = \rho\, e_{h(\ell-4)} + \varepsilon_{h(\ell-3)} \qquad (2.2.4)$$

$$\vdots$$

$$e_{h(2)} = \rho\, e_{h(1)} + \varepsilon_{h(2)} \qquad (2.2.b\text{-}1)$$

$$e_{h(1)} = \varepsilon_{h(1)} \qquad (2.2.b)$$

จากสมการข้างบนเราสามารถแทนค่า $e_{h(\ell-1)}$ สมการ (2.2.2) ลงในสมการ (2.2.1) และแทนค่า $e_{h(\ell-2)}$ สมการ (2.2.3) ลงไปในสมการ (2.2.2) แล้วนำไปแทนค่าในสมการต่อไปทำเช่นนี้ไปจนถึงสมการ (2.2.b) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} e_{h(\ell)} &= \rho(\rho\, e_{h(\ell-2)} + \varepsilon_{h(\ell-2)}) + \varepsilon_{h(\ell)} \\ &= \rho^2\, e_{h(\ell-2)} + \left(\rho\, \varepsilon_{h(\ell-1)} + \varepsilon_{h(\ell)}\right) \end{aligned}$$

แทนค่า $e_{h(\ell-2)}$ ลงในสมการข้างบน

$$\begin{aligned} &= \rho^2\left(\rho\, e_{h(\ell-3)} + \varepsilon_{h(\ell-2)}\right) + \left(\rho\, \varepsilon_{h(\ell-1)} + \varepsilon_{h(\ell)}\right) \\ &= \rho^3\, e_{h(\ell-3)} + \left(\rho^2\, \varepsilon_{h(\ell-2)} + \rho\, \varepsilon_{h(\ell-2)} + \varepsilon_{h(\ell)}\right) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

แทนค่าจนถึงสมการที่ (2.2.b) จะได้

$$= \sum_{r=0}^{\ell-1} \rho^{r} \, \varepsilon_{h(\ell-r)}$$

จะเห็นว่าเมื่อค่า $-1 < \rho < 1$ ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่เก็บมาจากต่างช่วงระยะเวลากันมาก จะมีความสัมพันธ์กันน้อยลง

2.2.1 ค่าคาดหมายของความคลาดเคลื่อน

จากสมการ

$$\begin{aligned} e_{h(\ell)} &= \sum_{r=0}^{\ell-1} \rho^{r} \, \varepsilon_{h(\ell-r)} \\ &= \varepsilon_{h(\ell)} + \rho \, \varepsilon_{h(\ell-1)} + \rho^{2} \, \varepsilon_{h(\ell-2)} + \cdots + \rho^{\ell-1} \varepsilon_{h(1)} \end{aligned}$$

เมื่อทำการหาค่าคาดหวัง

$$\begin{aligned} E(e_{h(\ell)}) &= E\left[\sum_{r=0}^{\ell-1} \rho^{r} \, \varepsilon_{h(\ell-r)}\right] \\ &= E(\varepsilon_{h(\ell)} + \rho \, \varepsilon_{h(\ell-1)} + \rho^{2} \, \varepsilon_{h(\ell-2)} + \cdots + \rho^{\ell-1} \varepsilon_{h(1)}) \\ &= E\left(\varepsilon_{h(\ell)}\right) + \rho E\left(\varepsilon_{h(\ell-1)}\right) + \rho^{2} E\left(\varepsilon_{h(\ell-2)}\right) + \cdots + \rho^{\ell-1} E\left(\varepsilon_{h(1)}\right) \end{aligned}$$

จากข้อตกลงเบื้องต้นกำหนดให้ $\varepsilon_{h(\ell)}$ เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบปกติ (Identical Independent Distribution) มีค่าเฉลี่ยที่ศูนย์และมีความแปรปรวน σ_{ε}^{2} จะได้ว่า

$$E\left(\varepsilon_{h(\ell)}\right) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \ell = 1, 2, \cdots, b$$

ดังนั้น

$$E(e_{h(\ell)}) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad \ell = 1, 2, \cdots, b \quad ; \quad h = 1, 2, \cdots, N$$

2.2.2 ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

พิจารณาค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $e_{h(\ell)}$ เมื่อความคลาดเคลื่อนเกิดอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$Var(e_{h(\ell)}) = Var\left[\sum_{r=0}^{\ell-1} \rho^{r} \, \varepsilon_{h(\ell-r)}\right]$$

จากคุณสมบัติของความแปรปรวน

$$Var(e_{h(\ell)}) = E(e_{h(\ell)}^{2}) - \left[E(e_{h(\ell)})\right]^{2}$$

พิจารณา $E\left(e^2_{h(\ell)}\right)$ จะได้ว่า

$$E\left[e^2_{h(\ell)}\right] = E\left[\left(\sum_{r=0}^{\ell-1} \rho^r \varepsilon_{h(\ell-r)}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\varepsilon_{h(\ell)} + \rho\,\varepsilon_{h(\ell-1)} + \rho^2\,\varepsilon_{h(\ell-2)} + \cdots + \rho^{\ell-1}\,\varepsilon_{h(\ell)}\right)^2\right]$$

$$= E\Big[\left(\varepsilon^2_{h(\ell)} + \rho^2\,\varepsilon^2_{h(\ell-1)} + \rho^4\,\varepsilon^2_{h(\ell-2)} + \cdots + \rho^{2\ell-2}\,\varepsilon^2_{h(1)}\right) +$$

$$2(\rho\,\varepsilon_{h(\ell)}\varepsilon_{h(\ell-1)} + \rho^3\varepsilon_{h(\ell-1)}\varepsilon_{h(\ell-2)} + \cdots + \rho^{2\ell-3}\varepsilon_{h(1)}\varepsilon_{h(2)})\Big]$$

จากข้อตกลงเบื้องต้น $\mathrm{Var}(\varepsilon_{h(\ell)}) = \sigma^2_\varepsilon$

$$E\left(\varepsilon^2_{h(\ell)}\right) = \mathrm{Var}\left(\varepsilon_{h(\ell)}\right) - \left[E\left(\varepsilon_{h(\ell)}\right)\right]^2$$

$$= \mathrm{Var}\left(\varepsilon_{h(\ell)}\right) + 0$$

$$= \sigma^2_\varepsilon$$

และ $\varepsilon_{h(\ell)}$ เป็นอิสระกันกับ $\varepsilon_{h(\ell')}$ เมื่อ $\ell \neq \ell' = 1, 2, \cdots, b$ จะได้ว่า

$$E\left(\varepsilon_{h(\ell)}\,\varepsilon_{h(\ell')}\right) = E\left[\varepsilon_{h(\ell)}\right]E\left[\varepsilon_{h(\ell')}\right]$$

$$= 0$$

ดังนั้น

$$E\left[e^2_{h(\ell)}\right] = E\left(\varepsilon^2_{h(\ell)}\right) + \rho^2\,E\left(\varepsilon^2_{h(\ell-1)}\right) + \rho^4\,E\left(\varepsilon^2_{h(\ell-2)}\right) + \cdots + \rho^{\ell-1}E\left(\varepsilon^2_{h(1)}\right)$$

$$= \sigma^2_\varepsilon + \rho^2\,\sigma^2_\varepsilon + \rho^4\,\sigma^2_\varepsilon + \cdots + \rho^{\ell-1}\sigma^2_\varepsilon$$

$$= \sigma^2_\varepsilon\left(1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \cdots + \rho^{\ell-1}\right)$$

เมื่อ $\ell \to \infty$ ค่าในวงเล็บเป็นผลบวกอนุกรมเรขาคณิตซึ่งมีค่าเท่ากับ $\dfrac{1}{1+\rho^2}$

$$= \frac{\sigma^2_\varepsilon}{1+\rho^2}$$

2.2.3 ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความคลาดเคลื่อนที่เก็บต่างเวลา จากนิยามความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่มจะได้ว่า

$$\mathrm{Cov}\left(e_{h(\ell)}, e_{h(\ell-1)}\right) = E\left[\left(e_{h(\ell)} - E\left(e_{h(\ell)}\right)\right)\left(e_{h(\ell-1)} - E\left(e_{h(\ell-1)}\right)\right)\right]$$

เนื่องจาก $E\left(e_{h(\ell)}\right) = E\left(e_{h(\ell-1)}\right) = 0$

จะได้ว่า

$$\mathrm{Cov}\left(e_{h(\ell)}, e_{h(\ell-1)}\right) = E\left(e_{h(\ell)}\, e_{h(\ell-1)}\right)$$

$$= E\left[\left(\sum_{r=0}^{\ell-1} \rho^{r}\, \varepsilon_{h(\ell-r)}\right)\left(\sum_{r=0}^{\ell-2} \rho^{r}\, \varepsilon_{h(\ell-r-1)}\right)\right]$$

$$= E\Big[\left(\varepsilon_{h(\ell)} + \rho\,\varepsilon_{h(\ell-1)} + \rho^{2}\,\varepsilon_{h(\ell-2)} + \rho^{3}\,\varepsilon_{h(\ell-3)} + \cdots + \rho^{\ell-1}\varepsilon_{h(1)}\right)$$

$$\left(\varepsilon_{h(\ell-1)} + \rho\varepsilon_{h(\ell-2)} + \rho^{2}\,\varepsilon_{h(\ell-3)} + \rho^{3}\,\varepsilon_{h(\ell-4)} + \cdots + \rho^{\ell-2}\varepsilon_{h(1)}\right)\Big]$$

$$= E\Big[\left(\varepsilon_{h(\ell-1)}\varepsilon_{h(\ell)} + \rho\varepsilon^{2}{}_{h(\ell-1)} + \rho^{2}\varepsilon_{h(\ell-1)}\varepsilon_{h(\ell-2)} + \cdots + \rho^{\ell-1}\varepsilon_{h(\ell-1)}\varepsilon_{h(1)}\right) +$$

$$\left(\rho\varepsilon_{h(\ell-2)}\varepsilon_{h(\ell)} + \rho^{2}\varepsilon_{h(\ell-2)}\varepsilon_{h(\ell-1)} + \rho^{3}\varepsilon^{2}_{h(\ell-2)} + \cdots + \rho^{\ell}\varepsilon_{h(\ell-2)}\varepsilon_{h(1)}\right) +$$

$$\cdots + \left(\rho^{\ell-2}\varepsilon_{h(1)}\varepsilon_{h(\ell)} + \rho^{\ell-1}\varepsilon_{h(1)}\varepsilon_{h(\ell-1)} + \cdots + \rho^{2\ell-3}\varepsilon^{2}_{h(1)}\right)\Big]$$

$$= E\Big[\left(\rho\varepsilon^{2}_{h(\ell-1)} + \rho^{3}\varepsilon^{2}_{h(\ell-2)} + \rho^{5}\varepsilon^{2}_{h(\ell-3)} + \cdots + \rho^{2\ell-3}\varepsilon^{2}_{h(1)}\right) +$$

$$\left(\varepsilon_{h(\ell)}\varepsilon_{h(\ell-1)} + \rho\varepsilon_{h(\ell)}\varepsilon_{h(\ell-2)} + \rho^{2}\varepsilon_{h(\ell)}\varepsilon_{h(\ell-3)} + \cdots + \rho^{2\ell-4}\varepsilon_{h(2)}\varepsilon_{h(1)}\right)\Big]$$

จากข้อสมมติ $\varepsilon_{h(\ell)}$ และ $\varepsilon_{h(\ell')}$ เป็นอิสระกันจะได้ว่า

$$\mathrm{Cov}\left(e_{h(\ell)}, e_{h(\ell-1)}\right) = \rho\sigma^{2}_{\varepsilon} + \rho^{3}\sigma^{2}_{\varepsilon} + \rho^{5}\sigma^{2}_{\varepsilon} + \rho^{7}\sigma^{2}_{\varepsilon} + \cdots + \rho^{2\ell-3}\sigma^{2}_{\varepsilon}$$

$$= \rho\sigma^{2}_{\varepsilon}\left(1 + \rho^{2} + \rho^{4} + \rho^{6} + \cdots + \rho^{2\ell-4}\right)$$

ในกรณี $\mathrm{Cov}(e_{h(\ell)}, e_{h(\ell-r)})$ การพิสูจน์ทำได้ในทำนองเดียวกันจะได้ว่าความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมอยู่ในรูป

$$\Sigma_{h(\ell'\ell)} = \sigma^{2}_{\varepsilon}\, \rho^{|\ell'-\ell|} \sum_{L=0}^{b-1} \rho^{2L} \quad ; h = 1, 2, \cdots, N \text{ เมื่อ } b = \min(\ell, \ell')$$

เช่น กรณีเก็บข้อมูลซ้ำ 3 ระยะเวลา

$$\Sigma_h = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \rho\sigma_\varepsilon^2 & \rho^2\sigma_\varepsilon^2 \\ \rho\sigma_\varepsilon^2 & (1+\rho^2)\sigma_\varepsilon^2 & \rho(1+\rho^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ \rho^2\sigma_\varepsilon^2 & \rho(1+\rho^2)\sigma_\varepsilon^2 & (1+\rho^2+\rho^4)\sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \ V_h$$

จากโมเดลที่ (2.1.1) เราสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์และเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}$$

โดยจะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมดังนี้

$$\mathrm{Cov}(\underset{\sim}{e}) = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_N \end{bmatrix}_{NbxNb}$$

โดยที่

$$\Sigma_h = \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{b-1} \\ \rho & (1+\rho^2) & \rho(1+\rho^2) & \cdots & \rho^{b-2}(1+\rho^2) \\ \rho^2 & \rho(1+\rho^2) & (1+\rho^2+\rho^4) & \cdots & \rho^{b-3}(1+\rho^2+\rho^4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{b-1} & \rho^{b-2}(1+\rho^2) & \rho^{b-3}(1+\rho^2+\rho^4) & \cdots & (1+\rho^2+\rho^4+\cdots+\rho^{2(b-1)}) \end{bmatrix}_{bxb}$$

เมื่อ $h = 1, 2, \cdots, N$

เมื่อกำหนดให้

$$V_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{b-1} \\ \rho & (1+\rho^2) & \rho(1+\rho^2) & \cdots & \rho^{b-2}(1+\rho^2) \\ \rho^2 & \rho(1+\rho^2) & (1+\rho^2+\rho^4) & \cdots & \rho^{b-3}(1+\rho^2+\rho^4) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{b-1} & \rho^{b-2}(1+\rho^2) & \rho^{b-3}(1+\rho^2+\rho^4) & \cdots & (1+\rho^2+\rho^4+\cdots+\rho^{2(b-1)}) \end{bmatrix}_{bxb}$$

จะได้ว่า

$$\Sigma_1 = \sigma_\varepsilon^2 V_1 \ , \ \Sigma_2 = \sigma_\varepsilon^2 V_2 \ , \ \cdots\cdots , \ \Sigma_N = \sigma_\varepsilon^2 V_N$$

2.2.4 การหาอินเวอร์สของเมทริกซ์

การหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ความคลาดเคลื่อนทำได้ดังต่อไปนี้ กำหนด A_{ii} และ B_{ii} เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาดเท่ากันซึ่งสามารถเขียนเมทริกซ์ A และ B ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

ถ้าเมทริกซ์ B เป็นอินเวอร์สของเมทริกซ์ A แล้ว $AB = I$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาดเท่ากับเมทริกซ์ A

$$AxB = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{nn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ A_{ij} และ B_{ij} มีขนาดเท่ากันเมื่อ $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, n$ จะได้ว่า

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & \cdots & A_{11}B_{1n} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} & \cdots & A_{22}B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{nn}B_{n1} & A_{nn}B_{n2} & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $AB = I$ ได้ก็ต่อเมื่อ $B_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ และ $B_{ii} = A_{ii}^{-1}$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}A_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}A_{nn}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{nn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ว่าเมื่อ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$

เมื่อเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน คือ $\sigma_{\varepsilon}^2 V$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & V_N \end{bmatrix}_{NbxNb}$$

จะได้ว่า $$V^{-1} = \begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & V_N^{-1} \end{bmatrix}_{NbxNb}$$

2.3 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับปัจจัยแบบคงที่และองค์ประกอบความแปรปรวน โดยปกติถ้าข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ไม่มีความสัมพันธ์กัน เราสามารถใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุด (Least square Estimation) และตัวประมาณที่ได้จะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและเป็นตัวประมาณที่ดีที่สุดในตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Best Linear Unbiased Estimator : BLUE) แต่เมื่อข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ไม่เป็นไปตามข้อสมมติ เช่น ข้อมูลมีความสัมพันธ์กัน ตัวประมาณที่ได้ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะไม่เป็นตัวประมาณที่ดีที่สุด

ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้ได้ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ คือ ประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบสองขั้น

2.3.1 วิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method)

จากโมเดลที่ (2.1.1) เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์และเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y}_h = X_h \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}_h$$

เมื่อ $\underset{\sim}{y}_h = \left(y_{h(1)}, y_{h(2)}, \cdots, y_{h(b)} \right)'$ คือ เวกเตอร์ของค่าสังเกตของหน่วยทดลองที่ได้รับปัจจัยทดลอง i ปัจจัยแบ่งบล็อกแรก j ปัจจัยแบ่งบล็อกที่สอง k ขนาด $(b \times 1)$

$\underset{\sim}{\beta}$ คือ เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าขนาด $(r \times 1)$

X_h คือ เมทริกซ์คงที่ขนาด $(b \times r)$

$\underset{\sim h}{e}$ คือ เวกเตอร์สุ่มความคลาดเคลื่อนขนาด $(b \times 1)$

โดยแทนเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $e_{h(\ell)}$ และ $e_{h(\ell')}$ ด้วยสัญลักษณ์ Σ_h จากข้อสมมติเราให้ $\underset{\sim h}{e}$ มีการแจกแจงแบบปกติหลายตัวแปร และ $e_{h(\ell)}$ และ $e_{h(\ell')}$ มีความสัมพันธ์กันในรูปแบบอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่งดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\underset{\sim h}{Y} \sim N_b\left(X_h \underset{\sim}{\beta}, \Sigma_h\right)$$

จะได้ว่าฟังก์ชันการแจกแจกความน่าจะเป็นของแต่ละหน่วยทดลองเป็นดังนี้

$$f\left(\underset{\sim h}{y}; x_h \underset{\sim}{\beta}, \Sigma_h\right) = \frac{1}{(2\pi)^{b/2}\left|\Sigma_h\right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)' \Sigma_h^{-1}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right)$$

เมื่อ $\Sigma_h = \sigma_\varepsilon^2 V_h$ จะได้ว่า

$$f\left(\underset{\sim h}{y}; x_h \underset{\sim}{\beta}, \Sigma_h\right) = \frac{1}{(2\pi)^{b/2}\left|\sigma_\varepsilon^2 V_h\right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right)$$

จากข้อสมมติกำหนดให้หน่วยทดลองแต่ละหน่วยเป็นอิสระกันและมีการแจกแจงลักษณะเดียวกันที่เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\underset{\sim h}{\mu}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนเดียวกันหรือ $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots = \Sigma_N$ เมื่อ $N = p^2$ ทำให้เราสามารถหาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม (Joint Distribution) ของเวกเตอร์ $\underset{\sim h}{y}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f\left(\underset{\sim 1}{y}, \underset{\sim 2}{y}, \cdots, \underset{\sim N}{y}; X_h \underset{\sim}{\beta}, \Sigma_h\right) &= \prod_{h=1}^{N} f\left(\underset{\sim h}{y}; X_h \underset{\sim}{\beta}, \Sigma_h\right) \\ &= \prod_{h=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{b/2}\left|\sigma_\varepsilon^2 V_h\right|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right) \\ &= \left(\prod_{h=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{b/2}\left|\sigma_\varepsilon^2 V_h\right|^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right) \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันความควรจะเป็น (Likelihood Function) ดังนี้ คือ

$$L(\underset{\sim}{\beta}, \rho, \sigma_\varepsilon^2) = \left(\prod_{h=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^{b/2}\left|\sigma_\varepsilon^2 V_h\right|^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\left(\underset{\sim h}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right)$$

(2.3.1.1)

ทำการหาตัวประมาณของ $\underset{\sim}{\beta}$ โดยทำการหาค่า $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน (2.3.1.1) มีค่ามากที่สุดทำการแปลงเป็นฟังก์ชัน log ฐาน e เพราะจะสะดวกในการหาค่าประมาณมากกว่า และฟังก์ชัน log เป็นฟังก์ชันเพิ่มสำหรับฟังก์ชันการแจกแจงใด ๆ ทำให้ค่าประมาณที่ได้ยังคงเป็นค่าเดียวกันกับการหาค่าโดยปกติ จะได้ว่า

$$\ln L = \sum_{h=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{b/2}\left|\sigma_\varepsilon^2 V_h\right|^{1/2}}\right) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)$$

ดังนั้น

$$\ln L = c - \frac{1}{2}N\ln\left|\sigma_\varepsilon^2 V_h\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right) \qquad (2.3.1.2)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่

พิจารณาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมจะได้ว่า V_h เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน (Positive definite) ทำการแยกเมทริกซ์ให้อยู่ในรูป

$$V_h^{-1} = \left(V^{-1/2}\right)' V^{-1/2}$$

โดยใช้วิธี Spectral Decomposition คือ ถ้าเมทริกซ์ $C_h = \left(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \cdots, \underset{\sim}{x}_b\right)$ เป็นเมทริกซ์ของไอเค็นเวกเตอร์ (Eigen vectors) ขนาดเท่ากับ 1 ของเมทริกซ์สมมาตร V_h^{-1} แล้วจะได้ว่า C_h ตั้งฉาก (Orthogonal) กับเมทริกซ์ C_h' กล่าวคือ

$$I = C_h C_h' = C_h' C_h$$

นั่นคือ

$$V_h^{-1} = V_h^{-1} C_h C_h'$$

เมื่อเราแทนค่าเมทริกซ์ $C_h = \left(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \cdots, \underset{\sim}{x}_b\right)$ โดยที่ $\underset{\sim}{x}$ เป็นเวกเตอร์จากไอเค็นเวกเตอร์ขนาดเท่ากับ 1 (Normalize eigen vector) ของเมทริกซ์ V_h^{-1} จะได้

$$\begin{aligned} V_h^{-1} &= V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \cdots, \underset{\sim}{x}_b\right)C_h' \\ &= \left(V_h^{-1}\underset{\sim}{x}_1, V_h^{-1}\underset{\sim}{x}_2, \cdots, V_h^{-1}\underset{\sim}{x}_b\right)C_h' \\ &= \left(\lambda_1\underset{\sim}{x}_1, \lambda_2\underset{\sim}{x}_2, \cdots, \lambda_b\underset{\sim}{x}_b\right)C_h' \end{aligned}$$

เมื่อ λ_i , $i = 1, 2, \cdots, b$ เป็นค่าไอเค็นแวลยู (Eigen value) ของเมทริกซ์ V_h^{-1}

$$= C_h D_h C_h'$$

กำหนดให้

$$D_h = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_b \end{bmatrix}$$

ดังนั้นได้ความสัมพันธ์

$$C_h{}' V_h^{-1} C_h = D_h$$

กำหนด

$$D_h^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_b} \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V_h^{-1} &= \left(C_h D^{1/2} C_h{}'\right)\left(C_h D_h^{1/2} C_h{}'\right) \\ &= C_h D_h^{1/2} D_h^{1/2} C_h{}' \\ &= C_h D_h C_h{}' \end{aligned}$$

กำหนด

$$V_h^{-1/2} = C_h D_h^{1/2} C_h{}'$$

และได้ว่า $V_h^{-1/2}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix)

ดังนั้น

$$V_h^{-1} = \left(V_h^{-1/2}\right)' V_h^{-1/2}$$

จากสมการที่ (2.3.1.2) จะได้ว่า

$$\ln L = c - \frac{1}{2} M \ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2} N \sum_{h=1}^{N} \ln\left|V_h\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{h=1}^{N} \left\{ V_h^{-1/2} (\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}) \right\}' \left\{ V_h^{-1/2} (\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}) \right\} \qquad (2.3.1.3)$$

เมื่อ $M = Nxb$ จำนวนข้อมูลทั้งหมด และจากความคลาดเคลื่อนมีรูปแบบความสัมพันธ์เป็นอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่งจะได้ว่า $\left|V_h\right| = 1$

2.3.1.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$

<u>นิยาม 2.3.1</u>

ถ้า $\ln L$ เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) และ $\underset{\sim}{\beta}$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ในฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (first differential) เทียบกับเวกเตอร์พารามิเตอร์ คือ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta 2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta_r} \end{bmatrix}_{rx1}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\beta}$ ขนาด rx1

<u>นิยาม 2.3.2</u>

ถ้า $\ln L$ เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) และ $\underset{\sim}{\beta}$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ในฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นการหาอนุพันธ์อันดับที่สอง (second differential) เทียบกับพารามิเตอร์ คือ

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_i \, \partial \beta_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \, \partial \beta_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_1 \, \partial \beta_r} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_2 \, \partial \beta_1} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_2 \, \partial \beta_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_r \, \partial \beta_1} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_r \, \partial \beta_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_r^2} \end{bmatrix}_{rxr}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\beta}$ ขนาด rx1

<u>นิยาม 2.3.3</u>

ถ้า $\ln L$ เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) และ $\underset{\sim}{\beta}$ เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ในฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นดังนั้นค่าคาดหวัง (Expected) ของอนุพันธ์อันอับที่สองเทียบกับพารามิเตอร์ คือ

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_i\,\partial\beta_j}\right) = \begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_1^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_1\,\partial\beta_2}\right) & \cdots & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_1\,\partial\beta_r}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_2\,\partial\beta_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_2^2}\right) & \cdots & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_2\,\partial\beta_r}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_r\,\partial\beta_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_r\,\partial\beta_2}\right) & \cdots & E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_r^2}\right) \end{bmatrix}_{rxr}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\beta}$ ขนาด rx1

นิยาม 2.3.4

ให้ V_h เป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมขนาด pxp การหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรใด ๆ ในเมทริกซ์ กระทำได้ดังนี้

$$\frac{\partial V_h}{\partial\rho} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{11}}{\partial\rho} & \frac{\partial V_{12}}{\partial\rho} & \cdots & \frac{\partial V_{1p}}{\partial\rho} \\ \frac{\partial V_{21}}{\partial\rho} & \frac{\partial V_{22}}{\partial\rho} & \cdots & \frac{\partial V_{2p}}{\partial\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_{p2}}{\partial\rho} & \frac{\partial V_{p2}}{\partial\rho} & \cdots & \frac{\partial V_{pp}}{\partial\rho} \end{bmatrix}$$

นิยาม 2.3.5

ถ้า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$(rx1) เป็นเวกเตอร์สุ่มของตัวประมาณพารามิเตอร์ ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ

$$\begin{aligned} Cov\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right) &= Cov\left(\hat{\underset{\sim i}{\beta}}, \hat{\underset{\sim j}{\beta}}\right)_{rxr} \\ &= E\left\{\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - E(\hat{\underset{\sim}{\beta}})\right)\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}} - E(\hat{\underset{\sim}{\beta}})\right)'\right\} \end{aligned}$$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ใช้วิธีวนซ้ำ (Scoring Method) โดยให้ $\underset{\sim k}{\beta}$ คือค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากรอบที่ k ตามกระบวนการซ้ำ จะได้ $\underset{\sim ML}{\beta}$

$$\hat{\underset{\sim k+1}{\beta}} = \hat{\underset{\sim k}{\beta}} + \left(\hat{H}_{\beta\beta'}\right)^{-1} \frac{\partial(\ln L)^k}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \qquad (2.3.1.4)$$

พิจารณาฟังก์ชัน (2.3.1.3) กำหนดให้

$$
\begin{aligned}
Q_h &= \left\{V_h^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right\}' \left\{V_h^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right\} \\
&= \left\{\left(\underset{\sim}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)'\left(V_h^{-1/2}\right)'\right\}\left\{\left(V_h^{-1/2}\right)\left(\underset{\sim}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right\} \\
&= \left\{\underset{\sim}{y}_h{}'\left(V_h^{-1/2}\right)' - \underset{\sim}{\beta}' X_h'\left(V_h^{-1/2}\right)'\right\}\left\{\left(V_h^{-1/2}\right)\underset{\sim}{y}_h - \left(V_h^{-1/2}\right)X_h \underset{\sim}{\beta}\right\} \\
&= \underset{\sim}{y}_h{}'\left(V_h^{-1/2}\right)' V_h^{-1/2} \underset{\sim}{y}_h - \underset{\sim}{\beta}' X_h'\left(V_h^{-1/2}\right)' V_h^{-1/2} \underset{\sim}{y}_h - \underset{\sim}{y}_h{}'\left(V_h^{-1/2}\right)' V_h^{-1/2} X_h \underset{\sim}{\beta} \\
&\quad + \underset{\sim}{\beta}' X_h'\left(V_h^{-1/2}\right)' V_h^{-1/2} X_h \underset{\sim}{\beta} \\
&= \underset{\sim}{y}_h{}' V_h^{-1} \underset{\sim}{y}_h - \underset{\sim}{\beta}' X_h' V_h^{-1} \underset{\sim}{y}_h - \underset{\sim}{y}_h{}' V_h^{-1} X_h \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}'\left(V_h^{-1/2} X_h\right)'\left(V_h^{-1/2} X_h\right)\underset{\sim}{\beta}
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า

$$
\ln L = c - \frac{1}{2} M \ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2} N \sum_{h=1}^{N} \ln\left|V_h\right| - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{h=1}^{N} Q_h \qquad (2.3.1.5)
$$

ได้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ หรือ Score equation ของ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} &= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{h=1}^{N} \left\{- X_h' V_h^{-1} \underset{\sim}{y} - \left(\underset{\sim}{y}_h{}' V_h^{-1} X_h\right)' + 2\left(V_h^{-1/2} X_h\right)'\left(V_h^{-1/2} X_h\right)\underset{\sim}{\beta}\right\} \\
&= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{h=1}^{N} \left\{- X_h'\left(V_h^{-1/2}\right)' V_h^{-1/2} \underset{\sim}{y}_h - X_h'\left(V_h^{-1/2}\right)' V_h^{-1/2} \underset{\sim}{y}_h \right. \\
&\qquad \left. + 2\left(V_h^{-1/2} X_h\right)'\left(V_h^{-1/2} X_h\right)\underset{\sim}{\beta}\right\} \\
&= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{h=1}^{N} \left\{- 2X_h'\left(V_h^{-1/2}\right) V_h^{-1/2} \underset{\sim}{y} + 2\left(V_h^{-1/2} X_h\right)'\left(V_h^{-1/2} X_h\right)\underset{\sim}{\beta}\right\} \\
&= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{h=1}^{N} \left\{- 2X_h\left(V_h^{-1/2}\right) V_h^{-1/2} \underset{\sim}{y} + 2\left(X_h'\left(V_h^{-1/2}\right)'\right)\left(V_h^{-1/2} X_h\right)\underset{\sim}{\beta}\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{h=1}^{N} X_h'\left(V_h^{-1/2}\right)' V_h^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{h=1}^{N} X_h' V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ทั้งหมดจะได้ว่า

$$
= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} X' V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - X \underset{\sim}{\beta}\right)
$$

การหาอนุพันธ์อันดับที่สองเทียบกับพารามิเตอร์ β_i และ β_j ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_i\,\partial\beta_j} = -\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N} X_h{}' V_h^{-1/2} V_h^{-1/2} X_h$$

$$= -\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N} X_h{}' V_h^{-1} X_h$$

ค่าคาดหวังของอนุพันธ์อันดับที่สองเทียบกับพารามิเตอร์ คือ

$$H_{\beta\beta'} = E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta_i\,\partial\beta_j}\right) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N} X_h{}' V_h^{-1} X_h$$

เขียนในรูปเมทริกซ์จะได้ว่า $= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} X'V^{-1}X$

เมื่อแทนค่าในสมการ (2.3.1.4) จะได้ว่า

$$\underset{\sim k+1}{\beta} = \underset{\sim k}{\beta} + \sigma_\varepsilon^2\left(X'V^{-1}X\right)^{-1}\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}X'V^{-1}\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim k}{\beta}\right)$$

$= \underset{\sim k}{\beta} + \left(X'V^{-1}X\right)X'V^{-1}\underset{\sim}{Y} - I\underset{\sim k}{\beta}$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ จะได้

$$= \left(X'V^{-1}X\right)X'V\underset{\sim}{Y}$$

เมื่อจำนวนหน่วยทดลองมากการแจกแจงของ $\underset{\sim}{\beta}$ จะสามารถประมาณได้จากการแจกแจงแบบปกติ และได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมดังนี้

$$Cov\left(\underset{\sim ML}{\hat{\beta}}\right) \approx \hat{\sigma}_\varepsilon^2\left(\sum_{h=1}^{N} X_h{}'\hat{V}_h^{-1}X_h\right)^{-1}$$

2.3.1.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\theta} = (\sigma_\varepsilon^2, \rho)$

ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยให้ $\underset{\sim k}{\theta}$ คือ ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากรอบที่ k ตามกระบวนการซ้ำ และจะได้ $\underset{\sim ML}{\hat{\theta}}$

$$\underset{\sim k+1}{\hat{\theta}} = \underset{\sim k}{\hat{\theta}} + \left(\hat{H}_{\sigma_\varepsilon^2\rho}\right)^{-1}\frac{\partial(\ln L)^k}{\partial\underset{\sim}{\theta}}$$

เมื่อ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\underset{\sim}{\theta}} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial \ln L}{\partial\sigma_\varepsilon^2}\\[2mm] \dfrac{\partial \ln L}{\partial\rho}\end{bmatrix}$$

และ

$$H_{\sigma_\varepsilon^2\rho} = E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right) = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma_\varepsilon^2\,\partial\rho}\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\rho\,\partial\sigma_\varepsilon^2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\rho^2}\right) \end{bmatrix}$$

พิจารณาการหาอนุพันธ์ครั้งที่หนึ่งของฟังก์ชันภาวะน่าเป็นเทียบกับ σ_ε^2 คือ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}M$$

เมื่อ $M = N \times b$

การหาอนุพันธ์ครั้งที่สองของฟังก์ชันภาวะน่าเป็นเทียบกับ $\left(\sigma_\varepsilon^2\right)^2$ คือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma_\varepsilon^4} &= -\frac{1}{\sigma_\varepsilon^6}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right) + \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4}M \\ &= -\frac{1}{\sigma_\varepsilon^4}\sum_{h=1}^{N}\left\{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}V^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)\right\}'\left\{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}V^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)\right\} + \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}M\end{aligned}$$

กำหนดให้

$$\underset{\sim}{\xi}_h = \left\{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}V^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)\right\}$$

ดังนั้น

$$\underset{\sim}{\xi}_h'\,\underset{\sim}{\xi}_h = \sum_{\ell=1}^{b}\xi_{h(\ell)}^2$$

ให้ ξ มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน $\xi \sim N(0,\ 1)$ จะได้ว่า $E(\xi) = 0$ และ $Var(\xi) = E(\xi^2) = 1$ และ

$$\begin{aligned}E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma_\varepsilon^4}\right) &= E\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon^4}\sum_{h=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{b}\xi_{h(\ell)}^2\right) - E\left(\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4}M\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^4}M - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4}M \\ &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4}M\end{aligned}$$

การหาอนุพันธ์ครั้งที่สองของฟังก์ชันภาวะน่าเป็นเทียบกับ $\left(\sigma_\varepsilon^2\right)$ และ ρ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma_\varepsilon^2\partial\rho} = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)'\frac{\partial V_h^{-1}}{\partial\rho}\left(\underset{\sim}{y} - X_h\underset{\sim}{\beta}\right)'$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial V_h^{-1}}{\partial \rho} = -V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \rho} = -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^4}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N}\left\{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}V_h^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right\}' V_h^{-1/2}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1/2}\left\{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}V_h^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y} - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N}\underset{\sim}{\xi}_h' V_h^{-1/2}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1/2}\underset{\sim}{\xi}_h$$

เนื่องจาก $\xi \sim N(0,\ 1)$ ดังนั้น $E(\xi) = 0$; $Var(\xi) = E(\xi^2) = 1$ และ $E(\xi_i, \xi_j) = 0$ จะได้ว่า

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma_\varepsilon^2 \partial \rho}\right) = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N} tr\left(V_h^{-1/2}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1/2}\right)$$

จาก $tr(AB) = tr(BA)$ จะได้

$$= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N} tr\left(V_h^{-1/2}V_h^{-1/2}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N} tr\left(V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}\right)$$

กรณีความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันรูปแบบอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง จะได้ว่า $|V_h| = 1$ และ $\frac{\partial |V_h|}{\partial \rho} = tr\left(V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}\right) = 0$ ดังนั้น จะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์ ρ และ σ_ε^2 ไม่มีความสัมพันธ์กันการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสองจึงสามารถที่จะประมาณแยกกันได้

การหาอนุพันธ์ครั้งที่หนึ่งของฟังก์ชันภาวะน่าเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ ρ คือ

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)' V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right) - \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N} tr\left(V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}\right)$$

และได้ว่า $tr\left(V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}\right) = 0$

การหาอนุพันธ์ครั้งที่สองของฟังก์ชันภาวะน่าเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ ρ คือ

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \rho^2} = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{N}\left\{\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)'\left(-V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1} + V_h^{-1}V_h^{-1}\frac{\partial^2 V_h}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\right)\right.$$

$$\left.\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right\} - \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\mathrm{tr}\left(V_h^{-1}\frac{\partial^2 V_h}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\left\{\left\{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}V_h^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right\}'\left(-V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho} + V_h^{-1}\frac{\partial^2 V_h}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\right)\right.$$

$$\left.\left\{\frac{1}{\sigma_\varepsilon}V_h^{-1/2}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)\right\}\right\} - \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\mathrm{tr}\left(V_h^{-1}\frac{\partial^2 V_h}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\left\{\underset{\sim}{\xi}_h'\left(-V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho} + V_h^{-1}\frac{\partial^2 V_h}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\right)\underset{\sim}{\xi}_h\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\mathrm{tr}\left\{V_h^{-1}\frac{\partial^2 V_h}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\right\}$$

ค่าคาดหวังอนุพันธ์ครั้งที่สองของฟังก์ชันภาวะน่าเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ ρ^2 คือ

$$E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \rho^2}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\mathrm{tr}\left\{-V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho} + V_h^{-1}\frac{\partial^2 V_h}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\mathrm{tr}\left\{V_h^{-1}\frac{\partial^2 V_h}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{N}\mathrm{tr}\left(V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}V_h^{-1}\frac{\partial V_h}{\partial \rho}\right)$$

เนื่องจากพารามิเตอร์ ρ และ σ_ε^2 ไม่มีความสัมพันธ์กันการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสองจึงสามารถที่จะประมาณแยกกันได้ การประมาณค่าพารามิเตอร์ ρ ได้โดยการวนซ้ำดังนี้

$$\hat{\rho}_{k+1} = \hat{\rho}_k + \left(\hat{H}_{\rho\rho}\right)^{-1}\frac{\partial(\ln L)^k}{\partial \rho}$$

และประมาณพารามิเตอร์ σ_ε^2 จาก

$$\hat{\sigma}^2_{k+1} = \hat{\sigma}^2_k + \left(\hat{H}_{\sigma^2\sigma^2}\right)^{-1}\frac{\partial(\ln L)^k}{\partial \rho}$$

$$= \hat{\sigma}_k^2 + \left(\frac{1}{2\sigma_k^4}\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)'V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right) - \frac{1}{2\sigma_4^2}M\right)\frac{2\hat{\sigma}_k^4}{M}$$

$$= \frac{\sum_{h=1}^{N}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)'V_h^{-1}\left(\underset{\sim}{y}_h - X_h \underset{\sim}{\beta}\right)}{M}$$

2.3.2 **วิธีการประมาณแบบสองขั้น** (Two-Stage Estimation Method)

เนื่องจากการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับข้อมูลระยะยาวนั้น ความคลาดเคลื่อนของข้อมูลจากการเก็บในหน่วยทดลองเดิมแต่ละครั้งไม่เป็นอิสระกัน และมีรูปแบบความสัมพันธ์เป็นอัตตสหสัมพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งมีพารามิเตอร์ ρ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ดังนั้นเราจะทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\rho}$ ก่อนแล้วค่อยทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งวิธีการประมาณนี้เรียกว่าวิธีการประมาณแบบสองขั้น ซึ่งมีขั้นตอนและวิธีการดังนี้

1. ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ
2. คำนวณหาความคลาดเคลื่อน $\hat{e}_{h(\ell)}$ ที่เกิดจากการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ
3. คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\hat{\rho}$ ที่เกิดขึ้นระหว่างความคลาดเคลื่อน $\hat{e}_{h(\ell)}$ และ $\hat{e}_{h(\ell-1)}$
4. ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไป โดยใช้ค่า $\hat{\rho}$ ที่ได้ในการประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมแทนด้วย $\hat{V}_h$

<u>ขั้นที่ 1 ทำการประมาณค่า $\hat{\rho}$</u>

<u>วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ (Ordinary Least Square Method)</u>

จากสมการที่ (2.1.1) เราสามารถเขียนสมการในรูปเมทริกซ์และเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ โดยทำให้ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่าพารามิเตอร์มีค่าน้อยที่สุด พิจารณา ให้ Q เป็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการประมาณค่าจะได้ว่า

$$\begin{aligned} Q &= \left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat{Y}}\right)'\left(\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat{Y}}\right) \\ &= \left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}\right)'\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}\right) \\ &= \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\beta}'X'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{Y}'X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}'X'X\underset{\sim}{\beta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_i} = 2\,X'\,\underset{\sim}{Y} \;-\; 2\,X'\,X\,\underset{\sim}{\beta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_i} = 0 \text{ เมื่อ } i = 1, 2, \cdots, r$$

จากนั้นทำการแก้สมการหาค่า $\underset{\sim}{\beta}$ จะได้ว่า

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1} X' \underset{\sim}{Y}$$

ทำการคำนวณหาความคลาดเคลื่อน $\hat{e}_{h(\ell)} = Y_{h(\ell)} - \hat{Y}_{h(\ell)}$ นำค่าที่ได้มาคำนวณหาค่า $\hat{\rho}$ โดยใช้โมเดลดังนี้

$$\hat{e}_{1(b)} = \rho\, \hat{e}_{1(b-1)} + \varepsilon_{1(b)}$$
$$\hat{e}_{1(b-1)} = \rho\, \hat{e}_{1(b-1)} + \varepsilon_{1(b-1)}$$
$$\vdots$$
$$\hat{e}_{1(2)} = \rho\, \hat{e}_{1(1)} + \varepsilon_{1(2)}$$

$$\hat{e}_{2(b)} = \rho\, \hat{e}_{2(b-1)} + \varepsilon_{2(b)}$$
$$\hat{e}_{2(b-1)} = \rho\, \hat{e}_{2(b-1)} + \varepsilon_{2(b-1)}$$
$$\vdots$$
$$\hat{e}_{2(2)} = \rho\, \hat{e}_{2(1)} + \varepsilon_{2(2)}$$

$$\vdots$$

$$\hat{e}_{N(b)} = \rho\, \hat{e}_{N(b-1)} + \varepsilon_{N(b)}$$
$$\hat{e}_{N(b-1)} = \rho\, \hat{e}_{N(b-1)} + \varepsilon_{N(b-1)}$$
$$\vdots$$
$$\hat{e}_{N(2)} = \rho\, \hat{e}_{N(1)} + \varepsilon_{N(2)}$$

จะได้

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{h=1}^{N}\sum_{\ell=2}^{b} \hat{e}_{h(\ell)}\, \hat{e}_{h(\ell-1)}}{\sum_{h=1}^{N}\sum_{\ell=2}^{b} \hat{e}^{2}_{h(\ell-1)}}$$

<u>ขั้นที่2</u> ประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไป

<u>วิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไป</u> (Generalized Least Square Method)

หลักการของการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบทั่วไป คือ เมื่อข้อมูลมีความสัมพันธ์กันจะทำการปรับเพื่อให้ข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กันแล้วทำการหาตัวประมาณด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ จะเห็นว่าความคลาดเคลื่อนจากหน่วยทดลองแต่ละหน่วยมีรูปแบบความสัมพันธ์ คือ $\mathrm{Cov}\left(\underset{\sim}{e}\right) = \Sigma = \sigma_{\varepsilon}^{2} V$ โดยสามารถเขียนโมเดลในรูปแบบเมทริกซ์ และเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}$$

เมื่อ

$$V_h = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{b-1} \\ \rho & (1+\rho^2) & \rho(1+\rho^2) & \cdots & \rho^{b-2}\left(1+\rho^2\right) \\ \rho^2 & \rho\left(1+\rho^2\right) & (1+\rho^2+\rho^4) & \cdots & \rho^{b-3}\left(1+\rho^2+\rho^4\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{b-1} & \rho^{b-2}\left(1+\rho^2\right) & \rho^{b-3}\left(1+\rho^2+\rho^4\right) & \cdots & \left(1+\rho^2+\rho^4+\cdots+\rho^{2(b-1)}\right) \end{bmatrix}_{bxb}$$

ในการหาตัวประมาณด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนต้องอยู่ในรูป $\mathrm{Cov}\left(\underset{\sim}{e}\right) = \sigma_{\varepsilon}^{2} I$ ดังนั้นเราจะทำการแปลงข้อมูลให้ได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมในรูปดังกล่าว

เนื่องจาก $\mathrm{Cov}\left(\underset{\sim}{e}\right) = E\left(\underset{\sim}{e}\,\underset{\sim}{e}'\right) = \sigma_{\varepsilon}^{2} V$ จากนิยามของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมจะได้ว่า V เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive Definite Matrix) และจะสามารถหาเมทริกซ์ C เป็นเมทริกซ์ที่ไม่เป็นเอกฐาน (Nonsingular Matrix) ซึ่งทำให้ $V = CC'$ จากสมการ

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}$$

เมื่อคูณสมการทั้งสองด้วย C^{-1}

$$C^{-1}\underset{\sim}{Y} = C^{-1}X\underset{\sim}{\beta} + C^{-1}\underset{\sim}{e}$$

จะได้สมการในรูปเมทริกซ์และเวกเตอร์ใหม่ คือ

$\underset{\sim}{Y}^{*} = C^{-1}\underset{\sim}{Y}$ แปลงเวกเตอร์ค่าสังเกต

$X^{*} = C^{-1}X$ แปลงเมทริกซ์คงที่

$\underset{\sim}{e}^{*} = X^{-1}\underset{\sim}{e}$ แปลงเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อน

และจะได้สมการถดถอยอยู่ในรูป

$$\underset{\sim}{Y}^{*} = X^{*}\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}^{*}$$

พิจารณาความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน

$$
\begin{aligned}
Cov(\underset{\sim}{e}^{*}) &= E\left(\underset{\sim}{e}^{*}\,\underset{\sim}{e}^{*'}\right) \\
&= E\left(C^{-1}\,\underset{\sim}{e}\,\underset{\sim}{e}'\,C^{-1'}\right) \\
&= C^{-1}E\left(\underset{\sim}{e}\,\underset{\sim}{e}'\right)C^{-1'} \\
&= C^{-1}\sigma_{\varepsilon}^{2}V\,C^{-1'} \\
&= \sigma_{\varepsilon}^{2}C^{-1}V\,C^{-1'} \\
&= \sigma_{\varepsilon}^{2}C^{-1}C\,C'\,C^{-1'} \\
&= \sigma_{\varepsilon}^{2}\left(C^{-1}\,C\right)\left(C'\,C^{-1'}\right) \\
&= \sigma_{\varepsilon}^{2}I
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่าเมื่อทำการแปลงสมการให้อยู่ในรูป $\underset{\sim}{Y}^{*} = X^{*}\,\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}^{*}$ ทำให้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อน เป็นไปตามข้อสมมติของการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดแบบสามัญ และเมื่อทำการหาตัวประมาณพารามิเตอร์จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\hat{\underset{\sim}{\beta}} &= \left(X^{*'}X^{*}\right)^{-1}X^{*'}\,\underset{\sim}{Y}^{*} \\
&= \left(\left(C^{-1}X\right)'\left(C^{-1}X\right)\right)^{-1}\left(C^{-1}X\right)'\left(C^{-1}\,\underset{\sim}{Y}\right) \\
&= \left(X'C^{-1'}C^{-1}X\right)^{-1}X'C^{-1'}C^{-1}\,\underset{\sim}{Y} \\
&= \left(X'V^{-1}X\right)^{-1}X'V^{-1}\,\underset{\sim}{Y}
\end{aligned}
$$

เมื่อนำค่า $\hat{\rho}$ ที่ได้จากการประมาณค่าในขั้นที่ 1 มาแทนค่าในเมทริกซ์ V^{-1} จะทำให้ได้ค่าประมาณของเมทริกซ์ V^{-1} แทนด้วย $\hat{V}^{-1}$ และได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ คือ

$$\underset{\sim}{\beta}_{TS} = \left(X'\hat{V}^{-1}X\right)^{-1}X'\hat{V}^{-1}\,\underset{\sim}{Y}$$

และได้ว่า

$$Cov\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{TS}\right) \approx \hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}\left(X'\hat{V}^{-1}X\right)^{-1}$$

ทำกรประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ โดย

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \frac{\left(\underset{\sim}{y}^{*} - X^{*}\,\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)'\left(\underset{\sim}{y}^{*} - X^{*}\,\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)}{M - r}$$

$$= \left\{C^{-1}\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)\right\}' \left\{C^{-1}\left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)\right\}$$

$$= \left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right) C^{-1'} C^{-1} \left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)$$

$$= \left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right) V^{-1} \left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)$$

จากนั้นทำการประมาณเมทริกซ์ V^{-1} โดยใช้พารามิเตอร์ $\hat{\rho}_{TS}$ จะได้ว่า

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} = \left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right) \hat{V}^{-1} \left(\underset{\sim}{y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)$$