

## บทที่ 2

### ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1 ตัวหน่วงของเหลวแม่เหล็กและอุปกรณ์ของเหลวแม่เหล็ก

ตัวหน่วงของเหลวแม่เหล็ก (Spencer และคณะ ค.ศ.1996) เป็นตัวหน่วงที่สามารถควบคุมคุณสมบัติของเหลวได้ (controllable fluid dampers) ซึ่งตัวหน่วงที่สามารถควบคุมคุณสมบัติของเหลวได้มี 2 ประเภท คือ ตัวหน่วงของเหลวไฟฟ้า (electro-rheological damper หรือ ER damper) และ ตัวหน่วงของเหลวแม่เหล็ก (magneto-rheological damper หรือ MR damper) ตัวหน่วงของเหลวแม่เหล็กนั้นภายในตัวหน่วงจะประกอบด้วยของเหลวแม่เหล็ก (MR fluids) ซึ่งประกอบด้วยอนุภาคเหล็กที่มีขนาดระดับไมครอนแขวนลอยอยู่ในน้ำมัน และภายใต้สนามแม่เหล็กอนุภาคจะจัดเรียงตัวกันใหม่ ดังรูปที่ 2.1 ซึ่งทำให้ของเหลวปรับสภาพกลายเป็นวัสดุกึ่งของแข็ง (semi-solid) ที่มีความหนืดเพิ่มขึ้นภายในเวลาไม่กี่มิลลิวินาที และมีความทนทานต่อสภาพแวดล้อมได้ดี

ดังนั้นพฤติกรรมของของเหลวที่ควบคุมได้สามารถแทนได้โดยแบบจำลองพลาสติกของบิงแฮม (Bingham plasticity model) ดังรูปที่ 2.2 ซึ่งสามารถแปรเปลี่ยนกำลังที่จุดคราก ดังสมการ

$$\tau = \tau_y(H) + \eta \dot{\gamma}, \tau > \tau_y \quad (2.1)$$

เมื่อ  $\tau$  คือ ความเค้นของของเหลวภายใต้สนามแม่เหล็ก (Pa)

$\tau_y$  คือ ความเค้นที่จุดครากขึ้นอยู่กับสนามแม่เหล็ก (Pa)

$H$  คือ สนามแม่เหล็ก (A/m)

$\dot{\gamma}$  คือ อัตราความเครียดเฉือนของของเหลว (1/s)

$\eta$  คือ ความหนืดพลาสติก (ความหนืดที่  $H = 0$ ) (Pa-s)

อุปกรณ์ที่ใช้ของเหลวแม่เหล็ก (MR fluids) สามารถแยกโหมดการทำงานออกได้เป็น 3 ประเภท คือ

- (1) โหมดแบบวาล์ว (valve mode)
- (2) โหมดการเฉือน (direct shear mode)
- (3) โหมดการบีบ (squeeze mode)

รูปแสดงโหมดการทำงานพื้นฐานทั้งสามแบบแสดงดังรูปที่ 2.3

สำหรับโหมดการเฉือนแรงเฉือนเป็นผลจากการรวมองค์ประกอบความหนืด  $F_\eta$  กับ องค์ประกอบความเค้นที่จุดครากซึ่งขึ้นอยู่กับสนามแม่เหล็ก  $F_\tau$  แรงเฉือนสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$F = F_\eta + F_\tau = \frac{\eta SA}{g} + \tau_y A \quad (2.2)$$

- เมื่อ  $\eta$  คือ ความหนืดของของเหลวเมื่อไม่มีสนามแม่เหล็ก (Pa-s)  
 $S$  คือ ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างแผ่นตัวนำ (m/s)  
 $A$  คือ พื้นที่การเฉือนของแผ่นตัวนำ ( $m^2$ )  
 $g$  คือ ระยะห่างระหว่างแผ่นตัวนำ (m)  
 $\tau_y$  คือ ความเค้นที่จุดครากขึ้นอยู่กับสนามแม่เหล็ก (Pa)

## 2.2 สมการการเคลื่อนที่ของโครงสร้างภายใต้แผ่นดินไหว

โดยทั่วไปการวิเคราะห์โครงสร้างโดยหลักการทางพลศาสตร์ (dynamic analysis) จะมีแรงหลักๆ 4 แรง ได้แก่ แรงเฉื่อย (inertia force,  $f_I$ ) แรงต้านในเสา (restoring force,  $f_S$ ) แรงหน่วง (damping force,  $f_D$ ) และแรงภายนอก (external force,  $p(t)$ ) แสดงดังรูปที่ 2.4 โดยที่โครงสร้างมีมวล  $m$  สติฟเนส  $k$  และค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง  $c$

จากรูปที่ 2.4 สามารถเขียนสมการสมดุลของแรงได้เป็น

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (2.3)$$

แรงเฉื่อยมีค่าเท่ากับ  $m\ddot{u}(t)$  เมื่อ  $\ddot{u}(t)$  คือ ความเร่งของโครงสร้าง  
แรงหน่วงมีค่าเท่ากับ  $c\dot{u}(t)$  เมื่อ  $\dot{u}(t)$  คือ ความเร็วของโครงสร้าง  
แรงต้านในเสาค

สำหรับโครงสร้างที่มีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) ความสัมพันธ์  
ระหว่างแรงต้านในเสากับการเปลี่ยนตำแหน่งจะเป็นเส้นตรงตามกฎของฮุค (Hooke's law) ดัง  
สมการ

$$f_S = ku(t) \quad (2.4)$$

โดยที่

$u(t)$  คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้าง

แต่สำหรับโครงสร้างที่มีพฤติกรรมอยู่ในช่วงไม่ยืดหยุ่น ความสัมพันธ์ระหว่างแรงต้านใน  
เสากับการเปลี่ยนตำแหน่งจะไม่เป็นแบบเชิงเส้น แต่จะขึ้นกับค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและทิศ  
ทางการเคลื่อนที่ดังสมการ

$$f_S = f_S(u(t), \dot{u}(t)) \quad (2.5)$$

สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion) ได้เป็น

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + f_S = p(t) \quad (2.6)$$

โดยที่

$f_S = ku(t)$  สำหรับโครงสร้างที่มีพฤติกรรมยืดหยุ่น

$f_S = f_S(u(t), \dot{u}(t))$  สำหรับโครงสร้างที่มีพฤติกรรมไม่ยืดหยุ่น

### 2.2.1 โครงสร้างที่มีพฤติกรรมยืดหยุ่นเชิงเส้น

จากสมการที่ (2.6) สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่สำหรับโครงสร้างที่มีพฤติกรรมยืดหยุ่น ได้เป็น

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (2.7)$$

เนื่องจากแผ่นดินไหวทำให้เกิดการเคลื่อนที่ที่ฐานของโครงสร้าง ถ้าให้  $u'(t)$  เป็นการเคลื่อนที่ทั้งหมด (สัมบูรณ์) ของโครงสร้าง  $u_g(t)$  เป็นการเคลื่อนที่ของพื้นดิน และ  $u(t)$  เป็นการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของโครงสร้างเทียบกับพื้นดินดังรูปที่ 2.5

สามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ได้เป็น

$$u'(t) = u(t) + u_g(t) \quad (2.8)$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวมาข้างต้น ภายใต้แผ่นดินไหวเมื่อแรงภายนอกมีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.9)$$

### 2.2.2 โครงสร้างที่มีพฤติกรรมไม่ยืดหยุ่น

จากสมการที่ (2.6) สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่สำหรับโครงสร้างที่มีพฤติกรรมไม่ยืดหยุ่น ได้เป็น

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + f_S(u(t), \dot{u}(t)) = p(t) \quad (2.10)$$

สำหรับการเคลื่อนที่ภายใต้แผ่นดินไหว สามารถเขียนได้เป็น

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + f_S(u(t), \dot{u}(t)) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.11)$$

### 2.3 ระบบหลายระดับชั้นความเสรีที่มีพฤติกรรมไม่เชิงเส้น

ภายใต้แผ่นดินไหวขนาดใหญ่ ชั้นส่วนของโครงสร้างอาจจะเกิดการครากขึ้นดังรูปที่ 2.6 ซึ่งจะทำให้เกิดพฤติกรรมไม่เชิงเส้น เพื่อที่จะอธิบายพฤติกรรมแบบไม่เชิงเส้นซึ่งมีหลายรูปแบบขึ้นอยู่กับวัสดุ ในการศึกษานี้ใช้แบบจำลองแบบวิจักรแบบเส้นตรงสองเส้น (bilinear) ดังรูปที่ 2.7 เพื่อใช้เป็นแบบจำลองของจุดหมุนพลาสติก (plastic hinges) ของชั้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงดัด ซึ่งสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่เพื่อหาค่าการตอบสนองได้ดังนี้

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{G}\Delta\ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{P}\Delta\mathbf{f} + \Delta\mathbf{F}_{err} \quad (2.12)$$

- เมื่อ
- M** คือ เมตริกซ์มวลของโครงสร้าง
  - C** คือ เมตริกซ์ความหน่วงของโครงสร้าง
  - K** คือ เมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง
  - $\Delta\mathbf{u}$  คือ เวกเตอร์การตอบสนองที่เพิ่มขึ้น
  - G** คือ เวกเตอร์ของน้ำหนักสำหรับความเร่งที่ฐาน
  - $\Delta\ddot{\mathbf{u}}_g$  คือ ความเร่งที่ฐานที่เพิ่มขึ้น
  - P** คือ เวกเตอร์ของแรงสำหรับแรงควบคุม
  - $\Delta\mathbf{f}$  คือ แรงควบคุมที่เพิ่มขึ้น
  - $\Delta\mathbf{F}_{err}$  คือ เวกเตอร์ของแรงที่ไม่สมดุล

แรงที่ไม่สมดุล คือ ผลต่างระหว่างแรงคงค้างที่คำนวณโดยใช้แบบจำลองแบบวิจักร และแรงคงค้างที่สมมติค่าสติฟเนสเป็นค่าคงที่เป็นเส้นตรงที่เวลา  $t$  ในช่วงเวลา  $(t, t + \Delta t)$  ซึ่งแรงที่ไม่สมดุลนี้จะรวมเป็นแรงภายนอกในช่วงเวลาถัดไป

สมมติว่าแผ่นพื้นแข็งเกร็งในระนาบแนวราบ ทำให้จุดต่อที่อยู่ในระดับเดียวกันจะมีการเคลื่อนที่แนวราบเท่ากัน ดังนั้นระดับชั้นความเสรีในระนาบที่ตาม (slave horizontal DOFS) บนแต่ละชั้นสามารถแทนโดยใช้จุดต่อที่แอดทิฟ  $\Delta\mathbf{u}_{act}$  ซึ่งประกอบด้วยระดับชั้นความเสรีในแนวตั้งทั้งหมด ระดับชั้นความเสรีการหมุนทั้งหมด และมีหนึ่งระดับชั้นความเสรีในแนวราบต่อชั้นซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้เป็น

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{\text{act}} \\ \Delta \mathbf{u}_{\text{slv}} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_R \Delta \mathbf{u}_{\text{act}} \quad (2.13)$$

เมื่อ  $\mathbf{T}_R$  คือ เมตริกซ์แปลง

ดังนั้นเมตริกซ์ความหน่วงที่ลดขนาด ( $\hat{\mathbf{C}}$ ) สามารถคำนวณได้โดยใช้สมมติฐานของ Rayleigh damping โดย

$$\hat{\mathbf{C}} = c_1 \cdot \mathbf{T}_R^T \mathbf{M} \mathbf{T}_R + c_2 \cdot \mathbf{T}_R^T \mathbf{K} \mathbf{T}_R \quad (2.14)$$

เมื่อ  $c_1$  และ  $c_2$  เป็นค่าที่ทำให้สัมประสิทธิ์ความหน่วงของโหมด  $\zeta_1 = \zeta_5 = 0.02$

จาก Rayleigh damping ความหน่วงในแต่ละโหมดสามารถคำนวณได้โดย

$$\zeta_i = \zeta_1 (\omega_i \omega_5 + \omega_1^2) / (\omega_i \omega_1 + \omega_5^2) \quad (2.15)$$

เมื่อ  $\omega_i$  คือ ความถี่ธรรมชาติของโหมด  $i$

นิวมาร์ค (ค.ศ. 1959) ได้เสนอสมการเพื่อแก้สมการการเคลื่อนที่ (สมการที่ 2.12)

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + (\Delta t)^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_t + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right] \quad (2.16)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \Delta t \left[ (1-\gamma) \ddot{\mathbf{u}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right] \quad (2.17)$$

เมื่อ  $\Delta t$  คือ ช่วงเวลาการคำนวณ

$\{ \}_{t+\Delta t}$  และ  $\{ \}_t$  คือ การตอบสนองที่เวลา  $t+\Delta t$  และ  $t$  ตามลำดับ

$\beta$  และ  $\gamma$  คือ ค่าพารามิเตอร์สำหรับการอินทิเกรต

แทนค่าสมการ (2.16) และสมการ (2.17) ลงในสมการ (2.12) จะได้

$$\mathbf{T}_R^T \mathbf{K}_D \mathbf{T}_R \Delta \mathbf{u}_{act} = \mathbf{T}_R^T \Delta \mathbf{F}_D \quad (2.18)$$

เมื่อ

$$\mathbf{K}_D = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}_t \quad (2.19)$$

$$\Delta \mathbf{F}_D = -\mathbf{M} \mathbf{G} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_g + \left( \frac{1}{2\beta} \mathbf{M} + \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \mathbf{C} \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (2.20)$$

$$+ \left( \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{P} \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}_{err}$$

$$\mathbf{C} = \left( \mathbf{T}_R^T \right)^{-1} \hat{\mathbf{C}} \mathbf{T}_R^{-1} \quad (2.21)$$

และเมื่อ  $\mathbf{K}_t$  คือ เมตริกซ์ของ tangent stiffness ของโครงสร้างที่เวลา  $t$

โดย  $\mathbf{K}_t$  คำนวณโดยใช้แบบจำลองพลาสติกกรรม (concentrated plasticity model) เพื่อจำลองความไม่เชิงเส้นของวัสดุของชิ้นส่วนโครงสร้างซึ่งเสนอโดย Clough และ Johnson ในปี ค.ศ.1966 และ Giberson ในปี ค.ศ.1967 ซึ่งสมมติว่าชิ้นส่วนมีการครากเกิดขึ้นเฉพาะที่ปลาย โดยค่าพารามิเตอร์  $\alpha_{AA}$  และ  $\alpha_{BB}$  แทนสปริงที่ไม่ยืดหยุ่น (inelastic spring) ที่แต่ละปลายของชิ้นส่วนและชิ้นส่วนภายในมีพฤติกรรมยืดหยุ่น ดังรูปที่ 2.8 ซึ่งค่าสตีเฟนสเมตริกซ์สามารถหาได้ดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{AA} & f_{AB} \\ f_{BA} & f_{BB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

ในสมการที่ (2.22) ค่าสัมประสิทธิ์ของเฟล็กชิบิลิตีของชิ้นส่วนคือ

$$f_{AA} = \frac{L}{12EI_0 EI_A EI_B} f_{AA}' + \frac{1}{(GA)L} \quad (2.23)$$

$$f_{AB} = f_{BA} = \frac{L}{12EI_0EI_AEI_B} f_{AB}' + \frac{1}{(GA)L} \quad (2.24)$$

$$f_{BB} = \frac{L}{12EI_0EI_AEI_B} f_{BB}' + \frac{1}{(GA)L} \quad (2.25)$$

$$f_{AA}' = 4EI_AEI_B + (EI_0 - EI_A)EI_B\alpha_{AA} \quad (2.26)$$

$$f_{AB}' = -2EI_AEI_B \quad (2.27)$$

$$f_{BB}' = 4EI_AEI_B + (EI_0 - EI_B)EI_A\alpha_{BB} \quad (2.28)$$

เมื่อ  $M_A$  และ  $M_B$  คือ โมเมนต์ที่ปลาย A และ B ของชิ้นส่วนตามลำดับ  
 $\theta_A$  และ  $\theta_B$  คือ มุมหมุนที่ปลาย A และ B  
 $EI_A$  และ  $EI_B$  คือ ความแข็งเชิงดัด (flexural rigidity) ที่ปลายของชิ้นส่วนที่ A และ B ตามลำดับ

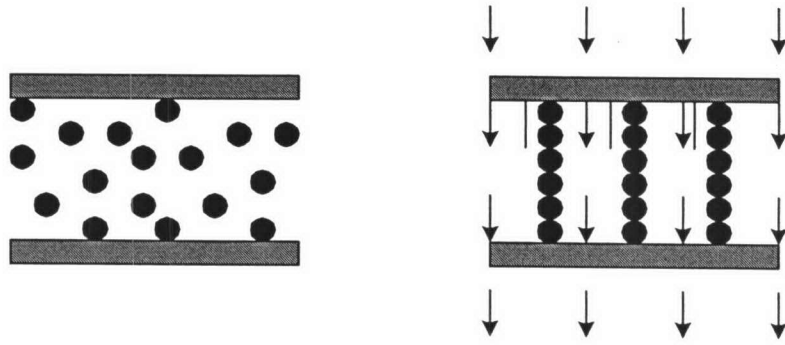
$EI_0$  คือ ความแข็งเชิงดัด (flexural rigidity) ที่ศูนย์กลางชิ้นส่วน

$GA$  คือ ความแข็งเชิงเฉือน (shear rigidity) ของชิ้นส่วน

$L$  คือ ความยาวของชิ้นส่วน

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

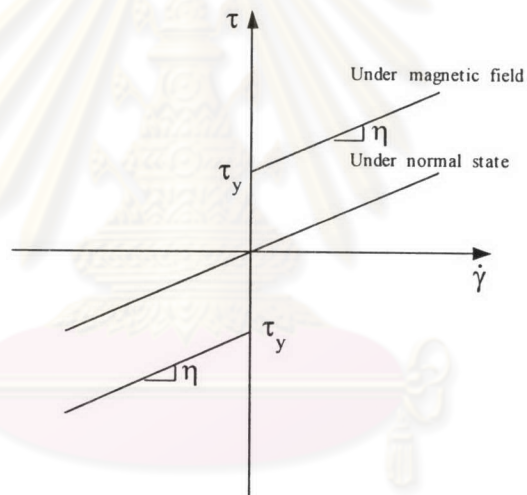




(ก) ภายใต้สภาวะปกติ

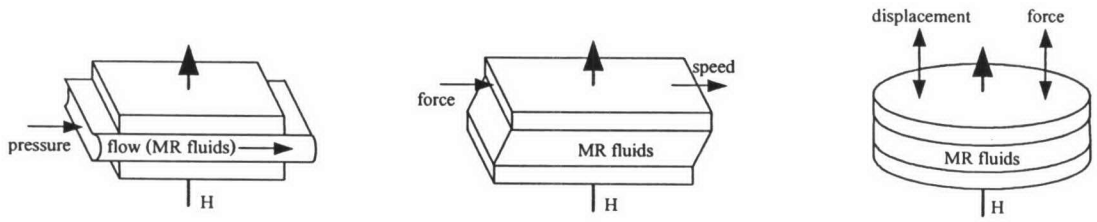
(ข) ภายใต้สนามแม่เหล็ก

รูปที่ 2.1 การจัดเรียงตัวของอนุภาคเหล็กภายใต้สนามแม่เหล็ก



รูปที่ 2.2 แบบจำลองพลาสติกของบิงแฮม (Bingham plasticity model)

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

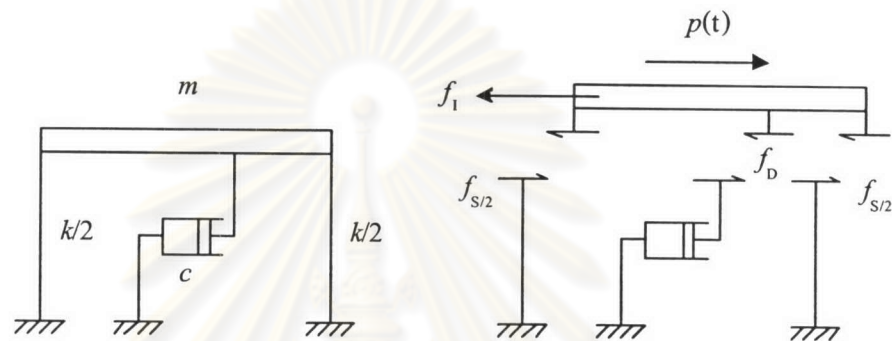


(ก) โหมดแบบวาล์ว

(ข) โหมดการเฉือน

(ค) โหมดการบีบ

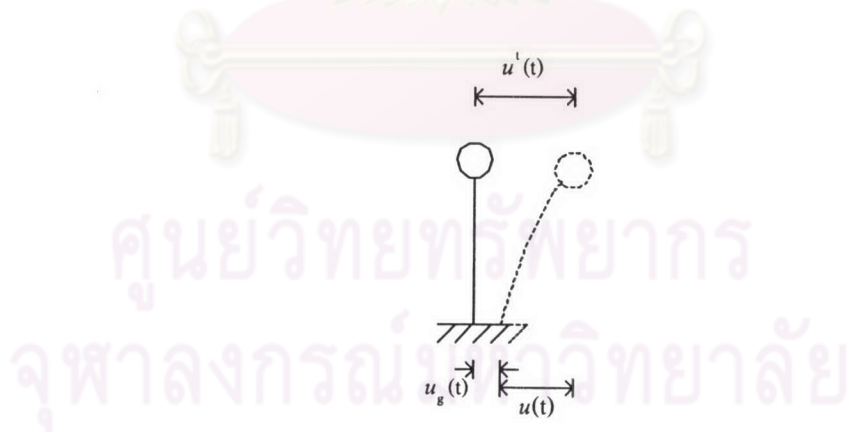
รูปที่ 2.3 โหมดการทำงานพื้นฐานสำหรับอุปกรณ์ของเหลวที่ควบคุมได้



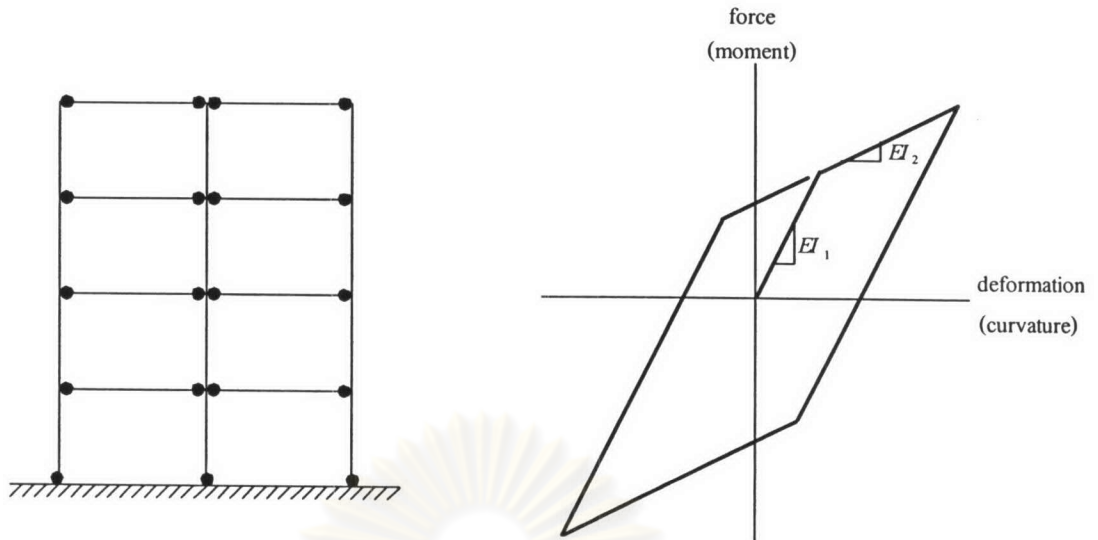
รูปที่ 2.4(ก) พารามิเตอร์ของโครงสร้าง

รูปที่ 2.4(ข) สมดุลของแรง

รูปที่ 2.4 พารามิเตอร์และแรงที่กระทำกับโครงสร้าง



รูปที่ 2.5 ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ทั้งหมดกับการเคลื่อนที่ของพื้นดินและการเคลื่อนที่สัมพัทธ์



รูปที่ 2.6 โครงสร้างที่ชั้นส่วนเกิดการคราก รูปที่ 2.7 แบบจำลองแบบวิญจักรแบบเส้นตรงสองเส้น (bilinear) สำหรับชั้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงดัด



รูปที่ 2.8 แบบจำลองชั้นส่วนโครงสร้างที่รับแรงดัด

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย