



บทที่ 4

แฟกเตอร์ลอเรนซ์-โพลาริซึชันสำหรับวิธีฟรีเซลล์

ภาพถ่ายข้อมูลความเข้มของผลึกเดี่ยวที่ใช้ในการพิจารณาหาค่าคงที่โครงสร้างผลึก และหาตำแหน่งอะตอมในโครงสร้างผลึก ได้มาจากการเก็บข้อมูลความเข้มของจุดสะท้อน ซึ่งมีอยู่ 2 วิธี คือ วิธีไวซ์เซ็นเบอร์ก และวิธีฟรีเซลล์ ดังได้กล่าวไว้ในบทก่อน โดยการเก็บข้อมูลความเข้มตามวิธีฟรีเซลล์ มีข้อได้เปรียบบางประการคือ

1. การกำหนดดัชนีของจุดสะท้อนแต่ละจุดทำได้ง่ายกว่า
2. สามารถเก็บจำนวนจุดสะท้อนได้ทั้งหมดจากการปรับผลึกเดี่ยวเพียงครั้งเดียว
3. ไม่ต้องแก้ไขข้อมูลความเข้ม เนื่องจากสาเหตุที่จุดสะท้อนยาวขึ้น หรือหดสั้นลงในภาพถ่ายเลย์เออร์สูง ๆ เหมือนในวิธีไวซ์เซ็นเบอร์ก

แต่ข้อมูลความเข้มของจุดสะท้อนที่ได้จากวิธีฟรีเซลล์ก็ยังคงต้องแก้ไขให้ถูกต้องขึ้น โดยการแก้แฟกเตอร์การดูดกลืน (absorption factor) ค่าการดูดกลืนรังสีเอ็กซ์ของผลึกขึ้นกับระยะทางที่รังสีเอ็กซ์ผ่านผลึก และสัมประสิทธิ์การดูดกลืน (absorption coefficient) ของผลึก, แฟกเตอร์โพลาริซึชัน (polarization factor) ซึ่งเกิดเนื่องจากรังสีเอ็กซ์ที่ใช้ไม่เป็นแสงโพลาริซึชัน, แฟกเตอร์ลอเรนซ์ (Lorentz factor) หรือ แฟกเตอร์ความเร็ว (velocity factor) ซึ่งเกิดเนื่องจากจุดรีซีเพรอนเคิลแลททิซหมุนตัดผ่านทรงกลมการสะท้อนด้วยความเร็วในแนวรัศมีของทรงกลมการสะท้อนใช้เวลาไม่เท่ากัน จุดที่อยู่ใกล้กับแกนหมุนจะใช้เวลามากกว่าจุดที่อยู่ห่างออกไป ซึ่งในที่นี้จะอธิบายเฉพาะแฟกเตอร์โพลาริซึชัน และแฟกเตอร์ลอเรนซ์สำหรับวิธีฟรีเซลล์เท่านั้น

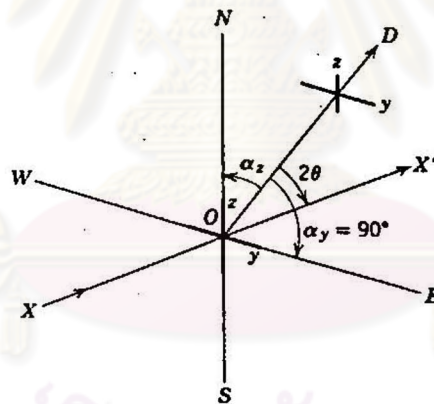
4.1 แฟกเตอร์โพลาริซึชัน

เนื่องจากรังสีที่ได้จากหลอดกำเนิดเอ็กซ์เรย์เป็นรังสีไม่โพลาริซึชัน เมื่อรังสีเอ็กซ์ตกกระทบอิเล็กตรอนอิสระ เกิดการกระเจิง เป็นเหตุให้เกิดรังสีเอ็กซ์เลี้ยวเบน ซึ่งรังสีเอ็กซ์เลี้ยวเบนที่ได้เป็นรังสีโพลาริซึชัน การที่รังสีเอ็กซ์เลี้ยวเบนจะเป็นรังสีโพลาริซึชันมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับมุมของการกระเจิงเท่านั้น ไม่ขึ้นกับโครงสร้างของเครื่องมือที่ใช้เก็บข้อมูลความเข้ม ดังนั้นความเข้มของการกระเจิงของอิเล็กตรอนจึงแปรเปลี่ยนไปตามมุมของการกระเจิง

เซอร์ เจ. เจ. ทอมสัน (Sir J.J. Thomson) พบว่า ความเข้ม I_e ของรังสีเอ็กซ์ที่กระเจิง โดยอิเล็กตรอนอิสระตัวหนึ่ง ที่ระยะห่าง R จากอิเล็กตรอน เป็น

$$I_e = I_o \left(\frac{e^4}{2^4 m^2 c^4 R^2} \right) \sin^2 \alpha \quad (4.1)$$

- โดยที่ I_o เป็นความเข้มของรังสีเอ็กซ์ตกกระทบ
 e เป็นประจุของอิเล็กตรอนอิสระ
 m เป็นมวลของอิเล็กตรอนอิสระ
 c เป็นความเร็วของแสง
 α เป็นมุมระหว่างทิศทางที่เกิดการกระเจิง กับทิศทางความเร่งของอิเล็กตรอน



รูปที่ 4.1 การเกิดรังสีโพลาไรซ์จากการกระเจิงโดยอิเล็กตรอนตัวเดียว

จากรูปที่ 4.1 รังสีเอ็กซ์ไม่โพลาไรซ์เคลื่อนที่ไปตามแนว XX' รังสีเอ็กซ์ไม่โพลาไรซ์นี้จะสั่นทุกทิศทางที่ตั้งฉากกับแนวการเคลื่อนที่ ดังนั้นการสั่นของรังสีเอ็กซ์ที่ไม่โพลาไรซ์จึงสามารถแยกออกเป็น 2 ส่วน ของระนาบโพลาไรซ์ คือ แนว WE ตามแกน Y และแนว NS ตามแกน Z โดยที่เวกเตอร์ไฟฟ้ามีความสัมพันธ์เป็น

$$E^2 = E_y^2 + E_z^2$$

เนื่องจากทิศทางของ E มีทุกทิศทาง เมื่อคิดโดยเฉลี่ยจะได้ว่า

$$E_y = E_z$$

$$\text{ดังนั้น} \quad E^2 = 2E_y^2 = 2E_z^2$$

เพราะว่า E เป็นค่าเฉลี่ยของคลื่น และความเข้มของคลื่นเป็นปฏิภาคกับกำลังของแอมพลิจูดของคลื่น

$$\frac{1}{2}I_0 = I_{oy} = I_{oz}$$

พิจารณาอีเล็กตรอนที่ O กระเจิงตามแนว OD ซึ่งทำมุม 2θ กับรังสีเอ็กซ์ตกกระทบ XX' องค์ประกอบของรังสีเอ็กซ์ตกกระทบตามแกน y เร่งอีเล็กตรอนในแนวทิศ OE โดยทำมุม $\alpha_y = 90^\circ$ กับทิศทางของการกระเจิง ความเข้มของแนวการกระเจิงส่วนนี้เป็น

$$\begin{aligned} I_{ey} &= \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \right) \sin^2 90^\circ \\ &= \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

องค์ประกอบของรังสีเอ็กซ์ตกกระทบตามแกน z เร่งอีเล็กตรอนในแนวทิศ ON โดยทำมุม $\alpha_z = (90^\circ - 2\theta)$ กับแนว OD ความเข้มของแนวการกระเจิงส่วนนี้เป็น

$$\begin{aligned} I_{ez} &= \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \right) \sin^2 (90^\circ - 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \right) \cos^2 2\theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

ดังนั้นความเข้มของการกระเจิงในทิศทาง OD จึงเป็นผลรวมของความเข้มขององค์ประกอบทั้งสองของการกระเจิง คือ

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \right) + \frac{1}{2} I_0 \left(\frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \right) \cos^2 2\theta \\ &= I_0 \left(\frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \right) \left(\frac{1 + \cos^2 2\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

ปริมาณ $\left(\frac{1 + \cos^2 2\theta}{2}\right)$ มีชื่อเรียกเฉพาะว่า แฟคเตอร์โพลาไรซ์ ใช้อักษรย่อ P แฟคเตอร์โพลาไรซ์เป็นแฟคเตอร์ที่ทำให้ความเข้มของการกระเจิงที่สังเกตได้ลดลง ดังนั้นการทำให้ความเข้มของการกระเจิงที่สังเกตได้ถูกต้องต้องคูณด้วยความเข้มของการกระเจิงที่สังเกตได้ด้วย P^{-1}

แฟคเตอร์โพลาไรซ์เป็นแฟคเตอร์ที่ขึ้นกับมุมของการกระเจิง หรือมุมของแบรกก์เพียงอย่างเดียวดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ดังนั้นแฟคเตอร์โพลาไรซ์ที่ใช้ในวิธีการผลึกเดี่ยวจึงเป็นค่าเดียวกันคือ

$$P = \frac{1 + \cos^2 2\theta}{2} \quad (4.5)$$

4.2 แฟคเตอร์ลอเรนซ์

เมื่อรังสีเอ็กซ์ตกกระทบผลึกระนาบต่าง ๆ ในผลึกจะเกิดการเลี้ยวเบนตามกฎของแบรกก์ โดยระนาบต่าง ๆ จะวิ่งเข้าตัดทรงกลมการสะท้อนด้วยความเร็วไม่เท่ากัน ซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งของระนาบนั้น ๆ ดังนั้นเวลาที่แต่ละระนาบใช้ในการวิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อนจึงไม่เท่ากันด้วย เนื่องจากความเข้มของจุดสะท้อนเป็นปฏิภาคโดยตรงกับเวลาที่ระนาบใช้ในการวิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อน และในการวิเคราะห์หาโครงสร้างผลึกต้องใช้ค่าสตรักเจอร์แอมพลิจูด (structure amplitude) $|F_{hkl}|$ ของแต่ละจุดสะท้อน ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความเข้มที่วัดได้จากแผ่นฟิล์มเป็น $|F| \propto \sqrt{I}$ จึงต้องมีการแก้ไขข้อมูลความเข้มที่วัดได้จากแผ่นฟิล์มด้วยแฟคเตอร์เกี่ยวกับเวลา ซึ่งแฟคเตอร์นี้มีชื่อเรียกเฉพาะว่า แฟคเตอร์ลอเรนซ์ ใช้อักษรย่อเป็น L การแก้ไขข้อมูลความเข้มที่ได้ให้ถูกต้องในกรณีของแฟคเตอร์ลอเรนซ์ต้องนำ L^{-1} คูณเข้ากับข้อมูลความเข้มเดิมที่ได้จากการวัดความเข้มของจุดสะท้อนต่าง ๆ

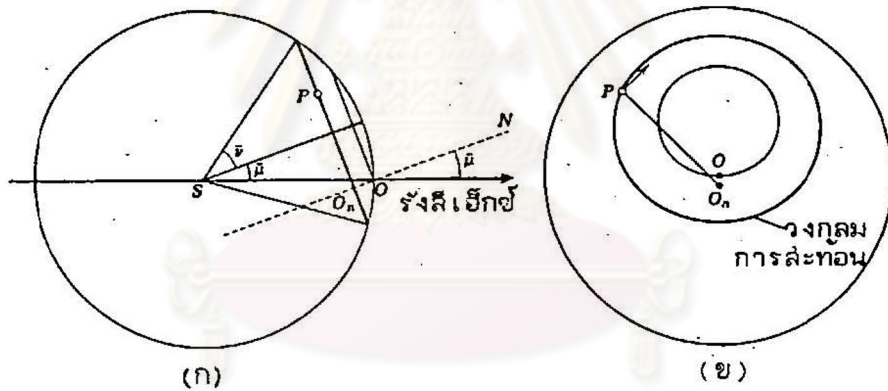
เนื่องจากแฟคเตอร์ลอเรนซ์เป็นปฏิภาคโดยตรงกับเวลาที่ระนาบใช้ในการเกิดการเลี้ยวเบน แฟคเตอร์ลอเรนซ์จึงเป็นปฏิภาคผกผันกับความเร็วที่ระนาบเคลื่อนที่ผ่านทรงกลมการสะท้อนขณะเกิดการเลี้ยวเบน หรือถ้าอธิบายแฟคเตอร์ลอเรนซ์ในกรณีของรีซีเพรอนเคิลแลททิสก็คือ การพิจารณาความเร็วของจุดรีซีเพรอนเคิลแลททิสที่วิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อน ถ้าความเร็วของจุดรีซีเพรอนเคิลแลททิสแยกเป็น 2 ส่วน คือ ความเร็วองค์ประกอบตามแนวรัศมี และตามแนวเส้นสัมผัสของทรงกลมการสะท้อน จะพบว่าความเร็วองค์ประกอบตามแนวรัศมีเท่านั้นที่มีอิทธิพลต่อขบวนการที่จุดรีซีเพรอนเคิลแลททิสวิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อน ดังนั้นแฟคเตอร์ลอเรนซ์จึงเป็นปฏิภาคผกผันกับความเร็วจุดรีซีเพรอนเคิลแลททิสที่วิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อน

$$L \propto \frac{1}{V_r} \tag{4.6}$$

แฟลคเตอร์ลอเรนซ์มีได้หลายค่า ขึ้นกับวิธีการที่ใช้เก็บข้อมูลความเข้มของรังสีเอ็กซ์เดี่ยวเบน ซึ่งในที่นี้ยกกล่าวถึงแฟลคเตอร์ลอเรนซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีการพรีเซสชันเท่านั้น

4.2.1 แฟลคเตอร์ลอเรนซ์ของการพรีเซสชันแบบสมบูรณ์

การพิจารณาหาค่าแฟลคเตอร์ลอเรนซ์ที่ใช้ในวิธีการพรีเซสชันเพื่อให้ง่ายในการเข้าใจ จะเริ่มพิจารณาจากวิธีพรีเซสชันแบบสมบูรณ์ โดยคิดว่าการหมุนระนาบรีซีเพรอเคิลแลททิสเข้าสู่ศตวรรษกลมการสะท้อนเพื่อให้เกิดการเลี้ยวเบนหมุนด้วยอัตราเร็วคงที่ หลังจากนั้นจึงพิจารณาค่าแฟลคเตอร์ลอเรนซ์ที่ได้จากวิธีการพรีเซสชันของกล้องแบบ มาร์ค II (Mark II precession instrument) ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงไปจากวิธีการพรีเซสชันแบบสมบูรณ์ อันเป็นผลสืบเนื่องมาจากขีดจำกัดของกล้อง ทำให้การเคลื่อนที่ของกล้องต่างไปจากการเคลื่อนที่แบบสมบูรณ์

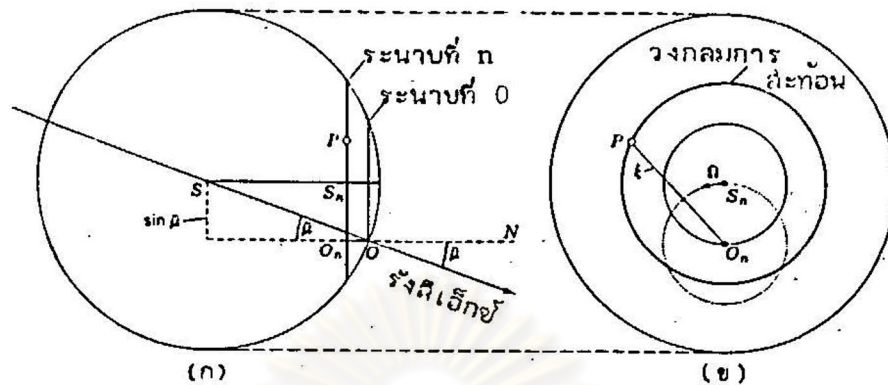


รูปที่ 4.2 การพรีเซสชันโดยกำหนดให้ระนาบรีซีเพรอเคิลแลททิสเคลื่อนที่ขณะลำรังสีเอ็กซ์อยู่นิ่ง

ความเร็วของจุดรีซีเพรอเคิลแลททิสที่วิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อนพิจารณาได้จาก

รูปที่ 4.2 ระนาบรีซีเพรอเคิลแลททิสเอียงจากแนวตั้งฉากกับแนวรังสีเอ็กซ์ไปเป็นมุม μ เมื่อผลึกหมุนจึงทำให้ระนาบรีซีเพรอเคิลแลททิสตัดทรงกลมการสะท้อนเป็นรูปวงกลม เรียกว่า วงกลมการสะท้อน (reflecting circle) ในทางปฏิบัตินั้น จะกำหนดให้ลำรังสีเอ็กซ์ และทรงกลมการสะท้อนอยู่นิ่ง ในขณะที่แกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบรีซีเพรอเคิลแลททิสพรีเซสชันรอบลำรังสีเอ็กซ์ ซึ่งเราสามารถพิจารณาได้ในอีกกรณีหนึ่ง ซึ่งให้ผลเหมือนกันโดยกำหนดให้ลำรังสีเอ็กซ์พรีเซสชันรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบรีซีเพรอเคิลแลททิส ในขณะที่ระนาบรีซีเพรอเคิลแลททิสอยู่กับที่ ดังแสดงในรูปที่

4.3 การกำหนดในกรณีหลังนี้ทำให้สะดวกในการพิจารณา



รูปที่ 4.3 การพร็เซล์ชันโดยกำหนดให้ลำรังสีเอ็กซ์เคลื่อนที่ขณระนาบรีซีเพรอเคลแลททิสอยู่หนึ่ง

หาค่าแพคเตอร์ลอเรนซ์ ซึ่งจะพบว่าจุดศูนย์กลางของทรงกลมการสะท้อนหมุนเป็นวงกลมรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบรีซีเพรอเคลแลททิส โดยมีขนาดของรัศมีเป็น $r \sin \bar{\mu}$ จากรูปที่ 4.3 (ข)

จุดศูนย์กลางของวงกลมการสะท้อน S_n หมุนรอบจุดกำเนิด O_n ด้วยความเร็วเชิงมุมในการพร็เซล์คองที่ Ω ดังนั้นจุด P ซึ่งอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ ξ จะวิ่งผ่านวงกลมการสะท้อนด้วยความเร็วเชิงเส้นเป็น

$$V = \Omega \xi \quad (4.7)$$

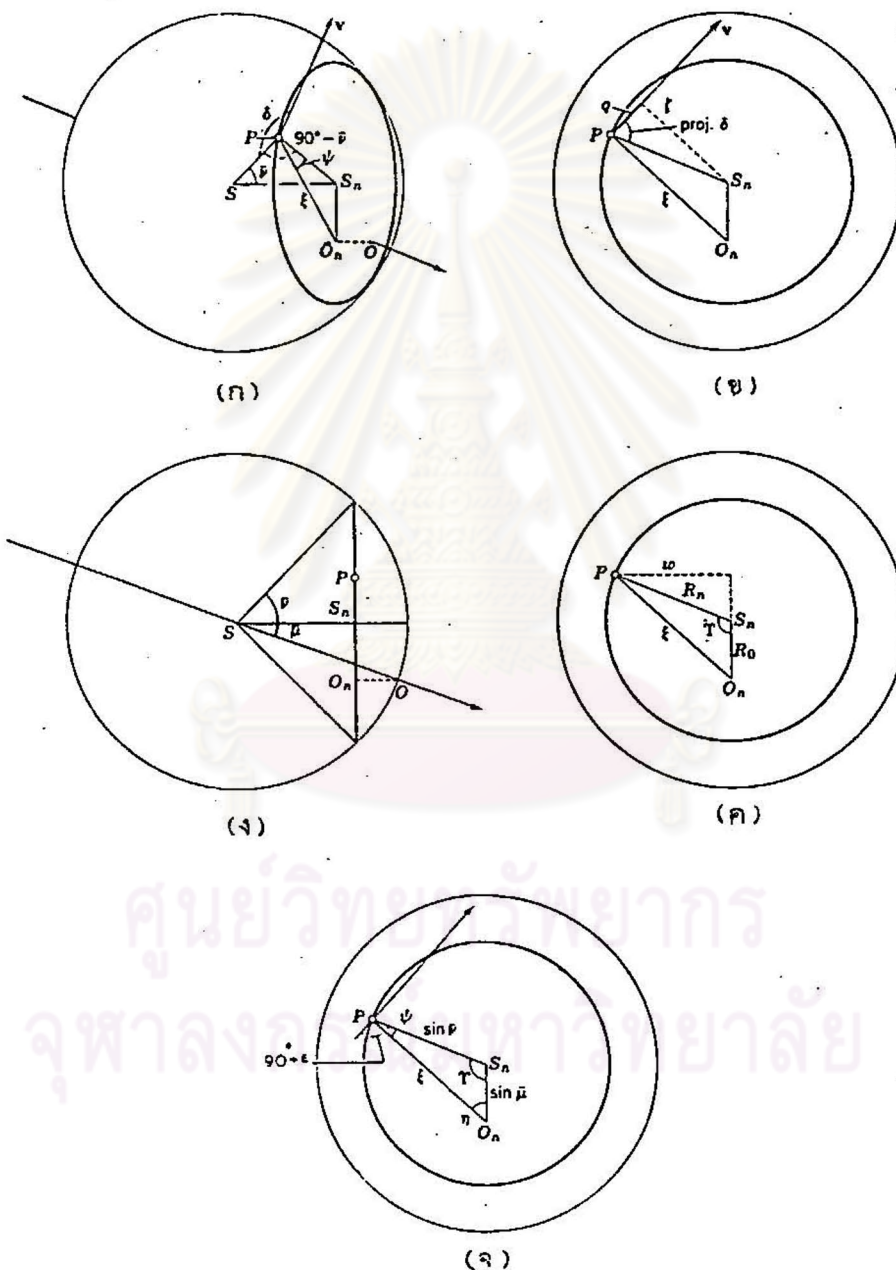
จากสมการ (4.6) ความเร็วเชิงเส้นที่ใช้หาแพคเตอร์ลอเรนซ์เป็นองค์ประกอบของความเร็วเชิงเส้นตามแนวรัศมี ซึ่งมีทิศทางพุ่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางของทรงกลม เมื่อ P เป็นจุดบนเส้นรอบวงของทรงกลม ดังนั้นรัศมี $SP = l = SO$ กำหนดให้มุมระหว่างเวกเตอร์ความเร็ว V และรัศมี SP เป็น δ ดังแสดงในรูปที่ 4.4 (ก) ดังนั้นองค์ประกอบของความเร็วเชิงเส้นตามแนวรัศมีจึงเป็น

$$V_r = V \cos \delta \quad (4.8)$$

$$V_r = \Omega \xi \cos \delta \quad (4.9)$$

เทอมท้ายของสมการ (4.9) $\xi \cos \delta$ สามารถคำนวณหาได้หลายวิธี โดยอาศัยความหมายทางเรขาคณิต พีชคณิต และตรีโกณมิติ ซึ่งแต่ละวิธีมีรายละเอียดดังนี้คือ

4.2.1.1 การคำนวณโดยทางเรขาคณิต จากรูปที่ 4.4 (ข) โดยที่ $SP = l$ ค่าของ $\cos \delta$ คือ การฉาย (projection) SP ลงบนเวกเตอร์ความเร็ว \vec{V} ได้ว่า



รูปที่ 4.4 ภาพต่าง ๆ ของทรงกลมการสะท้อน และระนาบรีซีเพอเคิลแลททีลซ์ขึ้นที่ η ขณะเกิดการพรีเซลชัน

$$\cos \delta = q$$

ดังนั้น จากสมการ (4.9) จึงได้เป็น

$$V_r = \Omega \xi q \quad (4.10)$$

เทอม ξ และ q อยู่ในระนาบรีดิเพนดเคิลแลททิซเดียวกัน ผลคูณของ ξq จึงเป็น
สองเท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม $O S_n P$ ดังแสดงในรูปที่ 4.4 (ข) ซึ่งการคำนวณหา
พื้นที่นี้แสดงดังรูปที่ 4.4 (ค) โดยที่ R_o เป็นรัศมีของวงกลมระนาบที่ 0 จะได้ว่า

$$\xi q = w R_o \quad (4.11)$$

$$\sin \gamma = \frac{w}{S_n P} \quad (4.12)$$

จากรูปที่ 4.4 (ค) $S_n P$ เป็นความยาวของรัศมี R_n ของวงกลมระนาบที่ n
ดังนั้นสมการ (4.12) จึงเป็น

$$\sin \gamma = \frac{w}{R_n} \quad (4.13)$$

จากสมการ (4.10), (4.11) และ (4.13) จะพบว่าองค์ประกอบของความเร็ว
เชิงเส้นตามแนวรัศมีเขียนแสดงได้เป็น

$$V_r = \Omega (\sin \gamma) R_n R_o \quad (4.14)$$

แต่จากรูปที่ 4.4 (ง) แสดงว่า

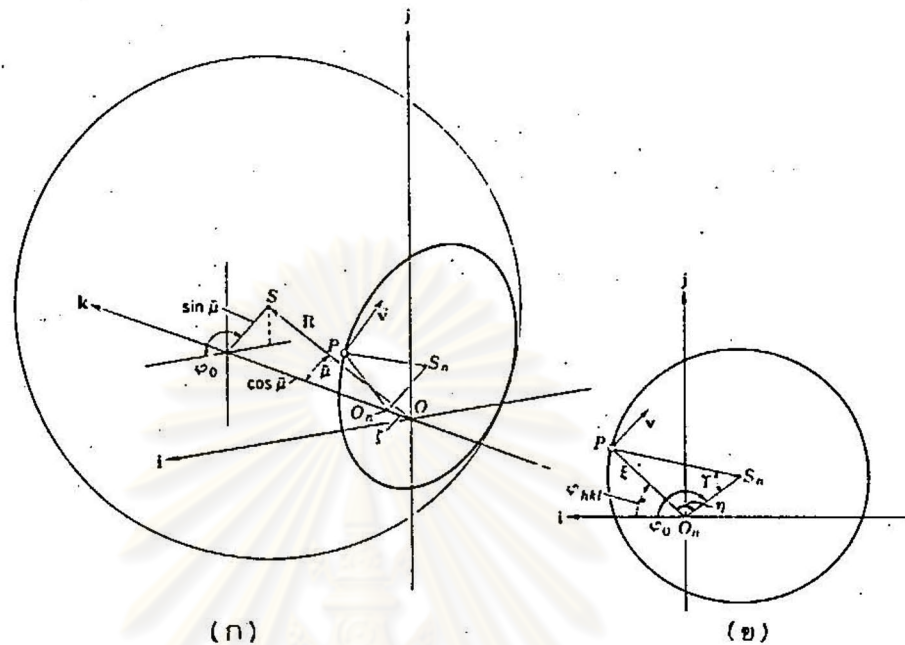
$$R_n = \sin \bar{\nu} \quad (4.15)$$

$$R_o = \sin \bar{\mu} \quad (4.16)$$

ดังนั้น จากสมการ (4.14) จะได้ว่า

$$V_r = \Omega \sin \gamma \sin \bar{\nu} \sin \bar{\mu} \quad (4.17)$$

4.2.1.2 การกำหนดโดยทางพีชคณิต จากรูปที่ 4.5 S เป็น



รูปที่ 4.5 ภาพรายละเอียดของรูปที่ 4.3

จุดศูนย์กลางของทรงกลม ดังนั้นองค์ประกอบของความเร็วเชิงเส้นตามแนวรัศมีคือการฉายความเร็วเชิงเส้นของจุด P บนเวกเตอร์ \vec{R} ซึ่งแสดงด้วยสมการได้เป็น

$$v_r = \vec{v} \cdot \vec{R} \quad (4.18)$$

โดยที่ขนาดของเวกเตอร์ \vec{R} เป็น 1

จากรูปที่ 4.5 (ก) เวกเตอร์ \vec{R} สามารถแสดงในรูปเวกเตอร์องค์ประกอบ \vec{i} , \vec{j} และ \vec{k} ซึ่งตั้งฉากกัน ได้เป็น

$$\vec{R} = (\sin \bar{\mu} \cos \varphi_0) \vec{i} + (\sin \bar{\mu} \sin \varphi_0) \vec{j} + (\cos \bar{\mu}) \vec{k} \quad (4.19)$$

จากรูปที่ 4.5 พบว่าเวกเตอร์ความเร็ว \vec{v} อยู่ในระนาบของเวกเตอร์ \vec{i} และ \vec{j} ซึ่งเวกเตอร์ \vec{v} สามารถแสดงในรูปเวกเตอร์องค์ประกอบ \vec{i} และ \vec{j} ได้เป็น

$$\vec{v} = -(\xi \Omega \sin \varphi_{hkl}) \vec{i} + (\xi \Omega \cos \varphi_{hkl}) \vec{j} \quad (4.20)$$

ดังนั้นสมการ (4.18) จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
 V_r &= \vec{V} \cdot \vec{R} \\
 &= -\xi \Omega \sin \varphi_{hkl} \sin \bar{\mu} \cos \varphi_o + \xi \Omega \cos \varphi_{hkl} \sin \bar{\mu} \sin \varphi_o \\
 &= \xi \Omega \sin \bar{\mu} (\cos \varphi_{hkl} \sin \varphi_o - \sin \varphi_{hkl} \cos \varphi_o) \\
 &= \xi \Omega \sin \bar{\mu} \sin (\varphi_o - \varphi_{hkl}) \\
 &= \xi \Omega \sin \bar{\mu} \sin \eta
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

โดยที่ $\eta = \varphi_o - \varphi_{hkl}$ (4.22)

ในรูปที่ 4.4 (จ) เมื่อใช้กฎของซายน์ (Law of sines)

กับสามเหลี่ยม $O S P$ จะได้ว่า

$$\frac{\sin \gamma}{\xi} = \frac{\sin \eta}{\sin \bar{v}} \tag{4.23}$$

ดังนั้น สมการ (4.21) จะได้เป็น

$$V_r = \Omega \sin \gamma \sin \bar{v} \sin \bar{\mu} \tag{4.24}$$

ซึ่งเหมือนกับสมการ (4.17)

4.2.1.3 การคำนวณโดยทางตรีโกณมิติ พิจารณาจากรูปที่ 4.4 (ก)

พบว่า มุม ψ อยู่ในระนาบรีซีเพรอกิลแลททิส และมุม $PSS_n = \bar{v}$ ซึ่งอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบรีซีเพรอกิลแลททิส มุม $\frac{\pi}{2} - \bar{v}$ และมุม $\frac{\pi}{2} + \psi$ มีความสัมพันธ์กับมุม δ เป็น

$$\begin{aligned}
 \cos \delta &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \bar{v} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right) \\
 &= \sin \bar{v} \sin \psi
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

จากรูปที่ 4.4 (จ) เมื่อใช้กฎของซายน์ จะได้เป็น

$$\frac{\xi}{\sin \gamma} = \frac{\sin \bar{\mu}}{\sin \psi} \quad (4.26)$$

แทนค่าสมการ (4.25) และ (4.26) ลงในสมการ (4.9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V_r &= \Omega \xi \cos \delta \\ V_r &= \frac{\Omega \sin \gamma \sin \bar{\mu}}{\sin \psi} \cdot \sin \bar{\nu} \sin \psi \\ V_r &= \Omega \sin \gamma \sin \bar{\mu} \sin \bar{\nu} \end{aligned} \quad (4.27)$$

ซึ่งให้ค่าองค์ประกอบของความเร็วเชิงเส้นตามแนวรัศมีเหมือนในสมการที่ (4.17) เช่นเดียวกัน

จากสมการที่ (4.6) สำหรับกรณีที่จุดรีซีเพรอนเคิลแลททิสวิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อนเพียงครั้งเดียว จะได้แฟคเตอร์ลอเรนซ์เป็น

$$L \propto \frac{1}{\Omega \sin \gamma \sin \bar{\nu} \sin \bar{\mu}} \quad (4.28)$$

หรือได้ว่า
$$L \propto \frac{1}{\Omega \xi \sin \bar{\mu} \sin \eta} \quad (4.29)$$

ในกรณีที่จุดรีซีเพรอนเคิลแลททิสวิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อนสองครั้ง โดยเกิดเป็นจุดสะท้อนจุดเดียวกัน ค่าแฟคเตอร์ลอเรนซ์ของจุดสะท้อนนี้จะมีค่าเป็นสองเท่าของค่าแฟคเตอร์ลอเรนซ์ที่เกิดจากการวิ่งตัดทรงกลมการสะท้อนเพียงครั้งเดียว

สำหรับค่ามุม η สามารถคำนวณในเทอมอื่น ๆ ได้อีก โดยการใช้อนุพัทธ์พีทาโกรัส (Pythagorus theorem) กับสามเหลี่ยม $O S P$ ในรูปที่ 4.4 (ค) จะได้ว่า

$$R_n^2 = R_o^2 + \xi^2 - 2 R_o \xi \cos (R_o \wedge \xi) \quad (4.30)$$

และจากรูปที่ 4.4 (จ) คำน $R_n = \sin \bar{\nu}$ และคำน $R_o = \sin \bar{\mu}$ ดังนั้นสมการ (4.30) จึงได้เป็น

$$\sin^2 \bar{\nu} = \sin^2 \bar{\mu} + \xi^2 - 2 \xi \sin \bar{\mu} \cos \eta \quad (4.31)$$

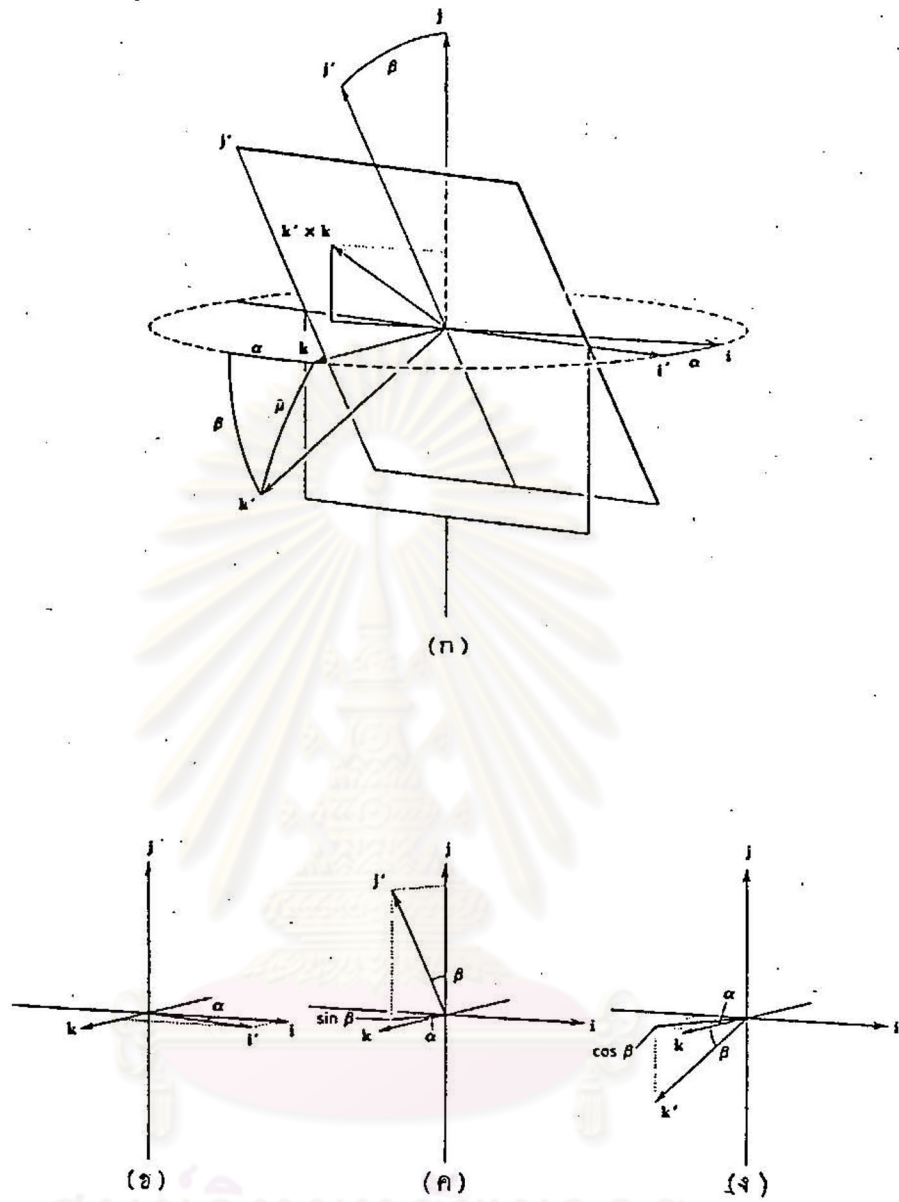
$$\cos \eta = \frac{\sin^2 \bar{\mu} + \xi^2 - \sin^2 \bar{\nu}}{2 \xi \sin \bar{\mu}} \quad (4.32)$$

4.2.2 แฟกเตอร์ลอเรนซ์ของการพรีเซลแบบมาร์คทู

เนื่องจากระบบพาดิของกล้องแบบมาร์คทู เป็นเหตุให้ขณะทำการพรีเซล่วงกลม การสะท้อนเคลื่อนที่เข้าสู่อะนาบรีซีเพรอกิลแลทส์ด้วยความเร็วเชิงมุมไม่คงที่ ทำให้แฟกเตอร์ลอเรนซ์เปลี่ยนแปลงไปจากแฟกเตอร์ลอเรนซ์ของการพรีเซลแบบลัมบอร์ดี การที่จะทำให้เข้าใจถึงการเปลี่ยนแปลงของแฟกเตอร์ลอเรนซ์ จะต้องรู้ถึงความเร็วของวงกลมการสะท้อนเป็นฟังก์ชันกับตำแหน่งของมันเป็นอย่างไร ผู้ที่แก้ปัญหานี้ได้คือ เวเซอร์ (Waser) โดยสร้างระบบพิกัดของอะนาบรีซีเพรอกิลแลทส์ขึ้น และหาความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดของอะนาบรีซีเพรอกิลแลทส์ที่สร้างขึ้นกับระบบพิกัดที่อยู่ฝั่ง ซึ่งมีรายละเอียดดังจะกล่าวต่อไป

กำหนดระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate) 2 ระบบ โดยมีจุดกำเนิดอยู่ฝั่งร่วมกัน ระบบพิกัดหนึ่งอยู่ฝั่ง มีแกนทั้งสามเป็น X, Y, Z และยูนิตเวกเตอร์ (unit vector) ตามแกนทั้งสามเป็น \hat{i} , \hat{j} และ \hat{k} ตามลำดับ อีกระบบหนึ่งสร้างจากอะนาบรีซีเพรอกิลแลทส์ มีแกนทั้งสามเป็น X', Y', Z' และยูนิตเวกเตอร์ตามแกนทั้งสามเป็น \hat{i}' , \hat{j}' และ \hat{k}' ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.6 (ก) และในตารางที่ 4.1

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.6 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดของฟิล์ม i', j', k' กับระบบพิกัดที่อยู่นิ่ง i, j, k

ตารางที่ 4.1 รายละเอียดของระบบพิกัดทั้งสองระบบ

	ระบบพิกัด	หน่วยเวกเตอร์	
ระบบรีซีเพอร์-เคลแลทส์	x'	\hat{i}'	ขนานกับแกนไดออลในระนาบที่ 0
	y'	\hat{j}'	ตั้งฉากกับแกนไดออลในระนาบที่ 0
	z'	\hat{k}'	ตั้งฉากกับระนาบที่ 0
ระบบบูมิ่ง	x	\hat{i}	ตั้งฉากกับหน่วยเวกเตอร์ \hat{j} และ \hat{k}
	y	\hat{j}	ตามแกนในแนวตั้งของกลอง
	z	\hat{k}	ตามแนวลาจิสเอ็กซ์ โดยทิศทางพุ่งเข้าหาแหล่งกำเนิดรังสีเอ็กซ์เป็นทิศทางบวก

การเปลี่ยนระบบพิกัดหนึ่งไปเป็นอีกระบบหนึ่ง สามารถใช้รูปแบบการเปลี่ยนระบบของระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งได้เป็น

$$\hat{i}' = \hat{i} \cos \alpha + \hat{k} \sin \alpha$$

$$\hat{j}' = -\hat{i} \sin \alpha \sin \beta + \hat{j} \cos \beta + \hat{k} \cos \alpha \sin \beta \quad (4.33)$$

$$\hat{k}' = -\hat{i} \sin \alpha \cos \beta - \hat{j} \sin \beta + \hat{k} \cos \alpha \cos \beta$$

จากรูปที่ 4.6 (ก) และ (ง) พบว่า มุมองศาประกอบที่ตั้งฉากของมุม $\bar{\mu}$ เป็น α และ β จากกฎของโคซายน์ จะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\cos \bar{\mu} = \cos \alpha \cos \beta \quad (4.34)$$

หรืออาจหาได้จากผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \hat{k}' &= \hat{k} \cdot (-\hat{i} \sin \alpha \cos \beta - \hat{j} \sin \beta + \hat{k} \cos \alpha \cos \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (4.35)$$

แต่จากรูปที่ 4.6 (ก) และ (ง) แสดงว่า

$$\vec{k} \cdot \vec{k}' = |\vec{k}| |\vec{k}'| \cos \bar{\mu} = \cos \bar{\mu} \quad (4.36)$$

ดังนั้น จากสมการ (4.35) และ (4.36) จะได้ความสัมพันธ์เช่นเดียวกับสมการ (4.34)

เพื่อที่จะหาว่ามุม α และ β ขึ้นกับการเคลื่อนที่ของการหริเชลล์อย่างไร พิจารณาจากอนุตเวกเตอร์ \vec{k}' ซึ่งทำมุม $\bar{\mu}$ กับอนุตเวกเตอร์ \vec{k} และหมุนรอบ \vec{k} ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ Ω เนื่องจาก \vec{k}' ทำมุม $\bar{\mu}$ กับ \vec{k} ดังนั้นผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product) $\vec{k}' \times \vec{k}$ จึงมีขนาดเป็น $\sin \bar{\mu}$ เวกเตอร์สี่พจน์นี้อยู่ในระนาบ $\vec{i} \vec{j}$ และหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ Ω เช่นกัน ถ้ากำหนดเวลาเริ่มต้นเมื่อเวกเตอร์สี่พจน์อยู่ตามแกน $+\vec{j}$ และหมุนตามเข็มนาฬิกา ดังในรูปที่ 4.6 (ก) จะพบว่า

$$\vec{k}' \times \vec{k} = \sin \bar{\mu} (-\vec{i} \sin \Omega t + \vec{j} \cos \Omega t) \quad (4.37)$$

แต่จากสมการ (4.33) ได้ว่า

$$\vec{k}' \times \vec{k} = -\vec{i} \sin \beta + \vec{j} \sin \alpha \cos \beta \quad (4.38)$$

ดังนั้น จากสมการ (4.37) และ (4.38) จะพบว่า

$$\sin \beta = \sin \bar{\mu} \sin \Omega t \quad (4.39)$$

$$\text{และ } \sin \alpha \cos \beta = \sin \bar{\mu} \cos \Omega t \quad (4.40)$$

จากสมการ (4.39) เราทราบว่า

$$\begin{aligned} \cos \beta &= (1 - \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

จากสมการ (4.40) และ (4.41) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \bar{\mu} \cos \Omega t (\cos \beta)^{-1} \\ &= \sin \bar{\mu} \cos \Omega t (1 - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

จากสมการ (4.34) จะได้

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \bar{\mu} (\cos \beta)^{-1} \\ &= \cos \bar{\mu} (1 - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.43)$$

ความสัมพันธ์ของมุม α และ β กับเวลา สรุปลงได้ดังนี้คือ

$$\text{จากสมการ (4.39)} \quad \sin \beta = \sin \bar{\mu} \sin \Omega t$$

$$\text{จากสมการ (4.41)} \quad \cos \beta = (1 - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{จากสมการ (4.42)} \quad \sin \alpha = \sin \bar{\mu} \cos \Omega t (1 - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{จากสมการ (4.43)} \quad \cos \alpha = \cos \bar{\mu} (1 - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cos \alpha = \cos \bar{\mu} (\cos \Omega t)^{-1}\quad (4.44)$$

การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของทรงกลมการสะท้อน กับรีซี-เพอเคลิลแลททิส เริ่มพิจารณาจากทรงกลมการสะท้อนที่ถูกตรึงในระบบพิกัดที่อยู่นิ่ง โดยมีจุดศูนย์กลางของทรงกลมอยู่ที่

$$X_0 = 0$$

$$Y_0 = 0$$

$$Z_0 = 1$$

(4.45)

แต่ทรงกลมการสะท้อนนี้ย่อมเคลื่อนที่เมื่อเทียบกับระบบพิกัดของรีซีเพอเคลิลแลททิส การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางของทรงกลมที่เขียนแสดงในสมการ (4.45) สามารถเขียนในเทอมของระบบพิกัดของรีซีเพอเคลิลแลททิสตามหลักการเปลี่ยนระบบพิกัดที่แสดงในสมการที่ (4.33) ได้เป็น

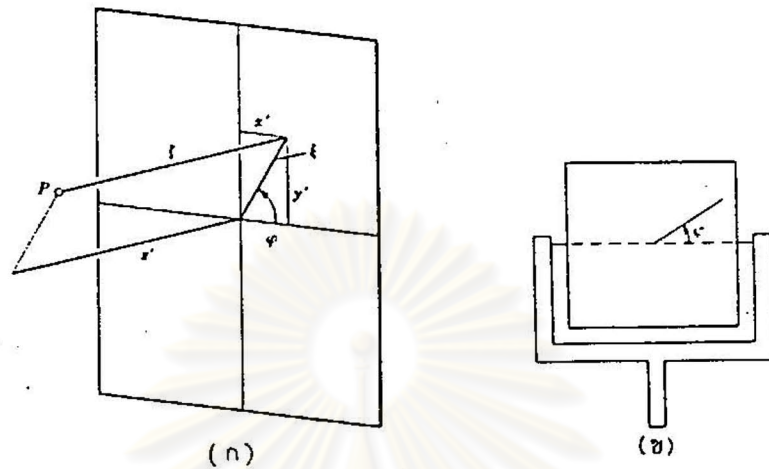
$$X'_0 = \sin \alpha$$

$$Y'_0 = \cos \alpha \sin \beta\quad (4.46)$$

$$Z'_0 = \cos \alpha \cos \beta = \cos \bar{\mu}$$

เพื่อให้การพิจารณาการเคลื่อนที่ของทรงกลมการสะท้อนเมื่อเทียบกับรีซีเพอเคลิลแลททิส เข้าใจ

ง่ายขึ้น จึงควรเปลี่ยนระบบพิกัดจาก X' , Y' และ Z' มาเป็น ξ , ζ , φ ในระบบพิกัดทรงกระบอก ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระบบทั้งสองนี้ไว้ในรูปที่ 4.7 ได้ว่า



รูปที่ 4.7 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (X' , Y' , Z') กับระบบพิกัดทรงกระบอก (ξ , ζ , φ)

$$X' = \xi \cos \varphi$$

$$Y' = \xi \sin \varphi$$

(4.47)

$$Z' = \zeta$$

ในทางกลับกัน ถ้าเปลี่ยนระบบพิกัดทรงกระบอก ξ , ζ , φ มาอยู่ในรูปของ X' , Y' , Z' จะได้เป็น

$$\xi = (X'^2 + Y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\zeta = Z'$$

(4.48)

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{Y'}{X'}$$

จากสมการ (4.46) เมื่อแทนลงในสมการ (4.48) จะได้

$$\xi_0 = (X_0'^2 + Y_0'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha [1 - \cos^2 \beta])^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}\xi_o &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 - \cos^2 \bar{\mu})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\xi_o = \sin \bar{\mu} \quad (4.49)$$

$$\zeta_o = z'_o = \cos \bar{\mu} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}\varphi_o &= \tan^{-1} \frac{Y'_o}{X'_o} = \tan^{-1} \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} = \tan^{-1} \cot \alpha \sin \beta \\ &= \tan^{-1} (\cot \bar{\mu} |\cos \Omega t|^{-1} \sin \bar{\mu} \sin \Omega t) \\ &= \tan^{-1} (\cos \bar{\mu} \tan \Omega t)\end{aligned} \quad (4.51)$$

ความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.49) และ (4.50) สามารถพิจารณาได้จากรูปที่ 4.3 (ก) โดยไม่ต้องอาศัยพื้นฐานทางเรขาคณิต โดยที่ตำแหน่งพิกัดของจุดศูนย์กลางของทรงกลมการสะท้อนมีค่า $\xi_o = \sin \bar{\mu}$ และ $\zeta_o = \cos \bar{\mu}$ พิกัดทั้งสองนี้ไม่ขึ้นกับเวลา แต่จากสมการ (4.51) แสดงให้เห็นว่ามุมแอสิมัท (azimuth) ของทรงกลมการสะท้อน φ_o ขึ้นกับเวลา ดังนั้นจุดศูนย์กลางของทรงกลมการสะท้อนหมุนเป็นวงกลม โดยมีรัศมีของวงกลมเป็น $\xi_o = \sin \bar{\mu}$ และอยู่ในระนาบรีซีเพอเคลสแลทส์ที่มีระยะห่างเป็น $\zeta_o = \cos \bar{\mu}$ ดังนั้นความเร็วเชิงมุมของจุดศูนย์กลางทรงกลมการสะท้อนจึงเป็น

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{d\varphi_o}{dt} = \frac{d(\tan^{-1} [\cos \bar{\mu} \tan \Omega t])}{dt} \\ &= \frac{1}{1 + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \Omega t} (\cos \bar{\mu} \sec^2 \Omega t) \Omega \\ &= \Omega \cos \bar{\mu} \left(\frac{\sec^2 \Omega t}{1 + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \Omega t} \right)\end{aligned} \quad (4.52)$$

เทอมในวงเล็บสามารถรวมได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\sec^2 \Omega t}{1 + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \Omega t} &= \left(\frac{1 + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \Omega t}{\sec^2 \Omega t} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{\sec^2 \Omega t} + \frac{\cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \Omega t}{\sec^2 \Omega t} \right)^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos^2 \Omega t + \cos^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{-1} \\
&= (\cos^2 \Omega t + [1 - \sin^2 \bar{\mu}] \sin^2 \Omega t)^{-1} \\
&= (\cos^2 \Omega t + \sin^2 \Omega t - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{-1} \\
&= (1 - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t)^{-1} \quad (4.53)
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากสมการ (4.52) จึงเปลี่ยนได้เป็น

$$\omega = \frac{d\varphi_0}{dt} = \Omega \cos \bar{\mu} \left(\frac{1}{1 - \sin^2 \bar{\mu} \sin^2 \Omega t} \right) \quad (4.54)$$

เทอมในวงเล็บในสมการ (4.52) สามารถเปลี่ยนเป็นรูปอื่นได้อีก โดยการใช้อยู่สมการ (4.51)

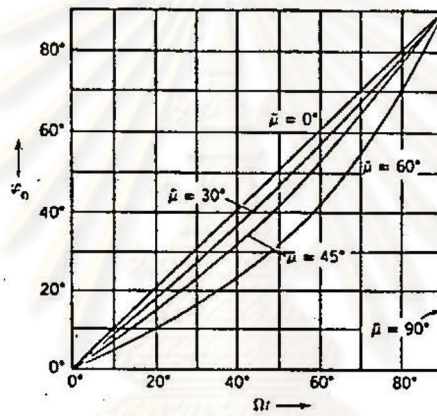
ดังนี้คือ

$$\begin{aligned}
\frac{\sec^2 \Omega t}{1 + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \Omega t} &= \frac{1 + \tan^2 \Omega t}{1 + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \Omega t} \\
&= \frac{1 + \tan^2 \varphi_0 / \cos^2 \bar{\mu}}{1 + \tan^2 \varphi_0} \\
&= \frac{\cos^2 \bar{\mu} + \tan^2 \varphi_0}{\cos^2 \bar{\mu} (1 + \tan^2 \varphi_0)} \\
&= \frac{\cos^2 \bar{\mu} + \tan^2 \varphi_0 + (\cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0 - \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0)}{\cos^2 \bar{\mu} - \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0} \\
&= \frac{\cos^2 \bar{\mu} + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0}{\cos^2 \bar{\mu} + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0} + \frac{\tan^2 \varphi_0 - \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0}{\cos^2 \bar{\mu} + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0} \\
&= 1 + \frac{-\cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0 + \tan^2 \varphi_0}{\cos^2 \bar{\mu} + \cos^2 \bar{\mu} \tan^2 \varphi_0} \\
&= 1 + \frac{\tan^2 \varphi_0 (1 - \cos^2 \bar{\mu})}{\cos^2 \bar{\mu} (\tan^2 \varphi_0 + 1)} \\
&= 1 + \left(\frac{\tan^2 \varphi_0}{1 + \tan^2 \varphi_0} \right) \left(\frac{1 - \cos^2 \bar{\mu}}{\cos^2 \bar{\mu}} \right) \\
&= 1 + \sin^2 \varphi_0 \tan^2 \bar{\mu} \quad (4.55)
\end{aligned}$$

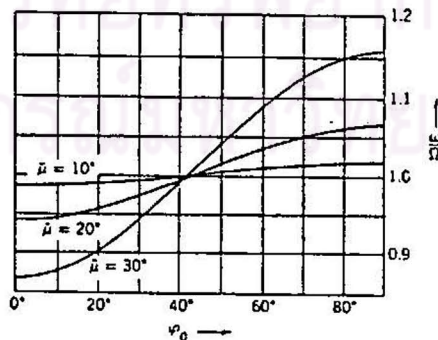
ดังนั้นจึงได้เป็น

$$\omega = \frac{d\varphi_0}{dt} = \Omega \cos \bar{\mu} (1 + \sin^2 \varphi_0 \tan^2 \bar{\mu}) \tag{4.56}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า มารค์ μ เป็นกลองชนิดที่ทำให้อัตราศูนย์กลางของทรงกลม การสะท้อนเคลื่อนที่ไปรอบรีซีเพอเคิลแลทที่ด้วยความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง φ_0 การเปลี่ยนแปลงของมุม φ_0 กับเวลา t ที่มุมพรีเซล์ต่าง ๆ กัน ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.8 และการเปลี่ยนแปลงของมุม φ_0 กับอัตราส่วนความเร็วเชิงมุมของทรงกลมการสะท้อน ω/Ω ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.8 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของมุม φ_0 ของทรงกลมการสะท้อนในรีซีเพอเคิลสเปล์กับเวลา



รูปที่ 4.9 การเปลี่ยนแปลงของความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงมุม ω/Ω กับมุม φ_0

บนภาพถ่ายปริเยลชัน จุดสะท้อนแต่ละจุดได้จากการที่จุดรีเฟรอกเิลแลททิส
 รั้งเข้าหา และรั้งออกจากทรงกลมการสะท้อน ดังแสดงในรูปที่ 4.10 ถ้ากำหนดให้มุมเอซิมัท
 ของจุด P ในรีเฟรอกเิลแลททิสเป็น φ ค่าของมุม φ_0 ที่พิจารณาได้จากตำแหน่งการเคลื่อนที่
 ของจุดศูนย์กลางของทรงกลมการสะท้อน 2 ตำแหน่ง โดยมีความสัมพันธ์เป็น

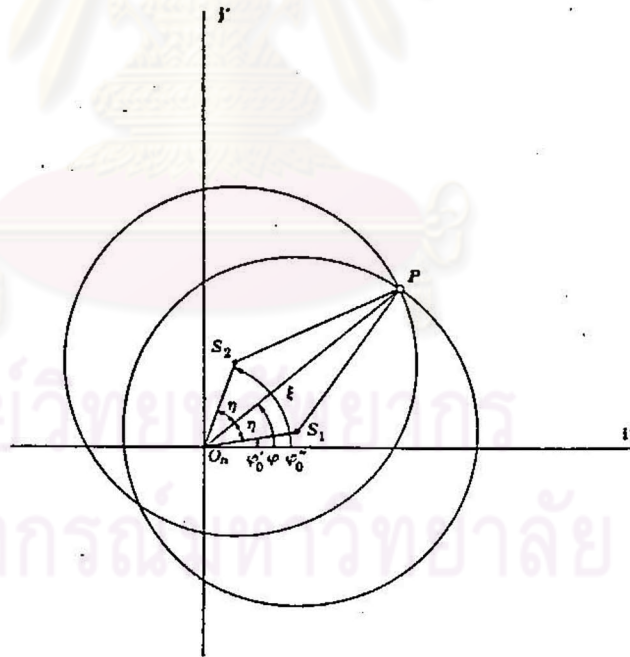
$$\varphi_0' = \varphi - \eta$$

$$\varphi_0'' = \varphi + \eta \quad (4.57)$$

ดังนั้นแพคเตอร์ลอเรนซ์ L จึงเป็นสัดส่วนผกผันกับความเร็วตามแนวรัศมี V_r ของความเร็ว
 $\xi\omega(\varphi_0, \bar{\mu})$ ซึ่งทรงกลมการสะท้อนรั้งผ่านจุด P (ξ, ζ, φ) จะได้

$$V_r = \xi \omega \cos \delta$$

$$= \omega(\varphi_0, \bar{\mu}) \sin \bar{\nu} \sin \bar{\mu} \sin \gamma \quad (4.58)$$



รูปที่ 4.10 ความสัมพันธ์ระหว่างมุม φ , φ_0' และ φ_0'' กับมุม η

เพราะฉะนั้น

$$L(\xi, \zeta, \varphi, \bar{\mu}) \propto \frac{1}{V_r(\varphi_0')} + \frac{1}{V_r(\varphi_0'')}$$

$$L(\xi, \zeta, \varphi, \bar{\mu}) = \frac{1}{\Omega \sin \gamma \sin \bar{\nu} \sin \bar{\mu} \cos \bar{\mu}} \times \left[\frac{1}{1 + \tan^2 \bar{\mu} \sin^2(\varphi + \eta)} + \frac{1}{1 + \tan^2 \bar{\mu} \sin^2(\varphi - \eta)} \right] \quad (4.59)$$

4.3 แพลตฟอร์มเรนซ์-โพลาริซ

จากวิธีการฟรีเซลล์อื่น พบว่าความเร็วเชิงมุมของรีซีเพอเคิลแลททิสในการวิ่งผ่านทรงกลมการสะท้อนไม่คงที่ และไม่เท่ากับความเร็วเชิงมุมของการฟรีเซลล์ แต่มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งของแกนการฟรีเซลล์ พิจารณาจุดรีซีเพอเคิล $P(\xi, \zeta, \varphi)$ ซึ่งมี ξ, ζ, φ และ $\bar{\mu}$ เป็นพิกัดทรงกระบอกเชิงรัศมี, เียงแกน, เียงมุม ตามลำดับ ตัวสัญลักษณ์ด้วยความเร็วเชิงมุม Ω มุมฟรีเซลล์ $\bar{\mu}$ มุม $\bar{\nu}$ มีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของกรวยการสะท้อน มุม γ เป็นมุมฉายของมุมระหว่างรังสีตกกระทบกับรังสีหักเหบนระนาบที่คู่ขนาน มุม η บอกถึงลักษณะการเคลื่อนที่ของจุด $P(\xi, \zeta, \varphi)$ ผ่านผิวทรงกลมการสะท้อน ซึ่งจากองค์ประกอบเหล่านี้ทำให้ได้แพลตฟอร์มเรนซ์ในรูปแบบของ

$$L(\xi, \zeta, \varphi, \bar{\mu}) = \frac{1}{\Omega \sin \gamma \sin \bar{\nu} \sin \bar{\mu} \cos \bar{\mu}} \times \left[\frac{1}{1 + \tan^2 \bar{\mu} \sin^2(\varphi + \eta)} + \frac{1}{1 + \tan^2 \bar{\mu} \sin^2(\varphi - \eta)} \right]$$

มุม γ และมุม η สามารถเขียนแสดงในเทอมของ $\xi, \bar{\mu}$ และ $\bar{\nu}$ ได้เป็น

$$\cos \gamma = \frac{\sin^2 \bar{\mu} + \sin^2 \bar{\nu} - \xi^2}{2 \sin \bar{\mu} \sin \bar{\nu}} \quad (4.60)$$

$$\cos \eta = \frac{\xi^2 + \sin^2 \bar{\mu} - \sin^2 \bar{\nu}}{2 \xi \sin \bar{\mu}}$$

ดังได้กล่าวครั้งหนึ่งแล้วในหัวข้อต้น สำหรับการแก้ข้อมูลความเข้มให้ถูกต้องด้วยแพลตฟอร์มโพลาริซและแพลตฟอร์มเรนซ์นั้น พบว่าสามารถรวมแพลตฟอร์มทั้งสองเข้าด้วยกัน ซึ่งทำให้การแก้ไขข้อมูลความเข้มสะดวกขึ้น ในการคำนวณหาแพลตฟอร์มเรนซ์-โพลาริซ มักนิยามหาหามุมฟรีเซลล์ $\bar{\mu} = 30^\circ$ ซึ่งเป็นมุมที่กว้าง และนิยมใช้เก็บข้อมูล

กรณีระนาบที่ศูนย์ เวเซอร์ (Waser) ได้กำหนดให้มุม $\bar{\mu} = \bar{\nu} = 30^\circ$ ค่า $\sin \theta = \xi/2$ ดังนั้นแฟคเตอร์โพลาไรซ์จากสมการที่ (4.5) จึงเขียนได้เป็น

$$p = (8 - 4\xi^2 + \xi^4)/8$$

จากสมการที่ (4.60) จึงเหลือเป็น

$$\cos \gamma = 1 - \frac{1}{2} (\xi/\sin \bar{\mu})^2$$

และจากสมการที่ (4.59)

$$\sin \gamma \sin^2 \bar{\mu} = \xi |\sin^2 \bar{\mu} - (\xi/2)^2|^{\frac{1}{2}}$$

ดังนั้นแฟคเตอร์ลอเรนซ์-โพลาไรซ์สำหรับระนาบรีซีเพรอกเคิลแลทที่สี่ที่ 0 จึงเป็น

$$\left(\frac{1}{L.p}\right)^\alpha A(\xi, \bar{\mu}) B(\xi, \varphi, \bar{\mu})$$

โดยที่

$$A(\xi, \bar{\mu}) = \frac{\xi [\sin^2 \bar{\mu} - (\xi/2)^2]^{\frac{1}{2}} \cos \bar{\mu}}{8 - 4\xi^2 + \xi^4}$$

$$B(\xi, \varphi, \bar{\mu}) = \left[\frac{1}{1 + \tan^2 \bar{\mu} \sin^2 (\varphi + \eta)} + \frac{1}{1 + \tan^2 \bar{\mu} \sin^2 (\varphi - \eta)} \right]^{-1}$$

ซึ่ง η สัมพันธ์กับ $\xi, \bar{\mu}$ เป็น

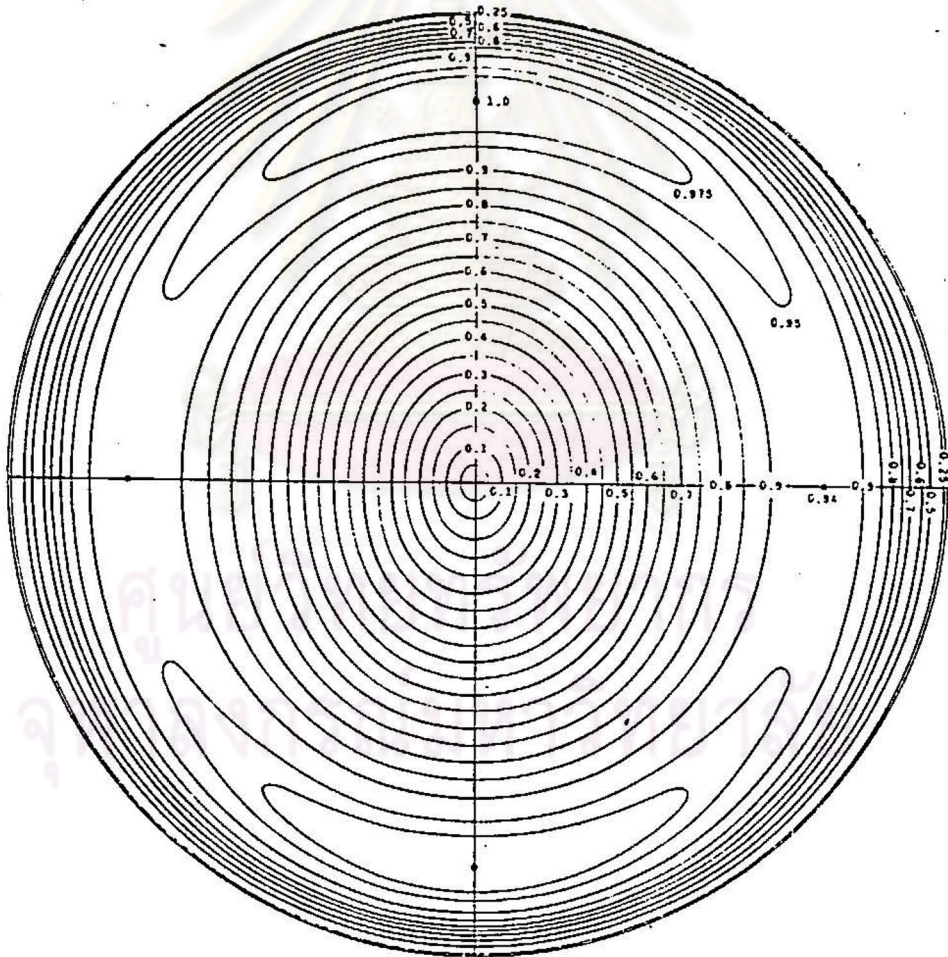
$$\cos \eta = \frac{1}{2} \xi \sin \bar{\mu} \quad (4.61)$$

เมื่อ $\bar{\mu} = 30^\circ$ ($\tan \bar{\mu} = \frac{1}{3}$) เทอม $B(\xi, \varphi, \bar{\mu})$ สามารถขยายได้เป็น

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{3} \sin^2 (\varphi + \eta)} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \sin^2 (\varphi - \eta)} \right]^{-1} = \\ & = \frac{1}{2} \left[\frac{7}{6} - \frac{1}{6} \cos 2\varphi \cos 2\eta - \frac{1}{6.7} \sin^2 2\varphi \sin^2 2\eta \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{6.7.7} \cos 2\varphi \sin^2 2\varphi \cos 2\eta \sin^2 2\eta \right] \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{6.7.7.7} \cos^2 2\varphi \sin^2 2\varphi \cos^2 2\eta \sin^2 2\eta - \dots \quad (4.62)$$

สำหรับมุม $\varphi = 0^\circ$ และ $\varphi = 90^\circ$ การขยายสิ้นสุดแก่เทอมที่สอง มุม $\varphi = 45^\circ$ การขยายสิ้นสุดที่เทอมที่สาม ขณะที่เทอมที่สองเป็น 0 ในกรณีของ $B(\xi, \varphi, 30^\circ)$ ใช้การขยายสามเทอมแรก ซึ่งให้ผลการคำนวณถูกต้องเพียงพอที่จะนำไปใช้ในการคำนวณค่าแก๊ลอเรนซ์-โพลาริซ์ โดยกำหนดให้ φ คงที่ แล้วเปลี่ยนค่า ξ ไปเรื่อย ๆ เพื่อคำนวณหาค่า η สำหรับค่า ξ หนึ่ง ๆ แล้วจึงแทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (4.62) เพื่อหา $B(\xi, \varphi, 30^\circ)$ นำผลของ $B(\xi, \varphi, 30^\circ)$ คูณเข้ากับ $A(\xi, 30^\circ)$ ผลลัพธ์ที่ได้นำมาทำการเจสียปกติ (normalization) โดยให้ค่า $(L.p)^{-1}$ มากที่สุดเป็น 1.00 หลังจากนั้นลงจุดระหว่างค่า $(L.p)^{-1}$ กับค่า ξ ตั้งแผนภาพแสดงในรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 แผนภาพของค่าแก๊ลอเรนซ์-โพลาริซ์ $(L.p.)^{-1}$ กับค่า ξ ของระนาบที่ 0 และมุมฟรีเซลล์ $\bar{\mu} = 30^\circ$

กรณีี่ระนาบ n แพลกเตอร์ลอเรนซ์-โพลาไรซ์กำหนดได้จาก

$$\left(\frac{1}{L.p}\right) \alpha \quad A(\xi, \zeta, \bar{\mu}) \quad B(\xi, \zeta, \varphi, \bar{\mu})$$

โดยที่ $A(\xi, \zeta, \bar{\mu})$

$$= \frac{4 \Omega \cos \bar{\mu} \left[4 \xi^2 \sin^2 \bar{\mu} - (\sin^2 \bar{\nu} - \sin^2 \bar{\mu} - \xi^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{(8 - 4 \zeta^2 + \zeta^4) + (2 \zeta^2 - 4) \xi^2 + \xi^4} \quad (4.63)$$

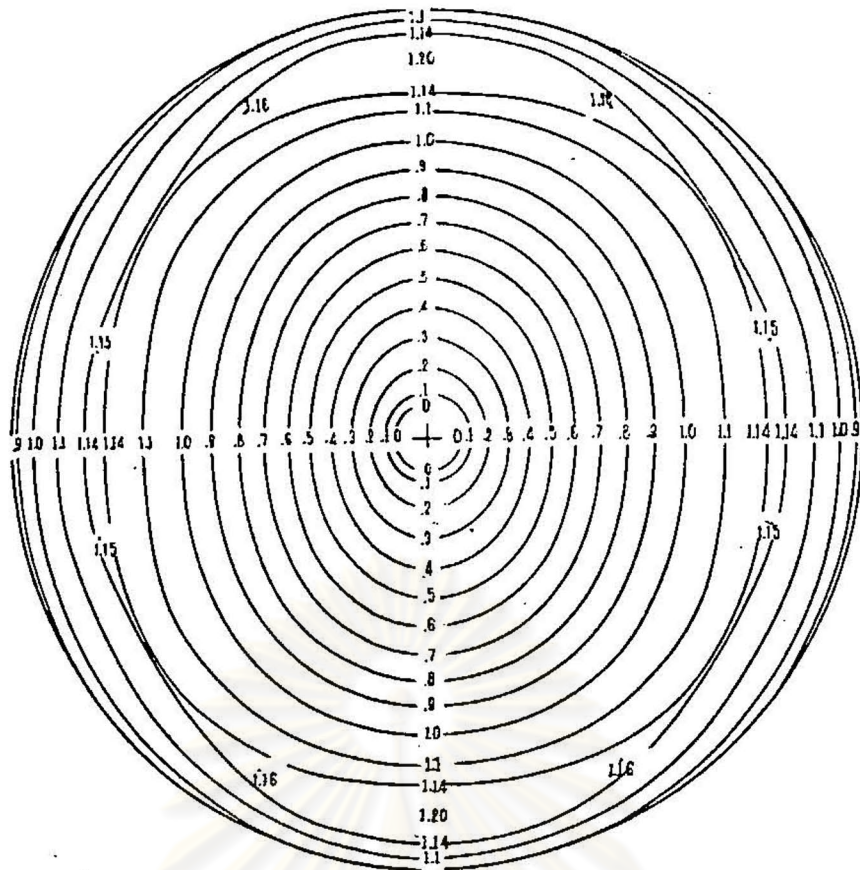
$$B(\xi, \zeta, \varphi, \bar{\mu}) = \left[\frac{1}{1 + \tan^2 \bar{\mu} \sin^2(\varphi + \eta)} + \frac{1}{1 + \tan^2 \bar{\mu} \sin^2(\varphi - \eta)} \right]^{-1} \quad (4.64)$$

ซึ่ง $\bar{\nu} = \cos^{-1}(\cos \bar{\mu} - \zeta) \quad (4.65)$

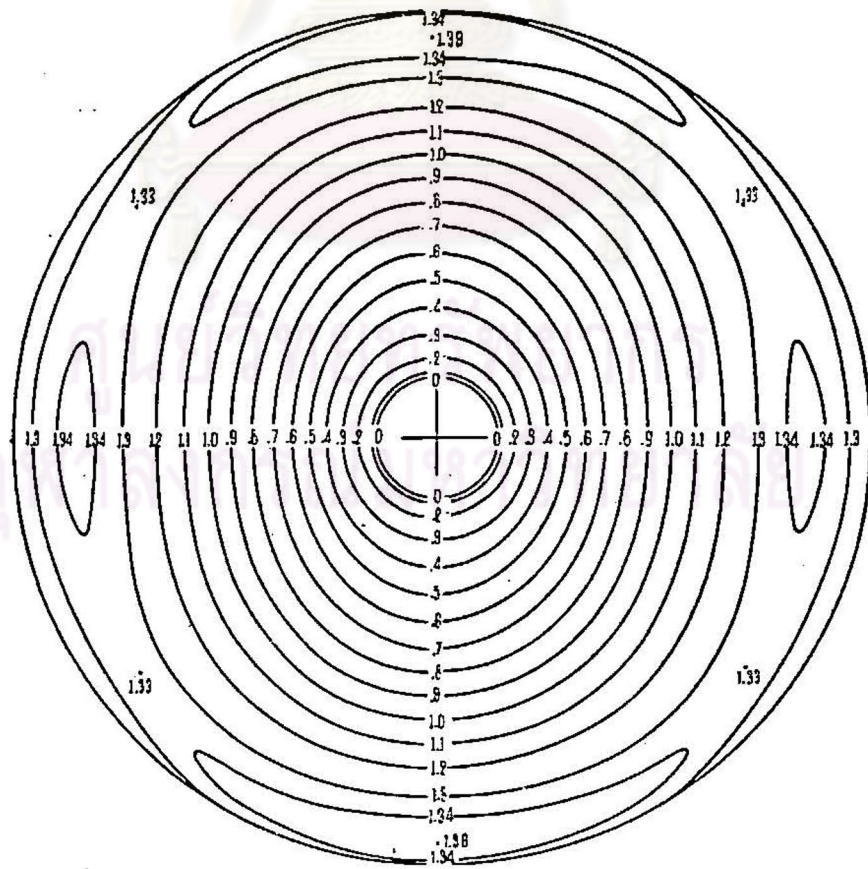
$$\eta = \cos^{-1} \left[\frac{\xi^2 + \sin^2 \bar{\mu} - \sin^2 \bar{\nu}}{2 \xi \sin \bar{\mu}} \right] \quad (4.66)$$

กรินวิลล์-เวลล์ และ ฮับราฮัม (Grenville-Wells and Abraham) ได้คำนวณค่าแกกซ์ลอเรนซ์-โพลาไรซ์ โดยใช้ $\bar{\mu} = 30^\circ$ กำหนดให้ระนาบต่าง ๆ อยู่สูงจากระนาบที่ 0 โดยมีช่วงห่างกัน 0.05 หน่วยรีซีเพอเคลแลทกิล (r.l.u.) ซึ่งได้คำนวณไว้ทั้งหมด 7 ระนาบ คือ $\zeta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30$ และ 0.35 หน่วยรีซีเพอเคลแลทกิล ตั้งแผนภาพแสดงไว้ในรูปที่ 4.12 (ก) - 4.12 (ข)

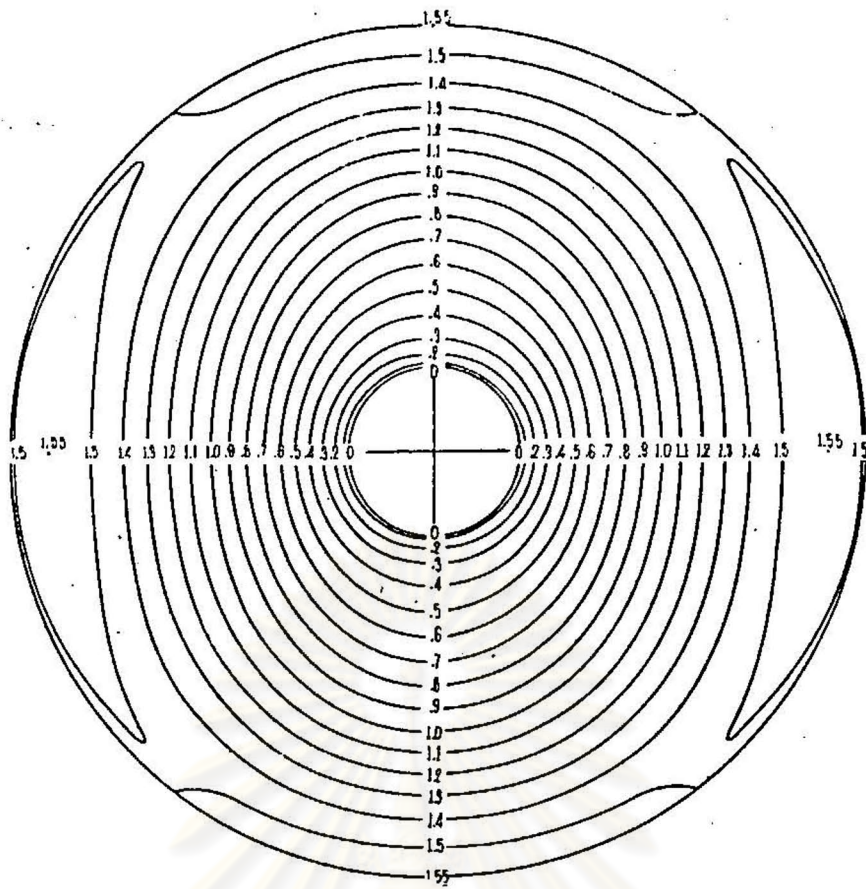
ศูนย์วิทยุทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



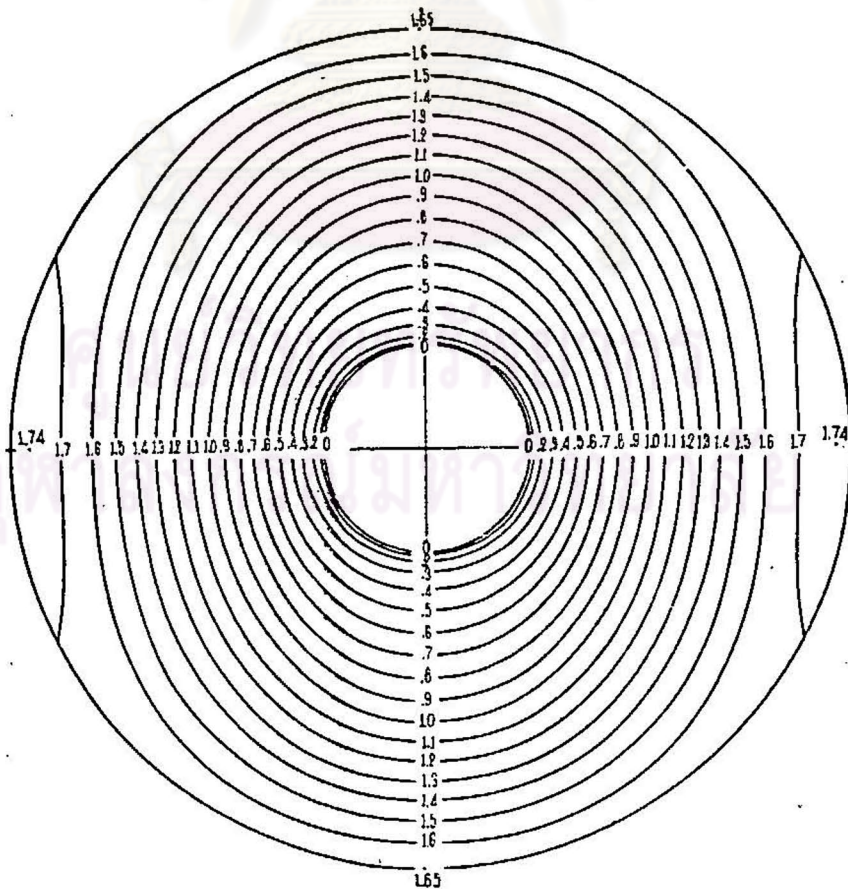
รูปที่ 4.12 (ก) แผนภาพของค่าแก๊สเรย์-โพลาร์ไรซ์ของระนาบที่มีค่า $\zeta = 0.05$ r.l.u. และมุมพลิก $\bar{\mu} = 30^\circ$



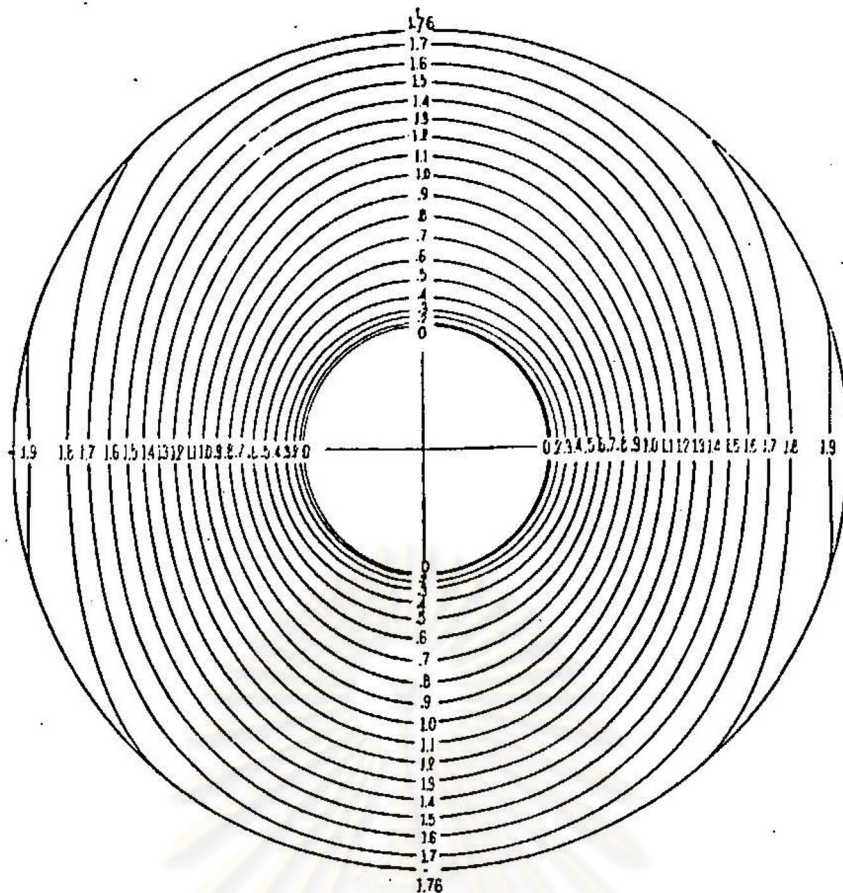
รูปที่ 4.12 (ข) แผนภาพของค่าแก๊สเรย์-โพลาร์ไรซ์ของระนาบที่มีค่า $\zeta = 0.10$ r.l.u. และมุมพลิก $\bar{\mu} = 30^\circ$



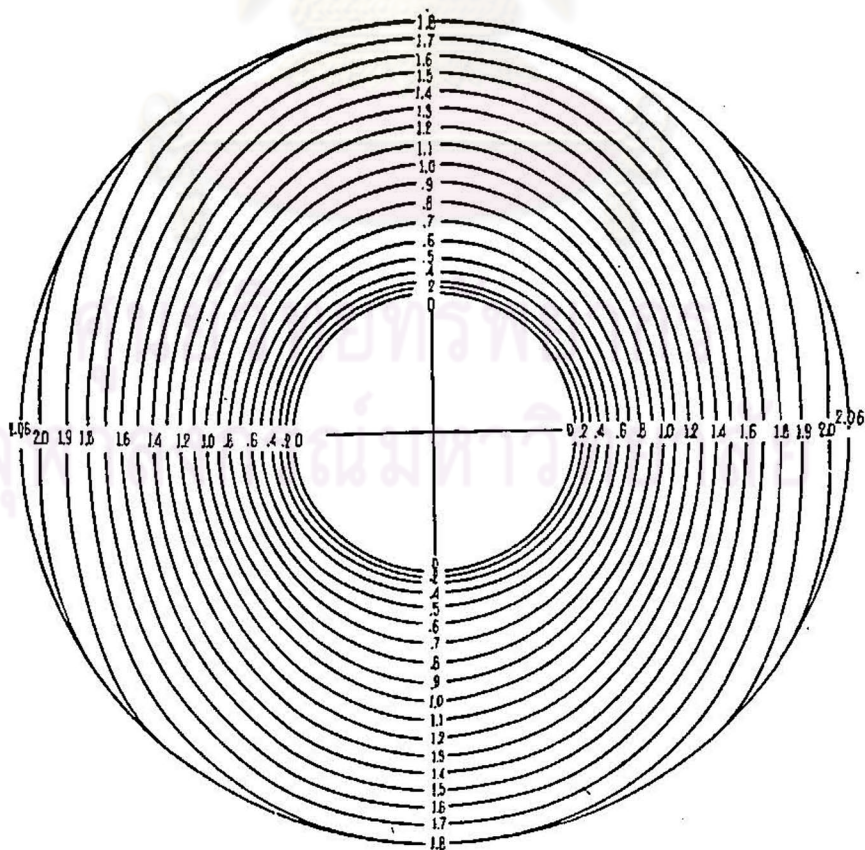
รูปที่ 4.12 (ค) แผนภาพของค่าแก๊ลอเรนซ์-โพลาริซชันของระนาบที่มีค่า $\zeta = 0.15$ r.l.u. และมุมพีเชล $\mu = 30^\circ$



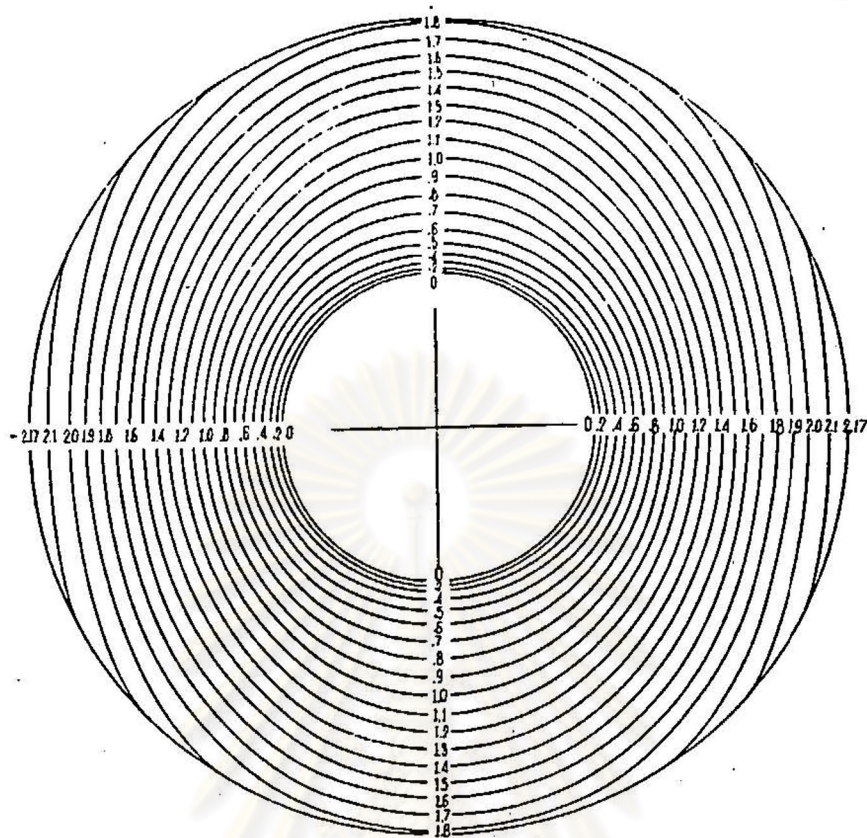
รูปที่ 4.12 (ง) แผนภาพของค่าแก๊ลอเรนซ์-โพลาริซชันของระนาบที่มีค่า $\zeta = 0.20$ r.l.u. และมุมพีเชล $\mu = 30^\circ$



รูปที่ 4.12 (ก) แผนภาพของค่าแกลลอเรนซ์-โพลาริซของระบบที่มีค่า $\zeta = 0.25$ r.l.u. และมุมพรีเซส $\mu = 30^\circ$



รูปที่ 4.12 (ข) แผนภาพของค่าแกลลอเรนซ์-โพลาริซของระบบที่มีค่า $\zeta = 0.30$ r.l.u. และมุมพรีเซส $\mu = 30^\circ$



รูปที่ 4.12 (ข) แผนภาพของค่าแก๊ลอเรนซ์-โพลาริซของระนาบที่มีค่า $\xi = 0.35$ r.l.u. และมุมฟรีเชล $\mu = 30^\circ$

หลังจากที่เราหาค่าเกณฑ์เหมาะสมระหว่างแผ่นฟิล์มความเข้ม กับแผนภาพได้ เราก็จะสามารถใช้แผนภาพของค่าแก๊ลอเรนซ์-โพลาริซนี้ได้โดยตรง โดยที่วงกลมวงนอกสุดของแผนภาพมีค่า $\xi = 1.00$ r.l.u. เพื่อความรวดเร็ว ควรลอกแผนภาพนี้ลงบนแผ่นใส แล้วใช้ทาบกับแผ่นฟิล์มเก็บข้อมูลความเข้ม โดยเส้นในแนวนอนขนานกับแกนหมุนของผลึก นั่นคือตำแหน่ง $\varphi = 0^\circ$ ในกรณีที่ระยะห่างระหว่างระนาบที่ n กับระนาบที่ 0 (ξ_n) ไม่ตรงตามแผนภาพที่คำนวณไว้แล้ว ให้หาค่าแก๊ลอเรนซ์-โพลาริซโดยการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นตรง (linear interpolation)