บทที่ 5

วิธีการคำนวณ

ในการหาหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ที่เวลาใดๆนั้น เพื่อที่จะนำไปใช้วิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของวงโคจรเมื่อได้รับการรบกวนจากดาวเคราะห์ดวงอื่นๆ จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณี คือ

1. กรณีที่ไม่มีการรบกวนใดๆเกิดขึ้นภายในระบบ
2. กรณีที่มีการรบกวนจากดาวพฤหัสบดี
3. กรณีที่มีการรบกวนจากดาวเสาร์
4. กรณีที่มีการรบกวนทั้งจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์

ใน 4 กรณีที่กล่าวมานั้นมีช่วงเวลาที่ใช้ในการหาหลักมูลทางโคจรที่เวลาต่างๆของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์จะเป็นระยะเวลา 50 ปี มีขั้นเวลาในการคำนวณ (step size) เป็น 20 วัน นอกจากนี้ยังทำการคำนวณหาคาบระยะสั้นและคาบระยะยาวของการแปรผันหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์เมื่อได้รับการรบกวนทั้งจากดาวพฤหัสและดาวเสาร์ที่เกิดขึ้นด้วย โดยมีช่วงระยะเวลาที่ทำการศึกษาดังต่อไปนี้

1. ช่วงเวลา 50 ปี มีขั้นเวลาในการคำนวณเป็น 20 วัน
2. ช่วงเวลา 150 ปี มีขั้นเวลาในการคำนวณเป็น 60 วัน
3. ช่วงเวลา 400 ปี มีขั้นเวลาในการคำนวณเป็น 150 วัน

โดยหลักมูลทางโคจรที่จะนำมาใช้วิเคราะห์ในงานวิจัยครั้งนี้ได้แก่ a, i, e, ω และ Ω ที่เวลาต่างๆ ซึ่งในการหาค่าหลักมูลทางโคจรดังกล่าวนั้นมีกระบวนการ ดังต่อไปนี้

5.1 การหาตำแหน่งและความเร็วจากหลักมูลทางโคจร

โดยข้อมูลเริ่มต้นที่นำมาใช้สำหรับงานวิจัยครั้งนี้คือ หลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ ซึ่งประกอบไปด้วย a, i, e, ω, M และ Ω โดยจะเริ่มจากการแปลงค่าหลักมูลทางโคจรที่เวลาเริ่มต้นเหล่านี้มาคำนวณหาพิกัดตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ที่เวลาใดๆ โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังต่อไปนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> เนื่องจากค่าหลักมูลทางโคจรซึ่งได้แก่ i, ω, Ω และ M มีหน่วยเป็นองศา ดังนั้นจึงต้องเปลี่ยนหน่วยเป็นเรเดียนด้วยการคูณด้วย 0.174532925 หรือ $\frac{\pi}{180}$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> การประมาณค่าของ E โดยใช้สมการ (2.108) ต่อไปนี้

$$f = E - e \sin E - M$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $E = M$ และค่า E ที่จะนำมาใช้คำนวณต่อไปได้มาจากกรณีที่ค่าสมบูรณ์ของ $F < 0.0000001$

ขั้นตอนที่ 3 เมื่อได้ค่า E แล้วจึงสามารถหาค่าจลนรัศมี r ได้จาก

$$r = a(1 - e \cos E)$$

ขั้นตอนที่ 4 หาค่า $\dot{E}$ และ b จากสมการต่อไปนี้

$$\dot{E} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

ขั้นตอนที่ 5 เมื่อทราบค่า $E, \dot{E}, r$ และ b แล้วสามารถนำไปหาค่า $\bar{x}, \bar{y}, \dot{\bar{x}}$ และ $\dot{\bar{y}}$ ซึ่งเป็นพิกัดตำแหน่งและความเร็วในระนาบ $\overline{xy}$ ได้จากสมการต่อไปนี้

$$\bar{x} = a(\cos E - e)$$

$$\bar{y} = b \sin E$$

$$\dot{\bar{x}} = -a\dot{E} \sin E$$

$$\dot{\bar{y}} = b\dot{E} \cos E$$

ขั้นตอนที่ 6 ต่อไปพิจารณาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{P}, \vec{Q}$ ซึ่งเขียนในพิกัดของ $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\vec{P} = {} & \vec{I}(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i) + \\ & \vec{J}(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i) + \\ & \vec{K}(\sin\omega\cos i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{Q} = {} & \vec{I}(-\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i) + \\ & \vec{J}(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i) + \\ & \vec{K}(\cos\omega\sin i)\end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 7 ต่อไปจึงสามารถหาค่าพิกัดตำแหน่งและความเร็วของวัตถุในวงโคจรได้โดย

$$\vec{r} = \bar{x}\vec{P} + \bar{y}\vec{Q}$$

$$\vec{v} = \dot{\bar{x}}\vec{P} + \dot{\bar{y}}\vec{Q}$$

สำหรับค่าพิกัดตำแหน่งและความเร็วที่เวลาเริ่มต้น t_0 ของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์ จะใช้สัญลักษณ์ต่างๆดังต่อไปนี้

- $\vec{r}_{T0}, \vec{r}_{J0}, \vec{r}_{S0}$ คือ พิกัดตำแหน่งที่เวลาเริ่มต้นของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์ตามลำดับ
- $\vec{v}_{T0}, \vec{v}_{J0}, \vec{v}_{S0}$ คือ ความเร็วที่เวลาเริ่มต้นของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์ตามลำดับ

5.2 การแก้สมการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์โดยระเบียบวิธีของเองเก

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์จากสมการ (3.16)

$$\ddot{\vec{r}}_T = -\frac{\mu}{r_T^3}\vec{r}_T + m_J\left(\frac{\vec{p}_J}{p_J^3} - \frac{\vec{r}_J}{r_J^3}\right) + m_S\left(\frac{\vec{p}_S}{p_S^3} - \frac{\vec{r}_S}{r_S^3}\right)$$

เมื่อ $\vec{r}_T, \vec{r}_J, \vec{r}_S$ คือ จลนรัศมีของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ดาวพฤหัสบดี และดาวเสาร์ ตามลำดับ

$\vec{p}_J, \vec{p}_S$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์สัมพัทธ์กับดาวเคราะห์น้อยทูเลย์

m_J, m_S คือ มวลของดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ในหน่วยมวลดวงอาทิตย์

เมื่อนำสมการ (3.16) มาเขียนใหม่ในรูปของความเร่งรวมของดาวเคราะห์น้อยได้เป็น

$$\ddot{\vec{r}}_T = -\frac{\mu}{r_T^3}\vec{r}_T + \vec{a}_T \tag{5.1}$$

พิจารณาเทอมสุดท้ายซึ่งเป็นเทอมที่แสดงแรงดึงดูดทั้งหมดที่รบกวนต่อวงโคจรของดาวเคราะห์น้อย นั่นคือ

$$\vec{a}_T = m_J\left(\frac{\vec{p}_J}{p_J^3} - \frac{\vec{r}_J}{r_J^3}\right) + m_S\left(\frac{\vec{p}_S}{p_S^3} - \frac{\vec{r}_S}{r_S^3}\right) \tag{5.2}$$

เมื่อ $\vec{p}_J = \vec{r}_J - \vec{r}_T$

$\vec{p}_S = \vec{r}_S - \vec{r}_T$

ย้อนกลับไปพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของกรณีปัญหาวัตถุสองชิ้น

$$\ddot{\vec{r}}_\mu = -\frac{\mu}{r_\mu^3}\vec{r}_\mu \tag{5.3}$$

เมื่อ $\ddot{\vec{r}}_\mu$ คือ ความเร่งของดาวเคราะห์น้อยในกรณีที่ปราศจากการรบกวนจากเทหวัตถุใดๆ แล้วนำสมการ (5.3) ลบออกจากสมการ (5.1) จะได้ว่า

$$\ddot{\vec{r}}_T - \ddot{\vec{r}}_\mu = \mu\left(\frac{\vec{r}_\mu}{r_\mu^3} - \frac{\vec{r}_T}{r_T^3}\right) + \vec{a}_T \tag{5.4}$$

หรือ

$$\delta\ddot{\vec{r}}_T = \mu\left(\frac{\vec{r}_\mu}{r_\mu^3} - \frac{\vec{r}_T}{r_T^3}\right) + \vec{a}_T \tag{5.5}$$

จากสมการ (5.5) แสดงถึงความเปลี่ยนแปลงความเร่งของดาวเคราะห์น้อยซึ่งตรงจุดนี้เองที่จะนำไปสู่การรบกวนวงโคจรการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยต่อไป หรือจะสามารถหาพิกัดตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ได้เป็นสมการดังต่อไปนี้

$$\vec{r}_T = \vec{r}_\mu + \delta\vec{r}_T \tag{5.6}$$

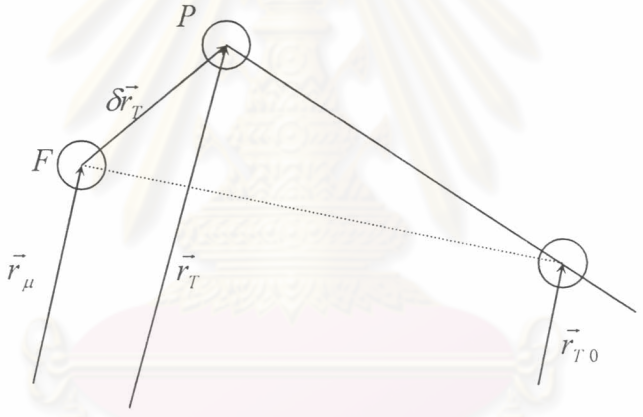
$$\vec{v}_T = \vec{v}_\mu + \delta\vec{v}_T \tag{5.7}$$

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เมื่อ $\vec{r}_\mu, \vec{v}_\mu$ คือ จลนรัศมีและความเร็วของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ในกรณีที่ไม่มีการรบกวนภายในระบบการเคลื่อนที่

$\delta\vec{r}_T$, $\delta\vec{v}_T$ คือ เวกเตอร์การรบกวนของตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ซึ่งจะได้จากการคำนวณโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของการเปลี่ยนแปลงความเร่งของระบบต่อไป

รูปที่ 5.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ดังสมการ (5.6) ซึ่งจะแสดงลำดับของขั้นตอนในการคำนวณ โดยเริ่มจากเมื่อดาวเคราะห์น้อยเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $\vec{r}_{T0}$ ไปยังตำแหน่ง $\vec{r}_\mu$ ที่ชี้ไปยังจุด F ในกรณีที่ไม่มีการรบกวนเกิดขึ้น ส่วนในกรณีที่มีการรบกวนเกิดขึ้นต่อวงโคจรจะพบว่าเวกเตอร์ $\vec{r}_{T0}$ จะเคลื่อนไปยังตำแหน่ง $\vec{r}_T$ ที่ชี้ไปยังจุด P โดยจะสามารถหา$\vec{r}_T$ ได้จากผลรวมระหว่างเวกเตอร์$\vec{r}_\mu$ และ $\delta\vec{r}_T$ และในขั้นตอนต่อไปของการคำนวณตำแหน่งการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นถัดไปนั้น กระทำได้โดยการพิจารณาให้$\vec{r}_T$ และ$\vec{v}_T$ ที่คำนวณได้นั้นเป็นองค์ประกอบของตำแหน่งและความเร็วเริ่มต้นคือ$\vec{r}_{T0}$ และ$\vec{v}_{T0}$ สำหรับการคำนวณครั้งใหม่ต่อไป



รูปที่ 5.1 แสดงการแก้ปัญหาการรบกวนโดยระเบียบวิธีของเองเก

โดยจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทำให้สามารถคำนวณเวกเตอร์ $\delta\vec{r}_T$ และ $\delta\vec{v}_T$ ได้จากกระบวนการต่อไปนี้

$$\frac{d}{d\tau}\left(\delta\vec{r}_T\right) = \vec{f}\left(\delta\vec{v}_T\right) \tag{5.8}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\delta\vec{v}_T\right) = \vec{g}\left(m, \vec{r}_\mu, r_\mu, \vec{r}_T, r_T, a_T\right) \tag{5.9}$$

เมื่อ

$$\vec{f}\left(\delta\vec{v}_T\right) = \delta\vec{v}_T$$

$$\vec{g}\left(m, \vec{r}_\mu, r_\mu, \vec{r}_T, r_T, \vec{a}_T\right) = \left(\frac{\vec{r}_\mu}{r_\mu^3} - \frac{\vec{r}_T}{r_T^3}\right)\mu + \vec{a}_T$$

พิจารณาเมื่อ $\vec{r}_\mu, \vec{v}_\mu$ คือ ค่าเริ่มต้นในขั้นตอนการอินทิเกรตเพราะมีค่าเท่ากับ $\vec{r}_T, \vec{v}_T$ ที่ถูกคำนวณได้ในขั้นตอนก่อนหน้านี้ ดังนั้นผลต่างระหว่าง $\frac{\vec{r}_\mu}{r_\mu^3}$ และ $\frac{\vec{r}_T}{r_T^3}$ จะมีค่าน้อยในการอินทิเกรตในแต่ละช่วง ในการคำนวณปริมาณต่างๆในแต่ละช่วงจะใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยสมการที่จะนำมาอินทิเกรตมีดังต่อไปนี้

$$\frac{d\vec{r}_\mu}{d\tau} = \vec{v}_\mu \tag{5.10}$$

$$\frac{d\vec{v}_\mu}{d\tau} = -\frac{\mu}{r_\mu^3}\vec{r}_\mu \tag{5.11}$$

$$\frac{d\vec{r}_T}{d\tau} = \vec{v}_T \tag{5.12}$$

$$\frac{d\vec{v}_T}{d\tau} = -\frac{\mu}{r_T^3}\vec{r}_T + \vec{a}_T \tag{5.13}$$

ต่อไปจะเป็นการพิจารณาการใช้ระเบียบวิธีรุงเง-กุตตากับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ เพื่อหาตำแหน่งและความเร็วของตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์ที่ส่งแรงรบกวนแก่ดาวเคราะห์น้อยทูเลย์เพื่อนำไปใช้หาแรงรบกวนในรูปของ $\vec{a}_T$ ที่เกิดขึ้นกับวงโคจรของดาวเคราะห์น้อยต่อไป ซึ่งได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{d\vec{r}_q}{d\tau} = \vec{v}_q \tag{5.14}$$

$$\frac{d\vec{v}_q}{d\tau} = -(1+m_q)\frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \tag{5.15}$$

พิจารณาเวกเตอร์ประกอบในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาที่จะถูกนำมาใช้ในระเบียบวิธีของเองเก ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปดังต่อไปนี้

$$\vec{F}_j = h\vec{f}\left(\delta\vec{v}_T\right) \tag{5.16}$$

$$\vec{G}_j = h\vec{g}\left(m, \vec{r}_\mu, r_\mu, \vec{r}_T, r_T, \vec{a}_T\right) \tag{5.17}$$

เมื่อ h คือ ช่วงการเปลี่ยนแปลงของเวลา และในกรณีของระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาอันดับห้าจะได้ $j = 1,2,..,6$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นของการการอินทิเกรต ดังต่อไปนี้

$$\delta\vec{r}_T = 0$$

$$\delta\vec{v}_T = 0$$

เนื่องจากการเคลื่อนที่ของกรณีวัตถุสองชิ้นและกรณีที่มีการรบกวนเกิดขึ้นภายในระบบจะมีขั้นตอนการคำนวณโดยใช้ผลจาการอินทิเกรตในขั้นตอนก่อนหน้านั้น ดังนั้นสามารถหาการรบกวนวงโคจรการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ได้ ดังต่อไปนี้

$$\delta\vec{r}_T = \frac{1}{90}\left(7\vec{F}_1 + 323\vec{F}_3 + 12\vec{F}_4 + 32\vec{F}_5 + 7\vec{F}_6\right) \tag{5.18}$$

$$\delta\vec{v}_T = \frac{1}{90}\left(7\vec{G}_1 + 32\vec{G}_3 + 12\vec{G}_4 + 32\vec{G}_5 + 7\vec{G}_6\right) \quad (5.19)$$

สุดท้ายจะสามารถหาพิกัดของตำแหน่งและความเร็วได้จาก

$$\vec{r}_T = \vec{r}_\mu + \delta\vec{r}_T \quad (5.20)$$

$$\vec{v}_T = \vec{v}_\mu + \delta\vec{v}_T \quad (5.21)$$

โดยเมื่อได้ตำแหน่งและความเร็วจากขั้นตอนนี้แล้วจะนำไปเป็นค่าตำแหน่งและความเร็วเริ่มต้นในขั้นตอนต่อไป

5.3 การคำนวณหลักมูลทางโคจรจากตำแหน่งและความเร็ว

เมื่อคำนวณหาตำแหน่งและความเร็วจากการแก้สมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์จากระเบียบวิธีของเองเก้จากในหัวข้อที่ 3.2 แล้ว ต่อไปจึงเป็นกระบวนการเปลี่ยนข้อมูลซึ่งอยู่ในรูปของตำแหน่งและความเร็วที่เวลาต่างๆของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ให้เป็นค่าของหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยเพื่อนำมาวิเคราะห์วงโคจรต่อไป โดยมีขั้นตอนต่างๆดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เนื่องจากพิกัดตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ที่ได้จากการคำนวณในหัวข้อ 3.2 นั้น เป็นระบบพิกัดที่ใช้ทรงกลมท้องฟ้าในการบอกพิกัด ซึ่งเส้นศูนย์สูตรของระบบพิกัดท้องฟ้าจะทำมุมกับระนาบวงโคจรของดาวเคราะห์น้อยซึ่งมีวงโคจรอยู่ในระนาบสุริยะวิถี โดยทั้งสองระบบพิกัดจะทำมุม ε ต่อกัน โดยจะสามารถหาค่า ε ได้จาก

$$\varepsilon = 23^\circ.439291 - 0^\circ.0130042\,T - 0^\circ.00000016\,T^2$$

โดย

$$T = \frac{JD - 2451545.0}{36525};\ JD = \text{Julian Date}$$

แล้วจึงแทนค่า ε ลงในสมการต่อไปนี้ เพื่อหาองค์ประกอบของตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์น้อยในวงโคจรสุริยะวิถี

$$x_T = x_{T0}$$

$$y_T = y_{T0}\cos\varepsilon + z_{T0}\sin\varepsilon$$

$$z_T = z_{T0}\cos\varepsilon - y_{T0}\sin\varepsilon$$

และ

$$v_{Tx} = v_{T0x}$$

$$v_{Ty} = v_{T0y}\cos\varepsilon + v_{T0z}\sin\varepsilon$$

$$v_{Tz} = v_{T0z}\cos\varepsilon - v_{T0y}\sin\varepsilon$$

เมื่อได้ตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ในระบบสุริยะวิถีแล้ว จึงทำการหาค่าหลักมูลทางโคจรต่อไป

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าa ได้จากสมการ (2.93)

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}} \tag{5.22}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาค่าe ได้จากสมการ (2.88)

$$\vec{e} = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\vec{r} - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\vec{v} \tag{5.23}$$

ขั้นตอนที่ 4 หาค่าi ได้จาก (2.89)และ(2.90)

$$\vec{h} = \vec{r}\mathrm{X}\vec{v}$$

เมื่อ $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$ดังนั้น

$$\begin{aligned} h_x &= y\dot{z} - z\dot{y} \\ h_y &= z\dot{x} - x\dot{z} \\ h_z &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned} \tag{5.24}$$

ซึ่งสามารถคำนวณค่าi จากสมการ (2.96)

$$i = \cos^{-1}\frac{h_z}{h}$$

ขั้นตอนที่ 5 หาค่าΩ ได้จากสมการ(2.92),(2.100) เมื่อ $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$ดังนั้น

$$\begin{aligned} N_x &= -h_y \\ N_y &= +h_x \\ N_z &= 0 \end{aligned} \tag{5.25}$$

เมื่อ$\left|\vec{N}\right| = N$

$$\Omega = \cos^{-1}\frac{N_x}{N} \tag{5.26}$$

ขั้นตอนที่ 6 หาค่าω จากสมการ (2.103)

$$\omega = \cos^{-1}\frac{\vec{N}\cdot\vec{e}}{Ne} \tag{5.27}$$

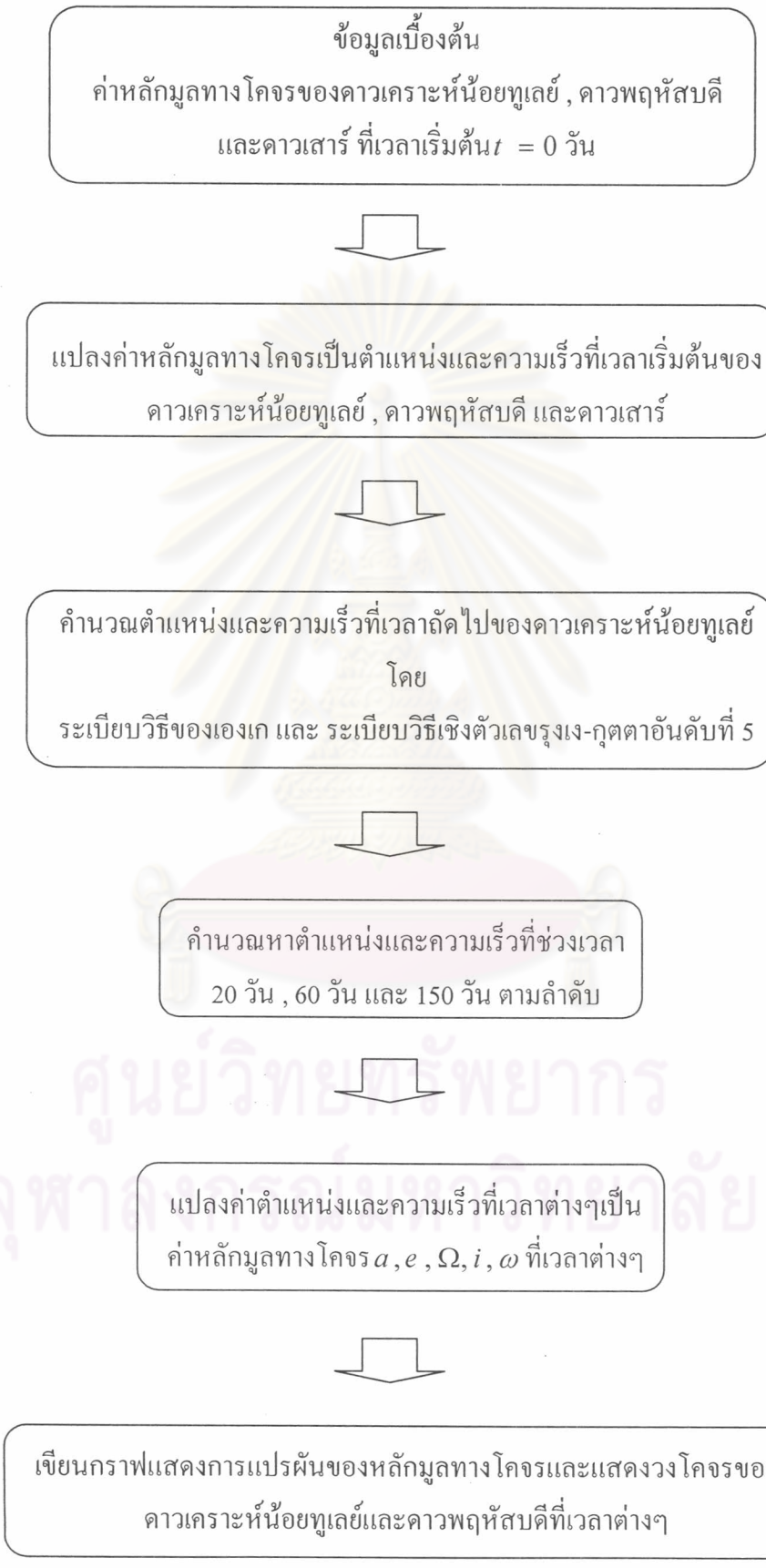
เมื่อเสร็จสิ้นทุกขั้นตอนแล้วจะทราบหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ ผลที่ได้จะถูกนำไปใช้ในการเขียนกราฟเพื่อวิเคราะห์ผลต่อไป

5.4 สรุปขั้นตอนการทำงาน

ในการศึกษาการแปรผันของหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์น้อยทูเลย์ เมื่อได้รับแรงรบกวนจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ที่ระยะเวลา 50,150 และ 400 ปี ตามลำดับ มีขั้นตอนดังแผนผังต่อไปนี้

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขั้นตอนการหาค่าหลักมูลทางโคจร



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย