บทที่ 4

ระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา

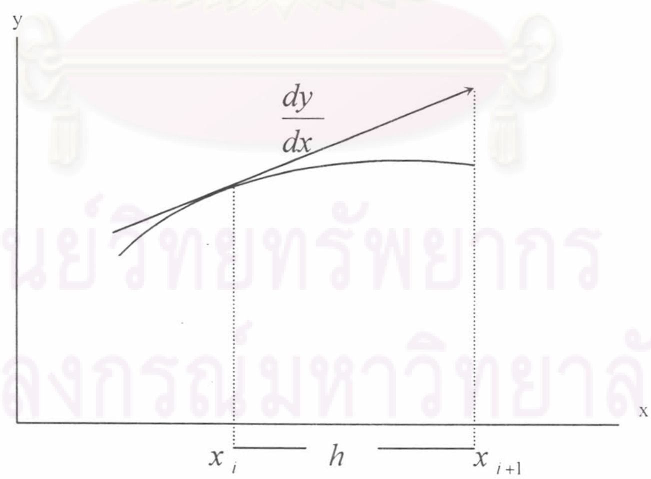
ระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา (Runge-Kutta method) เป็นระเบียบวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้สำหรับการคำนวณที่ต้องการความละเอียดและความแม่นยำสูง โดยแนวความคิดของระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา คือ การหาค่าความชันที่มีความเที่ยงตรงสูงเพื่อนำไปใช้ในการหาผลลัพย์ที่มีความเที่ยงตรงสูงนั่นเอง

ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์นี้ต้องมีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจำนวนเท่ากับลำดับของอนุพันธ์ แต่ถ้าเป็นกรณีของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้นจะต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเพียงเงื่อนไขเดียว เมื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x , y\right) \tag{4.1}$$

โดยสามารถอธิบายได้โดยพิจารณารูปที่ 4.1 จากรูปที่ 4.1 สามารถหาผลลัพย์โดยประมาณของ x_{i+1} และ y_{i+1} เมื่อทราบค่า x_i และ y_i โดยเริ่มต้นจากการหาความชันที่ x_i ดังต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.2}$$



รูปที่ 4.1 แสดงระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา

จากสมการ (4.1) และ (4.2) จะสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$f\left(x_i , y_i\right) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} ; h = x_{i-1} - x_i \tag{4.3}$$

เมื่อ h คือ ช่วงความกว้าง (step size) ที่ใช้ในการคำนวณ ดังนั้นจะสามารถหาค่า y_{i+1} ได้เป็น

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{4.4}$$

จากสมการ (4.4) แสดงให้เห็นว่าสามารถที่จะหาค่า y_{i+1} ใหม่ได้จากค่า y_i เดิม และค่าความชันที่ตำแหน่ง x_i และจากรูปที่ 4.1 ค่าความคลาดเคลื่อนของวิธีนี้ขึ้นอยู่กับขนาดของช่วงความกว้าง นั่นหมายถึงว่า ช่วงความกว้างยิ่งมีค่าน้อยเท่าไรก็จะทำให้เกิดความแม่นยำในการคำนวณมากขึ้นเท่านั้น ในการคำนวณด้วยวิธีรุงเก-คุตตา สมการ (4.4) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \tag{4.5}$$

เมื่อ $\phi(x_i, y_i, h)$ คือ ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (increment function) ซึ่งมีความหมายแสดงถึงค่าความชันที่ช่วงความกว้าง h ที่จะนำไปใช้ในการคำนวณส่วนที่เพิ่มขึ้นจากผลลัพย์เดิม โดยฟังก์ชันส่วนเพิ่มจะอยู่ในรูป

$$\phi = a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 F_3 + \ldots + a_n F_n \tag{4.6}$$

เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ คือ ค่าคงที่ และ

$$\begin{aligned}
F_1 &= f(x_1, y_1) \\
F_2 &= f(x_1 + p_1 h, y_1 + q_{11} F_1 h) \\
F_3 &= f(x_1 + p_2 h, y_1 + q_{21} F_1 h + q_{22} F_2 h) \\
&\vdots \\
F_n &= f(x_1 + p_{n-1} h, y_1 + q_{n-1,1} F_1 h + q_{n-1,2} F_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} F_{n-1} h)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

เมื่อ n คือ อันดับที่ของระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา โดยค่า $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$ ในสมการ (4.7) ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของสมการอนุพันธ์สามัญที่นำมาแก้ปัญหา ซึ่งจำเป็นที่จะต้องทราบค่า F_1 แล้วจึงคำนวณค่า F_2 ต่อไปได้ และในทำนองเดียวกันก็จะสามารถคำนวณหาค่า F_3 ได้จาก F_2 นั่นเองซึ่งจะเป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ ส่วนค่า p และ q นั้นเป็นค่าคงที่ซึ่งจะมีค่าแตกต่างกันไปตามอันดับของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่เลือกใช้ในการคำนวณ โดยต่อไปจะเป็นการพิจารณาระเบียบวิธีของรุงเก-คุตตาอันดับที่ห้า ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นำมาใช้ในงานวิจัยครั้งนี้ เนื่องจากวิธีนี้เป็นวิธีที่มีความเที่ยงตรงสูงมาก การนำระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา อันดับห้าของบุทเชอร์(Butcher's fifth-order Runge-Kutta method) [3] โดยมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7F_1 + 32F_3 + 12F_4 + 32F_5 + 7F_6)h \tag{4.8}$$

เมื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งซึ่งมีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4.9}$$

เมื่อใช้ระเบียบวิธีรุงเก-คุตตาในการแก้สมการ จะสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$x = x_0 + \delta x \tag{4.10}$$

โดย x_0 เป็นค่าตัวแปรเริ่มต้น และ δx คือ ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม โดยที่

$$\delta x = \frac{1}{90}\left(7F_1 + 32F_3 + 12F_4 + 32F_5 + 7F_6\right) \tag{4.11}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
F_1 &= hf\left(t_0, x_0\right) \\
F_2 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{4}h, x_0 + \frac{1}{4}F_1\right) \\
F_3 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{4}h, x_0 + \frac{1}{8}F_1 + \frac{1}{8}F_2\right) \\
F_4 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 - \frac{1}{2}F_2 + F_3\right) \\
F_5 &= hf\left(t_0 + \frac{3}{4}h, x_0 + \frac{3}{16}F_1 + \frac{9}{16}F_4\right) \\
F_6 &= hf\left(t_0 + h, x_0 - \frac{3}{7}F_1 + \frac{2}{7}F_2 + \frac{12}{7}F_3 - \frac{12}{7}F_4 + \frac{8}{7}F_5\right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นในกรณีที่ไม่มีการรบกวนระบบ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง $\vec{r}_0$ และมีความเร็ว $\vec{v}_0$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 จะได้ฟังก์ชันดังต่อไปนี้

$$\vec{f}\left(\vec{v}\right) = \vec{v} \tag{4.13}$$

$$\vec{g}\left(\vec{r}\right) = -\frac{\mu\vec{r}}{r^3} \tag{4.14}$$

สมการ (4.13) และ (4.14) สามารถเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้เป็นสมการต่อไปนี้

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{f}\left(\vec{v}\right)$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \vec{g}\left(\vec{r}\right)$$

จากสมการ (4.9) และสมการเชิงอนุพันธ์สามัญข้างต้นที่ได้มานั้น เมื่อนำไปอินทิเกรตโดยระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา แล้วสามารถเปลี่ยนสมการ (4.12) ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= h\vec{f}\left(t_0, \vec{v}_0\right) \\
\vec{G}_1 &= h\vec{g}\left(t_0, \vec{r}_0\right) \\
\vec{F}_2 &= h\vec{f}\left(t_0 + \frac{1}{4}h, \vec{v}_0 + \frac{1}{4}\vec{G}_1\right) \\
\vec{G}_2 &= h\vec{g}\left(t_0 + \frac{1}{4}h, r_0 + \frac{1}{4}\vec{F}_1\right) \\
\vec{F}_3 &= h\vec{f}\left(t_0 + \frac{1}{4}h, \vec{v}_0 + \frac{1}{8}\vec{G}_1 + \frac{1}{8}\vec{G}_2\right) \\
\vec{G}_3 &= h\vec{g}\left(t_0 + \frac{1}{4}h, \vec{r}_0 + \frac{1}{8}\vec{F}_1 + \frac{1}{8}\vec{F}_2\right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\vec{F}_4 = h\vec{f}\left(t_0 + \frac{1}{2}h, \vec{v}_0 - \frac{1}{2}\vec{G}_2 + \vec{G}_3\right)$$

$$\vec{G}_4 = h\vec{g}\left(t_0 + \frac{1}{2}h, \vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{F}_2 + \vec{F}_3\right)$$

$$\vec{F}_5 = h\vec{f}\left(t_0 + \frac{3}{4}h, \vec{v}_0 + \frac{3}{16}\vec{G}_1 + \frac{9}{16}\vec{G}_4\right)$$

$$\vec{G}_5 = h\vec{g}\left(t_0 + \frac{3}{4}h, \vec{r}_0 + \frac{3}{16}\vec{F}_1 + \frac{9}{16}\vec{F}_4\right)$$

$$\vec{F}_6 = h\vec{f}\left(t_0 + h, v_0 - \frac{3}{7}\vec{G}_1 + \frac{2}{7}\vec{G}_2 + \frac{12}{7}\vec{G}_3 - \frac{12}{7}\vec{G}_4 + \frac{8}{7}\vec{G}_5\right)$$

$$\vec{G}_6 = h\vec{g}\left(t_0 + h, \vec{r}_0 - \frac{3}{7}\vec{F}_1 + \frac{2}{7}\vec{F}_2 + \frac{12}{7}\vec{F}_3 - \frac{12}{7}\vec{F}_4 + \frac{8}{7}\vec{F}_5\right)$$

เมื่อ $h = k(t - t_0)$ คือ ช่วงการเปลี่ยนแปลงของเวลา และนำสมการ (4.11) มาพิจารณาร่วมกับสมการ (4.15) จะได้ว่า

$$\delta\vec{r} = \frac{1}{90}\left(7\vec{F}_1 + 32\vec{F}_3 + 12\vec{F}_4 + 32\vec{F}_5 + 7\vec{F}_6\right) \tag{4.16}$$

$$\delta\vec{v} = \frac{1}{90}\left(7\vec{G}_1 + 32\vec{G}_3 + 12\vec{G}_4 + 32\vec{G}_5 + 7\vec{G}_6\right) \tag{4.17}$$

จากความสัมพันธ์ของสมการ (4.10) สามารถหาตำแหน่งและความเร็วที่เวลา $t_0 + h$ ได้จาก

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \delta\vec{r} \tag{4.18}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v} \tag{4.19}$$

ซึ่งจะสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการหาตำแหน่งและความเร็วโดยระเบียบวิธีของเองเกต่อไป