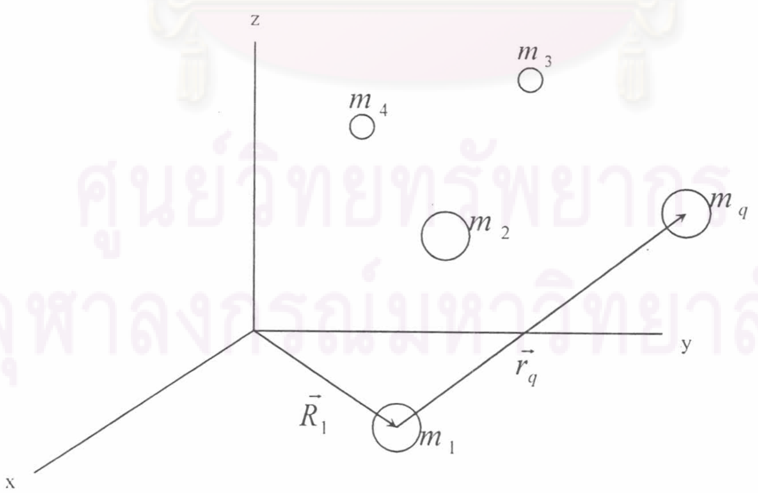
บทที่ 3

ปัญหาการรบกวน

เนื่องจากเทหวัตถุในห้วงอวกาศประกอบไปด้วยดวงดาวมากมาย เฉพาะในระบบสุริยจักรวาลก็ยังประกอบไปด้วยดวงอาทิตย์ ดาวนพเคราะห์ทั้งเก้า ดาวเคราะห์น้อยและเทหวัตถุอื่นๆอีกมากมาย ซึ่งเทหวัตถุเหล่านี้ก็จะส่งแรงกระทำซึ่งกันและกัน โดยแรงที่กระทำต่อกันมีผลกระทบต่อการโคจรของเทหวัตถุซึ่งจะทำให้วงโคจรเปลี่ยนแปลงไป จะมีค่ามากหรือน้อยนั้นขึ้นอยู่กับแรงที่มากระทำ เรียกแรงที่มารบกวนการโคจรเหล่านี้ว่า แรงรบกวน (disturbing force)

กล่าวโดยทั่วไปคือ เมื่อทราบแรงหลักที่กำหนดการเคลื่อนที่ซึ่งในที่นี้คือแรงโน้มถ่วงจากดวงอาทิตย์นั่นเอง และเมื่อเพิ่มแรงอื่นซึ่งมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับแรงนี้ แรงอื่นๆเหล่านี้จึงถูกเรียกว่าแรงรบกวน แต่ถ้าในกรณีที่ระบบวัตถุที่พิจารณาเคลื่อนที่เข้าใกล้กันอย่างรวดเร็วแล้วจะทำให้แรงรบกวนมีขนาดเพิ่มขึ้นอย่างมหาสาร และเมื่อถึงระดับความใหญ่เทียบเท่ากับแรงโน้มถ่วงจากดวงอาทิตย์แล้ว แรงนี้ไม่สามารถเรียกว่าแรงรบกวนได้อีกแล้ว และทฤษฎีการรบกวนก็ไม่สามารถใช้ได้เช่นกัน ดังนั้นเงื่อนไขของแรงรบกวนคือต้องมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับแรงหลักของระบบ จากหัวข้อที่ 2.2 สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ของกรณีปัญหาวัตถุสองชิ้นหรือกรณีที่ไม่มีการรบกวนจากวัตถุอื่นๆได้อย่างชัดเจนแล้ว ต่อไปนี้จะกล่าวถึงสมการการเคลื่อนที่ของปัญหากรณีที่มีการรบกวนเกิดขึ้นภายในระบบ

3.1 สมการการเคลื่อนที่ทั่วไปกรณีปัญหาวัตถุหลายชิ้น



รูปที่ 3.1 แสดงแรงโน้มถ่วงหลักที่มวล m_1 กระทำต่อวัตถุอื่น

รูปที่ 3.1 แสดงให้เห็นถึงแรงโน้มถ่วงขนาดใหญ่ของมวล m_1 ที่กระทำต่อวัตถุอื่นๆที่มีมวล $m_2, m_3, \ldots, m_N$ จำนวน $N-1$ ชิ้น โดยกำหนดให้ $\vec{R}_1$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวล m_1 เมื่อ

เทียบกับจุดกำเนิดและกำหนดให้ $\vec{r}_q$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวลอันดับที่ q เมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางมวล m_1 ดังนั้นสามารถเขียนแรงโน้มถ่วงที่มวล m_q กระทำต่อมวล m_1 ได้คือ

$$\vec{F}_q = G\frac{m_1 m_q}{r_q^3}\vec{r}_q \tag{3.1}$$

ดังนั้นแรงสุทธิ $\vec{F}$ ที่กระทำต่อวัตถุ m_1 คือ

$$\vec{F} = \sum_{q=2}^{N}\vec{F}_q \tag{3.2}$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตันเมื่อ $\vec{A}_1$ เป็นความเร่งของมวล m_1 ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้เป็น

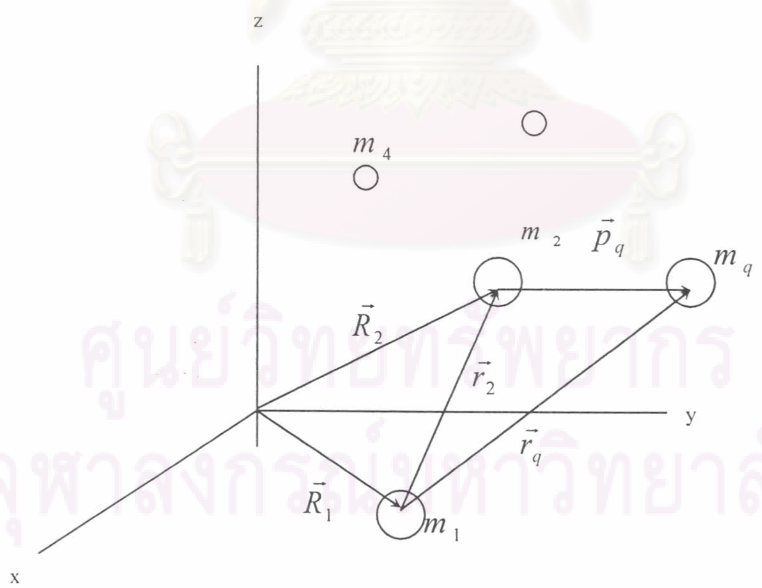
$$\vec{A}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1} \tag{3.3}$$

หรือ

$$\vec{A}_1 = \sum_{q=2}^{N}\frac{Gm_q}{r_q^3}\vec{r}_q \tag{3.4}$$

สมการ (3.4) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของมวล m_1 ที่เทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

3.2 สมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์



รูปที่ 3.2 แสดงปัญหากรณีวัตถุหลายชิ้น

รูปที่ 3.2 แสดงถึงปัญหาความโน้มถ่วงที่ต้องการคำนวณวงโคจรของวัตถุมวล m_2 ที่มีวัตถุต่างๆ $m_1, m_2, \ldots, m_N$ เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรงดึงดูดร่วมระหว่างกันโดยเวกเตอร์ $\vec{R}_1$ และ $\vec{R}_2$ แสงถึงตำแหน่งของมวล m_1, m_2 เมื่อเทียบกับจุดกำเนิดตามลำดับ ส่วน $\vec{r}_q, \vec{p}_q$ คือ

เวกเตอร์ตำแหน่งของ m_q สัมพัทธ์กับ m_1 , m_2 ตามลำดับ ดังนั้นจากรูปที่ 3.1 จะได้ว่า

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \tag{3.5}$$

และจากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\vec{a}_2 = \vec{A}_2 - \vec{A}_1 \tag{3.6}$$

จากสมการ (3.4) สามารถนำมาเขียนใหม่ได้เป็น

$$\vec{A}_1 = \frac{Gm_2\vec{r}_2}{r_2^3} + \sum_{q=3}^{N}\frac{Gm_q\vec{r}_q}{r_q^3} \tag{3.7}$$

และ

$$\vec{A}_2 = -\frac{Gm_1\vec{r}_2}{r_2^3} + \sum_{q=3}^{N}\frac{Gm_q\vec{p}_q}{\vec{p}_q^3} \tag{3.8}$$

โดยที่ $\vec{p}_q = \vec{r}_q - \vec{r}_2$ และ $p_q = |\vec{p}_q|$

เนื่องจากทิศของแรงที่ m_1 กระทำกับ m_2 สวนทางกับทิศของแรงที่ m_2 กระทำต่อ m_1 ทำให้เทอมแรกของสมการ (3.8) มีเครื่องหมายลบ เมื่อนำสมการ (3.7) และ (3.8) แทนลงในสมการ (3.6) จะได้สมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของมวล m_2 เทียบกับมวล m_1 จะได้ว่า

$$\vec{a}_2 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r_2^3}\vec{r}_2 + \sum_{q=3}^{N} Gm_q\left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3}\right) \tag{3.9}$$

3.3 สมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดสุริยะมัธยม

ต่อไปนี้จะทำการพิจารณาการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุในระบบสุริยจักรวาล ซึ่งมีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่ โดยมีเทหวัตถุต่างเคลื่อนที่โคจรรอบดวงอาทิตย์ เมื่อพิจารณาสมการ (3.9) อีกครั้ง พบว่าสามารถเขียนสมการนี้ให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น โดยให้ m_1 เป็นมวลซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของระบบและ m_2 เป็นมวลของวัตถุที่โคจร โดยในกรณีที่นำมาพิจารณาพบว่ามวลของดวงอาทิตย์ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของระบบมีค่ามากกว่ามวลของดาวเคราะห์ดวงอื่นมาก และในการคำนวณหน่วยมวลที่ใช้จะเป็นหนึ่งหน่วยมวลของดวงอาทิตย์ ดังนั้นจะได้มวลรวมเป็น

$$\mu = (1 + m_2) \tag{3.10}$$

จากสมการ (3.9) นั้นเลิกใช้สัญลักษณ์ $\vec{r}_2, \ddot{\vec{r}}_2$ และปรับค่าดัชนีให้เหมาะสมโดยจะเริ่มต้นที่ $q = 1$ ถึง N ซึ่งเท่ากับจำนวนวัตถุที่มารบกวน ดังนั้นเขียนสมการ (3.9) ใหม่ได้เป็น

$$\ddot{\vec{r}} = -G\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \sum_{q=1}^{N} Gm_q\left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3}\right)$$

และสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการการเคลื่อนที่ได้โดย การนิยามเวลาดัดแปลง

$$\tau = k(t - t_0)$$

เมื่อ t คือ เวลาใดๆ

t_0 คือ เวลาเริ่มต้น และ $k = \sqrt{G}$

ดังนั้น

$$d\tau = kdt$$

โดยเมื่อหาอนุพันธ์ของ $\vec{r}$ เทียบกับ τ โดยเมื่อให้"จุด" แทนอนุพันธ์เทียบกับ τ จะได้ว่า

$$\dot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{k}\right)\vec{v}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{k^2}\right)\vec{a}, k^2 = G$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{G}\right)\vec{a}$$

ดังนั้น

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \sum_{q=1}^{N} m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3}\right) \tag{3.11}$$

สมการ (3.11) เป็นสมการการเคลื่อนที่ที่นำไปใช้ในการคำนวณ จากสมการนี้หากทราบพิกัดตำแหน่งและความเร็วของวัตถุที่เวลาเริ่มต้น ก็จะสามารถหาตำแหน่งและความเร็วที่เวลาต่างๆได้โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วย

3.4 ฟังก์ชันการรบกวน

จากสมการที่ (3.11) เพื่อเป็นการง่ายในการนำมาพิจารณาฟังก์ชันการรบกวนจึงกำหนดให้ N=1 กล่าวคือมีวัตถุที่เป็นวัตถุที่ทำให้เกิดการรบกวนเพียงหนึ่งชิ้นเท่านั้น จะได้สมการใหม่เป็น

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = m_q \frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - m_q \frac{\vec{r}_q}{r_q^3} \tag{3.12}$$

พิจารณาเทอมด้านซ้ายมือของสมการ ซึ่งเทอมนี้คือเทอมที่แสดงถึงการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของกรณีปัญหาวัตถุสองชิ้นนั่นเอง ส่วนเทอมทางด้านขวามือโดยปกติจะมีค่าเท่ากับศูนย์ในกรณีที่ไม่มีการรบกวนเกิดขึ้นภายในระบบ

ดังนั้นสองเทอมทางขวาที่เพิ่มเข้ามาเนื่องจากความมีอยู่ของเทหวัตถุมวล m_q ซึ่งก็คือแรงอันเนื่องจากการรบกวนของ m_q แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{F}_p$ จะเขียนได้เป็น

$$\vec{F}_p = m_q \left(\frac{\vec{p}_q}{p_q^3} - \frac{\vec{r}_q}{r_q^3}\right) \tag{3.13}$$

ในที่นี้ถ้าสมมุติให้ฟังก์ชันการรบกวน $\vec{R}_p$ มีอยู่จริงจะได้ว่า

$$\vec{F}_p = \frac{\partial R_p}{\partial \vec{r}} \tag{3.14}$$

เมื่อ

$$R_p = m_q\left(\frac{1}{p_q} - \frac{\vec{r}_q \cdot \vec{r}}{r_q^3}\right) \tag{3.15}$$

และ $\vec{p}_q = \vec{r}_q - \vec{r}$

พิจารณาฟังก์ชั่นการรบกวน R_p ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เทอมที่หนึ่งคือศักย์ของเทหวัตถุมวล m_q ที่แปลงเครื่องหมายแล้วซึ่งเป็นผลมาจากแรงโน้มถ่วงของ m_q โดยแรงยึดเหนี่ยวจากเทอมนี้เป็นแรงโน้มถ่วงอันเนื่องจาก m_q เรียกว่า การรบกวนโดยตรง (direct perturbation)

ส่วนเทอมที่สองนั้นเกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์โดยแรงดึงดูดของเทหวัตถุ m_1 และ m_q เนื่องจากดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลางของระบบ ระบบที่พิจารณาอยู่จึงเคลื่อนไหวตลอดเวลา ในสมการการเคลื่อนที่ที่สร้างขึ้นในระบบพิกัดที่เคลื่อนที่อยู่จึงมีแรงปรากฏออกมา (apparent force) ในสมการการเคลื่อนที่ของระบบพิกัดที่หมุนรอบตัวเองมีแรงโคริออลิส (Coriolis force) ออกมาก็เป็นอีกตัวอย่างหนึ่ง ในกรณีที่กำลังพิจารณาใช้ระบบพิกัดที่กำลังเคลื่อนที่อยู่เช่นกันจึงมีแรงปรากฏออกมา ซึ่งก็คือเทอมที่สองของฟังก์ชันการรบกวนนั่นเอง แต่ถ้าใช้ระบบพิกัดที่ให้จุดศูนย์กลางมวลของระบบวัตถุทั้งระบบเป็นจุดอ้างอิงแล้ว เทอมที่สองของฟังก์ชันก์การรบกวนจะไม่ปรากฏออกมา

แต่เนื่องจากระบบพิกัดที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นมีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง ฟังก์ชันการรบกวนจึงเป็นไปตามสมการ (3.15) การรบกวนที่เกิดจากเทอมที่สองเรียกว่า การรบกวนโดยอ้อม (indirect perturbation)

3.5 สมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อย

สมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยที่จะพิจารณาต่อไปจะคำนึงถึงการรบกวนที่ได้รับจากดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์เท่านั้น โดยมีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ ดังนั้นจากสมการ (3.11) จะได้ว่า

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r}\vec{r} + m_1\left(\frac{\vec{p}_1}{p_1^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) + m_2\left(\frac{\vec{p}_2}{p_2^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right) \tag{3.16}$$

เมื่อ $\vec{r}$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเคราะห์น้อยเทียบกับดวงอาทิตย์

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์เทียบกับดวงอาทิตย์ ตามลำดับ

m_1, m_2 คือ มวลของดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ต่อหน่วยมวลดวงอาทิตย์

$\vec{p}_1$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวพฤหัสบดีสัมพัทธ์กับดาวเคราะห์น้อย

$\vec{p}_2$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของดาวเสาร์สัมพัทธ์กับดาวเคราะห์น้อย

เนื่องจาก

$$\vec{p}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r} \tag{3.17}$$

$$\vec{p}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r} \tag{3.18}$$

ดังนั้นสมการ (3.16) , (3.17) และ (3.18)จะกลายเป็น

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + m_1\left(\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r})}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}\right|^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right) + m_2\left(\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r})}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}\right|^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right) \tag{3.19}$$

สมการ (3.19) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์น้อยที่จะนำไปใช้ในการคำนวณต่อไป