บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 นิยามเบื้องต้น

เมื่อมองขึ้นไปบนท้องฟ้าในยามค่ำคืนจะมองเห็นดวงดาวต่างๆระยิบระยับประดับอยู่บนพื้นผิวของท้องฟ้าในลักษณะของครึ่งทรงกลม แต่เมื่อคิดในกรณีที่ผู้สังเกตสามารถมองออกไปรอบๆทุกทิศทางโดยไม่มีส่วนของโลกมาบัง ก็ควรจะเห็นท้องฟ้ามีลักษณะเป็นทรงกลมกลวง หรือจะกล่าวได้ว่าในกรณีที่ผู้สังเกตคนหนึ่งมองเห็นเป็นครึ่งทรงกลม ในขณะเดียวกันผู้สังเกตอีกคนหนึ่งที่อยู่บนซีกโลกตรงกันข้ามก็จะมองเห็นท้องฟ้าเป็นครึ่งทรงกลมเช่นเดียวกัน จึงสรุปได้ว่าท้องฟ้าต้องมีลักษณะเป็นทรงกลมกลวงที่เรียกว่า “ทรงกลมท้องฟ้า” (Celestial sphere) [1]

สิ่งที่ให้การสนใจกันโดยทั่วไป คือ ทิศทางที่ดวงดาวปรากฏอยู่บนทรงกลมท้องฟ้าเทียบกับตำแหน่งของโลก หรือตำแหน่งที่ดวงดาวปรากฏอยู่ ณ ผิวในของทรงกลมท้องฟ้า นั่นเอง โดยวิธีที่ใช้ในการบอกตำแหน่งของดวงดาวนั้นมีหลายวิธี แต่ก็มีหลักสำคัญมูลฐานที่คล้ายกันโดยใช้ค่าที่เกี่ยวข้องกับมุม ณ จุดศูนย์กลางของทรงกลม โดยวิธีที่ใช้ในการบอกตำแหน่งของดวงดาวในการศึกษาครั้งนี้คือ ระบบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า(heliocentric equatorial coordinate system) [2]

2.1.1 ระบบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า

โลกหมุนรอบตัวเองในทิศทวนเข็มนาฬิการอบแกนสมมุติ ซึ่งอยู่ในแนวผ่านของขั้วเหนือและขั้วใต้ และตั้งฉากกับระนาบเส้นศูนย์สูตรของโลก จึงย่อมตั้งฉากกับระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าด้วย ผลที่ปรากฏตามมาก็คือ ผู้สังเกตจะเห็นว่าท้องฟ้าจะหมุนในลักษณะที่สอดคล้องกันกล่าวคือ มีการหมุนรอบแนวที่ผ่านขั้วเหนือและขั้วใต้ท้องฟ้า ซึ่งตั้งฉากกับระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า แต่มีทิศทางของการหมุนไปตามเข็มนาฬิกา

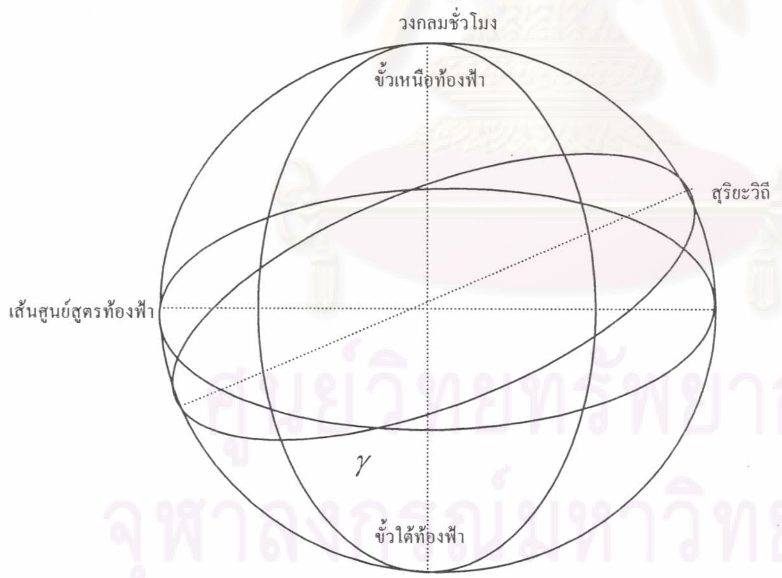
ตำแหน่งของดวงดาวต่างๆบนทรงกลมท้องฟ้าที่ไม่รวมโลกซึ่งเป็นตำแหน่งของผู้สังเกตย่อมมีการเคลื่อนที่ในแต่ละวันไปพร้อมกับการหมุนของทรงกลมท้องฟ้า จึงมีตำแหน่งที่อยู่นิ่งเทียบกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า เช่นเดียวกับตำแหน่งของโลกที่หยุดนิ่งเทียบกับเส้นศูนย์สูตร ดังนั้นจึงใช้เส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าเป็นวงกลมหลักและกำหนดวงกลมหลักอีกวงหนึ่ง พร้อมกับวงกลมรองให้สอดคล้องกับวิธีการบอกตำแหน่งบนพื้นผิวโลกที่ใช้เส้นเมอริเดียนและละติจูด ดังนั้นจึงได้ระบบที่สามารถบอกให้รู้ว่า เทหฟากฟ้าอยู่ห่างจากจุดเทียบไปตามเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าอย่างไร และอยู่เหนือหรือใต้เส้นศูนย์สูตรอย่างไร เรียกระบบในการบอกตำแหน่งของเทหวัตถุต่างๆบนท้องฟ้าว่าระบบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า

2.1.1.1 หลักการของระบบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า

พิจารณารูปที่ 2.1 โดยเมื่อลากวงกลมให้ผ่านขั้วท้องฟ้าทั้งสองและตั้งฉากกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าจะได้วงกลมให้ที่เรียกว่า วงกลมชั่วโมง (hour circle) อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติคิดเฉพาะครึ่งวง กล่าวคือ คิดระยะส่วนโค้งของวงกลมจากขั้วเหนือท้องฟ้าผ่านเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าจนถึงขั้วใต้ท้องฟ้า

วงกลมรองส่วนแรก คือ วงกลมชั่วโมงที่ลากผ่านตำแหน่งของดวงดาว ส่วนอีกพวกหนึ่ง คือ วงกลมเล็กที่ขนานกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า วงกลมหลักนั้นนอกจากเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าแล้วก็ต้องเลือกวงกลมชั่วโมงโดยให้มีจุดหรือตำแหน่งที่ใช้เทียบเป็นหลักอยู่ด้วย ซึ่งก็คือ วงกลมชั่วโมงที่ผ่านตำแหน่งวสันตวิษุวัต(vernal equinox)

เนื่องจากการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ในรอบปี ทำให้สังเกตเห็นว่า ดวงอาทิตย์เคลื่อนที่ไปตามแนวทางบนทรงกลมท้องฟ้า โดยทำมุมกับเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าประมาณ 23.5 องศา และเรียกแนวทางนี้ว่า สุริยะวิถี (ecliptic) ดังนั้น ระนาบสุริยะวิถีจึงตัดกับระนาบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าที่สองตำแหน่งด้วยกัน โดยตำแหน่งหนึ่งตรงกับตำแหน่งของของดวงอาทิตย์บนสุริยะวิถีกำลังเคลื่อนที่ผ่านเส้นศูนย์สูตรจากใต้ขึ้นไปทางเหนือ เรียกตำแหน่งนี้ว่า จุดวสันตวิษุวัต ใช้สัญลักษณ์ γ



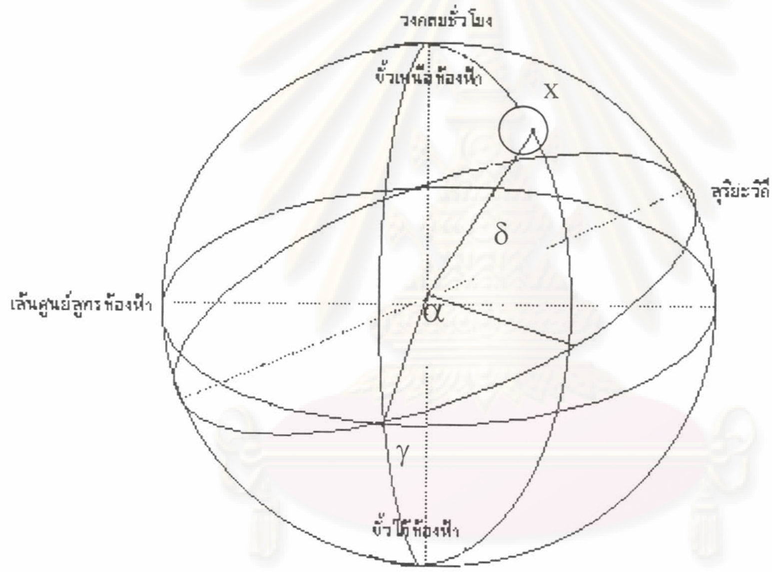
รูปที่ 2.1 แสดงองค์ประกอบของระบบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า

2.1.1.2 ไรท์แอสเซนชันและเดคลิเนชัน (Right ascension and declination)

พิกัดที่ใช้บอกตำแหน่งเทหฟากฟ้าตามระบบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าโดยทั่วไป คือ ไรท์แอสเซนชัน (right ascension , α) และ เดคลิเนชัน (declination , δ) พิจารณารูปที่ 2.2 ระยะทางเชิงมุมที่วัดจากจุด วสันตวิษุวัตไปทางตะวันออกตามเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า จนกระทั่งถึงวงกลม

ชั่วโมงที่ผ่านตำแหน่งของดวงดาวเรียกว่า ไรท์แอสเซนชันของตำแหน่งนั้น โดยมีค่าตั้งแต่ 0 องศา ถึง 360 องศา หรือ 0 ชั่วโมง ถึง 24 ชั่วโมง

ระยะทางเชิงมุมที่วัดขึ้นไปทางเหนือหรือลงไปทางใต้ของเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าตามวงกลมชั่วโมงที่ผ่านตำแหน่งดวงดาวจนกระทั่งถึงตำแหน่งดาว คือ เดคลิเนชันของดาว โดยใช้ค่าเป็นองศา และอาจกำกับว่าเหนือหรือใต้ แทนความหมายว่า อยู่ทางเหนือหรือใต้ของเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้า ตามลำดับ อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าจะสามารถบอกตำแหน่งของเทหฟากฟ้าตามระบบเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าได้เหมาะสมกว่าระบบอื่น ค่าที่บอกเป็นไรท์แอสเซนชัน ก็ต้องมีการกำหนดปีที่เทียบและแก้ค่าอื่นๆอีกด้วย ทั้งนี้เพราะ ตำแหน่งสุริยะวิถีที่ใช้เป็นจุดเทียบและมีไรท์แอสเซนชันเท่ากับศูนย์นั้นเลื่อนไปทางทิศตะวันตกหรือถอยหลังตลอดเวลา อันเนื่องมาจากในขณะที่โลกหมุนรอบตัวเองและโคจรรอบดวงอาทิตย์นั้นจะมีการส่ายหรือควงไปรอบแกนสมมุติตลอดเวลา



รูปที่ 2.2 แสดง Right ascension และ Declination ของดาว x

ในการทำงานวิจัยในครั้งนี้จะต้องนำเอาหลักมูลทางโคจรมาใช้ในการคำนวณต่อไปโดยข้อมูลที่ได้นั้นจะมีการกำหนดตำแหน่งและเวลาของดาวเคราะห์ต่างๆที่ต้องการศึกษามาด้วย โดยในการกำหนดตำแหน่งของดาวเคราะห์ต่างๆนั้นใช้ที่จุดวสันตวิษุวัตเดียวกัน

2.1.2 เวลาสากลและวันจูเลี่ยน

เวลาสากล (Universal Time , UT) เป็นเวลาที่วัดจากเวลาท้องถิ่นที่ตำบลกรีนิช ประเทศอังกฤษ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับเวลามาตรฐานในประเทศไทย ดังสมการต่อไปนี้

UT = Thailand Standard Time-7 ชั่วโมง

โดยสามารถคำนวณหาวันจูเลี่ยน (Julian Date , JD) ซึ่งเป็นวันที่ต่อเนื่องเป็นมาตรฐานเดียวกันทั่วโลก โดยจะสัมพันธ์กับเวลาสากลตามสมการ

$$JD = J_0 + \frac{UT}{24}$$

เมื่อ J_0 คือ วันจูเลี่ยนที่ศูนย์ชั่วโมงเวลาสากล

นอกจากนี้ยังสามารถหาวันจูเลี่ยนได้จากการที่นักดาราศาสตร์ได้กำหนดจุดเริ่มต้นยุคเป็นเวลาเที่ยงวันตามเวลาเฉลี่ยกรีนิช (Greenwich Mean Time , GMT) ของวันที่ 1 มกราคม 4,713 ปีก่อนคริสตกาล โดยจำนวนของวันที่ล่วงไปนับตั้งแต่วันดังกล่าวเรียกว่า วันจูเลี่ยน (Julian Date , JD) โดยให้พึงสังเกตว่าแต่ละวันของวันจูเลี่ยนใหม่จะเริ่มต้นที่ 12 ชั่วโมง 0 นาที GMT (UT) ซึ่งเป็นครึ่งวันหลังจากวันตามปฏิทิน

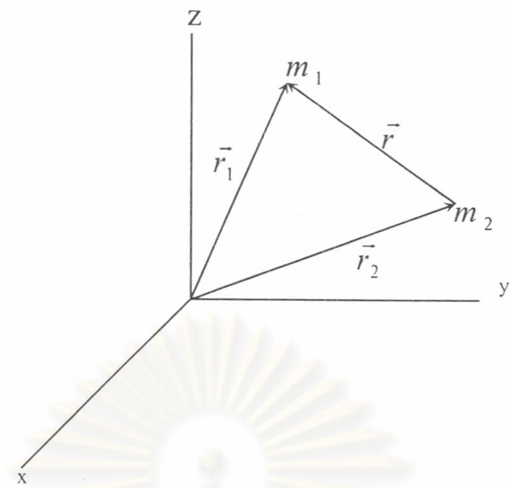
2.2 ปัญหาวัตถุสองชิ้น

การศึกษาการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุโดยทั่วไปนั้นไม่สามารถที่จะทำการศึกษาการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุชิ้นใดชิ้นหนึ่งเพียงชิ้นเดียวได้ ต้องมีการกล่าวถึงเทหวัตถุอื่นเพื่อนำมาใช้ในการอ้างอิงถึงการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุที่ทำการศึกษา ซึ่งเป็นการศึกษาการเคลื่อนที่สัมพัทธ์นั่นเอง โดยทั่วไปในการกล่าวถึงการเคลื่อนที่ของดวงดาวต่างๆในระบบสุริยะจักรวาลจะเป็นการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ที่เทียบกับการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์ ดังนั้นในการศึกษาการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุระดับพื้นฐานจะเป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ในกรณีของปัญหาวัตถุสองชิ้น แต่เนื่องจากในความเป็นจริงนั้นเทหวัตถุในห้วงอวกาศมีมากกว่าสองชิ้น จึงจะต้องมีการคำนึงถึงการรบกวนจากวัตถุอื่นๆที่มีต่อการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุที่ทำการศึกษาด้วย ซึ่งก็จะเป็นหัวข้อที่จะกล่าวถึงต่อไป

2.2.1 สมการการเคลื่อนที่ของกรณีปัญหาวัตถุสองชิ้น

การหาสมการในการเคลื่อนที่ของกรณีปัญหาวัตถุสองชิ้น เริ่มต้นจากการพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุแต่ละชิ้น โดยในกรณีนี้จะพิจารณาให้เทหวัตถุต่างมีลักษณะเป็นจุดมวลเนื่องจากขนาดของเทหวัตถุเล็กมากเมื่อเทียบกับระยะทางระหว่างวัตถุทั้งสอง โดยสมการการเคลื่อนที่จะหาได้จากการพิจารณาพลังงานศักย์

เมื่อพิจารณาให้ในระบบประกอบไปด้วยวัตถุสองชิ้นเท่านั้น คือ m_1 และ m_2 จากรูปที่ 2.3 แสดงตำแหน่งของวัตถุทั้งสองในระบบพิกัดฉาก เริ่มจากการพิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_1 พบว่าแรงที่กระทำต่อ m_1 คือสนามโน้มถ่วงที่มวล m_2 สร้างขึ้น ดังนั้นจึงพิจารณาศักย์ที่ m_2 สร้างขึ้น โดยกำหนดให้ U_2 คือศักย์รอบมวล m_2 โดยในที่นี้คือจุดมวลซึ่งเป็นฟังก์ชั่นที่กำหนดโดยเพียงตำแหน่งที่นิยามรอบๆวัตถุ



รูปที่ 2.3 แสดงตำแหน่งของวัตถุสองชิ้นในระบบพิกัดฉาก

$$U_2(x_1, y_1, z_1) = -G\frac{m_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}} \qquad (2.1)$$

เมื่อ G คือ ค่าคงที่แรงโน้มถ่วงสากล หลังจากได้พลังงานศักย์รอบมวล m_2 แล้ว ซึ่งสามารถนำไปคำนวณหาแรงต่อหน่วยมวลต่อไปได้ โดยจะได้แรงที่กระทำต่อมวล m_1 ในทิศทางต่างๆได้ดังต่อไปนี้

$$F_{1x} = -m_1\frac{\partial U_2}{\partial x_1} = -Gm_1m_2\frac{x_1-x_2}{r^3}$$

$$F_{1y} = -m_1\frac{\partial U_2}{\partial y_1} = -Gm_1m_2\frac{y_1-y_2}{r^3} \qquad (2.2)$$

$$F_{1z} = -m_1\frac{\partial U_2}{\partial z_1} = -Gm_1m_2\frac{z_1-z_2}{r^3}$$

โดยให้ r เป็นระยะห่างระหว่างวัตถุมวล m_1 และ m_2 แล้วสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของมวล m_1 ได้ดังต่อไปนี้

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{r^3} \qquad (2.3)$$

หรือ

$$\ddot{x}_1 = -Gm_2\frac{x_1-x_2}{r^3}$$

$$\ddot{y}_1 = -Gm_2\frac{y_1-y_2}{r^3}$$

$$\ddot{z}_1 = -Gm_2\frac{z_1-z_2}{r^3}$$

ส่วนในกรณีของการหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m_2 ก็กระทำในทำนองเดียวกัน สุดท้ายจะได้สมการการเคลื่อนที่ของมวล m_2 ได้ดังต่อไปนี้

$$\ddot{\vec{r}}_2 = Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r^3} \qquad (2.4)$$

หรือ

$$\ddot{x}_2 = Gm_1 \frac{x_1 - x_2}{r^3}$$

$$\ddot{y}_2 = Gm_1 \frac{y_1 - y_2}{r^3}$$

$$\ddot{z}_2 = Gm_1 \frac{z_1 - z_2}{r^3}$$

เมื่อได้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ m_1 และ m_2 แล้ว ต่อไปจะเป็นการหาสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุทั้งสอง โดยเมื่อนำสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งสองมาพิจารณาอีกครั้ง โดยในที่นี้เมื่อพิจารณาให้วัตถุมวล m_2 เป็นจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่ ในการพิจารราการเคลื่อนที่ครั้งนี้เป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ m_1 เทียบกับ m_2 โดยเมื่อเขียนระบบพิกัดให้อยู่ในระบบสองจุดมวลและระบุพิกัดของวัตถุ m_1 เมื่อให้วัตถุ m_2 เป็นจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่ จากรูปที่ 2.3 จะได้ว่า

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad (2.5)$$

เมื่อแทนค่าสมการข้างต้นด้วยสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งสองแล้ว จะได้สมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ดังต่อไปนี้

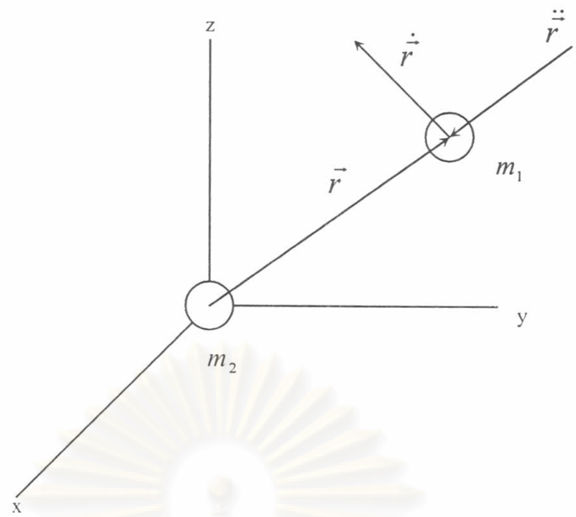
$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -G(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r^3}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -G(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (2.6)$$

สมการที่ได้ก็คือสมการที่แสดงถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุ m_1 เทียบกับวัตถุ m_2 โดยเป็นสมการการเคลื่อนที่ที่ใช้ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุ m_1 ที่มีวัตถุ m_2 เป็นจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่ หรือที่เรียกว่า สมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ โดยสามารถเขียนสมการในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad (2.7)$$

เมื่อ $\mu = G(m_1 + m_2)$



รูปที่ 2.4 แสดงการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุสองชิ้น

จากสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์แล้วพิจารณารูปที่ 2.4 พบว่าความเร่งของวัตถุ m_1 จะชี้ไปยังจุดกำเนิดซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวัตถุ m_2 ซึ่งเป็นทิศทางของแรงสุทธิที่กระทำบนวัตถุ m_1 ซึ่งจะทำให้วัตถุ m_1 ไม่เคลื่อนออกจากระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ ดังนั้นวงโคจรของวัตถุทั้งสองชิ้นจะถูกจำกัดขอบเขตให้อยู่ในระนาบซึ่งวางผ่านจุดศูนย์กลางของวัตถุซึ่งถูกกำหนดให้เป็นจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่ด้วย

2.2.2 กฎการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น

การแก้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ผลเฉลยที่ได้เป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ 3 ข้อ ซึ่งถูกเสนอโดย โจฮันเนส เคปเลอร์ (Johannes Kepler) เรียกว่า กฎของเคปเลอร์ (Kepler's laws) ที่มีบทสรุปดังต่อไปนี้

กฎข้อที่ 1 : ทางโคจรของดาวเคราะห์เป็นวงรี มีดวงอาทิตย์เป็นจุดโฟกัสหนึ่ง

กฎข้อที่ 2 : พื้นที่จลนรัศมีที่ต่อระหว่างดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์กวาดไปในช่วงเวลาคงที่หนึ่งจะเท่ากันเสมอ คือ กฎความเร็วพื้นที่กวาด (law of area)

กฎข้อที่ 3 : อัตราเปรียบเทียบของครึ่งแกนเอกของทางโคจรของดาวเคราะห์ยกกำลังสามกับคาบการโคจรยกกำลังสอง ไม่ว่าจะเป็นกรรีของดาวเคราะห์ดวงใดก็ตามจะคงที่เสมอ คือ กฎคล้องจอง (resonance law)

กฎทั้ง 3 ข้อ ของเคปเลอร์ถูกค้นพบจากการสังเกตการณ์การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์อย่างละเอียด โดยกฎของเคปเลอร์ถูกกล่าวว่าเป็นกฎที่นำไปสู่กฎแรงโน้มถ่วงสากล และในทางกลับกัน การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์เป็นปัญหาวัตถุสองชิ้นของดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์ จะสามารถอธิบายกฎทั้งสามข้อนี้ได้

<u>กฎข้อที่ 1</u>

ทางโคจรการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของปัญหาวัตถุสองชิ้นเป็นวงรี หรือพาราโบลา หรือไฮเพอร์โบลาอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยวัตถุที่มีทางโคจรเป็นรูปพาราโบลาและไฮเพอร์โบลา เมื่อเข้าใกล้ดวงอาทิตย์หนึ่งครั้งแล้วจะไม่หวนกลับมาอีกเป็นครั้งที่สอง ซึ่งดวงดาวที่มีวงโคจรเหล่านี้ไม่เรียกว่าดาวเคราะห์ ดังนั้นการที่กฎนี้ได้ชี้แสดงทางโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์เป็นวงรีจึงเป็นเรื่องที่สมควรเป็นไปตามนั้นจริง

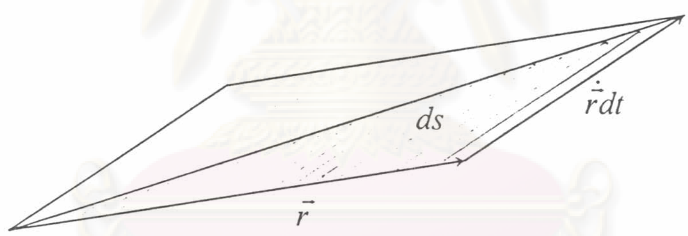
<u>กฎข้อที่ 2</u>

เมื่อแสดงตำแหน่งและความเร็วของจุดมวลที่เคลื่อนที่โดย

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

พื้นที่ ds ที่จลนรัศมี r กวาดไปในช่วงเวลาที่สั้นมาก dt จะพิจารณาได้ว่าเป็นส่วนที่แรเงาตามรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงการพิสูจน์กฎข้อที่ 2 ของเคปเลอร์

ในที่นี้องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\dot{\vec{r}}dt$ คือ $(\dot{x}dt, \dot{y}dt, \dot{z}dt)$ แต่ว่าพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ $\vec{r}$ และ $\dot{\vec{r}}dt$ ซึ่งเป็นสองเท่าของพื้นที่ ds ที่พิจารณานั่นคือ

$$2ds = \left|\vec{r} \mathrm{X} \dot{\vec{r}}dt\right| = \left[(y\dot{z}dt - z\dot{y}dt)^2 + (z\dot{x}dt - x\dot{z}dt)^2 + (x\dot{y}dt - y\dot{x}dt)^2\right]^{1/2} \quad (2.8)$$

ก่อนที่จะพิจารณาต่อไปนั้น ย้อนกลับมาพิจารณากฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมซึ่งเขียนไดว่า

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \mathrm{X} \vec{p}\right) = m\left(\vec{r} \mathrm{X} \ddot{\vec{r}}\right) = 0 \quad (2.9)$$

นั่นคือ $\vec{r} \mathrm{X} \ddot{\vec{r}} = 0$

หรือ $y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0$

$$z\ddot{x} - x\ddot{z} = 0$$

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

ดังนั้น

$$\vec{r} X \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

หรือ
$$yz^{\cdot} - zy^{\cdot} = h_x$$
$$zx^{\cdot} - xz^{\cdot} = h_y \qquad (2.10)$$
$$xy^{\cdot} - yx^{\cdot} = h_z$$

เมื่อ $\vec{h}$ เป็นเวกเตอร์คงที่ กลับมาพิจารณากฎข้อที่ 2 ของเคปเลอร์ โดยเขียนสมการหาค่า $2ds$ ในรูปของ $\vec{h}$ ได้ดังต่อไปนี้

$$2ds = \left[\left(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2\right)dt^2\right]^{\frac{1}{2}} = hdt \qquad (2.11)$$

ดังนั้นพื้นที่ S ที่กวาดไปจากช่วงเวลาเริ่มต้นไปยังเวลาใดๆจะเป็น

$$S = \int_{t_1}^{t_1+t_S} ds = \int_{t_1}^{t_1+t_S} \frac{h}{2}dt = \frac{h}{2}t_S \qquad (2.12)$$

เมื่อ h เป็นตัวคงที่ ดังนั้น S จึงมีค่าคงที่เสมอ ไม่ว่าจะเป็น t_1 ใดก็ตาม โดยนัยนี้ก็แสดงว่ากฎข้อที่ 2 ของเคปเลอร์เป็นจริง

<u>กฎข้อที่ 3</u>

โดยความสัมพันธ์จากสมการ

$$n^2a^3 = \mu \qquad (2.13)$$

เมื่อ n คือ การเคลื่อนที่เฉลี่ย (mean motion)

a คือ ระยะครึ่งแกนเอก

และจากความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่เฉลี่ยและค่าคาบ $T = \frac{2\pi}{n}$ ดังนั้นสมการข้างต้นจะเปลี่ยนรูปได้เป็น

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}\left(m_1 + m_2\right) \qquad (2.14)$$

ในขณะนี้พิจารณาให้ m_2 เป็นมวลของดวงอาทิตย์ m_1 เป็นมวลของดาวเคราะห์ $\frac{a^3}{T^2}$ ของสมการด้านซ้ายมือจึงเปลี่ยนแปลงไปบ้างเล็กน้อยตามมวล m_1 ของดาวเคราะห์ แต่เนื่องจากมวลของดวงอาทิตย์มีขนาดใหญ่มากไม่ว่าจะเทียบกับดาวเคราะห์ดวงใดก็ตาม ดังนั้นจึงสามารถประมาณได้ว่า

$$m_1 + m_2 \approx m_2$$

จะเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{a^3}{T^2} \approx \frac{G}{4\pi^2}m_2 \qquad (2.15)$$

ซึ่งก็คือกฎข้อที่ 3 ที่ว่าอัตราส่วนเปรียบเทียบของระยะครึ่งแกนเอกยกกำลังสามกับค่าคาบการโคจรยกกำลังสอง เป็นค่าคงที่นั่นเอง ต่อไปจะเป็นการรายละเอียดเกี่ยวกับกฎการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นต่อไป

2.2.2.1 กฎภาคตัดกรวย

จากสมการการเคลื่อนที่พื้นฐานของปัญหาวัตถุสองชิ้น คือ

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{U} \tag{2.16}$$

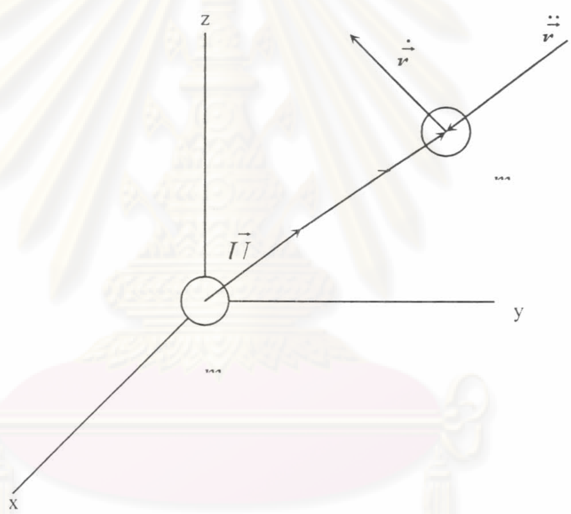
เมื่อ $\vec{U} = \frac{\vec{r}}{r}$

เมื่อ $\vec{U}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์รัศมี

$$\vec{r}\mathrm{X}\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\left(\vec{r}\mathrm{X}\vec{U}\right), \ \vec{r}\mathrm{X}\ddot{\vec{r}} = 0 \tag{2.17}$$

จากรูปที่ 2.6 เวกเตอร์ $\vec{r}$ และ $\vec{U}$ มีทิศทางขนานกัน ดังนั้น ผลคูณระหว่างเวกเตอร์จึงเป็นเวกเตอร์ศูนย์ (null vector) ต่อไปพิจารณาหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาที่เปลี่ยนไป

$$\frac{d}{d\tau}\left(\vec{r}\mathrm{X}\dot{\vec{r}}\right) = \left(\vec{r}\mathrm{X}\ddot{\vec{r}}\right) + \left(\dot{\vec{r}}\mathrm{X}\dot{\vec{r}}\right) = 0 \tag{2.18}$$

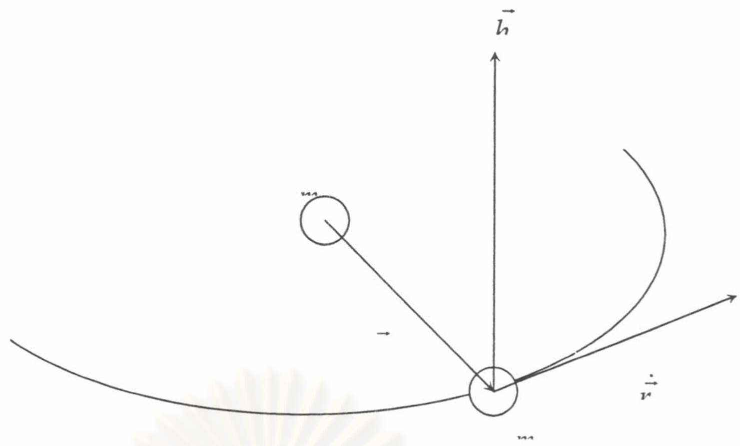


รูปที่ 2.6 แสดงการเคลื่อนที่ของกรณีปัญหาวัตถุสองชิ้น

เนื่องจาก $\vec{r}\mathrm{X}\ddot{\vec{r}} = 0$ และ $\dot{\vec{r}}\mathrm{X}\dot{\vec{r}} = 0$ เนื่องจากเวกเตอร์มีทิศทางเดียวกัน ถ้าอินทิเกรทสมการ (2.18) จะได้

$$\vec{r}\mathrm{X}\dot{\vec{r}} = \vec{h} \tag{2.19}$$

เมื่อ $\vec{h}$ คือเวกเตอร์คงที่ของการอินทิเกรทซึ่งจะมีค่าเท่ากับโมเมนตัมเชิงมุมต่อหน่วยมวลในกรณีของระบบวัตถุสองชิ้น



รูปที่ 2.7 แสดงทิศทางของโมเมนตัมเชิงมุม

ในความเป็นจริงนั้นเวกเตอร์ $\vec{h}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดและทิศทางคงที่ในห้วงอวกาศโดยไม่มีการเปลี่ยนแปลง โดยทิศของ $\vec{h}$ จะตั้งฉากกับระนาบของ $\vec{r}$ และ $\dot{\vec{r}}$ ซึ่งกำหนดให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก เมื่อ $\vec{h}$ อยู่ในทิศ $+z$ วัตถุ m_1 จะเคลื่อนที่ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้าน $+z$ ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ในทางตรง (direct motion) แต่เมื่อ $\vec{h}$ มีค่าเป็นลบ วัตถุ m_1 จะเคลื่อนที่ไปในทิศตามเข็มนาฬิกา เมื่อมองจากด้านที่เป็นบวกในแนวแกน $+z$ ซึ่งเรียกว่าเป็นการเคลื่อนที่ย้อนกลับ (retrograde motion)

เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมสามารถที่จะนำมาอธิบายในสมการการเคลื่อนที่พื้นฐานได้ โดยนำสมการ (2.16) มาคูณเข้ากับเวกเตอร์ $\vec{h}$

$$\ddot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h} = -\frac{\mu}{r^2}\left(\vec{U} \mathrm{X} \vec{h}\right) \tag{2.20}$$

จากสมการ (2.19) จะได้ว่า

$$\ddot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h} = -\frac{\mu}{r^2}\left[\vec{U} \mathrm{X}\left(\vec{r} \mathrm{X} \dot{\vec{r}}\right)\right] \tag{2.21}$$

จาก $\vec{U} = \dfrac{\vec{r}}{r}$ สุดท้ายจะได้สมการใหม่เป็น

$$\ddot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h} = \frac{\mu}{r^2}\left[r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}\right] \tag{2.22}$$

พิจารณาสมการด้านขวามือ ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบใหม่ได้เมื่ออาศัยสมการ ดังต่อไปนี้

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{r\dot{\vec{r}} - \dot{r}\vec{r}}{r^2} \tag{2.23}$$

ต่อมาให้พิจารณาอนุพันธ์ของ $\dot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h}$ เพื่อใช้ในการเปลี่ยนรูปสมการ (2.22)

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h}\right) = \left(\ddot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h}\right) + \left(\dot{\vec{r}} \mathrm{X} \dot{\vec{h}}\right), \dot{\vec{h}} = 0 \tag{2.24}$$

และเนื่องจาก $\vec{h}$ เป็นเวกเตอร์คงที่ ดังนั้นอนุพันธ์ของ $\vec{h}$ จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ สุดท้ายจะได้สมการ

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h}\right) = \left(\ddot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h}\right) \tag{2.25}$$

นำสมการ (2.23) และ (2.25) แทนลงในสมการ (2.22) จะได้สมการใหม่ออกมาเป็น

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h}\right) = \mu \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{2.26}$$

อินทิเกรทสมการ (2.26)

$$\dot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h} = \mu\left(\frac{\vec{r}}{r} + \vec{e}\right) \tag{2.27}$$

เมื่อ $\vec{e}$ คือ เวกเตอร์คงที่ที่ได้จากการอินทิเกรท พิจารณาผลคูณสเกลาร์ระหว่างสมการ (2.27) กับ $\vec{r}$ จะได้

$$\left(\dot{\vec{r}} \mathrm{X} \vec{h}\right) \cdot \vec{r} = \mu\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + \vec{e} \cdot \vec{r}\right) \tag{2.28}$$

จากคุณสมบัติของเวกเตอร์

$$\left(\vec{A} \mathrm{X} \vec{B}\right) \cdot \vec{C} = \left(\vec{C} \mathrm{X} \vec{A}\right) \cdot \vec{B}, r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \tag{2.29}$$

สามารถเขียนสมการ (2.28) ได้เป็น

$$\left(\vec{r} \mathrm{X} \dot{\vec{r}}\right) \cdot \vec{h} = \mu\left(r + \vec{e} \cdot \vec{r}\right) \tag{2.30}$$

จาก $\vec{r} \mathrm{X} \dot{\vec{r}} = \vec{h}$ แทนลงในสมการ (2.30) จะได้ว่า

$$h^2 = \mu\left(r + \vec{e} \cdot \vec{r}\right) \tag{2.31}$$

จากนิยามของผลคูณสเกลาร์ จะได้

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos \nu \tag{2.32}$$

เมื่อ ν คือ มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{e}$ และ $\vec{r}$

แทนค่าสมการ (2.32) ลงในสมการ (2.31) จะได้

$$h^2 = \mu r\left(1 + e \cos \nu\right) \tag{2.33}$$

หรือ

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \nu} \tag{2.34}$$

ความสำคัญทางเรขาคณิตของสมการ (2.34) เป็นการเปรียบเทียบสมการทั่วไปของภาคตัดกรวยในรูปของพิกัดเชิงขั้ว

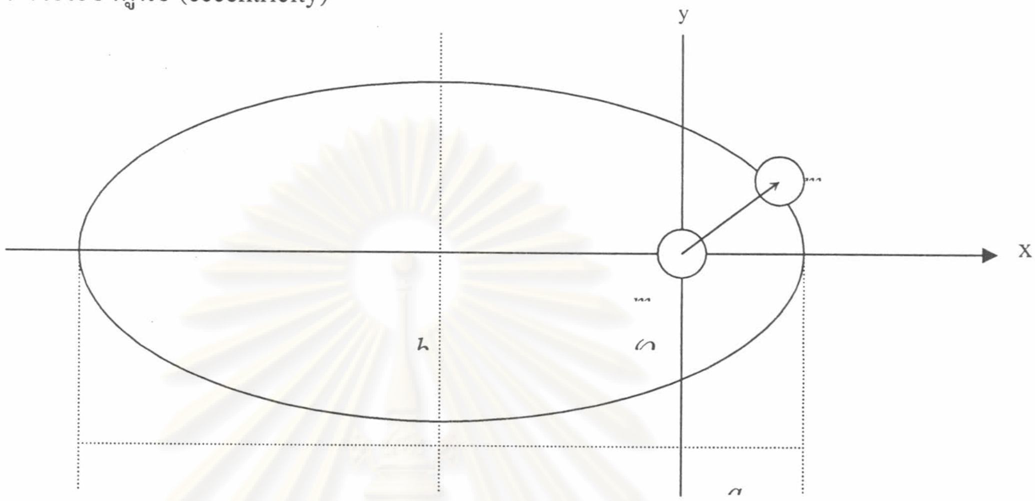
$$r = \frac{\wp}{1 + e \cos \nu} \tag{2.35}$$

เมื่อ $\wp = \dfrac{h^2}{\mu}$

โดยสรุปแล้วสมการ (2.35) คือวงโคจรที่เกิดขึ้นในรูปของภาคตัดกรวยบนระนาบคงที่ ซึ่งมีวัตถุหนึ่งมีจุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ตำแหน่งจุดโฟกัส ซึ่งก็เป็นไปตามกฎข้อที่ 1 ของเคปเลอร์ โดยสามารถบอกรูปร่างของวงโคจรได้จากค่า e ดังต่อไปนี้

กรณีที่	$e = 0$	วงกลม
	$0 < e < 1$	วงรี
	$e = 1$	พาราโบลา
	$e > 1$	ไฮเพอร์โบลา

เมื่อ e คือ ภาวะเยื้องศูนย์ (eccentricity)



รูปที่ 2.8 แสดงองค์ประกอบของวงรี

จากรูป 2.8 แสดงองค์ประกอบของวงโคจรกรณีที่เป็นรูปวงรี ซึ่ง $\vec{e}$ ถูกกำหนดโดยทิศทางของจุดใกล้โฟกัส (perifocus) และองค์ประกอบอื่นๆดังต่อไปนี้

ν คือ มุมกวาดจริง (true anomaly)

$\wp$ คือ พารามิเตอร์ย่อย (semiparameter)

e คือ ภาวะเยื้องศูนย์หรือความรี (eccentricity)

q คือ ระยะของจุดใกล้โฟกัส (perifocal distance)

a คือ ระยะครึ่งแกนเอก (semimajor axis)

b คือ ระยะครึ่งแกนโท (semiminor axis)

โดยองค์ประกอบต่างๆมีความสัมพันธ์กันดังต่อไปนี้

$$\wp = q(1+e) \qquad (2.36)$$

$$q = a(1-e) \qquad (2.37)$$

$$\wp = a(1-e^2) \qquad (2.38)$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} \qquad (2.39)$$

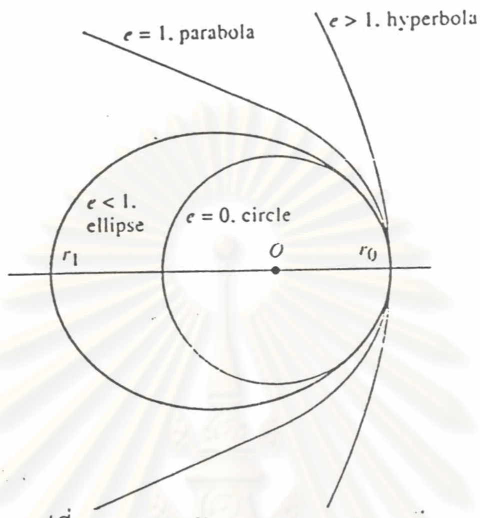
$$b = \sqrt{\wp a} \qquad (2.40)$$

ความรีเป็นสมบัติพิเศษของภาคตัดกรวยซึ่งจากสมการ(2.27) จะสามารถแสดงความสัมพันธ์

ระหว่างเวกเตอร์ต่างๆออกมาได้เป็น

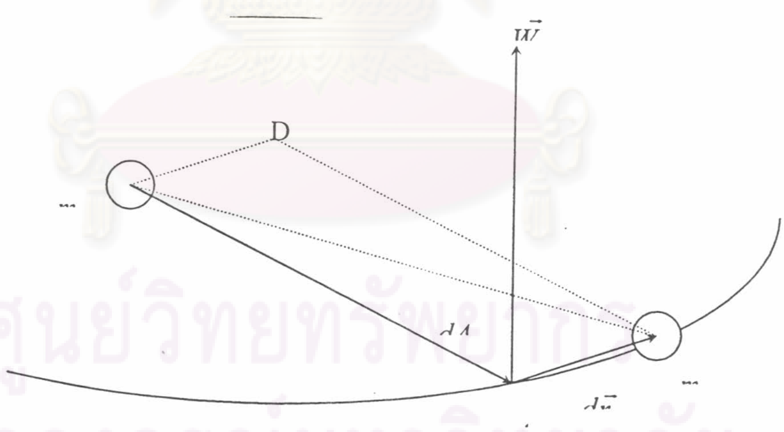
$$\vec{e} = \frac{\dot{\vec{r}} X \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.41}$$

ดังนั้นเมื่อทราบ $\vec{r}$ และ $\dot{\vec{r}}$ ก็จะสามารถหาค่า e และทิศทางของจุดโฟกัสในห้วงอวกาศได้



รูปที่ 2.9 แสดงลักษณะของวงโคจร 4 แบบ

2.2.2.2 กฎแห่งพื้นที่ (Law of Area)



รูปที่2.10 แสดงการหาเวกเตอร์พื้นที่

พิจารณาผลคูณเวกเตอร์ภายใต้ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต ซึ่งอธิบายไว้ในรูปที่ 2.10

$$\vec{W} dA = \frac{1}{2}\left(\vec{r} X d\vec{r}\right) \tag{2.42}$$

เมื่อ dA คือ พื้นที่สามเหลี่ยมแคบๆที่เกิดจากการกวาดของเวกเตอร์รัศมี $\vec{r}$ ในช่วงเวลาน้อยๆ $d\tau$

$d\vec{r}$ คือ รัศมีที่เปลี่ยนแปลงไปในช่วงเวลาน้อยๆ

$\vec{W}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบวงโคจรซึ่งมีทิศเดียวกับเวกเตอร์พื้นที่ สมการ (2.42) แสดงการหาค่าพื้นที่สามเหลี่ยมที่เกิดจากการกวาดของเวกเตอร์ $\vec{r}$ เมื่อหารสมการด้วยช่วงเวลาน้อยๆ จะได้

$$\vec{W}\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(r\mathrm{X}\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) \tag{2.43}$$

ดังนั้น
$$\vec{W}\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}\mathrm{X}\dot{\vec{r}}\right) \tag{2.44}$$

จาก $\vec{r}\mathrm{X}\dot{\vec{r}} = \vec{h}$ สามารถเขียนสมการ (2.44) ได้เป็น

$$\vec{W}\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2}\vec{h} \tag{2.45}$$

หาขนาดของสมการ (2.45) ได้เป็น

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{h}{2} \tag{2.46}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.46) จะได้ว่าอัตราการกวาดไปของพื้นที่จะมีค่าคงที่ หรือ พื้นที่จลนรัศมีที่ต่อระหว่างดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์กวาดเป็นพื้นที่ในอวกาศเท่ากันในช่วงระยะเวลาที่เท่ากันซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่ 2 ของเคปเลอร์

2.2.2.3 กฎฮาโมนิก (Harmonic Law)

พิจารณาจากสมการ (2.46) และเปลี่ยนเวลาที่ใช้ในการกวาดไปของจลนรัศมีเป็น kdt จะได้

$$2(dA) = hk\,(dt) \tag{2.47}$$

ถ้าสมมุติให้วงโคจรการเคลื่อนที่เป็นวงรี แล้วให้เวกเตอร์รัศมีกวาดไปในพื้นที่ทั้งหมดในช่วงเวลาเท่ากับคาบของการโคจร สมการจะเปลี่ยนเป็น

$$2(\pi ab) = hkP \tag{2.48}$$

จาก $\wp = \frac{h^2}{\mu}$ และ $b = \sqrt{\wp a}$ สามารถเขียนสมการ (2.48) ใหม่ได้เป็น

$$P^2 = \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2\right]a^3 \tag{2.49}$$

สรุปได้ว่าคาบดาราคติ (sideral period) ของดาวเคราะห์ยกกำลังสองเป็นปฏิภาคโดยตรงกับระยะครึ่งแกนเอกของวงรียกกำลังสาม ซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์

2.2.2.4 กฎวิส-วีวา (The Vis-viva Law)

จากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น คือ

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu\vec{r}}{r^3}$$

แสดงผลคูณสเกลาร์ระหว่าง $2\dot{\vec{r}}$ และ $\ddot{\vec{r}}$ จะได้ว่า

$$2\left(\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right)=2\left(-\frac{\mu\dot{r}}{r^2}\right) \tag{2.50}$$

จาก

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right)=\left(\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}\right)+\left(\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right)=2\left(\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right) \tag{2.51}$$

และ

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu}{r}\right)=-\frac{\mu\dot{r}}{r^2} \tag{2.52}$$

แทนค่าสมการ (2.51) และ (2.52) ลงในสมการ (2.50) จะได้

$$\frac{d}{d\tau}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right)=2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu}{r}\right) \tag{2.52}$$

อินทิเกรตสมการ (2.52) จะได้

$$\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}=\frac{2\mu}{r}+\varepsilon$$

สุดท้ายจะได้เป็น $v^2=\dfrac{2\mu}{r}+\varepsilon$ (2.53)

โดยที่ ε คือ ค่าคงที่จากการอินทิเกรต ซึ่งในทางฟิสิกส์มีค่าเท่ากับสองเท่าของผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ต่อหน่วยมวลของวัตถุที่โคจร โดยสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขที่มีอยู่เมื่อวัตถุอยู่ใกล้จุดโฟกัส ดังแสดงในรูปที่ 2.11

รูปที่ 2.11 แสดงตำแหน่งที่วัตถุโคจรมาอยู่ใกล้จุดโฟกัส

เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 2.8 ทำให้ได้ว่า $r=q$

$$\varepsilon=v^2-\frac{2\mu}{q} \tag{2.55}$$

แต่เนื่องจาก $\vec{r}$ ตั้งฉากกับ $\dot{\vec{r}}$ ที่จุดใกล้โฟกัส จึงใช้นิยามของผลคูณเวกเตอร์เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์อย่างง่าย ได้ดังต่อไปนี้

$$h = \left| \vec{r} \mathrm{X} \dot{\vec{r}} \right| = rv \ \sin 90^{\circ} = qv \tag{2.56}$$

เมื่อแทนค่า $h^{2} = \wp \mu$ และ $\wp = q\left(1 + e\right)$ลงในกำลังสองของสมการ (2.55) จะได้

$$v^{2} = \mu \frac{\left(1 + e\right)}{q} \tag{2.57}$$

แทนค่า $q = a\left(1 - e\right)$ และสมการ (5.57) ลงในสมการ (2.55) จะได้

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{a}$$

ดังนั้น
$$\dot{v}^{2} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{2.58}$$

โดยเรียกสมการ (2.58) ว่า สมการวิส-วีวา ซึ่งเป็นสมการที่แสดงให้เห็นว่า ผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของวัตถุที่ตำแหน่งใดๆของวงโคจรจะคงที่เสมอ สมการนี้มีประโยชน์อย่างมากในการคำนวณหาระยะครึ่งแกนเอก (a) เมื่อทราบตำแหน่งและเวกเตอร์ความเร็วที่จุดใดๆของวงโคจร โดยหาได้จากสมการ

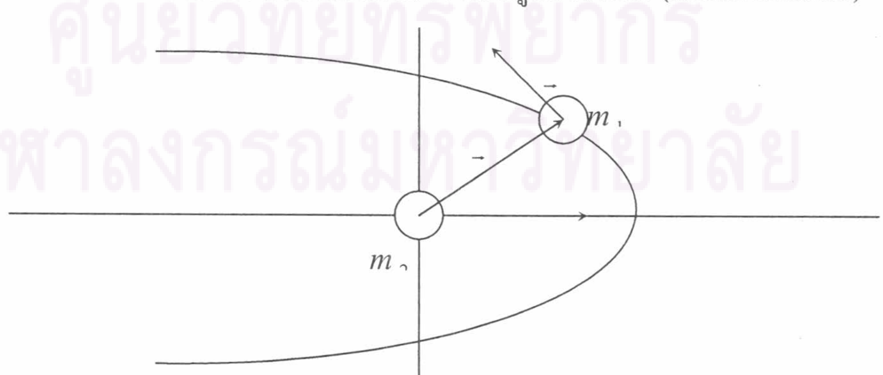
$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^{2}}{\mu} \tag{2.59}$$

2.2.3 เรขาคณิตของวงโคจร

ผลเฉลยกรณีปัญหาวัตถุสองชิ้นสามารถอธิบายได้จากปริมาณพื้นฐานเชิงตัวเลขหกค่าด้วยกันซึ่งจะถูกกล่าวขึ้นในหัวข้อถัดไป ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรตสมการการเคลื่อนที่ของปัญหาวัตถุสองชิ้น ดังต่อไปนี้

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu \vec{r}}{r^{3}}$$

โดยปริมาณพื้นฐานเหล่านี้เป็นข้อมูลที่น้อยที่สุดที่จำเป็นสำหรับการกำหนดทางโคจรและตำแหน่งของวัตถุในห้วงอวกาศได้ โดยเรียกปริมาณเหล่านี้ว่า หลักมูลทางโคจร (orbital elements)



รูปที่ 2.12 แสดงระบบพิกัดบนระนาบวงโคจร

รูปที่ 2.12 แสดงวงโคจรของวัตถุ m_1 รอบจุดศูนย์กลางวัตถุ m_2 ที่ตั้งอยู่บนจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก โดยมีระนาบวงโคจรอยู่ที่ระนาบ $\overline{xy}$ และแกน $\bar{x}$ อยู่ในแนวเดียวกับครึ่งแกนยาวของวงโคจร และ $\vec{v}$ คือ ความเร็วของวัตถุ m_1 ที่ตำแหน่งเวกเตอร์รัศมีทำมุมกวาดจริง ν กับแกน $\bar{x}$ จาก $\vec{h} = \vec{r} \mathrm{X} \dot{\vec{r}}$ จะเขียนได้ว่า

$$\vec{h} = \vec{r} \mathrm{X} \vec{v} \tag{2.60}$$

พิจารณาระบบพิกัดของระนาบวงโคจร

$$\begin{aligned} \vec{h} &= (0,0,h) \\ \vec{r} &= (\bar{x},\bar{y},0) \\ \vec{v} &= (\dot{\bar{x}},\dot{\bar{y}},0) \end{aligned} \tag{2.61}$$

หาผลคูณสเกลาร์ระหว่างสมการ (2.60) กับ $\vec{h}$ จะได้ว่า

$$\vec{h} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot (\vec{r} \mathrm{X} \vec{v})$$

$$h^2 = h(\bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}})$$

จะได้เป็น $$h = \bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}} \tag{2.62}$$

2.2.3.1 เรขาคณิตเกี่ยวกับโมเมนตัมเชิงมุมและความเร็วเชิงมุม

สมการ (2.62) สามารถนำมาใช้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่าง h และอัตราเร็วเชิงมุม $\dot{\nu}$ ได้ โดยจากหลักเรขาคณิตของรูปที่ 2.13 สามารถเขียนได้ว่า

$$\bar{x} = r \cos \nu \tag{2.63}$$

$$\bar{y} = r \sin \nu \tag{2.64}$$

ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (2.63) และ (2.64) ได้ว่า

$$\dot{\bar{x}} = \dot{r} \cos \nu - r\dot{\nu} \sin \nu \tag{2.65}$$

$$\dot{\bar{y}} = \dot{r} \sin \nu + r\dot{\nu} \cos \nu \tag{2.66}$$

แทนสมการ (2.63)-(2.66) ลงในสมการ(2.62) แล้วใช้สมบัติของตรีโกณมิติต่อไปนี้

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{2.67}$$

สุดท้ายจะได้ว่า

$$h = r^2 \dot{\nu} \tag{2.68}$$

จากสมการที่ (2.68) แสดงให้เห็นว่าค่า h คือโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุที่เคลื่อนที่บนวงโคจรนั้นเอง

2.2.3.2 เรขาคณิตเกี่ยวกับอัตราเร็วเชิงรัศมีและมุมกวาดจริง

ในหัวข้อนี้แสดงถึงการหาความเร็วเชิงรัศมีโดยใช้สมการ (2.68) กลับไปพิจารณาสมการทั่วไปของภาคตัดกรวย

$$\wp = r(1 + e \cos \nu) \tag{2.69}$$

จาก $\wp = \dfrac{h^2}{\mu}$ และทำการอนุพันธ์สมการ (2.69) จะได้

$$\dot{r}\left(1 + e \cos v\right) - re\,\dot{v}\sin v = 0$$

คูณเข้าด้วย r

$$r\dot{r}\left(1 + e \cos v\right) - r^2 e\,\dot{v}\sin v = 0$$

.นำสมการ (2.68) และ (2.69) มาพิจารณาด้วยจะได้ว่า

$$\dot{r}\wp - he \sin v = 0$$

จาก $h = \sqrt{\mu\wp}$ ผลสุดท้ายจะได้สมการออกมาเป็น

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{\wp}}e \sin v \tag{2.70}$$

พิจารณาสมการ (2.70) คือ สมการที่แสดงอัตราเร็วเชิงรัศมีของวัตถุในวงโคจรซึ่งอยู่ในรูปของมุมกวาดจริง

2.2.3.3 เรขาคณิตเกี่ยวกับภาวะเยื้องศูนย์

จากสมการ (2.41) เมื่อพิจารณาภาวะเยื้องศูนย์ $\vec{e}$ จะได้ว่า

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}\mathrm{X}\vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}$$

เนื่องจาก $\vec{h} = \vec{r}\mathrm{X}\vec{v}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}\mathrm{X}\left(\vec{r}\mathrm{X}\vec{v}\right)}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.71}$$

จากสมบัติการคูณเวกเตอร์

$$\vec{A}\mathrm{X}\left(\vec{B}\mathrm{X}\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

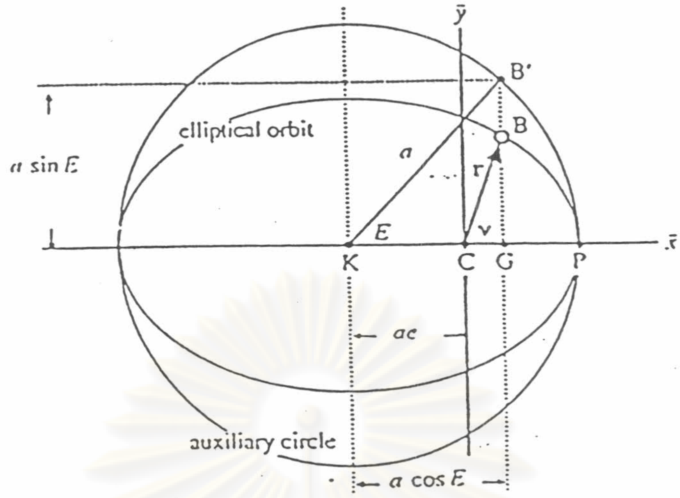
ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (2.71) ให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายได้ดังต่อไปนี้

$$\vec{e} = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\vec{r} - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\vec{v} \tag{2.72}$$

2.2.3.4 เรขาคณิตเกี่ยวกับเวลา

พิจารณาโครงสร้างทางเรขาคณิตของวงโคจรในกรณีที่เป็นวงรี จากรูป 2.13 ซึ่งประกอบด้วยวงกลมรอง(auxiliary circle) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด K ล้อมรอบรูปวงรีที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด C เมื่อเทหวัตถุ B เคลื่อนทีไปตามวงโคจรรูปวงรี โดยมีตำแหน่ง B' ที่ถูกนิยามให้เป็นตำแหน่งที่เกิดจากการฉายภาพ B ในทิศทางของแกน y ลงบนวงกลมรอง มุม E เรียกว่า มุมกวาดเยื้อง (eccentric anomaly) $\bar{x}$ ไปยังเส้น KB' ระยะจาก B' ไปยัง K จะมีค่าเท่ากับ a คือระยะ

ครึ่งแกนเอกของวงรี และระยะจาก K ไปยัง C มีค่าเท่ากับ ae โดยที่ e คือภาวะเยื้องศูนย์ หรือความรีของ วงรี



รูปที่ 2.13 แสดงระบบของวงรี

จากรูปที่ 2.13 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด $\bar{x}$ ของเทหวัตถุกับมุมกวาดเยื้อง E คือ

$$\bar{x} = a(\cos E - e) \tag{2.73}$$

แทนค่า $\bar{x} = r \cos v$ ลงในสมการ (2.73) จะได้

$$r \cos v = a \cos E - ae \tag{2.74}$$

จากสมการทั่วไปของภาคตัดกรวย

$$\wp = r + e(r \cos v) \tag{2.75}$$

แทนค่าสมการ (2.74) ลงในสมการ (2.75) จะได้

$$\wp = r + ae \cos E - ae^2 \tag{2.76}$$

จาก $\wp = a(1 - e^2)$ ทำให้สามารถจัดสมการ (2.76) ในรูปแบบใหม่ดังต่อไปนี้

$$r = a(1 - e \cos E) \tag{2.77}$$

และสามารถหา $\bar{y}$ ได้จาก $r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$ ซึ่งจะได้

$$\bar{y}^2 = a^2(1 - e^2)(1 - \cos^2 E)$$

จากสมบัติของตรีโกณมิติจะได้

$$\bar{y}^2 = a^2(1 - e^2)\sin^2 E$$

เมื่อถอดรากที่สองจะได้เป็น

$$\bar{y} = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \tag{2.78}$$

ส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร็วสามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของ $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ ดังนั้น จากสมการ (2.73) และ (2.78)จะได้เป็น

$$\dot{\bar{x}} = -a\dot{E}\sin E \quad (2.79)$$
$$\dot{\bar{y}} = a\sqrt{1-e^2}\dot{E}\cos E$$

แทนค่าสมการ (2.73),(2.78) และ (2.79) ลงในสมการ (2.62) จะได้

$$h = a^2\sqrt{1-e^2}\left(\cos^2 E - e\cos E + \sin^2 E\right)\dot{E} \quad (2.80)$$

จาก $\wp = \dfrac{h^2}{\mu}$ และสมการ (2.39),(2.40) จะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \left(1 - e\cos E\right)\dot{E} \quad (2.81)$$

เมื่อ $\dot{E} = \dfrac{dE}{d\tau}$ จะได้สมการ (2.81) เป็น

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}d\tau = \left(1 - e\cos E\right)dE$$

เมื่อทำการอินทิเกรตสมการ สุดท้ายจะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\tau = E - e\sin E \quad (2.82)$$

โดยค่าคงที่ใดๆของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ เนื่องจากกำหนดให้ $\tau = 0$ เมื่อ $E = 0$ โดยให้ T แทนเวลาที่ผ่านจุดใกล้โฟกัส ดังนั้นตำแหน่งของเทหวัตถุที่เวลา t ใดๆ สามารถเขียนได้เป็น

$$n\left(t - T\right) = E - e\sin E \quad (2.83)$$

เมื่อ n คือ การเคลื่อนที่เฉลี่ย (mean motion) หรือ อัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของเทหวัตถุที่เคลื่อนที่ในหนึ่งคาบการโคจร โดยที่

$$n = k\sqrt{\frac{\mu}{a^3}};\, k = \sqrt{G} \quad (2.84)$$

เมื่อกำหนดให้ M คือ มุมกวาดเฉลี่ย (mean anomaly) จะได้ว่า

$$M = n\left(t - T\right) \quad (2.85)$$

สุดท้ายจะได้เป็น

$$M = E - e\sin E \quad (2.86)$$

สมการนี้เรียกว่า สมการเคปเลอร์ (Kepler's equation) ซึ่งเป็นสมการที่ใช้สำหรับวงโคจรที่เป็นวงรี แต่ในกรณีที่ $e = 0$ ก็สามารถนำไปใช้กับวงโคจรที่เป็นวงกลมได้เช่นเดียวกัน

2.2.4 การหาหลักมูลทางโคจรจากตำแหน่งและความเร็ว

เมื่อทราบองค์ประกอบของตำแหน่งและความเร็วของเทหวัตถุบนวงโคจรได้แล้ว แต่ข้อมูลเหล่านี้ไม่สามารถที่จะนำไปอธิบายถึงรูปร่างของวงโคจรได้ ดังนั้นจึงต้องเปลี่ยนข้อมูลในรูปของตำแหน่งและความเร็วให้อยู่ในรูปของหลักมูลทางโคจร ซึ่งสามารถอธิบายรูปร่างของวงโคจรได้เป็นอย่างดี โดยหลักมูลทางโคจรที่จะทำการศึกษาในครั้งนี้ประกอบไปด้วย

a คือ ระยะครึ่งแกนเอก หรือ ระยะครึ่งแกนเอก (semi-major axis) เป็นองค์ประกอบหนึ่งของวงรีที่ใช้ในแสดงขนาดของวงโคจรวงรี

e คือ ภาวะเยื้องศูนย์ หรือ ความรี (eccentricity) เป็นองค์ประกอบของวงโคจรที่สามารถแสดงถึงรูปร่างของวงโคจรได้

i คือ ความเอียง (inclination) เป็นมุมระหว่างแกน $+z$ กับเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม โดยมีค่าตั้งแต่ $0^\circ - 180^\circ$ กรณีที่ $i < 90^\circ$ เทหวัตถุจะเลื่อนที่ในทิศทวนเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากทิศ $+z$ ส่วนในกรณี $i > 90^\circ$ นั้นเทหวัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศตามเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากทิศ $+z$

Ω คือ ระยะแวงของจุดไต่ขึ้น (longitude of ascending node) เป็นมุมระหว่างแกน x กับจุดไต่ขึ้น จุดไต่ขึ้น คือ จุดที่ระนาบวงโคจรของเทหวัตถุตัดกับระนาบของเส้นศูนย์สูตรท้องฟ้าซึ่งเป็นตำแหน่งที่เทหวัตถุเคลื่อนที่จากทิศใต้ไปยังทิศเหนือท้องฟ้า

ω คือ ระยะมุมของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (argument of perifocus) เป็นมุมที่แสดงทิศทางของจุดใกล้ดวงอาทิตย์

T คือ เวลาที่ผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (time of perihelion passage)

ต่อไปจะเป็นการแสดงการหาหลักมูลทางโคจรเหล่านี้จากตำแหน่งและความเร็วของเทหวัตถุจากวงโคจร

2.2.4.1 เวกเตอร์พื้นฐาน

รูปที่ 2.14 แสดงวงโคจรรูปวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางของระบบพิกัดอยู่ที่จุด C และ $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับแกน x, y, z โดยในระบบพิกัดนี้กำหนดให้ตำแหน่งที่แกน $+x$ ตัดผ่านวงโคจรเป็นจุดวสันตวิษุวัต (vernal equinox) และให้ระนาบ xy เป็นระนาบสุริยะวิถี โดยมีดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่ พิจารณา $\vec{e}, \vec{h}, \vec{N}$ ที่เวลา t ใดๆ

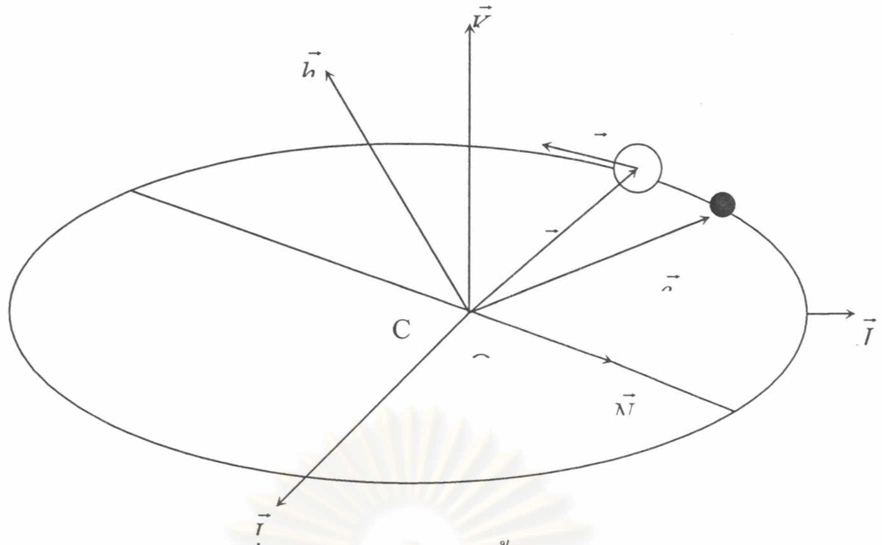
$$\vec{r} = (x, y, z)$$
$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

และสามารถคำนวณได้ว่า

$$r = |\vec{r}|$$
$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$
$$r\dot{r} = \vec{r} \cdot \vec{v} \qquad (2.87)$$

พิจารณาสมการ (2.72)

$$\vec{e} = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)\vec{r} - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\vec{v}$$



รูปที่ 2.14 แสดงเวกเตอร์พื้นฐาน $\vec{e}, \vec{h}, \vec{N}$

เมื่อ $\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)$ จะหาในพิกัดต่างๆได้ดังนี้

$$\vec{e}_x = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)x - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\dot{x}$$

$$\vec{e}_y = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)y - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\dot{y} \quad (2.88)$$

$$\vec{e}_z = \left(\frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r}\right)z - \left(\frac{r\dot{r}}{\mu}\right)\dot{z}$$

และสามารถคำนวณหาโมเมนตัมเชิงมุม $\vec{h}$ ได้จาก

$$\vec{h} = \vec{r} \mathrm{X} \vec{v} \quad (2.89)$$

เมื่อ $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z)$ ดังนั้น

$$h_x = y\dot{z} - z\dot{y}$$

$$h_y = z\dot{x} - x\dot{z} \quad (2.90)$$

$$h_z = x\dot{y} - y\dot{x}$$

สุดท้ายจะพิจารณา $\vec{N}$ (ascending node vector) ซึ่งเป็นเวกเตอร์ในทิศของตำแหน่งจุดไต่ขึ้น ซึ่งเป็นผลคูณระหว่างเวกเตอร์ $\vec{K}$ และ $\vec{h}$

$$\vec{N} = \vec{K} \mathrm{X} \vec{h} \quad (2.91)$$

โดย

$$\vec{K} = \{0,0,1\}$$

$$\vec{h} = \{h_x, h_y, h_z\}$$

เมื่อ $\vec{N} = \{N_x, N_y, N_z\}$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
N_x &= -h_y \\
N_y &= +h_x \\
N_z &= 0
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

2.2.4.2 การหาระยะครึ่งแกนเอกและความรี

จากสมการ (2.59) สมการของวิส-วีวา ได้ว่า

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}$$

ซึ่งจะสามารถหาระยะครึ่งแกนเอกของวงโคจรได้เป็น

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}} \tag{2.93}$$

และสามารถหาค่าความรีของวงโคจรได้จากสมการ (2.88) และจะได้

$$e = |\vec{e}| \tag{2.94}$$

2.2.4.3 การหาค่าความเอียงของวงโคจร

พิจารณารูปที่ 2.14 อีกครั้ง พบว่าสามารถคำนวณหาค่า i, Ω, ω จากผลคูณสเกลาร์ระหว่าง $\vec{e}, \vec{h}, \vec{N}$ และ $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ โดยสามารถคำนวณหาความเอียงของวงโคจรได้จาก

$$\vec{K} \cdot \vec{h} = |\vec{K}||\vec{h}| \cos i \tag{2.95}$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
\vec{K} &= (0,0,1) \\
\vec{h} &= (h_x, h_y, h_z)
\end{aligned}
$$

และสามารถหาค่าต่างๆได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\vec{K} \cdot \vec{h} &= h_z \\
|\vec{K}| &= 1 \\
|\vec{h}| &= h
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจากสมการ (2.95) จะเขียนได้เป็น

$$\cos i = \frac{h_z}{h} \tag{2.96}$$

จากสมการ (2.92)สามารถหาค่าความเอียงของวงโคจรได้เป็น

$$i = \cos^{-1} \frac{h_z}{h} \tag{2.97}$$

2.2.4.4 การหาค่าระยะแวงของจุดไต่ขึ้น

เช่นเดียวกับกรณีการหาความเอียงของวงโคจร โดยพิจารณาผลคูณสเกลาร์ระหว่าง $\vec{I}$ และ $\vec{N}$

$$\vec{I} \cdot \vec{N} = \left|\vec{I}\right|\left|\vec{N}\right| \cos \Omega \quad (2.98)$$

เมื่อ

$$\vec{I} = (1,0,0)$$
$$\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$$

จะได้

$$\vec{I} \cdot \vec{N} = N_x$$
$$\left|\vec{I}\right| = 1$$
$$\left|\vec{N}\right| = N$$

และจากสมการ (2.98) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\cos \Omega = \frac{N_x}{N} \quad (2.99)$$

จากสมการ (2.99) สามารถหาระยะแวงของจุดไต่ขึ้นได้เป็น

$$\Omega = \cos^{-1} \frac{N_x}{N} \quad (2.100)$$

2.2.4.5 การหาระยะมุมของจุดใกล้ดวงอาทิตย์

พิจารณาผลคูณสเกลาร์ต่อไปนี้

$$\vec{N} \cdot \vec{e} = \left|\vec{N}\right|\left|\vec{e}\right| \cos \omega \quad (2.101)$$

เมื่อ

$$\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$$
$$\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)$$

และ

$$\left|\vec{N}\right| = N$$
$$\left|\vec{e}\right| = e$$

สามารถเขียนสมการ (2.101) ได้เป็น

$$\cos \omega = \frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{Ne} \quad (2.102)$$

ดังนั้นสามารถหาระยะมุมของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ได้ดังต่อไปนี้

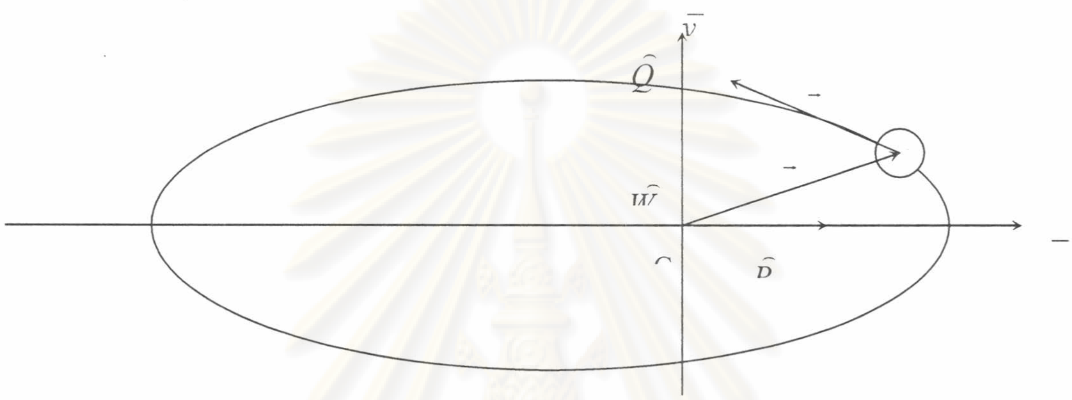
$$\omega = \cos^{-1} \frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{Ne} \quad (2.103)$$

ถ้า $e_z < 0$ จะได้ว่า $\omega > 180^\circ$ และในบางครั้ง ω อาจถูกแทนด้วยระยะแวงของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (longitude of perihelion , $\tilde{\omega}$) ซึ่งนิยามโดย

$$\omega = \tilde{\omega} - \Omega \tag{2.104}$$

2.2.5 การหาตำแหน่งและความเร็วจากหลักมูลทางโคจร

2.2.5.1 องค์ประกอบสเกลาร์ของการเคลื่อนที่ในวงโคจรรูปวงรี



รูปที่ 2.15 แสดงเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{P},\hat{Q},\hat{W}$

จากรูปที่ 2.15 ในการหาตำแหน่งและความเร็วจากหลักมูลทางโคจรที่เวลาเริ่มต้นใดๆ โดยเพื่อเป็นการง่ายขึ้นในการหาค่าดังกล่าวจึงมีการกำหนดเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{P},\hat{Q},\hat{W}$ ซึ่งตั้งฉากกันในระบบพิกัดของระนาบวงโคจรหรือระนาบ $\overline{xy}$ ดังแสดงในรูปที่ 2.15 โดย $\hat{P}$ มีทิศทางในแนวแกน $\bar{x}$ ชี้ไปในทิศของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ $\hat{Q}$ มีทิศทางในแนวแกน $\bar{y}$ ส่วน $\hat{W}$ มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบวงโคจร ดังนั้น

$$\hat{W} = \hat{P} X \hat{Q} \tag{2.105}$$

สามารถหาตำแหน่งและความเร็วของเทหวัตถุบนวงโคจรได้จาก

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \bar{x}\hat{P} + \bar{y}\hat{Q} \\ \vec{v} &= \dot{\bar{x}}\hat{P} + \dot{\bar{y}}\hat{Q} \end{aligned} \tag{2.106}$$

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างมุมกวาดเฉลี่ย M และมุมกวาดเยื้อง E จากสมการเคปเลอร์

$$M = E - e \sin E \tag{2.107}$$

จากสมการ (2.103)ในกรณีที่ยังไม่ได้ค่าที่ถูกต้องของ M ดังนั้นจะเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$f = E - e \sin E - M \tag{2.108}$$

หาอนุพันธ์ของ f เทียบกับ E จะได้

$$\frac{df}{dE} = 1 - e \cos E \tag{2.109}$$

ในการประมาณครั้งแรกกำหนดให้ค่ามุมกวาดเยื้องมีค่าเท่ากับมุมกวาดเฉลี่ย และใช้สมการ (2.108) , (2.109) หาค่ามุมกวาดเยื้องโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จนกระทั่งได้ค่ามุมกวาดเยื้องที่ยอมรับได้แล้ว จึงกลับมาพิจารณาสมการ (2.77) ต่อไปคือ

$$r = a\left(1 - e\cos E\right)$$

แล้วเขียนสมการ (2.81) ได้เป็น

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} = a\left(1 - e\cos E\right)\dot{E} \qquad (2.110)$$

แทนค่าสมการ (2.77) ลงในสมการ (2.110)

$$\dot{E} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \qquad (2.111)$$

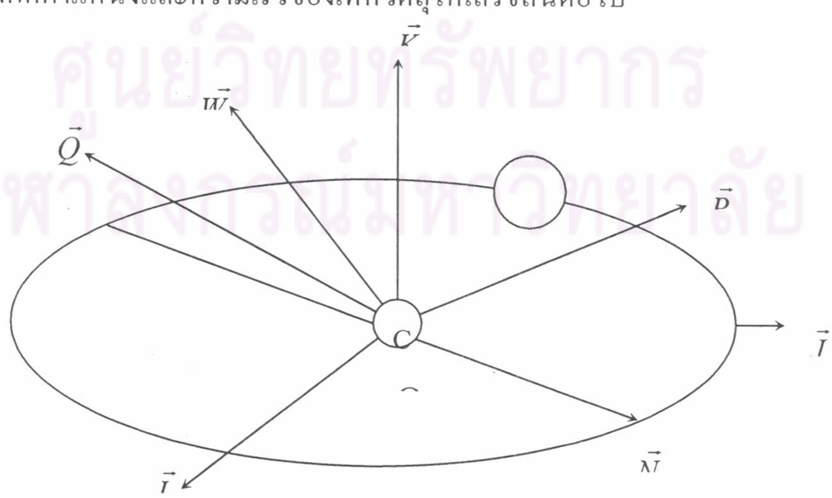
แล้วใช้สมการ (2.73), (2.77) และ (2.79) ในการคำนวณหาพิกัดตำแหน่งและความเร็วในวงโคจร จะได้

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a\left(\cos E - e\right) \\ \bar{y} &= b\sin E \\ \dot{\bar{x}} &= -a\dot{E}\sin E \\ \dot{\bar{y}} &= b\dot{E}\cos E \end{aligned} \qquad (2.112)$$

เมื่อ $b = a\sqrt{1 - e^2}$

2.2.5.2 องค์ประกอบของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของการเคลื่อนที่

เมื่อสามารถหาองค์ประกอบสเกลาร์ของตำแหน่งและความเร็วในรูปของหลักมูลทางโคจรแล้ว ต่อไปจะเป็นการพิจารณาองค์ประกอบเวกเตอร์ของ $\vec{P}$ และ $\vec{Q}$ เพื่อที่จะสามารถนำไปคำนวณหาพิกัดตำแหน่งและความเร็วของเทหวัตถุให้เสร็จสิ้นต่อไป

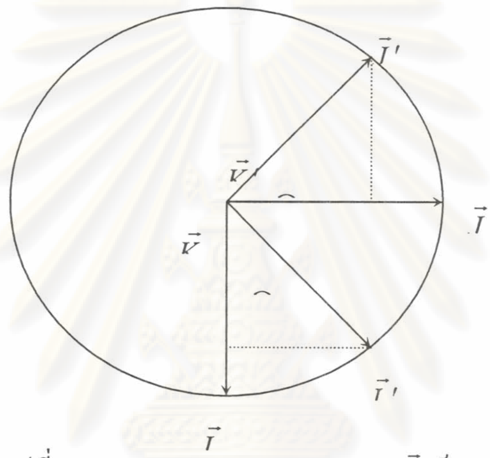


รูปที่2.16 แสดงการหมุนแกนต่างๆ

พิจารณารูปที่ 2.16 โดยเริ่มจากการใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\{\vec{P},\vec{Q},\vec{W}\}$ เมื่อหมุนไปอยู่ในแนวแกนพิกัดของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\{\vec{I},\vec{J},\vec{K}\}$ โดยมีมุมการหมุนเป็น Ω, i และ ω ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 หมุน $\{\vec{I},\vec{J},\vec{K}\}$ โดยให้ $\vec{K}$ เป็นแกนหมุนไปเป็นมุม Ω ดังรูปที่ 2.17 ซึ่งจะได้พิกัดใหม่เป็น $\{\vec{I}',\vec{J}',\vec{K}'\}$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \vec{I}' &= +\vec{I}\cos\Omega + \vec{J}\sin\Omega \\ \vec{J}' &= -\vec{I}\sin\Omega + \vec{J}\cos\Omega \\ \vec{K}' &= +\vec{K} \end{aligned} \qquad (2.113)$$



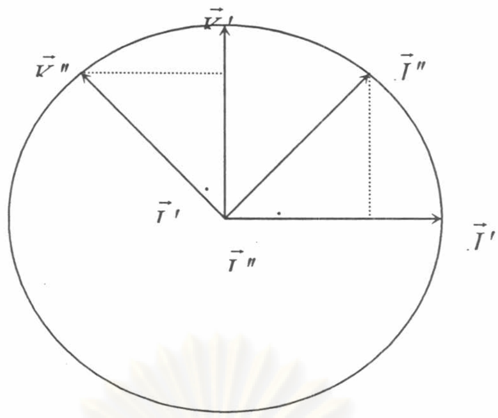
รูปที่ 2.17 แสดงการหมุนรอบแกน $\vec{K}$ เป็นมุม Ω

ขั้นตอนที่ 2 หมุน $\{\vec{I}',\vec{J}',\vec{K}'\}$ โดยให้ $\vec{I}'$ เป็นแกนการหมุนไปเป็นมุม i ดังรูปที่ 2.18 ซึ่งจะได้พิกัดใหม่เป็น $\{\vec{I}'',\vec{J}'',\vec{K}''\}$ ดังต่อไปนี้

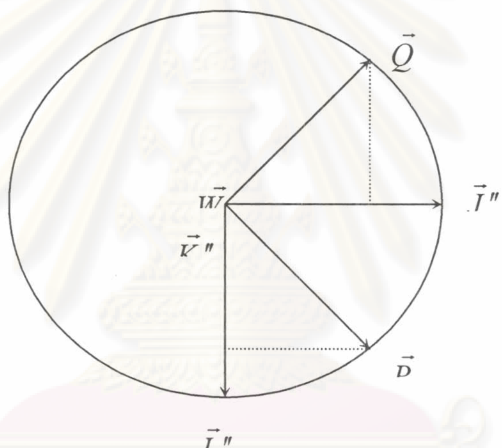
$$\begin{aligned} \vec{I}'' &= +\vec{I}' \\ \vec{J}'' &= +\vec{J}'\cos i + \vec{K}'\sin i \\ \vec{K}'' &= -\vec{J}'\sin i + \vec{K}'\cos i \end{aligned} \qquad (2.114)$$

ขั้นตอนที่ 3 หมุน $\{\vec{I}'',\vec{J}'',\vec{K}''\}$ โดยให้ $\vec{K}''$ เป็นแกนการหมุนไปเป็นมุม ω ดังรูปที่ 2.19 ซึ่งจะได้พิกัดใหม่เป็น $\{\vec{P},\vec{Q},\vec{W}\}$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \vec{P} &= +\vec{I}''\cos\omega + \vec{J}''\sin\omega \\ \vec{Q} &= -\vec{I}''\sin\omega + \vec{J}''\cos\omega \\ \vec{W} &= +\vec{K}'' \end{aligned} \qquad (2.115)$$



รูปที่ 2.18 แสดงการหมุนรอบแกน $\vec{I}\,'$ เป็นมุม i



รูปที่ 2.19 แสดงการหมุนรอบแกน $\vec{K}\,''$ เป็นมุม ω

ขั้นตอนที่ 4 แทนสมการ (2.113) ลงในสมการ (2.114) จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\vec{I}\,'' &= +\vec{I}\cos\Omega + \vec{J}\sin\Omega \\
\vec{J}\,'' &= -\vec{I}\left(\sin\Omega\cos i\right) + \vec{J}\left(\cos\Omega\cos i\right) + \vec{K}\sin i \\
\vec{K}\,'' &= +\vec{I}\left(\sin\Omega\sin i\right) - \vec{J}\left(\cos\Omega\sin i\right) + \vec{K}\cos i
\end{aligned} \tag{2.116}$$

ขั้นตอนที่ 5 แทนสมการ (2.116) ลงในสมการ (2.115) จะได้รูปแบบสุดท้ายของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเป็น

$$\begin{aligned}
\vec{P} = \; & \vec{I}\left(+\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\right) + \\
& \vec{J}\left(+\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i\right) + \\
& \vec{K}\left(+\sin\omega\sin i\right)
\end{aligned} \tag{2.117}$$

$$\vec{Q} = \vec{I}\left(-\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i\right) + \vec{J}\left(-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i\right) + \vec{K}\left(+\cos\omega\sin i\right) \quad (2.118)$$

$$\vec{W} = \vec{I}\left(+\sin\Omega\sin i\right) + \vec{J}\left(-\cos\Omega\sin i\right) + \vec{K}\left(+\cos i\right) \quad (2.119)$$

แล้วแทนค่าสมการ (2.112),(2.117),(2.118) และ (2.119) ลงในสมการ (2.106) จะสามารถหาพิกัดตำแหน่งและความเร็วของเทหวัตถุออกมาได้