บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

การจำลองการทำงานวงจรไฟฟ้านั้นมีทฤษฎีที่เกี่ยวข้องจำนวนมาก บทนี้จึงขอนำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้พอสังเขป โดยแยกเป็น 2 หัวข้อ คือทฤษฎีด้านการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า และทฤษฎีด้านวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method)

2.1 ทฤษฎีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า

2.1.1 <u>ตัวแปรของวงจร</u>

ตัวแปรอิสระทุกตัวที่โปรแกรมจำลองวงจรไฟฟ้าใช้ในการหาคำตอบของวงจร เรียกว่าตัวแปรวงจร ซึ่งมีหลายประเภท ได้แก่

- แรงดันปม (Node voltage)
- แรงดันกิ่ง (Branch voltage)
- กระแสกิ่ง (Branch current)
- กระแสวนรอบ (Loop current) ฯลฯ

ตัวแปรวงจรประเภทที่นิยมใช้กันมากที่สุดคือ แรงดันปม ซึ่งได้แก่ ค่าแรงดันระหว่างปมนั้นกับกราวด์ (Ground) เนื่องจากเป็นตัวแปรที่ผู้ใช้มักต้องการทราบค่า และเมื่อทราบแรงดันปมของทุกๆ ปมแล้ว จะสามารถคำนวณค่าตัวแปรอื่นๆ ในวงจรได้โดยง่าย

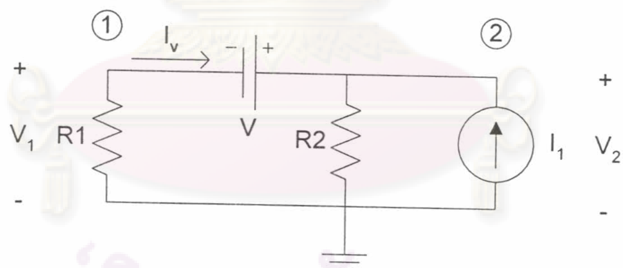
2.1.2 <u>การสร้างสมการเมทริกซ์ของวงจรด้วยวิธีโมดิฟายด์โนดัล</u>

ในทางทฤษฎี วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งอาจมีสมการวงจรได้หลายแบบ ขึ้นอยู่กับการกำหนดตัวแปรวงจรและกฎทางไฟฟ้าที่ใช้ในการสร้างสมการ วิธีสร้างสมการที่ใช้กันทั่วไปมี 4 วิธีตามตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ตารางเปรียบเทียบวิธีต่างๆ ในการสร้างสมการวงจร

ชื่อวิธี	ตัวแปรของวงจร	สมการวงจรทางไฟฟ้า
Node Analysis	Node voltage	กฎกระแส (Kirchhoff current Law)
Mesh Analysis	Mesh current	กฎแรงดัน (Kirchhoff voltage Law)
Loop Analysis	Loop current	กฎแรงดัน
Cut-set Analysis	Tree branch voltage	กฎกระแส

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าแรงดันปมเป็นตัวแปรที่นิยมใช้มากที่สุด วิธี Node Analysis จึงเป็นวิธีที่ใช้กันมากที่สุดเช่นกัน แต่วิธีนี้มีจุดอ่อนตรงที่ไม่สามารถนำไปใช้โดยตรงกับวงจรบางชนิด เช่น วงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันต่ออยู่ ดังตัวอย่างวงจรในรูปที่ 2.1 ซึ่งต้องแปลงแหล่งจ่ายแรงดันให้เป็นแหล่งจ่ายกระแสก่อนจึงสามารถสร้างสมการได้ จึงมีผู้ดัดแปลงวิธี Node Analysis ให้มีความยืดหยุ่นเพิ่มขึ้นและให้ชื่อวิธีใหม่นี้ว่า วิธีโมดิฟายด์โนดัล (Modified Nodal) วิธีนี้จะยอมให้กระแสของแหล่งจ่ายแรงดันและกระแสของตัวเหนี่ยวนำเป็นตัวแปรวงจรได้โดยไม่ต้องแปลงวงจรเดิม ทำให้สะดวกต่อการนำไปใช้สร้างโปรแกรมจำลองวงจรไฟฟ้า



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างวงจรที่ไม่สามารถใช้วิธี Node Analysis สร้างสมการโดยตรงได้

เมื่อใช้วิธีโมดิฟายด์โนดัลสร้างสมการวงจรไฟฟ้าของรูปที่ 2.1 จะมีตัวแปรวงจร 3 ตัวคือ ค่าแรงดันที่ปม 1 (V_1) ค่าแรงดันที่ปม 2 (V_2) และค่ากระแสที่ไหลผ่านแหล่งจ่ายแรงดัน (I_V) และสมการวงจรที่สร้างโดยวิธีโมดิฟายด์โนดัลจะเขียนได้ดังนี้

$$\text{KCL}_1 \quad : \frac{V_1}{R_1} + I_V = 0 \tag{2.1}$$

$$\text{KCL}_2 \quad : \frac{V_2}{R_2} - I_V = I_1 \tag{2.2}$$

BRV $: -V_1 + V_2 = V$ (2.3)

หลังจากสร้างสมการวงจรได้แล้ว จะเป็นขั้นตอนแก้สมการ โดยเป็นเนื้อหาในส่วนของทฤษฎีด้านวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method)

2.2 ทฤษฎีด้านวิธีเชิงตัวเลข

2.2.1 การแก้สมการวงจรไฟฟ้า

เราสามารถเขียนสมการวงจรในรูปของสมการเมทริกซ์

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.4}$$

โดยที่ $\mathbf{A}$ เป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ขนาด n x n

$\mathbf{x}$ เป็นเวกเตอร์ของตัวแปรวงจรขนาด n x 1

$\mathbf{b}$ เป็นเวกเตอร์ค่าคงที่ขนาด n x 1

เมื่อนำสมการ (2.1) ถึง (2.3) ของวงจรในรูปที่ 2.1 มาเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/R_2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_1 \\ V \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

ขั้นตอนการแก้สมการเมทริกซ์ มีอยู่หลายวิธี เช่นวิธีกำจัดตัวแปรแบบเกาส์ (Gaussian Elimination) ที่รู้จักกันแพร่หลายและเป็นที่นิยมใช้กันทั่วไป แต่วิธีที่โปรแกรมจำลองการทำงานวงจรไฟฟ้านิยมใช้คือวิธีแยกตัวประกอบแอล-ยู (LU-Factorization)

2.2.2 การแก้สมการเมทริกซ์ด้วยวิธีแยกตัวประกอบแอล-ยู

วิธีแยกตัวประกอบแอล-ยู จะแบ่งเป็น 2 ขั้นตอนได้แก่การแยกส่วน (Factorization) และการแทนที่ (Substitution)

2.2.2.1 การแยกส่วน

เป็นขั้นตอนการแยกเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ให้เป็น

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \tag{2.6}$$

โดยที่ **L** คือเมทริกซ์สามเหลี่ยมข้างล่าง (Lower triangular matrix) ที่มีค่าสมาชิกในแนวทแยงมุขสำคัญเป็น 1 ทั้งหมด

และ **U** คือเมทริกซ์สามเหลี่ยมข้างบน (Upper triangular matrix)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & 0 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & 0 & & \dots & \dots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

รูปที่ 2.2 รูปแบบของเมทริกซ์ L และ U

เราสามารถคำนวณค่าในเมทริกซ์ L และ U ได้จากสมการ

$$j \ge i \quad : u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \tag{2.7}$$

$$j < i \quad : l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right) / u_{jj} \tag{2.8}$$

เพื่อประหยัดหน่วยความจำ โปรแกรมจำลองวงจรไฟฟ้าจะเก็บค่าเมทริกซ์ **L** และ **U** ไว้ในเมทริกซ์เดียวกัน โดยค่าของ **L** จะอยู่ที่สามเหลี่ยมล่าง และค่าของเมทริกซ์ **U** จะอยู่ที่สามเหลี่ยมบน เมื่อแทน **A** จากสมการ (2.6) ลงในสมการ (2.4) จะได้

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.9}$$

2.2.2.2 การแทนที่

เป็นขั้นตอนการแก้สมการ (2.9) เพื่อหาค่าเวกเตอร์ โดยแบ่งการคำนวณออกเป็นขั้นตอนย่อยอีก 2 ขั้นตอนคือ

การกำจัดตัวแปรเดินหน้า (Forward elimination) โดยกำหนดให้ $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z}$ และ $\mathbf{L} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{b}$ ซึ่งสามารถคำนวณค่า $\mathbf{z}$ ได้จาก

$$i = 1, \dots, n \quad : \qquad z_i = -\left(\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot z_k \right) + b_i \tag{2.10}$$

การกำจัดตัวแปรถอยหลัง (Backward elimination) โดยคำนวณหาค่า $\mathbf{x}$ ด้วยการแก้สมการ $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z}$ จาก

$$i = n,\ldots,1 \quad : \qquad x_i = \left[-\left(\sum_{k=n}^{i+1} u_{ik} \cdot x_k \right) + z_i \right] / u_{ii} \tag{2.11}$$

2.2.3 ขั้นตอนวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Algorithm) [5]

ขั้นตอนวิธีนิวตัน-ราฟสันเป็นขั้นตอนวิธีหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นที่รู้จักและใช้อย่างแพร่หลาย เพราะสามารถหาผลลัพธ์ได้รวดเร็ว ถ้าค่าที่คาดเดาเริ่มต้นอยู่ใกล้กับผลเฉลยของสมการ ขั้นตอนวิธีนี้ตั้งอยู่บนรากฐานของการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ที่ใช้หาค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x จากค่าของฟังก์ชันและค่าอนุพันธ์ (derivatives) ที่อันดับต่างๆ ของฟังก์ชันนั้นที่ตำแหน่ง x_0 ซึ่งอยู่ใกล้เคียงกัน กล่าวคือ

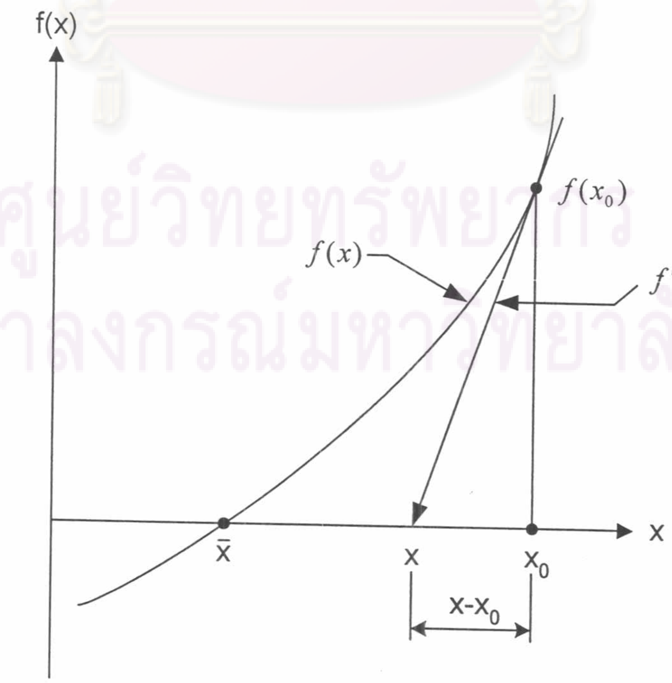
$$f(x) \cong f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) \tag{2.12}$$

ขั้นตอนวิธีของนิวตัน-ราฟสัน เพื่อหารากของสมการ $f(x) = 0$ จะประมาณฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ที่ประกอบด้วยพจน์เพียง 2 พจน์ดังนี้

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) = 0 \tag{2.13}$$

หรือ

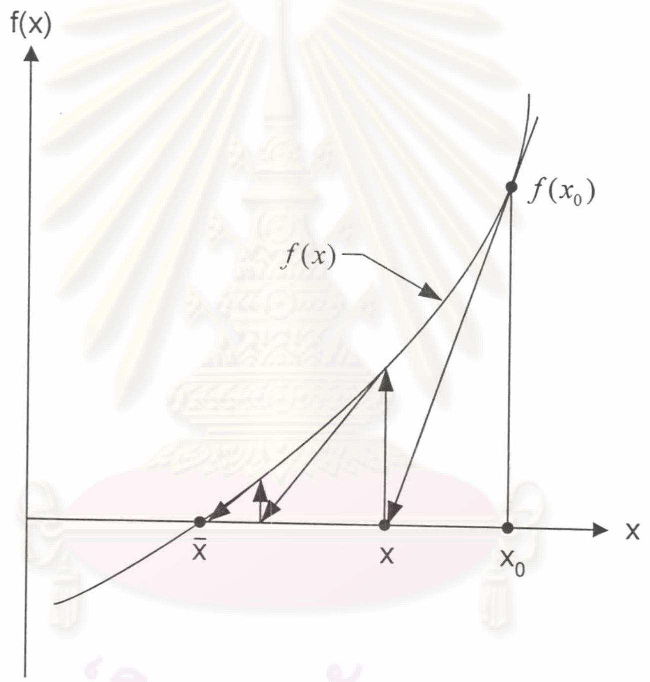
$$\begin{aligned} (x - x_0) f'(x_0) &= -f(x_0) \\ x - x_0 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned} \tag{2.14}$$



รูปที่ 2.3 การคำนวณหา x ใหม่จากค่ากำหนดเริ่มต้น x_0 ในขั้นตอนวิธีของนิวตัน-ราฟสัน

ขั้นตอนวิธีนิวตัน-ราฟสันเริ่มจากการกำหนดค่าเริ่มต้น x_0 ดังแสดงในรูปที่ 2.3 แล้วคำนวณค่าฟังก์ชัน $f(x_0)$ และค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f'(x_0)$ ที่ตำแหน่ง x_0 แทนลงในสมการ (2.14) เพื่อหาค่า x ณ ตำแหน่งใหม่ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ราก $\bar{x}$ มากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 2.3 นี้ จากนั้นก็ใช้วิธีการทำซ้ำโดยให้ $x_0 = x$ ค่า x ต่างๆ ที่เกิดจากวิธีการทำซ้ำนี้จะลู่เข้าสู่ราก $\bar{x}$ ที่แท้จริง ดังแสดงในรูปที่ 2.4

รูปที่ 2.4 นี้ แสดงให้เห็นว่าการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์โดยขั้นตอนวิธีของนิวตัน-ราฟสันนั้นเป็นไปโดยรวดเร็ว คุณสมบัติดังกล่าวเป็นเหตุให้ขั้นตอนวิธีการนี้ได้รับความนิยมอย่างสูง อย่างไรก็ตาม การลู่เข้าหาผลลัพธ์อาจไม่เกิดขึ้นเสมอไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายประการ เช่น ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันและการกำหนดค่าเริ่มต้น x_0 เป็นต้น



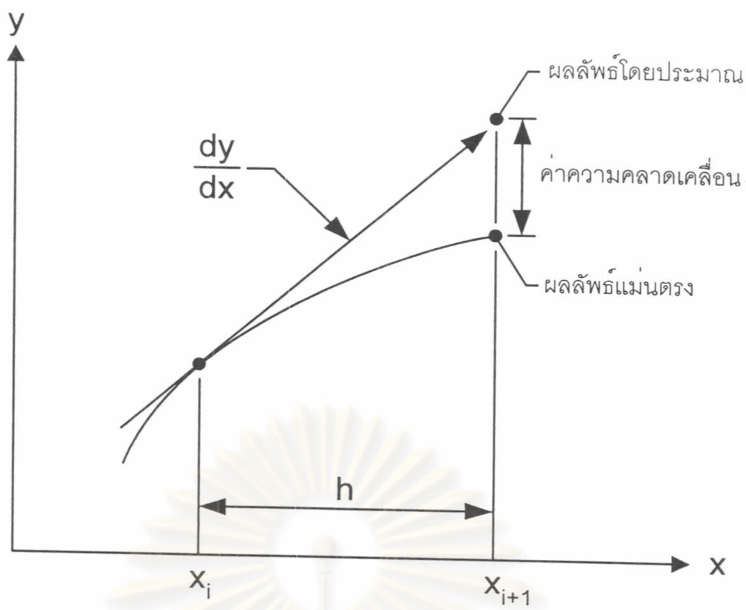
รูปที่ 2.4 ลักษณะการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์โดยขั้นตอนวิธีของนิวตัน-ราฟสัน

2.2.4 <u>วิธีของออยเลอร์</u>

วิธีของออยเลอร์ (Euler's method) เป็นวิธีพื้นฐานในการแก้สมการอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2.15)$$

หลักการของวิธีนี้ สามารถอธิบายได้โดยใช้รูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 วิธีของออยเลอร์

จากรูปที่ 2.5 นี้ เราหาค่าประมาณ y_{i+1} ที่ x_{i+1} จาก y_i ซึ่งรู้ค่าที่ x_i โดยประมาณค่าของความชันที่ x_i ดังนี้

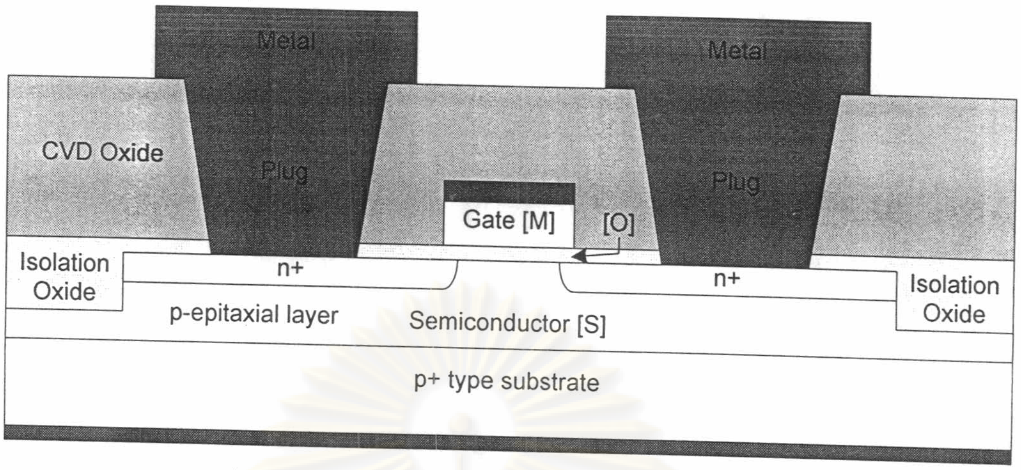
$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \qquad (2.16)$$

โดย $h = x_{i+1} - x_i$ เป็นช่วงก้าว (step size) ที่ใช้ในการคำนวณ แทนค่าความชันที่ x_i จากสมการ (2.25) นี้ ลงในสมการ (2.24) จะได้

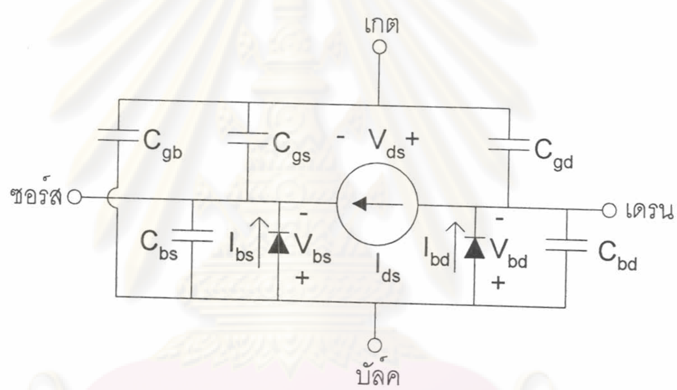
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \qquad (2.17)$$

ดังนั้นเราสามารถคำนวณค่า y_{i+1} ใหม่จากค่าเริ่มต้น y_i , x_i และ h ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.5 โดยความเที่ยงตรงของผลลัพธ์โดยประมาณนั้นจะขึ้นอยู่กับค่า h ที่ใช้ กล่าวคือยิ่ง h มีค่าน้อยเท่าใด ผลลัพธ์จะเที่ยงตรงมากขึ้นเท่านั้น

ควบคุมปริมาณกระแสเดรน การทำงานของทรานซิสเตอร์ชนิดมอสแบบเอ็นจะใช้วงจรสมมูลดังแสดงไว้ในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.2 โครงสร้างภายในของทรานซิสเตอร์มอสแบบเอ็น



รูปที่ 3.3 วงจรสมมูลของทรานซิสเตอร์ชนิดมอสแบบเอ็น

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นว่าวงจรสมมูลของทรานซิสเตอร์ชนิดมอสประกอบไปด้วยอุปกรณ์ไฟฟ้าย่อยภายในได้แก่แหล่งจ่ายกระแสเดรน (I_{ds}) ตัวเก็บประจุ และไดโอด เนื่องจากโปรแกรมวิเคราะห์วงจรรวมที่พัฒนาขึ้นนี้จะเปรียบเทียบความถูกต้องกับโปรแกรม Star-HSpice ดังนั้นจึงขออ้างอิงสมการที่ใช้ในการคำนวณจากคู่มือของโปรแกรม Star-HSpice โดยจะแยกอธิบายในแต่ละส่วนดังนี้

3.1.1 <u>แหล่งจ่ายกระแสเดรน</u>

ทรานซิสเตอร์ชนิดมอสแต่ละตัวจะมีค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังแสดงในตารางที่ 3.1 ในวิทยานิพนธ์นี้ ทรานซิสเตอร์ชนิดมอสจะมีแบบจำลองกระแสเดรนที่ตรงกับระดับ 1 ของโปรแกรม Star-HSpice ที่มีชื่อว่าแบบจำลองของ Schichman-Hodges ซึ่งให้นิยามค่ากระแสไว้ดังนี้