บทที่ 3

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

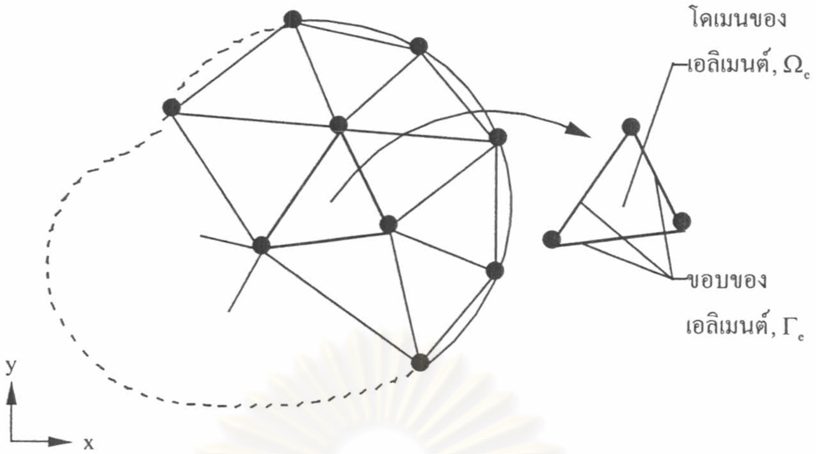
ในบทนี้เป็นการนำสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในบทที่ 2 มาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยจะกล่าวตั้งแต่ขั้นตอนโดยทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เลิเมนต์ การนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์กับปัญหาการไหลแบบศักย์ใน 2 และ 3 มิติ และการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ ซึ่งจะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลแบบศักย์ใน 2 และ 3 มิติ และการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ จากนั้นจะทำการเลือกรูปแบบเอลิเมนต์พร้อมทั้งฟังก์ชันการประมาณภายในเอิลเมนต์ (element interpolation function) ที่สอดคล้องกัน ซึ่งจะนำไปสู่ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ (finite element metrices) ซึ่งสามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการแก้ปัญหาโดยทั่วไป ประกอบด้วย 6 ขั้นตอน [8, 9] ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1

เริ่มต้นจากทำการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.1 เอลิเมนต์เหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (nodes) บนขอบของเอลิเมนต์ (elements) ที่อยู่ติดกัน ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะหาผลลัพธ์ที่ต้องการ



รูปที่ 3.1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

จากนั้นให้ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการแก้นั้น สมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$L(\bar{\phi}) = 0 \qquad (3.1)$$

โดย L คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) และ $\bar{\phi}$ คือ ผลเฉลยแม่นตรง

ขั้นตอนที่ 2

สมมติลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi = \phi(x,y) = \sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i = \underset{(1\times m)}{\lfloor N \rfloor} \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} \qquad (3.2)$$

โดย i คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น N_i คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\phi(x, y)$ คือ ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 3

สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง หากเราแทนผลเฉลยโดยประมาณดังแสดงในสมการ (3.2) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์สมการ (3.1) เราจะพบว่าจะเกิดค่าเศษตกค้างขึ้น

$$L(\phi) \quad \neq \quad 0 \quad \text{แต่จะเท่ากับ } R$$

ซึ่ง R คือ เศษตกค้าง (Residual) นั่นหมายถึง

$$R \quad = \quad L(\phi) \quad = \quad L(\lfloor N \rfloor \{\phi\}) \quad = \quad L(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i) \tag{3.3}$$

จากวิธีกาเลอคิน (Galerkin) เป็นวิธีการทำลดความผิดพลาดให้น้อยที่สุด ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) W จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์นั้น แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i R \, d\Omega \quad = \quad 0 \quad i \; = 1, 2, \ldots, m \tag{3.4}$$

โดย $d\Omega$ คือ โดเมนของเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 4

อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) ซึ่งหากเราแทนสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.4) แล้วอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\int_{\Omega^{(e)}} W_i R \, d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} W_i L(\sum_{i=1}^{m} N_i \phi_i) \, d\Omega$$
$$= \int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Omega + \int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) \, d\Gamma \qquad (3.5)$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน ของเอลิเมนต์, $\Omega^{(e)}$ พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต ของเอลิเมนต์, $\Gamma^{(e)}$

ขั้นตอนที่ 5

แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ ด้วยสภาวะขอบเขตอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 6

จากนั้นจึงเขียนสมการของเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์นั่นคือ

$$\underset{(m\times m)}{[K]} \; \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} = \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \qquad (3.6)$$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์ของความแข็งแกร่ง (element stiffness matrix), $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ และ $\{F\}$ คือ โหลดเวกเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์แล้ว ขั้นตอนต่อไป ก็คือ รวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกัน จะก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นจึงทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ

3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบศักย์ใน 2 มิติ

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับหารวิเคราะห์การไหลแบบศักย์ ซึ่งเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว ไม่มีความเสียดทาน และเป็นการไหลไร้การหมุน โดยทำการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล [7, 10] หลักการของวิธีนี้ก็คือ เริ่มจากการคูณสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้นด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i แล้วอินทิเกรตทั่วทั้งพื้นที่ของเอลิเมนต์และกำหนดผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นให้มีค่าเท่ากับศูนย์ มีรายละเอียดดังนี้

3.2.1 การไหลแบบศักย์ สำหรับรูปแบบฟังก์ชันการไหลใน 2 มิติ

จาก

$$\int_A W_i \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) dA \quad = \quad 0 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, ..., m \qquad (3.7)$$

เมื่อ

$$\psi(x,y) \quad = \quad \underset{(1\times m)}{\lfloor N(x,y) \rfloor} \underset{(m\times 1)}{\{\psi\}}$$

โดย $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการการประมาณภายในเอลิเมนต์ จากนั้นประยุกต์หลักการบัฟโนฟ – กาเลอร์คิน (Bubnov – Galerkin) คือว่าใช้ฟังก์ชันน้ำหนัก W เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันการประมาณภายใน N จะได้ว่า

$$\int_A W_i \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) dA \quad = \quad 0 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, .. ,m \qquad (3.8)$$

ทำการอินทิเกรตทีละส่วนโดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's Theorem) เพื่อที่จะสามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตได้

$$\int u dv \quad = \quad uv - \int v du$$

เมื่อ

$$u = N_i \qquad\qquad dv = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) dA$$

$$du = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ หรือ } \frac{\partial N}{\partial y} \qquad\qquad v = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \text{ หรือ } \left(\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)\{\psi\}$$

จาก

$$\int_A N_i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) dA = 0 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, .. ,m$$

จะได้ว่า

$$\int_A N_i \left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right) dA \; \{\psi\} = \int_s \{N\}(v\ell - um)\, ds$$

$$\underset{(m\times m)}{[K]} \; \underset{(m\times 1)}{\{\psi\}} = \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \qquad (3.9)$$

โดย

$$[K] = \int_A \left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right) dA \text{ และ } \{F\} = \int_s \{N\}(v\ell - um)\, ds$$

3.2.2 การไหลแบบศักย์ สำหรับรูปแบบฟังก์ชันศักย์ใน 2 มิติ

จาก

$$\int_A W_i \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) dA = 0 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, ..., m \qquad (3.10)$$

เมื่อ

$$\phi(x,y) = \underset{(1\times m)}{\lfloor N(x,y) \rfloor} \; \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}}$$

โดย $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการการประมาณภายในเอลิเมนต์ จากนั้นประยุกต์หลักการบัฟโนฟ – กาเลอร์คิน (Bubnov – Galerkin) คือว่าใช้ฟังก์ชันน้ำหนัก W เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันการประมาณภายใน N จะได้ว่า

$$\int_A N_i \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) dA = 0 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, .. ,m$$

ทำการอินทิเกรตทีละส่วนโดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's Theorem) เพื่อที่จะสามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตได้

$$\int udv = uv - \int vdu$$

เมื่อ

$$u = N_i \qquad dv = (\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2})\, dA$$

$$du = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ หรือ } \frac{\partial N}{\partial y} \qquad v = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \text{ หรือ } \left(\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)\{\phi\}$$

จาก

$$\int_A N_i (\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2})\, dA = 0 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, .. ,m$$

จะได้ว่า

$$\int_A N_i (\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor)\, dA \;\{\phi\} = \int_s \{N\}(v\ell - um)\, ds$$

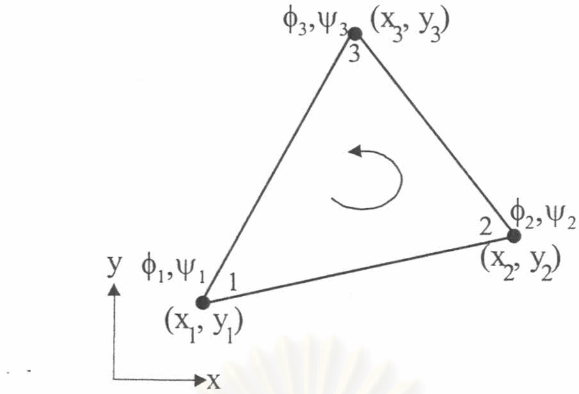
$$\underset{(m\times m)}{[K]}\;\underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} = \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \tag{3.11}$$

โดย

$$[K] = \int_A (\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor)\, dA \text{ และ } \{F\} = \int_s \{N\}(v\ell - um)\, ds$$

3.3 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับการไหลแบบศักย์ใน 2 มิติ

ในการทำวิทยานิพนธ์เพื่อที่จะทำการวิเคราะห์การไหลแบบศักย์ในสองมิติ จะทำการเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าฟังก์ชันการไหลหรือฟังก์ชันศักย์



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสำหรับปัญหาการไหลแบบศักย์ใน 2 มิติ

ซึ่งมีลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการไหล ψ หรือฟังก์ชันศักย์ ϕ ในลักษณะแผ่นเรียบ

$$\psi(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \text{ หรือ } \phi(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

โดย N_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ เป็นฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \tag{3.13}$$

ซึ่ง A แทนพื้นที่ของสามเหลี่ยม เท่ากับ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

$$A = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) \right]$$

ส่วนค่า a_i, b_i, c_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ มีค่าดังนี้

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad b_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} \qquad c_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$a_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad b_2 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} \qquad c_2 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad b_3 = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} \qquad c_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

ความเร็ว u และ v ของการไหลบนเอลิเมนต์ คือ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \{\psi\} \text{ หรือ } u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{\phi\} \tag{3.14}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{\psi\} \text{ หรือ } v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \{\phi\} \tag{3.15}$$

เขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

สำหรับฟังก์ชันการไหล

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

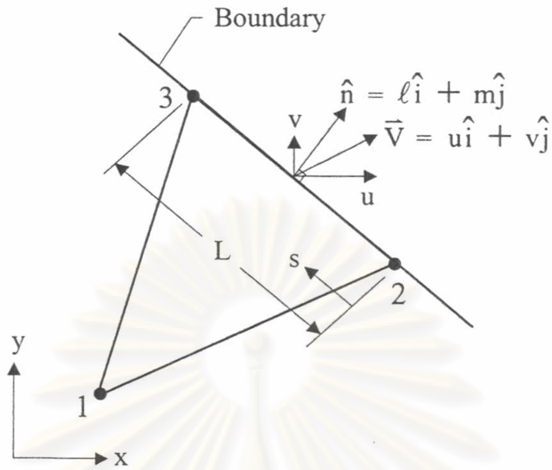
สำหรับฟังก์ชันศักย์

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์ของการไหล $[K]$ สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (เหมือนกันทั้ง 2 กรณี) จะได้ว่า

$$[K] = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ \text{SYM.} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

พิจารณาโหลดเวกเตอร์ ที่ขอบใด ๆ ของการไหล ในที่นี้สมมุติพิจารณาที่จุดต่อ 2-3 ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 การพิจารณาโหลดเวกเตอร์ที่ขอบใด ๆ ของการไหล

สำหรับฟังก์ชันการไหล

$$\int_0^L (\text{-}v\ell + um) \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds = (-v\ell + um) \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds = (-v\ell + um)\, \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

สำหรับฟังก์ชันศักย์

$$\int_0^L (\text{-}u\ell - vm) \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds = (-u\ell - vm) \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-\dfrac{s}{L} \\ \dfrac{s}{L} \end{Bmatrix} ds = (-u\ell - vm)\, \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

ดังนั้น โหลดเวกเตอร์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มีขอบที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-3 ซึ่งมีความยาว L อยู่ติดขอบโดเมนของการไหลนี้ คือ

สำหรับฟังก์ชันการไหล

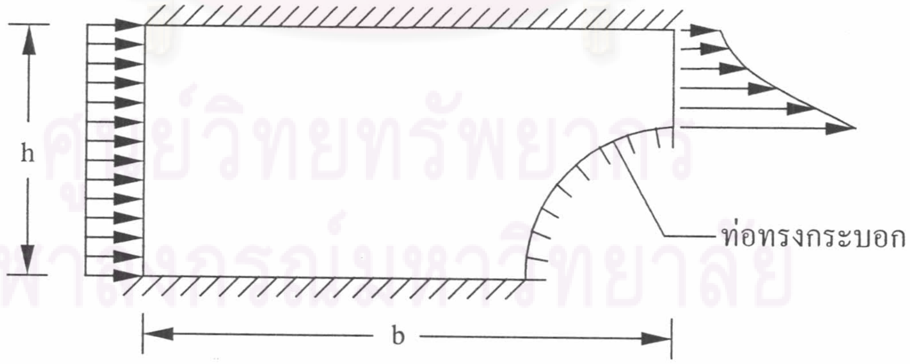
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (-v\ell + um)\dfrac{L}{2} \\ (-v\ell + um)\dfrac{L}{2} \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

สำหรับฟังก์ชันศักย์

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (-u\ell - vm)\dfrac{L}{2} \\ (-u\ell - vm)\dfrac{L}{2} \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

สมมติว่าเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้นั้นอยู่ในรูปแบบของความเร็ว แต่สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมานั้นอยู่ในรูปฟังก์ชันการไหล ψ หรือฟังก์ชันศักย์ ϕ ดังนั้นจึงต้องแปลงเงื่อนไขขอบเขตในรูปความเร็วให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการไหลหรือฟังก์ชันศักย์

กำหนดให้ความเร็วที่เงื่อนไขขอบเขตเท่ากับ U ดังรูปที่ 3.4



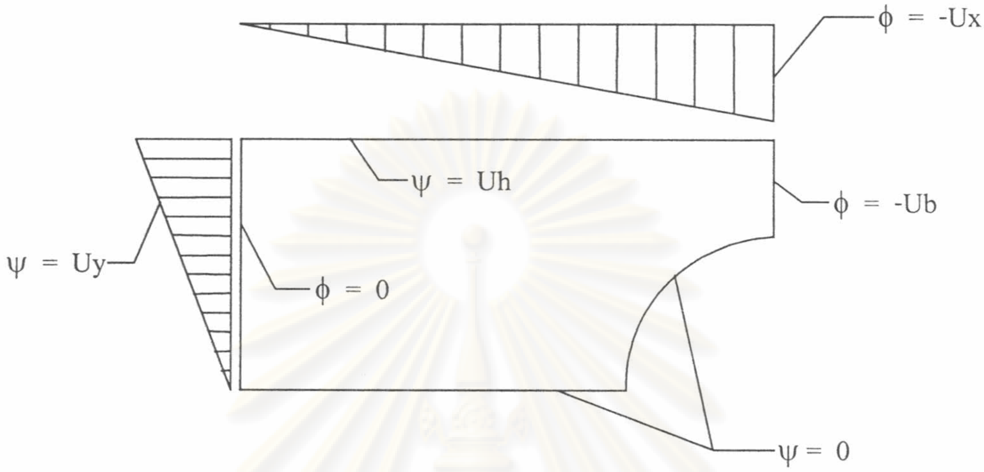
รูปที่ 3.4 โดเมนของการไหลที่จะนำมาใช้ในการคำนวณการไหลแบบศักย์

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับฟังก์ชันการไหล คือ

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \qquad \text{ดังนั้น} \quad \psi = Uy$$

และจากความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับฟังก์ชันศักย์ คือ

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = U \quad \text{ดังนั้น} \quad \phi = -Ux$$



รูปที่ 3.5 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับฟังก์ชันการไหล ψ หรือฟังก์ชันศักย์ ϕ

เมื่อแก้ระบบสมการจะทำให้รู้ค่าฟังก์ชันการไหลหรือฟังก์ชันศักย์แล้ว จะสามารถหาค่าความเร็ว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับฟังก์ชันการไหลหรือฟังก์ชันศักย์

$$\{u\} = \left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\} = \underset{(1\times3)}{\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor} \underset{(3\times1)}{\{\psi\}} \quad \text{หรือ} \quad \{u\} = -\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\} = \underset{(1\times3)}{\left\lfloor -\frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor} \underset{(3\times1)}{\{\phi\}}$$

$$\{v\} = -\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\} = \underset{(1\times3)}{\left\lfloor -\frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor} \underset{(3\times1)}{\{\psi\}} \quad \text{หรือ} \quad \{v\} = -\left\{\frac{\partial\phi}{\partial y}\right\} = \underset{(1\times3)}{\left\lfloor -\frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor} \underset{(3\times1)}{\{\phi\}}$$

เนื่องจากค่าความเร็วที่คำนวณได้นั้นเป็นค่าความเร็วของแต่ละเอลิเมนต์ เพื่อความสะดวกในการแสดงผลจึงทำการเฉลี่ยค่าความเร็วของเอลิเมนต์รอบ ๆ จุดต่อเป็นค่าความเร็วของจุดต่อนั้น

จากนั้นสามารถคำนวณหาค่าความดัน ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ของของไหลได้โดยอาศัยสมการของเบอร์นูลี (Bernoulli's Equation) โดย

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{constant}$$

และ

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}$$

โดย g แทนค่าแรงโน้มถ่วง และ z แทนความสูงจากระดับอ้างอิง

3.4 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบศักย์ใน 3 มิติ

สามารถทำได้โดยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) เข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลใน 3 มิติ [7, 10] ดังนี้

$$\int_V W_i \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) dV \quad = \quad 0 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, ..., m$$

เมื่อ

$$\phi(x, y) \quad = \quad \underset{(1\times m)}{\lfloor N(x,y,z) \rfloor} \; \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}}$$

โดย $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันการการประมาณภายในเอลิเมนต์ จากนั้นประยุกต์หลักการบัฟโนฟ – กาเลอร์คิน (Bubnov – Galerkin) คือว่าใช้ฟังก์ชันน้ำหนัก W เช่นเดียวกันกับฟังก์ชันการประมาณภายใน N จะได้ว่า

$$\int_V N_i \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) dV \quad = \quad 0 \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, .. ,m \qquad (3.23)$$

ทำการอินทิเกรตทีละส่วนโดยใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's Theorem) เพื่อที่จะสามารถประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตได้

$$\int_V u(\nabla \cdot \bar{V})\, dV = \int_A u(\bar{V}.\hat{n})\, dA - \int_V (\nabla u \cdot \bar{V})\, dV$$

เมื่อ $u = N_i$ และ $\left.\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \\ \bar{V} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} \end{aligned}\right\} (\nabla.\bar{V}) = (\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2})$

เนื่องจาก $\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j} + n_z\hat{k}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\bar{V} \cdot \hat{n} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z \\
u(\bar{V} \cdot \hat{n}) &= N_i(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z) \\
\nabla u &= \frac{\partial N_i}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\hat{k} \\
\nabla u \cdot \bar{V} &= \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z}
\end{aligned}$$

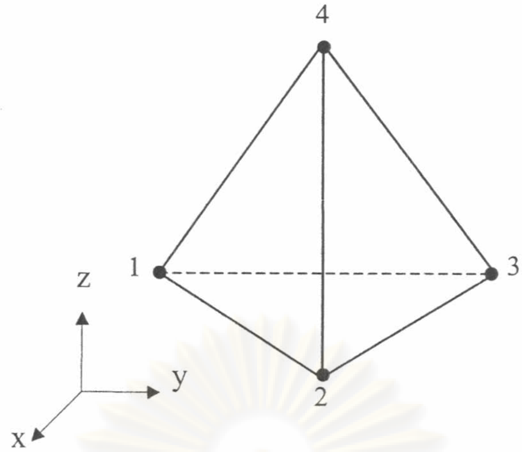
จะได้ว่า

$$\int_V (\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial z}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial z}\right\rfloor)\, dV\ \{\phi\} = \int_A \{N\}(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z)\, dA$$

$$\underset{(m\times m)}{[K]}\ \underset{(m\times 1)}{\{\phi\}} = \underset{(m\times 1)}{\{F\}} \qquad (3.24)$$

3.5 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับการไหลแบบศักย์ใน 3 มิติ

ในการทำวิทยานิพนธ์เพื่อที่จะทำการวิเคราะห์การไหลแบบศักย์ในสามมิตินั้น จะทำการเลือกใช้เอลิเมนต์ทรงสี่หน้าประกอบด้วย 4 จุดต่อ ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 เอลิเมนต์สี่หน้าในสามมิติ

จะมีลักษณะการกระจายของฟังก์ชันศักย์ ϕ ดังนี้

$$\phi(x,y,z) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}$$

โดย N_i เมื่อ i = 1, 2, 3, 4 คือฟังก์ชันการประมาณภายในซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$N_i = \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \text{ เมื่อ } i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.25}$$

เมื่อ V แทนปริมาตรของเอลิเมนต์

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$V = [x_2y_3z_4 - x_2z_3y_4 - x_3y_2z_4 + x_3z_2y_4 + x_4y_2z_3 - x_4z_2y_3 - x_1y_3z_4 + x_1z_3y_4 + x_3y_1z_4$$
$$- x_3z_1y_4 + x_4y_1z_3 + x_1y_2z_4 - x_1z_2y_4 - x_2y_1z_4 + x_2z_1y_4 + x_4y_1z_2 - x_4z_1y_2 - x_1y_2z_3$$
$$+ x_1z_2y_3 + x_2y_1z_3 - x_2z_1y_3 - x_3y_1z_2 + x_3z_1y_2]/6$$

ส่วนค่า a_i, b_i, c_i, d_i เมื่อ i = 1, 2, 3, 4 มีค่าดังนี้

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \qquad b_1 = -\begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \qquad d_1 = -\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$a_1 = x_2y_3z_4 - x_2z_3y_4 - x_3y_2z_4 + x_3z_2y_4 + x_4y_2z_3 - x_4z_2y_3$$

$$b_1 = - y_3z_4 + z_3y_4 + y_2z_4 - z_2y_4 - y_2z_3 + z_2y_3$$

$$c_1 = x_3z_4 - z_3x_4 - x_2z_4 + z_2x_4 + x_2z_3 - z_2x_3$$

$$d_1 = - x_3y_4 + y_3x_4 + x_2y_4 - y_2x_4 - x_2y_3 + y_2x_3$$

$$a_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \qquad b_2 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$a_2 = - x_1y_3z_4 + x_1z_3y_4 + x_3y_1z_4 - x_3z_1y_4 - x_4y_1z_3 + x_4z_1y_3$$

$$b_2 = y_3z_4 - z_3y_4 - y_1z_4 + z_1y_4 + y_1z_3 - z_1y_3$$

$$c_2 = - x_3z_4 + z_3x_4 + x_1z_4 - z_1x_4 - x_1z_3 + z_1x_3$$

$$d_2 = x_3y_4 - y_3x_4 - x_1y_4 + y_1x_4 + x_1y_3 - y_1x_3$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \qquad b_3 = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \qquad d_3 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$a_3 = x_1y_2z_4 - x_1z_2y_4 - x_2y_1z_4 + x_2z_1y_4 + x_4y_1z_2 - x_4z_1y_2$$

$$b_3 = -y_2z_4 + z_2y_4 + y_1z_4 - z_1y_4 - y_1z_2 + z_1y_2$$

$$c_3 = x_2z_4 - z_2x_4 - x_1z_4 + z_1x_4 + x_1z_2 - z_1x_2$$

$$d_3 = -x_2y_4 + y_2x_4 + x_1y_4 - y_1x_4 - x_1y_2 + y_1x_2$$

$$a_4 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad b_4 = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$c_4 = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$a_4 = -x_1y_2z_3 + x_1z_2y_3 + x_2y_1z_3 - x_2z_1y_3 - x_3y_1z_2 + x_3z_1y_2$$

$$b_4 = y_2z_3 - z_2y_3 - y_1z_3 + z_1y_3 + y_1z_2 - z_1y_2$$

$$c_4 = -x_2z_3 + z_2x_3 + x_1z_3 - z_1x_3 - x_1z_2 + z_1x_2$$

$$d_4 = x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 + y_1x_3 + x_1y_2 - y_1x_2$$

ความเร็ว u, v และ w ของการไหลบนเอลิเมนต์ คือ

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{\phi\} \tag{3.26ก}$$

$$v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \{\phi\} \tag{3.26ข}$$

$$w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial z} \right\rfloor \{\phi\} \tag{3.26ค}$$

เขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

เอลิเมนต์เมตริกซ์ของการไหล $[K]$ สำหรับเอลิเมนต์ทรงสี่หน้า จะได้ว่า

$$[K] = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} b_1^2+c_1^2+d_1^2 & b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2 & b_1b_3+c_1c_3+d_1d_3 & b_1b_4+c_1c_4+d_1d_4 \\ & b_2^2+c_2^2+d_2^2 & b_2b_3+c_2c_3+d_2d_3 & b_2b_4+c_2c_4+d_2d_4 \\ & & b_3^2+c_3^2+d_3^2 & b_3b_4+c_3c_4+d_3d_4 \\ \text{SYM.} & & & b_4^2+c_4^2+d_4^2 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ จะทำให้รู้ค่าฟังก์ชันศักย์แล้ว จะสามารถหาค่าความเร็ว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับฟังก์ชันศักย์ เนื่องจากค่าความเร็วที่คำนวณได้นั้นเป็นค่าความเร็วของแต่ละเอลิเมนต์ เพื่อความสะดวกในการแสดงผลจึงทำการเฉลี่ยค่าความเร็วของเอลิเมนต์รอบ ๆ จุดต่อเป็นค่าความเร็วของจุดต่อนั้น

จากนั้นสามารถคำนวณหาค่าความดัน ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ของของไหลได้โดยอาศัยสมการของเบอร์นูลี (Bernoulli's Equation) โดย

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = \text{constant}$$

และ

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

โดย g แทนค่าแรงโน้มถ่วง และ z แทนความสูงจากระดับอ้างอิง

3.6 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยแต่อัดตัวไม่ได้และไม่มีผลของอุณหภูมิใน 2 มิตินั้นจะประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว คือ ความเร็ว u และ v และความดัน p ซึ่งต่างเปลี่ยนแปลงไปตามโคออร์ดิเนต x และ y สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ได้ดังนี้

$$u(x, y) \quad = \quad \sum N_i(x, y)\, u_i \quad = \quad \lfloor N \rfloor \{u\} \tag{3.29ก}$$

$$v(x, y) \quad = \quad \sum N_i(x, y)\, v_i \quad = \quad \lfloor N \rfloor \{v\} \qquad (3.29ข)$$

$$p(x, y) \quad = \quad \sum H_i(x, y)\, p_i \quad = \quad \lfloor H \rfloor \{p\} \qquad (3.29ค)$$

โดย N_i และ H_i แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความเร็วและความดันตามลำดับ

สำหรับการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะต้องทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) เข้าโดยตรงกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์ และคูณด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก ในที่นี้เลือกใช้ระเบียบวิธีของบัพโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) คือใช้ฟังก์ชันน้ำหนักการประมาณภายในเอลิเมนต์เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก แล้วทำการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ที่พิจารณา ดังนั้นสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมและสมการเชิงอนุรักษ์มวลจะได้

$$\int_A N_i \left\lfloor \rho(u\, u_{,x} + v\, u_{,y}) - (\bar{\sigma}_{x,x} + \tau_{yx,y}) \right\rfloor dA \quad = \quad 0 \qquad (3.30ก)$$

$$\int_A N_i \left\lfloor \rho(u\, v_{,x} + v\, v_{,y}) - (\tau_{xy,x} + \bar{\sigma}_{y,y}) \right\rfloor dA \; - \int_A N_i\, \rho g_y \; dA \; = \quad 0 \qquad (3.30ข)$$

$$\int_A H_i\, (u_{,x} + v_{,y})\; dA \quad = \quad 0 \qquad (3.30ค)$$

โดย A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์นั้น จากนั้นประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss theorem) เข้ากับสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม และแทนค่าความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนทั้งสองสมการให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วและความดันจะได้ว่า

$$\int_A N_i\, \rho\, (u\, u_{,x} + v\, u_{,y})\; dA \; + \int_A N_{i,x}\, 2\mu\, u_{,x}\; dA \; - \int_A N_{i,x}\; p\, dA$$
$$+ \int_A N_{i,y}\, \mu\, u_{,y}\; dA \; + \int_A N_{i,y}\, \mu\, v_{,x}\; dA \; = \int_S N_i\, T_x\; dS \qquad (3.31ก)$$

$$\int_A N_i\,\rho\,(u\,v_{,x} + v\,v_{,y})\,dA \;+\; \int_A N_{i,x}\,\mu\,u_{,y}\,dA \;+\; \int_A N_{i,x}\,\mu\,v_{,x}\,dA$$

$$+\; \int_A N_{i,y}\,2\mu\,v_{,y}\,dA \;-\; \int_A N_{i,y}\,p\,dA \;=\; \int_S N_i\,T_y\,dS \;+\; \rho g_y \int_A N_i\,dA \quad (3.31ข)$$

จากนั้นทำการหารตลอดทั้งสองสมการข้างบนนี้ด้วยค่าความหนาแน่น ρ แล้วกำหนดให้ค่าความหนืดจลนศาสตร์ (kinematic viscosity) ซึ่งคือ

$$\nu \;=\; \frac{\mu}{\rho} \quad (3.32)$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.31ก-ข) ที่สอดคล้องกับโมเมนตัมในแนวแกน x และ y จะกลายมาเป็น

$$\int_A N_i\,u\,u_{,x}\,dA \;+\; \int_A N_i\,v\,u_{,y}\,dA \;-\; \frac{1}{\rho}\int_A N_{i,x}\,p\,dA \;+\; 2\nu\int_A N_{i,x}\,u_{,x}\,dA$$

$$+\; \nu\int_A N_{i,y}\,u_{,y}\,dA \;+\; \nu\int_A N_{i,y}\,v_{,x}\,dA \;=\; \frac{1}{\rho}\int_S N_i\,T_x\,dS \quad (3.33ก)$$

$$\int_A N_i\,u\,v_{,x}\,dA \;+\; \int_A N_i\,v\,v_{,y}\,dA \;-\; \frac{1}{\rho}\int_A N_{i,y}\,p\,dA \;+\; \nu\int_A N_{i,x}\,u_{,y}\,dA$$

$$+\; \nu\int_A N_{i,x}\,v_{,x}\,dA \;+\; 2\nu\int_A N_{i,y}\,v_{,y}\,dA \;=\; \frac{1}{\rho}\int_S N_i\,T_y\,dS \;+\; g_y \int_A N_i\,dA \quad (3.33ข)$$

พร้อมกับสมการ (3.30ค) ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุรักษ์มวลซึ่งนำมาเขียนรวมกันในที่นี้อีกครั้งคือ

$$\int_A H_i\,(u_{,x} + v_{,y})\,dA \;=\; 0 \quad (3.33ค)$$

สมการ (3.33ก-ค) ที่สอดคล้องกับโมเมนตัมในแนวแกน x และ y รวมทั้งสมการอนุรักษ์มวลนี้ประกอบด้วยพจน์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ A หรือตลอดขอบ S ของเอลิเมนต์ ลักษณะการกระจายของความเร็วในแนวแกน x และ y ของเอลิเมนต์เหล่านี้จากสมการ (3.29ก-ข) ในรูปแบบของเทนเซอร์คือ

$$u \quad = \quad u(x, y) \quad = \quad N_{\alpha}\, u_{\alpha} \tag{3.34ก}$$

และ

$$v \quad = \quad v(x, y) \quad = \quad N_{\alpha}\, v_{\alpha} \tag{3.34ข}$$

ส่วนลักษณะการกระจายของค่าความดันบนเอลิเมนต์จากสมการ (3.29ค) ในรูปแบบของเทนเซอร์ คือ

$$p \quad = \quad p(x, y) \quad = \quad H_{\lambda}\, p_{\lambda} \tag{3.34ค}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว u และ v ในทิศแกน x และ y คือ

$$u_{,x} \quad = \quad N_{\alpha,x}\, u_{\alpha} \quad ; \quad u_{,y} \quad = \quad N_{\alpha,y}\, u_{\alpha} \tag{3.35ก}$$

$$v_{,x} \quad = \quad N_{\alpha,x}\, v_{\alpha} \quad ; \quad v_{,y} \quad = \quad N_{\alpha,y}\, v_{\alpha} \tag{3.35ข}$$

แทนสมการ (3.34ก-ค) และ (3.35ก-ข) ลงในสมการ (3.33ก-ค) ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมและสมการเชิงอนุรักษ์มวลซึ่งอยู่ในรูปเมตริกซ์ต่างๆ โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma^x}\, u_{\beta}\, u_{\gamma} + K_{\alpha\beta\gamma^y}\, v_{\beta}\, v_{\gamma} - H_{\alpha\mu^x}\, p_{\mu} + S_{\alpha\beta^{xx}}\, u_{\beta} + S_{\alpha\beta^{xy}}\, v_{\beta} \\ = \quad Q_{\alpha^x} \tag{3.36ก}$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x}\, u_{\beta}\, v_{\gamma} + K_{\alpha\beta\gamma^y}\, v_{\beta}\, v_{\gamma} - H_{\alpha\mu^y}\, p_{\mu} + S_{\alpha\beta^{yx}}\, u_{\beta} + S_{\alpha\beta^{yy}}\, v_{\beta} \\ = \quad Q_{\alpha^y} + B_{\alpha^y} \tag{3.36ข}$$

$$H_{\beta\mu^x}\, u_{\beta} + H_{\beta\mu^y}\, v_{\beta} \quad = \quad 0 \tag{3.36ค}$$

โดย

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} \quad = \quad \int_A N_{\alpha}\, N_{\beta}\, N_{\gamma,x}\; dA \tag{3.37ก}$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} \quad = \quad \int_A N_{\alpha}\, N_{\beta}\, N_{\gamma,y}\; dA \tag{3.37ข}$$

$$H_{\alpha\mu^x} \quad = \quad \frac{1}{\rho}\int_A N_{\alpha,x}\, H_{\mu}\; dA \tag{3.37ค}$$

$$H_{\alpha\mu}{}^{y} = \frac{1}{\rho}\int_A N_{\alpha,y}\, H_\mu \; dA \tag{3.37ง}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{xx} = 2\nu \int_A N_{\alpha,x}\, N_{\beta,x}\; dA + \nu \int_A N_{\alpha,y}\, N_{\beta,y}\; dA \tag{3.37จ}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{xy} = \nu \int_A N_{\alpha,y}\, N_{\beta,x}\; dA \tag{3.37ฉ}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{yx} = \nu \int_A N_{\alpha,x}\, N_{\beta,y}\; dA \tag{3.37ช}$$

$$S_{\alpha\beta}{}^{yy} = \nu \int_A N_{\alpha,x}\, N_{\beta,x}\; dA + 2\nu \int_A N_{\alpha,y}\, N_{\beta,y}\; dA \tag{3.37ซ}$$

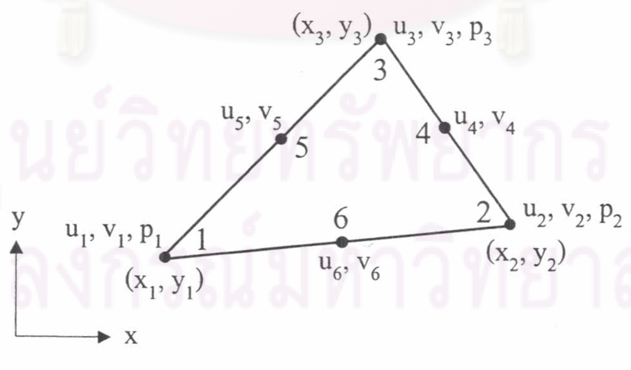
$$Q_{\alpha}{}^{x} = \frac{1}{\rho}\int_S N_\alpha\, T_x\; dS \tag{3.37ฌ}$$

$$Q_{\alpha}{}^{y} = \frac{1}{\rho}\int_S N_\alpha\, T_y\; dS \tag{3.37ญ}$$

$$B_{\alpha}{}^{y} = g_y \int_A N_\alpha\; dA \tag{3.37ฎ}$$

3.7 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิติ

ในการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมนั้น ขั้นแรกจะต้องทำการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย โดยในการวิเคราะห์การไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อยใน 2 มิตินั้นจะใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ [11, 12] ดังแสดงในรูป 3.7



รูปที่ 3.7 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อสำหรับการไหลแบบหนืดโดยรวมความเฉื่อย

จะประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าความเร็ว u และ v ที่ทั้งหกจุดต่อ โดยสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเทนเซอร์ ดังนี้

$$u = u(x, y) = N_\alpha u_\alpha ; \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad (3.38ก)$$

$$v = v(x, y) = N_\alpha v_\alpha ; \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad (3.38ข)$$

และ N_α แทนฟังก์ชันการประมาณภายในซึ่งขึ้นอยู่กับฟังก์ชันโคออร์ดิเนตพื้นที่ L_1, L_2, L_3 ดังนี้ [10]

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1^2 - L_1(L_2 + L_3) \quad ; \quad N_4 = 4L_2 L_3 \\ N_2 &= L_2^2 - L_2(L_3 + L_1) \quad ; \quad N_5 = 4L_3 L_1 \\ N_3 &= L_3^2 - L_3(L_1 + L_2) \quad ; \quad N_6 = 4L_1 L_2 \end{aligned} \qquad (3.39)$$

โดยฟังก์ชันโคออร์ดิเนตพื้นที่ L_1, L_2, L_3 เหล่านี้เป็นฟังก์ชันของโคออร์ดิเนต x, y และค่าคงที่ต่าง ๆ ดังนี้

$$L_i = L_i(x, y) = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (3.40)$$

โดย A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์และ a_i, b_i, c_i ; i = 1, 2, 3 ขึ้นอยู่กับโคออร์ดิเนตของจุดต่อที่มุมทั้งสามของเอลิเมนต์

ส่วนตัวไม่ทราบค่าความดัน p ที่ 3 จุดต่อที่มุมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ดังนี้

$$p = p(x, y) = H_\eta p_\eta \quad ; \quad \eta = 1, 2, 3 \qquad (3.41)$$

โดย H_η แทนฟังก์ชันการประมาณภายในซึ่งคือฟังก์ชันโคออร์ดิเนตพื้นที่

$$H_1 = L_1 \quad ; \quad H_2 = L_2 \quad ; \quad H_3 = L_3 \qquad (3.42)$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ N_i, i = 1, 6 สามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\underset{(1x6)}{\lfloor N \rfloor} = \underset{(1x6)}{\lfloor R \rfloor} \underset{(6x6)}{\left[A \right]} \qquad (3.43)$$

หรือ $$\underset{(6x1)}{\{N\}} = (\underset{(1x6)}{\lfloor R \rfloor}\underset{(6x6)}{[A]})^T = \underset{(6x6)}{[A]^T}\underset{(6x1)}{\lfloor R \rfloor^T} = \underset{(6x6)}{[A]^T}\underset{(6x1)}{\{R\}} \tag{3.44}$$

โดย $$\underset{(6x6)}{[A]^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

และ $$\underset{(6x1)}{\{R\}} = \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2L_3 \\ L_3L_1 \\ L_1L_2 \end{Bmatrix} \tag{3.46}$$

หรือในรูปแบบของเทนเซอร์

$$N_\alpha = A_{\alpha\xi} R_\xi \tag{3.47}$$

โดย $\alpha, \xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ จากนั้นค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในแนวแกน x สามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\underset{(6x1)}{\{N\}} = \frac{\partial}{\partial x}\left([A]^T\{R\}\right) = [A]^T\frac{\partial}{\partial x}\{R\}$$

$$= [A]^T \frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2L_3 \\ L_3L_1 \\ L_1L_2 \end{Bmatrix} = [A]^T \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{(6x6)}{\left[A\right]^T} \underset{(6x3)}{\left[B\right]^T} \underset{(3x1)}{\left\{H\right\}} \tag{3.48}$$

หรือในรูปแบบของเทนเซอร์

$$N_{\alpha,x} \quad = \quad A_{\alpha\xi}\, B_{\xi\eta}\, H_{\eta} \tag{3.49}$$

โดย $\eta = 1, 2, 3$ ในทำนองเดียวกัน ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในแนวแกน y สามารถหาได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial y} \underset{(6x1)}{\left\{N\right\}} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\left[A\right]^T \left\{R\right\}\right) \quad = \quad \left[A\right]^T \frac{\partial}{\partial y}\left\{R\right\}$$

$$= \left[A\right]^T \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2L_3 \\ L_3L_1 \\ L_1L_2 \end{Bmatrix} \quad = \left[A\right]^T \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{(6x6)}{\left[A\right]^T} \underset{(6x3)}{\left[C\right]^T} \underset{(3x1)}{\left\{H\right\}} \tag{3.50}$$

หรือในรูปแบบของเทนเซอร์

$$N_{\alpha,y} \quad = \quad A_{\alpha\xi}\, C_{\xi\eta}\, H_{\eta} \tag{3.51}$$

เมื่อทราบค่าฟังก์ชันการประมาณภายในและค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันนี้ทั้งในแนวแกน x และ y ดังแสดงในสมการ (3.44) – (3.51) ในรูปแบบของเมตริกซ์และเทนเซอร์แล้ว เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ ดังแสดงในสมการ (3.37ก-ฎ) จึงสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ดังต่อไปนี้

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2\nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} \, dA + \nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} \, dA$$

$$= 2\nu \int_A A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_\eta A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} H_\mu \, dA$$

$$+ \nu \int_A A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} H_\eta A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} H_\mu \, dA$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2\nu M_{\alpha\beta^{xx}} + \nu M_{\alpha\beta^{yy}} \quad (3.52ก)$$

โดย $\beta, \lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\mu = 1, 2, 3$ ดังนั้น

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = \nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,x} \, dA = \nu M_{\alpha\beta^{xy}} \quad (3.52ข)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} \, dA = \nu M_{\alpha\beta^{yx}} \quad (3.52ค)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} \, dA + 2\nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} \, dA$$

$$= \nu M_{\alpha\beta^{xx}} + 2\nu M_{\alpha\beta^{yy}} \quad (3.52ง)$$

ในที่นี้ จากสมการ (3.52ก)

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = \int_A A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_\eta A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} H_\mu \, dA$$

$$= A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA$$

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \quad (3.53ก)$$

ดังนั้น ในทำนองเดียวกัน

$$M_{\alpha\beta^{xy}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \quad (3.53ข)$$

$$M_{\alpha\beta^{yx}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \quad (3.53ค)$$

$$M_{\alpha\beta^{yy}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \quad (3.53ง)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\eta, \mu = 1, 2, 3$

เมื่อเมตริกซ์ $G_{\eta\mu}$ คือ

$$\underset{(3x3)}{\left[G\right]} = \int_A \underset{(3x1)}{\left\{H\right\}} \underset{(1x3)}{\lfloor H \rfloor} dA = \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1L_2 & L_1L_3 \\ L_1L_2 & L_2^2 & L_2L_3 \\ L_1L_3 & L_2L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} dA$$

$$= \frac{A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} H_{\alpha\mu^x} &= \frac{1}{\rho}\int_A N_{\alpha,x} H_\mu \, dA \\ &= \frac{1}{\rho}\int_A A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_\eta H_\mu \, dA \\ &= \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} \int_A H_\eta H_\mu \, dA \end{aligned}$$

$$H_{\alpha\mu^x} = \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} G_{\eta\mu} \tag{3.55ก}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$H_{\alpha\mu^y} = \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} G_{\eta\mu} \tag{3.55ข}$$

โดย $\alpha, \xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\eta, \mu = 1, 2, 3$

และเมตริกซ์ B_{α^y} เป็นเมตริกซ์เนื่องจากน้ำหนักตัวเอง จะได้ว่า

$$\begin{aligned} B_{\alpha^y} &= g_y \int_A N_\alpha \, dA \\ &= g_y A_{\alpha\xi} U_\xi \end{aligned} \tag{3.56ก}$$

โดย $\alpha, \xi = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ

$$U_\xi \quad = \quad \int_A R_\xi \, dA \quad = \quad \frac{2A}{24}\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{3.56ข}$$

เมตริกซ์ Q_{α^x} และ Q_{α^y} ต่างอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลตลอดขอบ S ของเอลิเมนต์ ซึ่งแปลงแรงภายนอกที่มากระทำตลอดขอบนั้นไปเป็นแรงที่จุดต่อบนขอบนั้น ยกตัวอย่างเช่น หากแรงรวม T_x ที่ขอบมีค่าเท่ากับ p ซึ่งกระทำตลอดขอบความยาว L ที่ประกอบด้วยจุดต่อ 2-4-3 ในรูปที่ 3.7 แล้ว ดังนั้น

$$Q_{\alpha^x} \quad = \quad \frac{1}{\rho}\int_S N_\alpha \, T_x \, dS \qquad\qquad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

หรือ
$$\lfloor Q_x \rfloor \quad = \quad \frac{pL}{6\rho}\lfloor 0 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \rfloor \tag{3.57}$$

เป็นต้น ในทำนองเดียวกัน เมตริกซ์ Q_{α^y} ก็สามารถคำนวณได้โดยใช้หลักการเช่นเดียวกัน อนึ่ง สำหรับขอบของเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนของการไหล เมตริกซ์ทั้งสองนี้เองแทนแรงที่ขอบของเอลิเมนต์นั้น ๆ ซึ่งแรงที่ขอบเหล่านี้จากต่างเอลิเมนต์กันจะหักล้างกันไปเองหลังจากนำเอลิเมนต์ต่างๆมาประกอบเข้าด้วยกัน ดังนั้นในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์จึงไม่ต้องทำการคำนวณหาค่าของเมตริกซ์ทั้งสองนี้ ยกเว้นปัญหาที่พิจารณานั้นมีการกำหนดแรงที่ขอบนอกของโดเมนการไหล

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta\gamma^x} \quad &= \quad \int_A N_\alpha \, N_\beta \, N_{\gamma,x} \, dA \\ &= \quad \int_A A_{\alpha\xi} \, R_\xi \, A_{\beta\lambda} \, R_\lambda \, A_{\gamma\zeta} \, B_{\zeta\mu} \, H_\mu \, dA \\ &= \quad A_{\alpha\xi} \, A_{\beta\lambda} \, A_{\gamma\zeta} \, B_{\zeta\mu} \int_A R_\xi \, R_\lambda \, H_\mu \, dA \end{aligned}$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} \quad = \quad A_{\alpha\xi} \, A_{\beta\lambda} \, A_{\gamma\zeta} \, B_{\zeta\mu} \, F_{\xi\lambda\mu} \tag{3.58}$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \lambda, \gamma, \zeta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\mu = 1, 2, 3$ เมตริกซ์ $F_{\xi\lambda\mu}$ ในสมการ (3.58) นี้อยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ A ของเอลิเมนต์ซึ่งคือ

$$F_{\xi\lambda\mu} \quad = \quad \int_A R_\xi \, R_\lambda \, H_\mu \, dA \tag{3.59}$$

ซึ่งสามารถประดิษฐ์ขึ้นให้อยู่ในรูปแบบปิดได้เนื่องจาก

$$R_\xi \, R_\lambda \quad = \quad \begin{bmatrix} L_1^4 & L_1^2L_2^2 & L_1^2L_3^2 & L_1^2L_2L_3 & L_1^3L_3 & L_1^3L_2 \\ L_1^2L_2^2 & L_2^4 & L_2^2L_3^2 & L_2^3L_3 & L_1L_2^2L_3 & L_1L_2^3 \\ L_1^2L_3^2 & L_2^2L_3^2 & L_3^4 & L_2L_3^3 & L_1L_3^3 & L_1L_2L_3^2 \\ L_1^2L_2L_3 & L_2^3L_3 & L_2L_3^3 & L_2^2L_3^2 & L_1L_2L_3^2 & L_1L_2^2L_3 \\ L_1^3L_3 & L_1L_2^2L_3 & L_1L_3^3 & L_1L_2L_3^2 & L_1^2L_3^2 & L_1^2L_2L_3 \\ L_1^3L_2 & L_1L_2^3 & L_1L_2L_3^2 & L_1L_2^2L_3 & L_1^2L_2L_3 & L_1^2L_2^2 \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

ดังนั้น เมตริกซ์ $F_{\xi\lambda\mu}$ ในสมการ (3.59) เมื่อ $\mu = 1, 2, 3$ คือ

$$F_{\xi\lambda 1} \quad = \quad \frac{2A}{5040} \begin{bmatrix} 120 & 12 & 12 & 6 & 24 & 24 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} \tag{3.61ก}$$

$$F_{\xi\lambda 2} \quad = \quad \frac{2A}{5040} \begin{bmatrix} 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \\ 12 & 120 & 12 & 24 & 6 & 24 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \end{bmatrix} \tag{3.61ข}$$

$$F_{\xi\lambda 3} \quad = \quad \frac{2A}{5040}\begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 120 & 24 & 24 & 6 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad (3.61ค)$$

ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง และ

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} \quad = \quad \int_A N_\alpha \, N_\beta \, N_{\gamma,y} \, dA$$

$$= \quad A_{\alpha\xi} \, A_{\beta\lambda} \, A_{\gamma\zeta} \, C_{\zeta\mu} \, F_{\xi\lambda\mu} \qquad (3.62)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \lambda, \gamma, \zeta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ และ $\mu = 1, 2, 3$ เช่นกัน

เนื่องจากเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมานั้นจะอยู่ในระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นจึงจำเป็นต้องประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำเข้าสู่ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ก่อนทำการแก้เพื่อหาผลลัพธ์ ระเบียบวิธีการทำซ้ำนี้คือ ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.8 การประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน

ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.36ก-ค) นั้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่ารวม 15 ตัว คือ ความเร็ว u และ v ที่จุดต่ออย่างละ 6 ตัว และความดัน p ที่จุดต่อมุมของเอลิเมนต์อีก 3 ตัว ระบบสมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปอันประกอบด้วย n สมการ ดังนี้

$$\underset{(nxn)}{\left[K(x)\right]} \underset{(nx1)}{\left\{X\right\}} \quad = \quad \underset{(nx1)}{\left\{R\right\}} \qquad (3.63)$$

โดย $\{X\}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่า x_i , $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ ที่ต้องการหา $\left[K(x)\right]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด (nxn) ซึ่งบรรจุตัวไม่รู้ค่า x_i อยู่ด้วย และ $\{R\}$ เป็นเวกเตอร์ที่รู้ค่า ซึ่งหากตัวไม่รู้ค่า x_i ต่าง ๆ นั้นไม่ใช่ค่าที่ถูกต้องแล้ว จะก่อให้เกิดเศษตกค้าง F_i ของสมการที่ i^{th} นั้น ดังนี้

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)\, x_j - R_i \tag{3.64}$$

ค่าของฟังก์ชันเศษตกค้าง F_i นี้ที่ $\{x + \Delta x\}$ อาจประมาณได้โดยพิจารณาถึงพจน์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) ได้ดังนี้

$$F_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \quad = \quad F_i(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, ..., x_n)\, \Delta x_j \tag{3.65}$$

เมื่อ $\{x + \Delta x\}$ ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องของระบบสมการไม่เชิงเส้นแล้ว ค่าของฟังก์ชันเศษตกค้างจะเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (3.65) จึงกลายเป็น

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, ..., x_n)\, \Delta x_j \quad = \quad - F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.66}$$

ซึ่งเป็นระบบสมการที่ประกอบด้วย n สมการ โดยมีตัวไม่รู้ค่าคือ Δx_j, $j = 1, 2, ..., n$ จำนวน n ตัว

ดังนั้นเมื่อประยุกต์ระเบียบการทำซ้ำนิวตัน-ราฟสันเข้ากับระบบสมการนาเวียร์สโตกส์ ค่าเศษตกค้างของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ

$$\begin{aligned} F_{\alpha^x} &= K_{\alpha\beta\gamma^x}\, u_\beta\, u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y}\, v_\beta\, v_\gamma - H_{\alpha\mu^x}\, p_\mu \\ &\quad + S_{\alpha\beta^{xx}}\, u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}}\, v_\beta - Q_{\alpha^x} && \text{(3.67ก)} \\ F_{\alpha^y} &= K_{\alpha\beta\gamma^y}\, u_\beta\, u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y}\, v_\beta\, v_\gamma - H_{\alpha\mu^y}\, p_\mu \\ &\quad + S_{\alpha\beta^{yx}}\, u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}}\, v_\beta - Q_{\alpha^y} - B_{\alpha^y} && \text{(3.67ข)} \\ F_\mu &= H_{\beta\mu^x}\, u_\beta + H_{\beta\mu^y}\, v_\beta && \text{(3.67ค)} \end{aligned}$$

และก่อให้เกิดระบบสมการเพื่อใช้หาค่าที่เปลี่ยนแปลงไปของตัวไม่รู้ค่า ดังนี้

$$
\begin{bmatrix}
\underset{(6x6)}{G_{\alpha\beta^x}} & \underset{(6x6)}{L_{\alpha\beta^y}} & \underset{(6x3)}{-H_{\alpha\mu^x}} \\
\underset{(6x6)}{L_{\alpha\beta^x}} & \underset{(6x6)}{G_{\alpha\beta^y}} & \underset{(6x3)}{-H_{\alpha\mu^y}} \\
\underset{(3x6)}{H_{\beta\mu^x}} & \underset{(3x6)}{H_{\beta\mu^y}} & \underset{(3x3)}{0}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\underset{(6x1)}{\Delta u_\beta} \\
\underset{(6x1)}{\Delta v_\beta} \\
\underset{(3x1)}{\Delta p_\mu}
\end{Bmatrix}
= -
\begin{Bmatrix}
\underset{(6x1)}{F_{\alpha^x}} \\
\underset{(6x1)}{F_{\alpha^y}} \\
\underset{(3x1)}{F_\mu}
\end{Bmatrix}
\tag{3.68}
$$

โดย

$$G_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \tag{3.69ก}$$

$$G_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^y} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^x} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \tag{3.69ข}$$

$$L_{\alpha\beta^x} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \tag{3.69ค}$$

$$L_{\alpha\beta^y} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \tag{3.69ง}$$

จากนั้นประกอบรวมเข้าทุกเอลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบสมการใหญ่และประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานั้นที่กำหนดมาให้เพื่อหาค่า Δu, Δv และ Δp ที่จุดต่อต่างๆ ค่าการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นนี้นำไปรวมเข้ากับค่าก่อนหน้านั้นก่อให้เกิดเป็นค่าของผลลัพธ์ใหม่ดังนี้

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta u_i^{k+1} \tag{3.70ก}$$

$$v_i^{k+1} = v_i^k + \Delta v_i^{k+1} \tag{3.70ข}$$

$$p_i^{k+1} = p_i^k + \Delta p_i^{k+1} \tag{3.70ค}$$

โดย k แทนการทำซ้ำครั้งที่ k^{th} กระบวนการทำซ้ำในลักษณะเช่นนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อค่าการเปลี่ยนแปลงของ Δu, Δv และ Δp ของทุกๆจุดต่อนั้นเข้าใกล้ศูนย์ ในทางปฏิบัติ ค่าการเปลี่ยนแปลงนี้อาจคิดเป็นค่าการเปลี่ยนแปลงรวม (overall error) ของทุกๆจุดต่อทั้งระบบ เช่น

$$\text{overall error} = \frac{\text{error}}{\text{sum}} \times 100\% \tag{3.71}$$

โดย

$$\text{error} = \sum_{i=1}^{\text{NPOIV}} (\Delta u_i + \Delta v_i) + \sum_{j=1}^{\text{NPOIP}} (\Delta p_j) \tag{3.72ก}$$

$$\text{sum} = \sum_{i=1}^{\text{NPOIV}} (u_i + v_i) + \sum_{j=1}^{\text{NPOIP}} (p_j) \tag{3.72ข}$$

ซึ่ง NPOIV และ NPOIP แทนจำนวนจุดต่อของความเร็วและความดันทั้งหมดในโดเมนของการไหล