บทที่ 2
แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

2.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

ในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ ปัญหาเหล่านั้นจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Partial Differential Equation) และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมา (Boundary Condition) ค่าผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ของปัญหา ดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าของตัวแปรต่าง ๆ กันตามตำแหน่งต่าง ๆ บนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าผลเฉลยแม่นตรงจะประกอบด้วยค่าต่าง ๆ ทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ค่า แทนที่จะทำการหาค่าแม่นตรงที่ประกอบด้วยค่าต่าง ๆ จำนวนมากมายเช่นนี้ ซึ่งสำหรับปัญหาในทางปฏิบัติจะทำไม่ได้ จึงก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณวิธีใหม่ที่เรียกว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Zienkiewicz, 1977; Reddy, 1985; Bathe, 1996) โดยจะทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่มีจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณที่มีจำนวนที่นับได้ (Finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาโดยใช้โครงข่ายของชิ้นส่วน ที่มีขนาดต่าง ๆ กัน

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้ทำการปรับปรุง และพัฒนาวิธีการประยุกต์ใช้งาน ต่อเนื่องมาจากวิทยานิพนธ์ของ นาย ดำรงฤทธิ์ พรหมณีวัฒน์ โดยจะอาศัยหลักการที่มีอยู่เดิม ประกอบกับการปรับปรุงขั้นตอนบางอย่างขึ้นใหม่ และเพิ่มเติมเนื้อหาในหลายส่วน เพื่อให้สามารถทำการวิเคราะห์ปัญหาการแทรกของวัตถุในดินได้ครอบคลุมมากยิ่งขึ้น สำหรับรายละเอียดต่าง ๆ จะกล่าวถึงในลำดับต่อไป

หลักการทั่ว ๆ ไปสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ ทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ โดยที่ผลเฉลยของแต่ละชิ้นส่วนนั้น จำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมา จุดที่ชิ้นส่วนเหล่านี้มาบรรจบกัน เรียกว่า จุดต่อ (Node) โดยที่จุดต่อจะเป็นตำแหน่งของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของปัญหา

สำหรับสมการแสดงความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถแสดงได้ดังนี้ คือ

(1) Equilibrium Equation คือ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง แรงภายนอก $\{F\}$ และความเค้นของชิ้นส่วน $\{\sigma\}$ ดังสมการ

$$\{F\} = [A]\{\sigma\} \qquad \text{..... (2.1)}$$

(2) Constitutive Equation คือ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความเค้น $\{\sigma\}$ และความเครียด $\{\varepsilon\}$ ณ บริเวณจุดที่ต้องการพิจารณา ดังสมการ

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad \text{..... (2.2)}$$

(3) Compatibility Equation คือ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความเครียดบริเวณจุดที่ต้องการพิจารณา $\{\varepsilon\}$ และเวกเตอร์ของการเคลื่อนตัวที่บริเวณจุดต่อของชิ้นส่วน $\{U\}$ ดังสมการ

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \quad \text{..... (2.3)}$$

จากความสัมพันธ์ของสมการทั้งสามดังกล่าว จะสามารถแสดงสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดังนี้ คือ

$$\{F\} = ([A][C][B])\{U\} \text{ หรือ } \{F\} = [K]\{U\} \quad \text{..... (2.4)}$$

โดยที่ $[K]$ คือ เมทริกแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอก $\{F\}$ และเวกเตอร์ของการเคลื่อนตัวที่บริเวณจุดต่อของชิ้นส่วน $\{U\}$

รูปที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ถ้าทราบค่าพิกัดต่าง ๆ บริเวณจุดต่อและตำแหน่งของเอลิเมนต์ย่อย ก็จะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างค่าการเคลื่อนตัวของชิ้นส่วนและแรงกระทำที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนนั้นได้ โดยทั่วไปความสัมพันธ์จะเขียนอยู่ในรูปของเมทริก เมื่อทราบค่าการเคลื่อนตัวที่จุดต่อต่างๆก็จะสามารถหาค่าของความเครียดได้จากสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว และในทำนองเดียวกันก็จะสามารถหาค่าความเค้นจากสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดได้ตามลำดับ

2.2 การสร้างโครงข่ายของชิ้นส่วนโดยระเบียบวิธีอัตโนมัติ

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้ภาษาคอมพิวเตอร์ฟอร์แทน (Fortran) ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมเทคนิคธรณี โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และทำการสร้างโครงข่ายของชิ้นส่วนโดยวิธีอัตโนมัติ ซึ่งเป็นการแบ่งโครงสร้างของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ภายในขอบเขตของปัญหาที่ได้กำหนดไว้ และง่ายต่อการควบคุมความหนาแน่นของโครงข่ายของเอลิเมนต์ และจะได้รูปร่างของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อีกด้วย (Ho-Le, 1988)

โดยขั้นตอนสำหรับการสร้างโครงข่ายของชิ้นส่วนโดยระเบียบวิธีอัตโนมัติมีดังต่อไปนี้

1. กำหนดพิกัดขอบเขตรูปร่างของปัญหาที่จะนำมาวิเคราะห์
2. กำหนดจุดต่อที่บริเวณขอบเขตของปัญหา โดยอาศัยฟังก์ชันความหนาแน่นของชิ้นส่วน (Mesh Density Function) หรืออาศัยการกำหนดจุดต่อโดยสมการอนุกรมเรขาคณิต (Geometric Sequence Equation)
3. คำนวณค่าความหนาแน่นของโครงข่ายชิ้นส่วนได้ตามที่ต้องการ และทำการเพิ่มจุดต่อภายในขอบเขตของปัญหา โดยอาศัยฟังก์ชันความหนาแน่นของชิ้นส่วน (Mesh Density Function)
4. สร้างโครงข่ายของชิ้นส่วน โดยเชื่อมจุดต่อ (Node) ต่าง ๆ ให้เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสามจุดต่อ โดยวิธี Delaunay Triangulation
5. ปรับปรุงรูปร่างของชิ้นส่วนให้ได้ขนาดที่เหมาะสม โดยวิธี Mesh Smoothing
6. เพิ่มระดับขั้นความเสรีของชิ้นส่วน (Transformation) จากชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสามจุดต่อเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมหกจุดต่อ หรือชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสิบห้าจุดต่อ
7. แสดงผลของหมายเลข และพิกัดของจุดต่อ เพื่อที่จะนำไปวิเคราะห์ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

2.2.1 **โครงข่ายของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม** (Delaunay Triangulation)

ในการดำเนินงานวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการเลือกใช้ วิธีการสร้างโครงข่ายสามเหลี่ยมเดอลอเน (Delaunay Triangulation) ในการสร้างโครงข่ายของชิ้นส่วนแบบไร้โครงสร้าง (Unstructured Mesh) เป็นการแบ่งโครงสร้างของปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ โดยการเชื่อมจุดต่อต่าง ๆ ภายในขอบเขตของปัญหา ให้เป็นชิ้นส่วนที่มีรูปร่างสามเหลี่ยมสามจุดต่อ และมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา โดยที่จุดต่อภายในขอบเขตของปัญหา จะถูกกำหนดและควบคุม โดยสมการของ Mesh Density Function และ Mesh Smoothing และโปรแกรมจะเชื่อมจุดต่อต่าง ๆ อย่างอิสระภายใต้เงื่อนไขของ Delaunay Triangulation ที่ได้ถูกกำหนดไว้ (Sloan, 1987, 1993)

ข้อดีในการใช้โครงข่ายสามเหลี่ยมเดอลอเน คือโปรแกรมจะพยายามเชื่อมจุดต่อของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสามจุดต่อโดยอัตโนมัติ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าด้วยขนาดของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมจะมีรูปร่างที่ไม่เป็นมุมป้านหรือมุมแหลมมากจนเกินไป ดังรูปที่ 2.2 และส่วนประกอบของสามเหลี่ยมเดอลอเนแสดงไว้ ดังรูปที่ 2.3

2.2.2 **สมการอนุกรมเรขาคณิต** (Geometric Sequence Equation)

การกำหนดจุดต่อที่บริเวณขอบเขตของปัญหา เป็นอีกขั้นตอนหนึ่งที่มีความสำคัญ โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้นำเสนอแนวทางไว้ 2 แนวทางด้วยกัน คือ การกำหนดจุดต่อโดยอาศัยฟังก์ชันความหนาแน่น และการกำหนดจุดต่อโดยสมการอนุกรมเรขาคณิต

หลักการของสมการอนุกรมเรขาคณิต คือ ทำการกระจายตำแหน่งจุดต่อบนแนวเส้นขอบเขตของปัญหาระหว่างจุดต่อสองจุดใด ๆ ในรูปแบบของสมการอนุกรมเรขาคณิต โดยกำหนดให้มีค่า Characteristic Length เป็นตัวแปรสำคัญในการกำหนดระยะห่างระหว่างจุดต่อแต่ละจุด สำหรับจำนวนจุดต่อทั้งหมด, N ที่จะทำการกระจายบนแนวเส้นขอบเขต สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$N = \frac{\ln(c_n.Z/c_1)}{\ln(Z)} \qquad \text{..... (2.5)}$$

เมื่อ $$Z = 2.(c_n - c_1) + \frac{\sqrt{(2c_n - 2c_1)^2 + 4L^2}}{2L} \qquad \text{..... (2.6)}$$

โดยที่ c_1 คือ ค่า Characteristic Length ที่ตำแหน่งจุดต่อที่ 1

c_n คือ ค่า Characteristic Length ที่ตำแหน่งจุดต่อที่ n

L คือ ระยะห่างระหว่างจุดต่อที่ 1 และจุดต่อที่ n

และสามารถคำนวณค่าอัตราส่วนเรขาคณิต (Geometric Ratio , r) ได้จากสมการดังนี้

$$r = \left(\frac{c_n}{c_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \qquad \text{..... (2.7)}$$

จากค่าอัตราส่วนเรขาคณิต สามารถคำนวณระยะห่างระหว่างจุดต่อที่ i และ $(i+1)$ ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$d_i = \frac{2c_1.r}{(1+r)} * r^{(i-1)} \qquad \text{..... (2.8)}$$

โดยที่ d_i คือ ระยะห่างระหว่างจุดต่อที่ i และ $(i+1)$

2.2.3 **ฟังก์ชันความหนาแน่นของชิ้นส่วน** (Mesh Density Function)

การที่จะได้ผลการวิเคราะห์รวดเร็วที่สุดและถูกต้องแม่นตรงสำหรับการคำนวณด้วย ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 2.4 จะต้องมีการควบคุมความหนาแน่นของโครงข่ายของชิ้นส่วน (Hu

and Randolph, 1998a) ซึ่งจะพบว่า ณ บริเวณขอบเขตใดที่มีผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือหน่วยแรงในชิ้นส่วนที่มีความแปรผันหรือมีค่าสูง ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องมีความหนาแน่นของโครงข่ายของชิ้นส่วน ณ บริเวณขอบเขตนั้นสูง และ ณ บริเวณขอบเขตใดที่มีผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง หรือหน่วยแรงในชิ้นส่วนที่มีความแปรผันหรือมีค่าน้อย บริเวณนั้นก็จะมีความหนาแน่นของโครงข่ายของชิ้นส่วนน้อยลงตามลำดับ ฟังก์ชันความหนาแน่นของชิ้นส่วนซึ่งเสนอโดย Hu and Randolph (1998a) แสดงไว้ดังสมการต่อไปนี้

$$f_d = Ae^{Bd} \qquad \text{..... (2.9)}$$

โดยที่ f_d คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นของชิ้นส่วน

d คือ ระยะทางจากพิกัดอ้างอิง (x_0, y_0) ถึงพิกัดที่พิจารณา

A และ B คือ ค่าคงที่

และ

$$B = \frac{\log(F_2 / F_1)}{(D_2 - D_1)} \qquad \text{..... (2.10)}$$

$$A = \frac{F_1}{e^{(B*D_1)}} \qquad \text{..... (2.11)}$$

โดยที่ F_1 และ F_2 คือ ค่าฟังก์ชันความหนาแน่นของชิ้นส่วน ณ ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

D_1 และ D_2 คือ ระยะทางจากพิกัดอ้างอิง (x_0, y_0) ถึงพิกัดที่พิจารณา ณ ตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

2.2.4 **การปรับปรุงรูปร่างของชิ้นส่วน** (Mesh Smoothing)

การปรับปรุงรูปร่างของชิ้นส่วนเพื่อให้ได้ขนาดที่เหมาะสมในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ บ่อยครั้งในการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมโดยวิธีอัตโนมัติ ที่ใช้ Delaunay Triangulation เชื่อมจุดต่อ (Node) ของโครงข่ายของชิ้นส่วน แต่ก็ยังคงได้รูปร่างของชิ้นส่วนที่ไม่เหมาะสมในการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในกรณีนี้จะต้องมีการปรับปรุงรูปร่างของชิ้นส่วนให้มีรูปร่างที่เหมาะสมโดยใช้วิธี Laplacian Smoothing ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมมากในการปรับปรุงรูปร่างของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม (Herman, 1976; Hu and Randolph, 1998a)

หลักการของ Laplacian Smoothing คือ พยายามปรับปรุงตำแหน่งของจุดต่ออ้างอิงให้อยู่ในตำแหน่งจุดศูนย์กลางของจุดต่อที่อยู่ล้อมรอบจุดอ้างอิงดังสมการต่อไปนี้

$$x_i = \frac{1}{2N_i}\sum_{n=1}^{N_i}\left(x_{nj} + x_{nk}\right) \;;\; i = 1 \rightarrow I \qquad \text{..... (2.12)}$$

$$y_i = \frac{1}{2N_i}\sum_{n=1}^{N_i}\left(y_{nj} + y_{nk}\right) \;;\; i = 1 \rightarrow I \qquad \text{..... (2.13)}$$

โดยที่ x_i, y_i คือ พิกัดของจุดต่ออ้างอิง i ที่มีการปรับปรุงพิกัดโดยวิธี Laplacian Smoothing

N_i คือ จำนวนของชิ้นส่วนทั้งหมดรอบจุดต่ออ้างอิง i ที่จะปรับปรุงพิกัด

I คือ จำนวนจุดต่อทั้งหมดภายในขอบเขตโครงสร้างของปัญหา

nk, nj คือ จุดต่อที่อยู่ล้อมรอบ จุดอ้างอิง i หรือจุดต่อข้างเคียงของชิ้นส่วน n

รูปที่ 2.5 แสดงพิกัดของจุดต่อ i และพิกัดข้างเคียง และรูปที่ 2.6 แสดงผลของการปรับปรุงรูปร่างของโครงข่ายของชิ้นส่วน

2.3 แบบจำลองไอโซพาราเมทริกสำหรับชิ้นส่วนสามเหลี่ยม

หลักการสำคัญของวิธีไอโซพาราเมทริก คือ การกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างค่าพิกัด หรือค่าการกระจัดของชิ้นส่วนที่ตำแหน่งใด ๆ และ ค่าพิกัดหรือค่าการกระจัดของชิ้นส่วนที่ตำแหน่งจุดต่อโดยอาศัยฟังก์ชันการประมาณภายใน (Interpolation Function) การหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่าง ๆ ด้วยวิธีไอโซพาราเมทริกจะใช้ค่าพิกัดธรรมชาติ (L_1 , L_2 , L_3) เป็นตัวกำหนดพิกัดของจุดต่อและจุดเกาส์ของชิ้นส่วน ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับพิกัดรวม หรือพิกัดจริง (x , y) ของชิ้นส่วน

ค่าพิกัด (x , y) และค่าการกระจัด (U) ของชิ้นส่วน ซึ่งคำนวณโดยใช้หลักการของวิธีไอโซพาราเมทริก สามารถแสดงไว้ดังนี้

$$x = \sum_{i=1}^{n} N_i\, x_i \quad \text{และ} \quad y = \sum_{i=1}^{n} N_i\, y_i \qquad \text{..... (2.14)}$$

$$U = \sum_{i=1}^{n} N_i\, U_i \qquad \text{..... (2.15)}$$

โดยที่ x_i , y_i คือ ค่าพิกัดที่ตำแหน่งจุดต่อของชิ้นส่วน

U_i คือ ค่าการกระจัดที่ตำแหน่งจุดต่อของชิ้นส่วน

N_i คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วน

n คือ จำนวนจุดต่อในแต่ละชิ้นส่วน (6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อ)

ในวิทยานิพนธ์นี้ ทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้โครงข่ายของชิ้นส่วน 6 จุดต่อ และโครงข่ายของชิ้นส่วน 15 จุดต่อ ซึ่งรายละเอียดต่าง ๆ แสดงไว้ดังนี้

2.3.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมหกจุดต่อ

สำหรับโครงข่ายของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมหกจุดต่อ กำหนดให้ทิศทางของจุดต่อเรียงทวนเข็มนาฬิกา และสามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ N ได้ดังนี้

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \qquad N_2 = 4L_1L_2$$

$$N_3 = L_2(2L_2 - 1) \qquad N_4 = 4L_2L_3$$

$$N_5 = L_3(2L_3 - 1) \qquad N_6 = 4L_3L_1 \qquad \text{..... (2.16)}$$

โดยที่ L_1, L_2, L_3 คือ ค่าพิกัดธรรมชาติ (Natural Coordinates) ของชิ้นส่วน มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 และ $L_1 + L_2 + L_3 = 1$

เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายใน N สำหรับชิ้นส่วนสามเหลี่ยมหกจุดต่อ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง ดังนั้นจึงเรียกชิ้นส่วนของสามเหลี่ยมชนิดนี้ว่า ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมกำลังสอง

กำหนดให้มีจุดเกาส์ในแต่ละชิ้นส่วนจำนวน 6 จุดเกาส์ โดยค่าพิกัดธรรมชาติ (L_1, L_2, L_3) และค่าตัวคูณถ่วงน้ำหนัก ($Weight_i$) ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ในแต่ละชิ้นส่วน แสดงไว้ดังต่อไปนี้

ตำแหน่งเกาส์ที่ 1 : L_1 = 0.8168475729804590 L_2 = 0.0915762135097710

ตำแหน่งเกาส์ที่ 2 : L_1 = 0.4459484909159650 L_2 = 0.4459484909159650

ตำแหน่งเกาส์ที่ 3 : L_1 = 0.0915762135097710 L_2 = 0.8168475729804590

ตำแหน่งเกาส์ที่ 4 : L_1 = 0.1081030181680700 L_2 = 0.4459484909159650

ตำแหน่งเกาส์ที่ 5 : L_1 = 0.0915762135097710 L_2 = 0.0915762135097710

ตำแหน่งเกาส์ที่ 6 : L_1 = 0.4459484909159650 L_2 = 0.1081030181680700

ค่า $Weight_i$ ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ที่ 1, 3, 5 มีค่าเท่ากับ 0.0549758718276610

ค่า $Weight_i$ ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ที่ 2, 4, 6 มีค่าเท่ากับ 0.1116907948390055

โดยที่ $Weight_i$ คือ ค่าตัวคูณถ่วงน้ำหนัก ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ของชิ้นส่วนในการหาค่าอินทิเกรทเชิงตัวเลข

2.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสิบห้าจุดต่อ

สำหรับโครงข่ายของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสิบห้าจุดต่อ กำหนดให้ทิศทางจุดต่อเรียงทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 2.7 และสามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 15 จุดต่อ N ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{32}{3} L_1(L_1-0.25)(L_1-0.5)(L_1-0.75) \\
N_2 &= \frac{128}{3} L_1L_2(L_1-0.25)(L_1-0.5) \\
N_3 &= 64L_1L_2(L_1-0.25)(L_2-0.25) \\
N_4 &= \frac{128}{3} L_1L_2(L_2-0.25)(L_2-0.5) \\
N_5 &= \frac{32}{3} L_2(L_2-0.25)(L_2-0.5)(L_2-0.75) \\
N_6 &= \frac{128}{3} L_2L_3(L_2-0.25)(L_2-0.5) \\
N_7 &= 64L_2L_3(L_2-0.25)(L_3-0.25) \\
N_8 &= \frac{128}{3} L_2L_3(L_3-0.25)(L_3-0.5) \\
N_9 &= \frac{32}{3} L_3(L_3-0.25)(L_3-0.5)(L_3-0.75) \\
N_{10} &= \frac{128}{3} L_1L_3(L_3-0.25)(L_3-0.5) \\
N_{11} &= 64L_1L_3(L_1-0.25)(L_3-0.25) \\
N_{12} &= \frac{128}{3} L_1L_3(L_1-0.25)(L_1-0.5) \\
N_{13} &= 128L_1L_2L_3(L_1-0.25) \\
N_{14} &= 128L_1L_2L_3(L_2-0.25) \\
N_{15} &= 128L_1L_2L_3(L_3-0.25) \qquad \text{..... (2.17)}
\end{aligned}
$$

โดยที่ L_1, L_2, L_3 คือ ค่าพิกัดธรรมชาติ (Natural Coordinates) ของชิ้นส่วน มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 และ $L_1 + L_2 + L_3 = 1$

เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายใน N เป็นฟังก์ชันกำลังสี่ ดังนั้นจึงเรียกชิ้นส่วนของสามเหลี่ยมชนิดนี้ว่า ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมกำลังสี่

กำหนดให้มีจุดเกาส์ในแต่ละชิ้นส่วนจำนวน 12 จุด การจัดเรียงตำแหน่งจุดเกาส์ของชิ้นส่วนเป็นดังรูปที่ 2.8 โดยค่าพิกัดธรรมชาติ (L_1, L_2, L_3) และค่าตัวคูณถ่วงน้ำหนัก ($Weight_i$) ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ในแต่ละชิ้นส่วน แสดงไว้ดังต่อไปนี้

ตำแหน่งเกาส์ที่ 1 : L_1 = 0.873821971016996 L_2 = 0.063089014491502
ตำแหน่งเกาส์ที่ 2 : L_1 = 0.063089014491502 L_2 = 0.063089014491502
ตำแหน่งเกาส์ที่ 3 : L_1 = 0.063089014491502 L_2 = 0.873821971016996
ตำแหน่งเกาส์ที่ 4 : L_1 = 0.501426509658179 L_2 = 0.249286745170910
ตำแหน่งเกาส์ที่ 5 : L_1 = 0.249286745170910 L_2 = 0.249286745170910
ตำแหน่งเกาส์ที่ 6 : L_1 = 0.249286745170910 L_2 = 0.501426509658179
ตำแหน่งเกาส์ที่ 7 : L_1 = 0.636502499121399 L_2 = 0.310352451033785
ตำแหน่งเกาส์ที่ 8 : L_1 = 0.053145049844816 L_2 = 0.636502499121399
ตำแหน่งเกาส์ที่ 9 : L_1 = 0.310352451033785 L_2 = 0.053145049844816
ตำแหน่งเกาส์ที่ 10 : L_1 = 0.310352451033785 L_2 = 0.636502499121399
ตำแหน่งเกาส์ที่ 11 : L_1 = 0.636502499121399 L_2 = 0.053145049844816
ตำแหน่งเกาส์ที่ 12 : L_1 = 0.053145049844816 L_2 = 0.310352451033785

ค่า $Weight_i$ ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ที่ 1, 2, 3 มีค่าเท่ากับ 0.0254224531851035
ค่า $Weight_i$ ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ที่ 4, 5, 6 มีค่าเท่ากับ 0.0583933786318950
ค่า $Weight_i$ ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ที่ 7 ถึง 12 มีค่าเท่ากับ 0.0414255378091870

โดยที่ $Weight_i$ คือ ค่าตัวคูณถ่วงน้ำหนัก ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ของชิ้นส่วนในการหาค่าอินทิเกรทเชิงตัวเลข

2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียด (Constitutive Equation) สำหรับวัตถุแบบ Linear Elastic

กำหนดให้ C_c (Elastic Stress-Strain Matrices) คือ ค่าของเมทริกแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของวัตถุในสภาวะยืดหยุ่น (Timoshenko and Goodier, 1951) สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาแบบสองมิติสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric Problem) สามารถหาค่า C_c จากความสัมพันธ์ของสมการ $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_z\\ \tau_{rz}\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0 & \nu\\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{rz}\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} \qquad \text{..... (2.18)}$$

และสำหรับปัญหาแบบสองมิติเคลื่อนตัวในระนาบ (Plane Strain Problem) สามารถหาค่า C_c จากความสัมพันธ์ของสมการ $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad \text{..... (2.19)}$$

โดยที่ E คือ ค่าโมดูลัสของการยืดหยุ่น (Young's modulus)

ν คือ ค่าอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio)

$\{\sigma\}$ คือ เวกเตอร์ของค่าความเค้น (Stress)

$\{\varepsilon\}$ คือ เวกเตอร์ของค่าความเครียด (Strain)

2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด และการเคลื่อนตัว (Compatibility Equation)

จากสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความเครียดบริเวณจุดที่ต้องการพิจารณา $\{\varepsilon\}$ และเวกเตอร์ของการเคลื่อนตัวที่บริเวณจุดต่อของชิ้นส่วน $\{U\}$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \qquad \text{..... (2.20)}$$

จะสามารถแสดงเมทริกการเคลื่อนตัวของวัตถุ $\{U\}$ สำหรับโครงข่ายของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อได้ดังต่อไปนี้

6 จุดต่อ : Axisymmetric Problem (12×1)

$$\{U\}^T = \{U_{1r} \;\; U_{1z} \;\; U_{2r} \;\; U_{2z} \;\; \ldots \;\; U_{6r} \;\; U_{6z}\} \qquad \ldots\ldots (2.21)$$

6 จุดต่อ : Plane Strain Problem (12×1)

$$\{U\}^T = \{U_{1x} \;\; U_{1y} \;\; U_{2x} \;\; U_{2y} \;\; \ldots \;\; U_{6x} \;\; U_{6y}\} \qquad \ldots\ldots (2.22)$$

15 จุดต่อ : Axisymmetric Problem (30×1)

$$\{U\}^T = \{U_{1r} \;\; U_{1z} \;\; U_{2r} \;\; U_{2z} \;\; \ldots \;\; U_{15r} \;\; U_{15z}\} \qquad \ldots\ldots (2.23)$$

15 จุดต่อ : Plane Strain Problem (30×1)

$$\{U\}^T = \{U_{1x} \;\; U_{1y} \;\; U_{2x} \;\; U_{2y} \;\; \ldots \;\; U_{15x} \;\; U_{15y}\} \qquad \ldots\ldots (2.24)$$

และสามารถแสดงเมทริก $[B]$ โดยอาศัยทฤษฎี Small Strain (Smith and Griffiths, 1998) สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อได้ดังนี้

สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ ทำการวิเคราะห์ปัญหาแบบสองมิติสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric Problem) สามารถแสดงค่า $[B]$ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของเมทริก ขนาด (4×12) ได้ดังนี้

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial r} & \frac{\partial N_5}{\partial z} & \frac{\partial N_5}{\partial r} & \frac{\partial N_6}{\partial z} & \frac{\partial N_6}{\partial r} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{N_4}{r} & 0 & \frac{N_5}{r} & 0 & \frac{N_6}{r} & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (2.25)$$

สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ ทำการวิเคราะห์ปัญหาแบบสองมิติเคลื่อนตัวในระนาบ (Plane Strain Ploblem) สามารถแสดงค่า $[B]$ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของเมทริก ขนาด (4×12) ได้ดังนี้

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

..... (2.26)

สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 15 จุดต่อ ทำการวิเคราะห์ปัญหาแบบสองมิติสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric Problem) สามารถแสดงค่า $[B]$ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของเมทริก ขนาด (4×30) ได้ดังนี้

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_{14}}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial N_{14}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_{14}}{\partial z} & \frac{\partial N_{14}}{\partial r} & \frac{\partial N_{15}}{\partial z} & \frac{\partial N_{15}}{\partial r} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \cdots & \cdots & \frac{N_{14}}{r} & 0 & \frac{N_{15}}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

..... (2.27)

สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 15 จุดต่อ ทำการวิเคราะห์ปัญหาแบบสองมิติเคลื่อนตัวในระนาบ (Plane Strain Ploblem) สามารถแสดงค่า $[B]$ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของเมทริก ขนาด (4×30) ได้ดังนี้

$$[B]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_{14}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\partial N_{14}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \cdots & \cdots & \frac{\partial N_{14}}{\partial y} & \frac{\partial N_{14}}{\partial x} & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

..... (2.28)

โดยที่

$$r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3 + \cdots\cdots + N_{n-1} r_{n-1} + N_n r_n \qquad \text{..... (2.29)}$$

N_i คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อ

r_i คือ พิกัดของแต่ละจุดต่อของชิ้นส่วนจากแกนฐานรากวงกลม

n คือ จำนวนจุดต่อในแต่ละชิ้นส่วน (6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อ)

2.6 Finite Element Code ที่ใช้ทำการศึกษา

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้ Finite Element Code ตามหลักเกณฑ์ของ SNAC (Soil Nonlinear Analysis Code) ซึ่งทำการศึกษาและวิจัยโดย Abbo และ Sloan (1997) โดยจะใช้หลักการของการกำหนดเงื่อนไขของจุดต่อให้มีค่าการทรุดตัวคงที่ภายใต้ฐานรองรับ และหลังจากการคำนวณในแต่ละช่วงของการเพิ่มค่าการทรุดตัว ถ้าค่าหน่วยแรงบนจุดเกาส์มีค่าเกินกว่าระนาบการวิบัติ (Yield Surface) ของวัสดุ โปรแกรมจะทำการปรับแก้ค่าของหน่วยแรงกลับเข้ามาสู่ระนาบการวิบัติ (Yield Surface) ของวัสดุได้โดยอัตโนมัติ (Abbo and Sloan, 1997)

แบบจำลองของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา จะขึ้นอยู่กับชนิดของแบบจำลองของมวลดินที่ใช้งานด้วย ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการปรับปรุงและพัฒนาต่อเนื่องมาจากวิทยานิพนธ์ของ นายดำรงฤทธิ์ พรหมณีวัฒน์ ซึ่งใช้โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ ให้สามารถวิเคราะห์โดยใช้โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 15 จุดต่อ (15–Nodes Triangular Element) และทำการศึกษาปัญหาแบบจำลองมวลดินแบบ Elasto-Plastic Material และ Critical State Material ตามกฎเกณฑ์ของ Associated Flow Rule และในการวิเคราะห์ปัญหาเชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะใช้พิกัดธรรมชาติสิบสองจุดเกาส์ (12-Gauss Points) ภายในชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 15 จุดต่อ

2.7 แบบจำลองดินที่ใช้ทำการศึกษา

สำหรับแบบจำลองดินที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วย Elastic-Perfectly Plastic Material โดยใช้กฎการวิบัติของดินแบบ Mohr-Coulomb Failure Criterion ทำการวิเคราะห์ปัญหามวลดินในสภาพไม่ระบายน้ำ (Undrained Condition) และแบบจำลองดิน Modified Cam-Clay Model รายละเอียดต่าง ๆ แสดงไว้ดังนี้

2.7.1 ค่าของหน่วยแรงที่ไม่เปลี่ยนแปลง (Stress Invariant)

ในปัญหา 2 มิติ (Plane Strain Problem) สภาวะค่าของหน่วยแรง ณ บริเวณจุดใด ๆ ของวัตถุที่ถูกแรงกระทำ สามารถแสดงค่าของหน่วยแรง (Stress Tensor) ให้อยู่ในรูปแนวแกนพิกัด Cartesian ได้ดังนี้

$$\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \qquad \ldots\ldots (2.30)$$

และสามารถแสดงให้อยู่ในรูปของค่าหน่วยแรงในแนวแกนหลัก (Principle Stress) ที่กระทำบนระนาบ Orthogonal ดังนี้

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \qquad \text{..... (2.31)}$$

การหาค่าของหน่วยแรงในแนวแกนหลัก (Principle Stress) ในจุดที่ต้องการพิจารณาจากแนวแกนพิกัด Cartesian เพื่อความสะดวกจะอาศัยหลักของความสัมพันธ์ของค่าคงที่ (Invariants) โดยที่ค่าคงที่ (σ_m, J_2, θ) มีความสัมพันธ์กับสภาวะค่าของหน่วยแรงในแนวแกนพิกัด Cartesian ดังนี้

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) \qquad \text{..... (2.32)}$$

$$s_x = \sigma_{xx} - \sigma_m \qquad \text{..... (2.33)}$$

$$s_y = \sigma_{yy} - \sigma_m \qquad \text{..... (2.34)}$$

$$s_z = \sigma_{zz} - \sigma_m \qquad \text{..... (2.35)}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 \qquad \text{..... (2.36)}$$

$$J_3 = s_x s_y s_z - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{zx}^2 - s_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \qquad \text{..... (2.37)}$$

$$\theta = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{-4.5J_3}{J_2^{3/2}\sqrt{3}}\right) \qquad \text{..... (2.38)}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) \qquad \text{..... (2.39)}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{J_2} \qquad \text{..... (2.40)}$$

ดังนั้น จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าของหน่วยแรงในแนวแกนหลัก (Principle Stress) และค่าคงที่ (Invariants) ได้ดังนี้

$$\sigma_1 = \sigma_m + \frac{2}{3}\bar{\sigma}\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{..... (2.41)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_m + \frac{2}{3}\bar{\sigma}\sin\theta \qquad \text{..... (2.42)}$$

$$\sigma_3 = \sigma_m + \frac{2}{3}\bar{\sigma}\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{..... (2.43)}$$

2.7.2 Mohr-Coulomb Failure Criterion

ขั้นตอนแรก ทำการเขียนหน่วยแรงในแนวแกนหลัก (Principal stresses) โดยอาศัยรูปร่างเรขาคณิตของ Mohr 's Circle ดังรูปที่ 2.9 ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\sin\phi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c\cos\phi = 0 \qquad \text{..... (2.44)}$$

นำค่า σ_1 และ σ_3 จากสมการที่ 2.41 และ 2.43 แทนค่าลงในสมการที่ 2.44 จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ของ Mohr-Coulomb Failure Criterion ดังนี้

$$F_{mc} = \sigma_m \sin\phi + \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}\left(\cos\theta - \frac{\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{3}}\right) - c\cos\phi \qquad \text{..... (2.45)}$$

โดยที่ c คือ ค่าความเชื่อมแน่นของดิน

σ_m คือ ค่า Mean Stress

$\bar{\sigma}$ คือ ค่า Deviator Stress

2.7.3 Incrementally Linearized Elasto Plastic Model

วิธีความเค้นเริ่มต้น คือ การหาค่าของหน่วยแรงเริ่มต้นภายในขอบเขตของปัญหา สำหรับ Linear –Elasticity มีความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้นของวัตถุเป็นไปตามสมการดังนี้

$$\Delta\sigma = D_c \Delta\varepsilon \qquad \text{..... (2.46)}$$

และสำหรับ Elastic Plasticity มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\Delta\sigma = D_{PL} \Delta\varepsilon \qquad \text{..... (2.47)}$$

เมื่อ $$D_{PL} = D_c - D_P \qquad \text{..... (2.48)}$$

สำหรับในช่วงที่ว่าด้วยกฎของวัสดุที่เป็น Perfect Plasticity สมมุติว่ามีความเค้น ณ จุดหนึ่งเข้าสู่พื้นผิววิบัติ (Failure Surface) และต่อมาจะมีการเปลี่ยนแปลงโดยเพิ่มค่าของความเค้น ณ บริเวณจุดนั้นโดยจะขยายขอบเขตของพื้นผิววิบัติ แต่ยังคงมีความสัมพันธ์ภายใต้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma}\Delta\sigma = 0 \qquad \text{..... (2.49)}$$

โดยอาศัยกฎเกณฑ์ของสมการ Associated Flow Rule ในการเพิ่มขึ้นของค่าความเครียดพลาสติก จะสามารถแสดงสมการได้ดังนี้

$$\Delta\varepsilon_P = \lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma} \qquad \text{..... (2.50)}$$

จากความสัมพันธ์ของการเพิ่มขึ้นของค่าความเครียดสามารถนำมาหาค่าของ λ ได้ดังนี้

$$\Delta\varepsilon_{PL} = \Delta\varepsilon_e + \Delta\varepsilon_P \qquad \text{..... (2.51)}$$

$$\Delta\varepsilon_{PL} = D_e^{-1}\Delta\sigma + \lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma} \qquad \text{..... (2.52)}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D_e\Delta\varepsilon_{PL} = \left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T \Delta\sigma + \lambda\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D_e\frac{\partial Q}{\partial\sigma} \qquad \text{..... (2.53)}$$

จากความสัมพันธ์ ดังสมการที่ 2.49 ดังนั้น $\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T \Delta\sigma = 0$ และจะได้ว่า

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D_e\Delta\varepsilon_{PL}}{\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D_e\frac{\partial Q}{\partial\sigma}} \qquad \text{..... (2.54)}$$

แสดงสมการของการเปลี่ยนแปลงของค่าความเค้น ที่แปรผันตามค่าตัวแปรของ D_e ได้ดังนี้

$$\Delta\sigma = D_e\left(\Delta\varepsilon_{PL} - \lambda\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right) \qquad \text{..... (2.55)}$$

แทนค่าสมการที่ 2.54 ลงในสมการที่ 2.55 จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\Delta\sigma = D_e\left(\Delta\varepsilon_{PL} - \frac{\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D_e\Delta\varepsilon_{PL}}{\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D_e\frac{\partial Q}{\partial\sigma}}\right) \qquad \text{..... (2.56)}$$

$$\Delta\sigma = \left(D_e - \frac{D_e\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D_e}{\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)^T D_e\frac{\partial Q}{\partial\sigma}}\right)\Delta\varepsilon_{PL} \qquad \text{..... (2.57)}$$

เขียนความสัมพันธ์ของ D_P ให้อยู่ในรูปสมการของ D_e ได้ดังนี้

$$D_p = \frac{D_c \frac{\partial Q}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T D_c}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T D_c \frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \qquad \text{..... (2.58)}$$

แสดงความสัมพันธ์ของค่าหน่วยแรงกระทำต่อวัตถุกับค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้นในสภาวะของการเคลื่อนตัวแบบพลาสติก สำหรับการเขียนโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$P_b^i = \sum_{elements}^{all} \int B^T \left(D_P \Delta\varepsilon\right)^i d(element) \qquad \text{..... (2.59)}$$

จากรูปที่ 2.10 ช่วงแรกวัตถุจะอยู่ในสภาวะยืดหยุ่น และจากการเพิ่มขึ้นของค่าหน่วยแรงกระทำต่อวัตถุ เป็นเหตุให้ ณ บริเวณบางแห่งของวัตถุ ได้เข้าสู่สภาวะพลาสติกเป็นครั้งแรก ดังนั้นจำเป็นที่จะต้องมีการปรับแก้ค่าหน่วยแรงภายในของวัตถุ ดังสมการ

$$D_P = fD_P \qquad \text{..... (2.60)}$$

เมื่อ $$f = \frac{F_{NEW}}{F_{NEW} - F_{OLD}} \qquad \text{..... (2.61)}$$

โดยที่ f คือ ค่าปรับแก้หน่วยแรงภายในของวัตถุ

F_{OLD} คือ ค่าของหน่วยแรงที่กระทำ ณ ช่วงเวลาปัจจุบัน

F_{NEW} คือ ค่าของหน่วยแรงที่กระทำ ณ ช่วงเวลาถัดไป

รูปที่ 2.11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ของแบบจำลอง Elastic-Perfectly Plastic Material

2.7.4 Modified Cam-Clay Model

แบบจำลอง Modified Cam-Clay จะคล้ายคลึงกับ Original Cam-Clay ต่างกันตรงรูปร่างของ Yield Function จะเป็นรูปวงรี แทนที่จะเป็นรูปหยดน้ำ ดังแสดงในรูปที่ 2.12

สำหรับ Yield Function ของแบบจำลอง Modified Cam-Clay สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ (Britto and Gunn, 1987)

$$q^2 = M^2 p' p'_c - M^2 p'^2 \qquad \text{..... (2.62)}$$

โดยที่ p'_c คือ Preconsolidation Pressure

ค่าพารามิเตอร์อื่น ๆ ที่ใช้ในแบบจำลอง Modified Cam-Clay ซึ่งประกอบด้วย M , Γ , κ , λ และ ν แสดงไว้ในรูปที่ 2.13

สำหรับขนาดของ Yield Function จะถูกกำหนดโดย Peak Mean Stress , p'_x (ค่า p' ณ เวลาที่ดินถึงสภาวะวิบัติ) ดังนั้นที่สภาวะวิบัติ จะสามารถหาค่า Shear Stress , q ได้ดังนี้

$$q = Mp'_x \qquad \text{..... (2.63)}$$

แทนค่า q ลงในสมการ (2.62) จะได้

$$p'_c = 2p'_x \qquad \text{..... (2.64)}$$

ดังนั้น Yield Function ของแบบจำลอง Modified Cam-Clay สามารถแสดงได้ดังนี้

$$F = \frac{q^2}{p'} + M^2 p' - 2M^2 p'_x \qquad \text{..... (2.65)}$$

เนื่องจากผลของ Elastic Strain , $d\varepsilon_c$ เท่านั้น ที่ทำให้ค่าความเค้นเกิดการเปลี่ยนแปลง ดังนั้น สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้น และความเครียดที่เพิ่มขึ้น (Constitutive Equation) ได้ดังนี้

$$\{d\sigma'\} = [C'_c]\{d\varepsilon_c\} = [C'_c]\left(\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_p\}\right)$$

$$= [C'_c]\left(\{d\varepsilon\} - \lambda_p \frac{\partial G}{\partial \sigma'}\right) \qquad \text{..... (2.66)}$$

โดยที่ $[C'_c]$ คือ Effective Elastic Matrix

G คือ Plastic Potential Function

λ_p คือ (Plastic) Scaling Factor

เมื่อทำการจัดให้อยู่ในรูปใหม่ จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้น และความเครียด ที่เพิ่มขึ้น ได้ดังนี้

$$\{d\sigma'\} = \left([C'_c] - [C'_p]\right)\{d\varepsilon\} \qquad \text{..... (2.67)}$$

เมื่อ $$\left[C_p'\right] = \frac{[C_c']\frac{\partial F}{\partial \sigma'}\left\langle\frac{\partial F}{\partial \sigma'}\right\rangle[C_c']}{\left\langle\frac{\partial F}{\partial \sigma'}\right\rangle[C_c']\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma'}\right\} - \frac{\partial F}{\partial p_x'}\frac{\partial p_x'}{\partial \nu^p}\nu_o F_m} \quad \text{..... (2.68)}$$

โดยที่ $\left[C_p'\right]$ คือ Effective Plastic Matrix

2.8 การประมาณค่าความเครียด ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ โดยวิธี SPR

ในการประมาณค่าความคลาดเคลื่อน โดยทั่วไปจะทำได้โดยการประมาณค่าจากผลเฉลยของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทียบกับค่าที่ได้จากผลเฉลยที่แม่นยำกว่า หน่วยแรงที่ได้จากผลเฉลยของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในแต่ละชิ้นส่วนนั้น จะไม่มีความต่อเนื่องกันทั้งระบบ และจะมีความแตกต่างกันไปในแต่ละชิ้นส่วน สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะทำการประมาณหาค่าความเครียดที่ต้องการพิจารณาในแต่ละชิ้นส่วนให้มีความต่อเนื่องกันทั้งระบบโดยอาศัยวิธี Superconvergent Patch Recovery of strain (SPR) (Zienkiewicz and Zhu, 1992a, 1992b: Hu and Randolph, 1998b)

ข้อดีของวิธีนี้ คือ สามารถลดปัญหาของความไม่ต่อเนื่องของค่าความเครียด ณ บริเวณจุดต่อ และขอบของชิ้นส่วน และยังสามารถหาค่าของความเครียด ณ จุดที่ต้องการพิจารณาภายใน Element Patch ที่สนใจ

ในแต่ละชิ้นส่วน ที่ตำแหน่งจุดเกาส์ จะมีค่าของหน่วยแรงที่แม่นยำกว่าที่ตำแหน่งอื่น ๆ ดังนั้นเริ่มแรก จะทำการประมาณค่าความเครียดที่จุดต่อของชิ้นส่วนได้ จากค่าความเครียดของกลุ่มจุดเกาส์ที่มีอิทธิพลรอบ ๆ จุดต่อนั้น ดังสมการต่อไปนี้

$$\Delta\varepsilon_n^* = Pa \quad \text{..... (2.69)}$$

โดยที่ $\Delta\varepsilon_n^*$ คือ ค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้น ณ ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา

P คือ ค่าฟังก์ชันของพิกัด ณ ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา

a คือ ค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (เป็นฟังก์ชันของ ค่าความเครียดของกลุ่มจุดเกาส์ ที่มีอิทธิพลรอบจุดต่อนั้น ๆ)

รูปที่ 2.14 และรูปที่ 2.15 แสดงตำแหน่งของกลุ่มจุดเกาส์ ที่มีอิทธิพลรอบจุดต่อที่ต้องการพิจารณา สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วน 6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อ ตามลำดับ

สำหรับปัญหาสองมิติของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อจะใช้ค่า

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \quad \text{..... (2.70)}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}^T \quad \text{..... (2.71)}$$

และสำหรับปัญหาสองมิติของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 15 จุดต่อจะใช้ค่า

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \end{bmatrix} \quad \text{..... (2.72)}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix}^T \quad \text{..... (2.73)}$$

สำหรับค่า a ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า สามารถหาได้จากหลักการของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดของกลุ่มจุดเกาส์ดังกล่าว ซึ่งในกรณี 2 มิติ ค่าเศษตกค้างสามารถหาได้ดังนี้

$$F(a) = \sum_{i=1}^{n} \left[\Delta\varepsilon_h \left(x_i', y_i' \right) - \Delta\varepsilon_n{}^* \left(x_i', y_i' \right) \right]^2 \quad \text{..... (2.74)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\Delta\varepsilon_h \left(x_i', y_i' \right) - P \left(x_i', y_i' \right) a \right]^2 \quad \text{..... (2.75)}$$

โดยที่ (x_i', y_i') คือ พิกัดของจุดเกาส์ทั้งหมดภายใน Element Patch

$n = mk$ คือ จำนวนจุดเกาส์ทั้งหมดภายใน Element Patch

k คือ จำนวนจุดเกาส์ในแต่ละชิ้นส่วน

m คือ จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดภายใน Element Patch

$\Delta\varepsilon_h$ คือ ค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้น ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากนั้นทำการหาค่าเศษตกค้างต่ำสุด โดยกำหนดให้ค่าอนุพันธ์ของ $F(a)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งจะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} P^T(x_i', y_i') P \left(x_i', y_i' \right) a = \sum_{i=1}^{n} P^T(x_i', y_i') \varepsilon_h(x_i', y_i') \quad \text{..... (2.76)}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริก (สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วน 6 จุดต่อ) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i' & \sum y_i' & \sum x_i'^2 & \sum x_i' y_i' & \sum y_i'^2 \\ \sum x_i' & \sum x_i'^2 & \sum x_i' y_i' & \sum x_i'^3 & \sum x_i'^2 y_i' & \sum x_i' y_i'^2 \\ \sum y_i' & \sum x_i' y_i' & \sum y_i'^2 & \sum x_i'^2 y_i' & \sum x_i' y_i'^2 & \sum y_i'^3 \\ \sum x_i'^2 & \sum x_i'^3 & \sum x_i'^2 y_i' & \sum x_i'^4 & \sum x_i'^3 y_i' & \sum x_i'^2 y_i'^2 \\ \sum x_i' y_i' & \sum x_i'^2 y_i' & \sum x_i' y_i'^2 & \sum x_i'^3 y_i' & \sum x_i'^2 y_i'^2 & \sum x_i' y_i'^3 \\ \sum y_i'^2 & \sum x_i' y_i'^2 & \sum y_i'^3 & \sum x_i'^2 y_i'^2 & \sum x_i' y_i'^3 & \sum y_i'^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \varepsilon_{hi} \\ \sum x_i' \varepsilon_{hi} \\ \sum y_i' \varepsilon_{hi} \\ \sum x_i'^2 \varepsilon_{hi} \\ \sum x_i' y_i' \varepsilon_{hi} \\ \sum y_i'^2 \varepsilon_{hi} \end{Bmatrix}$$

..... (2.77)

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริก (สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วน 15 จุดต่อ) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i' & \sum y_i' & \sum x_i'^2 & \cdots\cdots & \sum x_i' y_i'^3 & \sum y_i'^4 \\ \sum x_i' & \sum x_i'^2 & \sum x_i' y_i' & \sum x_i'^3 & \cdots\cdots & \sum x_i'^2 y_i'^3 & \sum x_i' y_i'^4 \\ \sum y_i' & \sum x_i' y_i' & \sum y_i'^2 & \sum x_i'^2 y_i' & \cdots\cdots & \sum x_i' y_i'^4 & \sum y_i'^5 \\ \sum x_i'^2 & \sum x_i'^3 & \sum x_i'^2 y_i' & \sum x_i'^4 & \cdots\cdots & \sum x_i'^3 y_i'^3 & \sum x_i'^2 y_i'^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum x_i' y_i'^3 & \sum x_i'^2 y_i'^3 & \sum x_i' y_i'^4 & \sum x_i'^3 y_i'^3 & \cdots\cdots & \sum x_i'^2 y_i'^6 & \sum x_i' y_i'^7 \\ \sum y_i'^4 & \sum x_i' y_i'^4 & \sum y_i'^5 & \sum x_i'^2 y_i'^4 & \cdots\cdots & \sum x_i' y_i'^7 & \sum y_i'^8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{14} \\ a_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \varepsilon_{hi} \\ \sum x_i' \varepsilon_{hi} \\ \sum y_i' \varepsilon_{hi} \\ \sum x_i'^2 \varepsilon_{hi} \\ \vdots \\ \sum x_i' y_i'^3 \varepsilon_{hi} \\ \sum y_i'^4 \varepsilon_{hi} \end{Bmatrix}$$

..... (2.78)

$$[A]\{a\} = \{b\} \qquad \text{..... (2.79)}$$

หรือ $$\{a\} = [A]^{-1}\{b\} \qquad \text{..... (2.80)}$$

หลังจากคำนวณค่าเมทริก a ได้แล้ว จะสามารถหาค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้น ณ ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา , $\Delta\varepsilon_n^*$ ได้ จากสมการที่ (2.69) โดยกำหนดให้ P แทนค่าพิกัด ณ ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา

การหาค่าความเครียดโดยวิธี SPR ที่จุดต่อของชิ้นส่วน จะมีบางจุดต่อที่มีการหาค่าซ้ำกันกับจุดรวมชิ้นส่วนอื่น ๆ ซึ่งจะทำได้โดยการนำค่าทั้งหมดมาหาค่าเฉลี่ย และเมื่อได้ค่าความเครียด ณ ตำแหน่งจุดต่อทุกจุดแล้ว จะสามารถหาค่าความเครียด ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ ของแต่ละชิ้นส่วน ได้โดยอาศัยฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วน ดังนี้

$$\Delta\varepsilon^* = N_1\Delta\varepsilon_{n1}^* + N_2\Delta\varepsilon_{n2}^* + N_3\Delta\varepsilon_{n3}^* + \cdots + N_k\Delta\varepsilon_{nk}^* \qquad \text{..... (2.81)}$$

หรือ $$\Delta\varepsilon^{*} = \sum_{i=1}^{k} N_i \Delta\varepsilon_{ni}^{*} \quad \text{..... (2.82)}$$

โดยที่ N_i คือ ฟังก์ชันการประมาณภายใน ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อ

$\Delta\varepsilon^{*}$ คือ ค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้น ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ ที่คำนวณได้จาก "SPR"

k คือ จำนวนจุดต่อในแต่ละชิ้นส่วน (6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อ)

เพื่อหลีกเลี่ยงการหาค่าไม่ได้ของค่าเมทริก A ในบางกรณี จากสมการที่ 2.76 อันเนื่องจากชิ้นส่วนที่มีค่าอนุพันธ์อันดับสูง ดังนั้นเราจึงจำเป็นที่จะต้องมีการปรับปรุง และจำกัดขอบเขตของกลุ่มชิ้นส่วน แล้วหาค่าพิกัดอ้างอิง ที่ใช้ในการคำนวณหาเมทริก A ดังสมการ

$$x_i^{'} = -1 + \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad \text{..... (2.83)}$$

$$y_i^{'} = -1 + \frac{y_i - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \quad \text{..... (2.84)}$$

โดยที่ $x_{\max}$ และ $x_{\min}$ คือ ค่าที่มากและน้อยที่สุด ในกลุ่มของชิ้นส่วน ตามแนวแกนนอน

$y_{\max}$ และ $y_{\min}$ คือ ค่าที่มากและน้อยที่สุด ในกลุ่มของชิ้นส่วน ตามแนวแกนตั้ง

$x_i^{'}$ และ $y_i^{'}$ คือ พิกัดอ้างอิงตามแนวแกนนอนและแนวแกนตั้ง มีค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1

2.9 การประมาณค่าความคลาดเคลื่อน

ในวิทยานิพนธ์นี้จะประมาณค่าความคลาดเคลื่อน ของค่าความเครียดที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และ ค่าความเครียด ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ ที่คำนวณได้จาก "SPR" โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อนำมาใช้ในการหาขนาดชิ้นส่วนที่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ค่าความเครียด และค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละชิ้นส่วน ที่นำเสนอโดย Zienkiewicz and Zhu (1992b) สามารถคำนวณได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\left\| U^{*} \right\|_{2l} = \left(\int_{\Omega} \left(\Delta\varepsilon^{*}\right)^{T} \left(\Delta\varepsilon^{*}\right) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{..... (2.85)}$$

$$\left\| U^{*} \right\|_{2l} = \left(\sum_{i=1}^{nip} \left(\Delta\varepsilon^{*}\right)_i^{T} \left(\Delta\varepsilon^{*}\right)_i * \det_i * weight_i \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{..... (2.86)}$$

$$\left\|e^*\right\|_{2l} = \left(\int_{\Omega}\left(\Delta\varepsilon^* - \Delta\varepsilon_h\right)^T\left(\Delta\varepsilon^* - \Delta\varepsilon_h\right)d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{..... (2.87)}$$

$$\left\|e^*\right\|_{2l} = \left(\sum_{i=1}^{nip}\left(\Delta\varepsilon^* - \Delta\varepsilon_h\right)^T\left(\Delta\varepsilon^* - \Delta\varepsilon_h\right) * \det_i * weight_i\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{..... (2.88)}$$

ขนาดของค่าความเครียด และค่าความคลาดเคลื่อนโดยรวมทั้งระบบ สามารถคำนวณได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\left\|U^*\right\|_{2g} = \left(\sum_{i=1}^{Nc}\left\|U^*\right\|_{2l}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{..... (2.89)}$$

$$\left\|e^*\right\|_{2g} = \left(\sum_{i=1}^{Nc}\left\|e^*\right\|_{2l}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{..... (2.90)}$$

$$\eta_g^* = \frac{\left\|e^*\right\|_{2g}}{\left\|U^*\right\|_{2g}} \quad \text{..... (2.91)}$$

โดยที่ $\left\|U^*\right\|_{2l}$ คือ ขนาดของค่าความเครียดในแต่ละชิ้นส่วน

$\left\|e^*\right\|_{2l}$ คือ ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละชิ้นส่วน

$\left\|U^*\right\|_{2g}$ คือ ขนาดของค่าความเครียดโดยรวมทั้งระบบ

$\left\|e^*\right\|_{2g}$ คือ ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนโดยรวมทั้งระบบ

η_g^* คือ ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม

nip คือ จำนวนจุดเกาส์ทั้งหมดในแต่ละชิ้นส่วน

Ne คือ จำนวนชิ้นส่วนทั้งหมดในระบบ

จากค่าความคลาดเคลื่อนทั้งหมดที่ได้นี้ จะสามารถนำค่ามาคำนวณหาขนาดของชิ้นส่วนที่เหมาะสมในระบบ ดังจะกล่าวถึงรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

2.10 การประมาณขนาดของชิ้นส่วนที่เหมาะสม

เนื่องจากความคลาดเคลื่อนจะแปรผันตามขนาดของชิ้นส่วนยกกำลังด้วย กำลังของพหุนามในฟังก์ชันรูปร่าง (Kelly, etal. 1983; Zienkiewicz and Zhu, 1992a) ดังสมการ

$$\|e\| = Ch^P \qquad \text{..... (2.92)}$$

โดยที่ C คือ ค่าคงตัวที่ไม่ทราบค่า

h คือ ขนาดของชิ้นส่วน

P คือ กำลังของพหุนามในฟังก์ชันรูปร่าง

(กรณี 6 จุดต่อ : P มีค่าเท่ากับ 2 , กรณี 15 จุดต่อ : P มีค่าเท่ากับ 4)

ดังนั้นถ้ารู้ค่าความคลาดเคลื่อนและขนาดของชิ้นส่วนปัจจุบัน เราสามารถคำนวณหาขนาดของชิ้นส่วนที่มีค่าความคลาดเคลื่อน เท่ากับค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ ได้จากสมการ

$$h_{ncw} = h_{old}\left(\frac{\|e\|_a}{\|e^*\|_{2l}}\right)^{1/P} \qquad \text{..... (2.93)}$$

โดยที่ h_{ncw} คือ ขนาดของชิ้นส่วนที่จะสร้างขึ้นมาใหม่

h_{old} คือ ขนาดของชิ้นส่วนในปัจจุบัน

$\|e\|_a$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชิ้นส่วน

$\|e^*\|_{2l}$ คือ ขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละชิ้นส่วน

การหาค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชิ้นส่วนนั้น หาได้จากการกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวมที่ยอมให้ แล้วทำการหาค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชิ้นส่วนจากสมการ

$$\|e\|_a = \eta_a \frac{\|U^*\|_{2g}}{\sqrt{Ne}} \qquad \text{..... (2.94)}$$

โดยที่ $\|e\|_a$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชิ้นส่วน

η_a คือ ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวมที่ยอมให้

ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละชิ้นส่วน มีค่ามากกว่า ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละชิ้นส่วน จะทำให้ค่า h_{ncw} ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่า h_{old} ซึ่งหมายถึงชิ้นส่วนเดิมมีขนาดใหญ่มากจนเกินไป จะต้องทำการแบ่งขนาดชิ้นส่วนให้มีขนาดเล็กลง

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ การแบ่งขนาดชิ้นส่วนให้มีขนาดเล็กลง จะอาศัยหลักการเดิมที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ของนาย ดำรงฤทธิ์ พรหมณีวัฒน์ ซึ่งมีข้อกำหนดต่าง ๆ ดังนี้ ขนาดของชิ้นส่วนจะหมายถึง พื้นที่ของแต่ละชิ้นส่วนภายในขอบเขตของปัญหา และการแบ่งขนาดของชิ้นส่วนให้เล็กลง

จะกระทำโดยการแทรกจุดต่อใหม่ลง ณ บริเวณจุดศูนย์ถ่วงของแต่ละชิ้นส่วน และในกรณีที่บริเวณขอบของปัญหา ขนาดของชิ้นส่วนจะหมายถึงความยาวด้านของชิ้นส่วนที่เป็นขอบเขตของปัญหา และการแบ่งขนาดของชิ้นส่วนให้เล็กลง จะกระทำโดยการแทรกจุดต่อใหม่ลง ณ จุดกึ่งกลางด้านของชิ้นส่วนที่เป็นขอบเขตของปัญหา

2.11 การถ่ายโอนค่าของตัวแปรสถานะ (State Variable Mapping)

ค่าตัวแปรสถานะ หมายถึง ค่าที่บอกถึงสภาพของหน่วยแรง, ค่าความเครียด และคุณสมบัติของมวลดิน ณ ตำแหน่งที่พิจารณา สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วนนั้น ๆ ดังนั้นเมื่อมีการปรับปรุงพิกัดและรูปร่างของโครงข่ายของชิ้นส่วน โดยการสร้างโครงข่ายของชิ้นส่วนขึ้นมาใหม่ ภายในโครงข่ายของชิ้นส่วนเดิม จึงจำเป็นที่จะต้องมีการถ่ายโอนค่าตัวแปรสถานะดังกล่าว จากโครงข่ายของชิ้นส่วนเดิมไปสู่โครงข่ายของชิ้นส่วนใหม่ เพื่อใช้เป็นโครงข่ายเริ่มต้นสำหรับการคำนวณในวงรอบถัดไป

ในวิทยานิพนธ์นี้ ค่าผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นค่าที่บริเวณจุดเกาส์ของแต่ละชิ้นส่วน ดังนั้นการถ่ายโอนค่าตัวแปรสถานะ จะถ่ายโอนจากจุดเกาส์ของโครงข่ายชิ้นส่วนเดิม ไปยังจุดเกาส์ของโครงข่ายชิ้นส่วนใหม่ ในขั้นตอนแรกจะต้องทราบค่าตัวแปรสถานะที่บริเวณจุดต่อของโครงข่ายของชิ้นส่วนเดิม โดยสำหรับการคำนวณค่าตัวแปรสถานะที่บริเวณจุดต่อที่ใช้อยู่เดิมในวิทยานิพนธ์ของ นาย ดำรงค์ฤทธิ์ พรหมณีวัฒน์ ซึ่งเป็นวิธีที่คิดค้นขึ้นมาเอง โดยอาศัยการประยุกต์ใช้สมการ Quadratic Shape Function พบว่าค่าที่คำนวณได้ไม่มีความแม่นยำเพียงพอ และไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับโครงข่ายชิ้นส่วน 15 จุดต่อ ดังนั้นจึงได้ทำการเปลี่ยนแปลงจากวิธีดังกล่าวมาใช้การคำนวณด้วยวิธี Superconvergent Patch Recovery (SPR) ซึ่งพบว่าให้ผลลัพธ์ที่มีความต่อเนื่อง และมีความแม่นยำมากขึ้น

การประมาณค่าตัวแปรสถานะที่จุดต่อของโครงข่ายของชิ้นส่วนเดิม จากค่าตัวแปรสถานะของกลุ่มจุดเกาส์ที่ทราบค่าที่มีอิทธิพลรอบ ๆ จุดต่อนั้น แสดงไว้ดังสมการต่อไปนี้

$$V_n^* = Pa \qquad \text{..... (2.95)}$$

โดยที่ V_n^* คือ ค่าตัวแปรสถานะ ณ ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา

P คือ ค่าฟังก์ชันของพิกัด ณ ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา

(เมทริก P แสดงไว้ในสมการที่ 2.70 และ 2.72)

a คือ ค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (เป็นฟังก์ชันของ ค่าตัวแปรสถานะของกลุ่มจุดเกาส์ ที่มีอิทธิพลรอบจุดต่อนั้น ๆ) (เมทริก a แสดงไว้ในสมการที่ 2.71 และ 2.73)

สำหรับค่า a ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริก (สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วน 6 จุดต่อ) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i' & \sum y_i' & \sum x_i'^2 & \sum x_i'y_i' & \sum y_i'^2 \\ \sum x_i' & \sum x_i'^2 & \sum x_i'y_i' & \sum x_i'^3 & \sum x_i'^2y_i' & \sum x_i'y_i'^2 \\ \sum y_i' & \sum x_i'y_i' & \sum y_i'^2 & \sum x_i'^2y_i' & \sum x_i'y_i'^2 & \sum y_i'^3 \\ \sum x_i'^2 & \sum x_i'^3 & \sum x_i'^2y_i' & \sum x_i'^4 & \sum x_i'^3y_i' & \sum x_i'^2y_i'^2 \\ \sum x_i'y_i' & \sum x_i'^2y_i' & \sum x_i'y_i'^2 & \sum x_i'^3y_i' & \sum x_i'^2y_i'^2 & \sum x_i'y_i'^3 \\ \sum y_i'^2 & \sum x_i'y_i'^2 & \sum y_i'^3 & \sum x_i'^2y_i'^2 & \sum x_i'y_i'^3 & \sum y_i'^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum V_{hi} \\ \sum x_i'V_{hi} \\ \sum y_i'V_{hi} \\ \sum x_i'^2V_{hi} \\ \sum x_i'y_i'V_{hi} \\ \sum y_i'^2V_{hi} \end{Bmatrix}$$

..... (2.96)

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริก (สำหรับโครงข่ายชิ้นส่วน 15 จุดต่อ) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i' & \sum y_i' & \sum x_i'^2 & \cdots\cdots & \sum x_i'y_i'^3 & \sum y_i'^4 \\ \sum x_i' & \sum x_i'^2 & \sum x_i'y_i' & \sum x_i'^3 & \cdots\cdots & \sum x_i'^2y_i'^3 & \sum x_i'y_i'^4 \\ \sum y_i' & \sum x_i'y_i' & \sum y_i'^2 & \sum x_i'^2y_i' & \cdots\cdots & \sum x_i'y_i'^4 & \sum y_i'^5 \\ \sum x_i'^2 & \sum x_i'^3 & \sum x_i'^2y_i' & \sum x_i'^4 & \cdots\cdots & \sum x_i'^3y_i'^3 & \sum x_i'^2y_i'^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum x_i'y_i'^3 & \sum x_i'^2y_i'^3 & \sum x_i'y_i'^4 & \sum x_i'^3y_i'^3 & \cdots\cdots & \sum x_i'^2y_i'^6 & \sum x_i'y_i'^7 \\ \sum y_i'^4 & \sum x_i'y_i'^4 & \sum y_i'^5 & \sum x_i'^2y_i'^4 & \cdots\cdots & \sum x_i'y_i'^7 & \sum y_i'^8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{14} \\ a_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum V_{hi} \\ \sum x_i'V_{hi} \\ \sum y_i'V_{hi} \\ \sum x_i'^2V_{hi} \\ \vdots \\ \sum x_i'y_i'^3V_{hi} \\ \sum y_i'^4V_{hi} \end{Bmatrix}$$

..... (2.97)

$$[A]\{a\} = \{b\} \qquad \text{..... (2.98)}$$

หรือ $$\{a\} = [A]^{-1}\{b\} \qquad \text{..... (2.99)}$$

โดยที่ (x_i', y_i') คือ พิกัดของจุดเกาส์ทั้งหมดภายใน Element Patch

V_h คือ ค่าตัวแปรสถานะ ณ ตำแหน่งจุดเกาส์ ที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

n คือ จำนวนจุดเกาส์ทั้งหมดภายใน Element Patch

หลังจากคำนวณค่าเมทริก a ได้แล้ว จะสามารถหาค่าตัวแปรสถานะ ณ ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา , V_n^* ได้ จากสมการที่ (2.95) โดยกำหนดให้ P แทนค่าพิกัด ณ ตำแหน่งจุดต่อที่พิจารณา และถ้าค่าตัวแปรสถานะที่บริเวณจุดต่อของชิ้นส่วนที่หาค่าได้ซ้ำกันกับจุดรวมชิ้นส่วนอื่น ๆ ก็จะนำค่าทั้งหมดมาหาค่าเฉลี่ย

ขั้นตอนต่อไป ทำการถ่ายโอนค่าตัวแปรสถานะ จากโครงข่ายของชิ้นส่วนเดิม ไปสู่โครงข่ายของชิ้นส่วนใหม่ โดยนำค่าพิกัดตำแหน่งจุดเกาส์ของชิ้นส่วนใหม่ มาตรวจสอบว่าอยู่ในชิ้นส่วนหมายเลขใดของโครงข่ายชิ้นส่วนเดิม จากนั้นนำค่าพิกัดตำแหน่งจุดเกาส์ (x, y) ของชิ้นส่วนใหม่มาแปลงให้อยู่ในรูปค่าพิกัดธรรมชาติ (L_1, L_2, L_3) ของชิ้นส่วนเดิมนั้น ๆ โดยอาศัยความสัมพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วน และในขั้นตอนนี้จะต้องอาศัยการแก้สมการ Nonlinear Equation ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้จะเรียกใช้โปรแกรมย่อย DNEQNF จาก IMSL Math/Library ดังนั้นจะสามารถถ่ายโอนค่าตัวแปรสถานะไปยังจุดเกาส์ของโครงข่ายชิ้นส่วนใหม่ ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$V^+ = N_1 V_{n1}^* + N_2 V_{n2}^* + N_3 V_{n3}^* + \cdots + N_k V_{nk}^* \qquad \text{..... (2.100)}$$

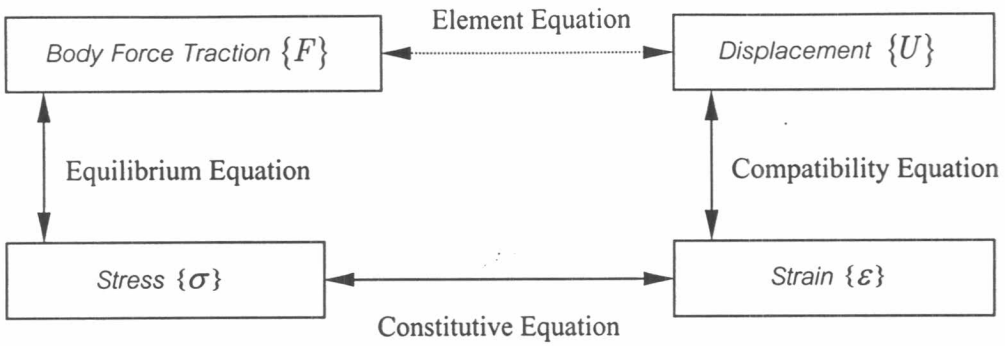
$$V^+ = \sum_{i=1}^{k} N_i V_{ni}^* \qquad \text{..... (2.101)}$$

โดยที่ V^+ คือ ค่าตัวแปรสถานะที่จุดเกาส์ของชิ้นส่วนใหม่ ซึ่งได้จากการถ่ายโอน

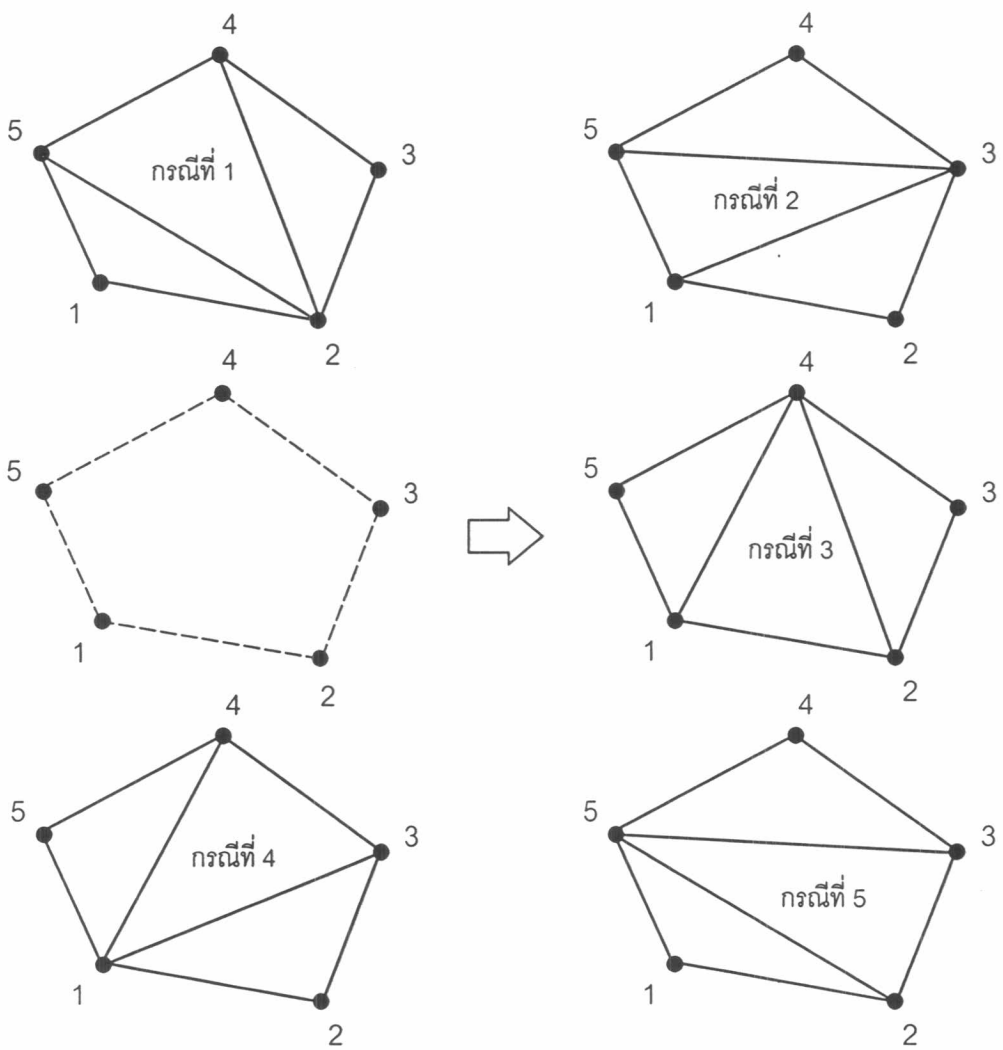
N_i คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม 6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อ

k คือ จำนวนจุดต่อในแต่ละชิ้นส่วน (6 จุดต่อ และ 15 จุดต่อ)

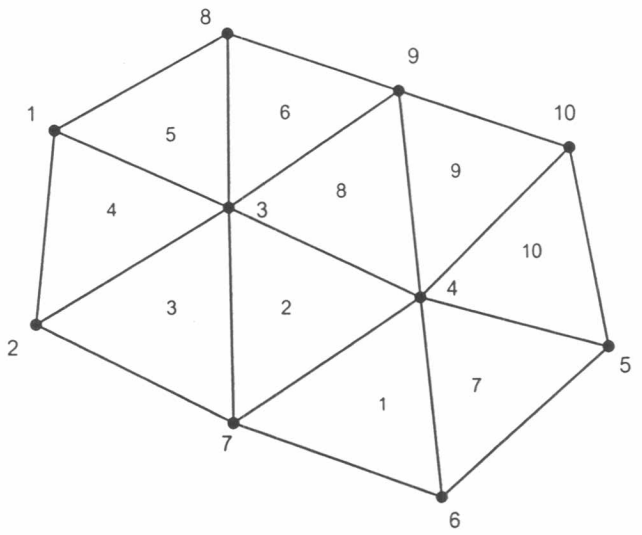
รูปที่ 2.16 แสดงการถ่ายโอนค่าตัวแปรสถานะ จากโครงข่ายของชิ้นส่วนเดิมไปสู่โครงข่ายของชิ้นส่วนใหม่

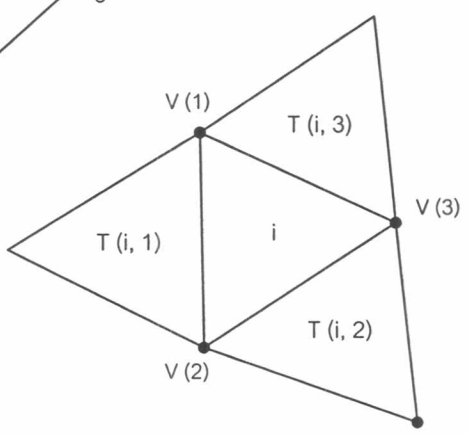


รูปที่ 2.1 ความสัมพันธ์ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 2.2 การสร้างโครงข่ายของชิ้นส่วนโดยใช้สามเหลี่ยมเดอลอเน





หมายเลขชิ้นส่วนสามเหลี่ยม

Vertex (V)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	3	2	1	1	3	4	3	4	4
2	7	7	7	2	3	9	6	4	10	5
3	6	4	3	3	8	8	5	9	9	10

หมายเลขชิ้นส่วนสามเหลี่ยม

Adjacent Triangle (T)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	0	0	4	8	1	2	10	7
2	0	1	2	3	6	0	0	9	0	0
3	7	8	4	5	0	5	10	6	8	9

Vertex (V) คือ การเรียงลำดับหมายเลขของจุดต่อของชิ้นส่วนหลัก เรียงทวนเข็มนาฬิกา

Adjacent Triangle (T) คือ การเรียงลำดับหมายเลขของชิ้นส่วนที่อยู่ด้านประชิดกับชิ้นส่วนหลัก

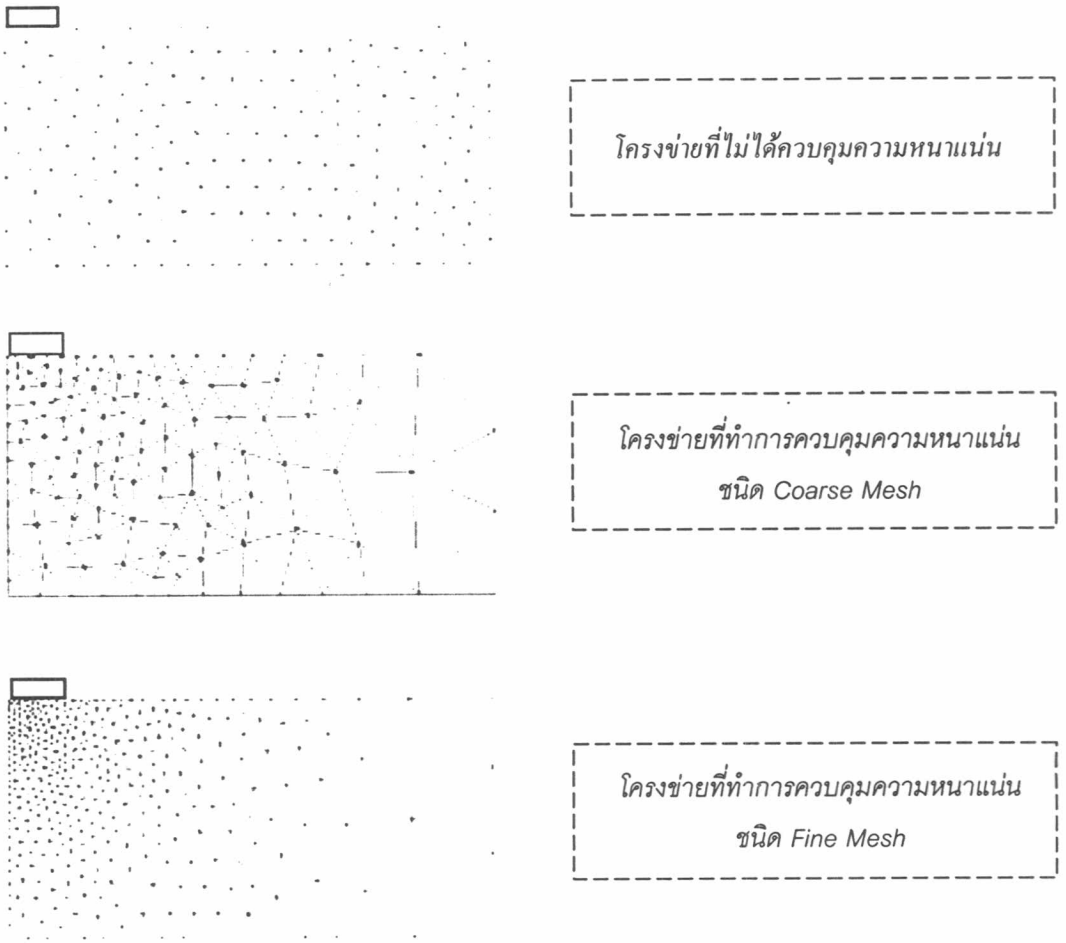
Adjacent Triangle (1) = หมายเลขของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ติดกับด้านของจุดต่อ V (1) กับ V (2)

Adjacent Triangle (2) = หมายเลขของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ติดกับด้านของจุดต่อ V (2) กับ V (3)

Adjacent Triangle (3) = หมายเลขของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ติดกับด้านของจุดต่อ V (3) กับ V (1)

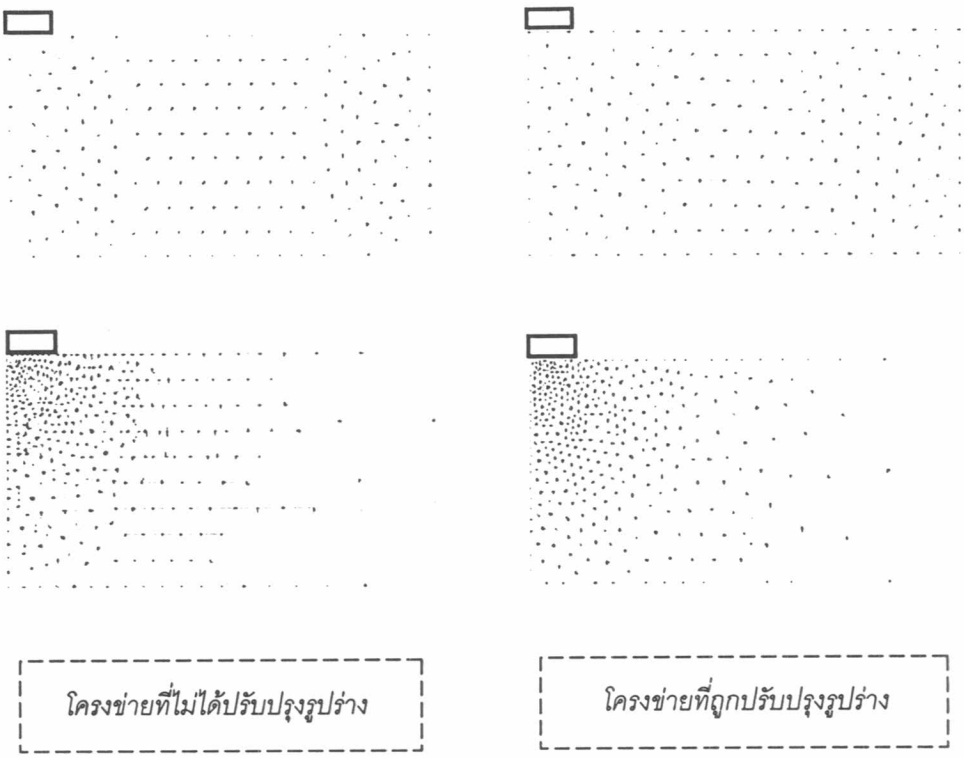
Adjacent Triangle มีค่าเท่ากับ 0 เมื่อไม่มีชิ้นส่วนที่ติดอยู่กับด้านของจุดต่อที่กำหนด

รูปที่ 2.3 รายละเอียดของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมเดอลอเน

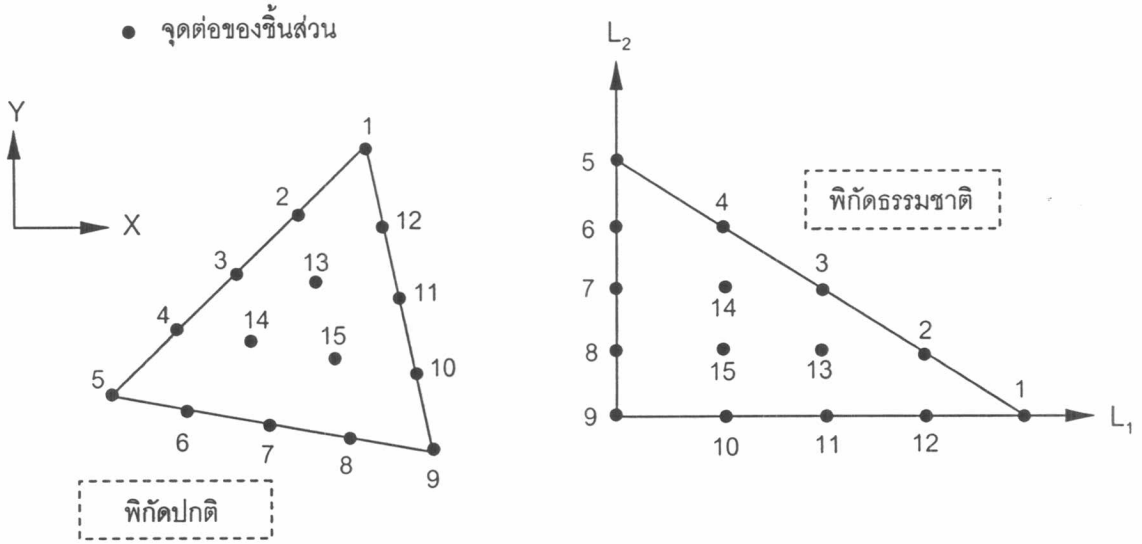


รูปที่ 2.4 การควบคุมความหนาแน่นของโครงข่ายของชิ้นส่วน

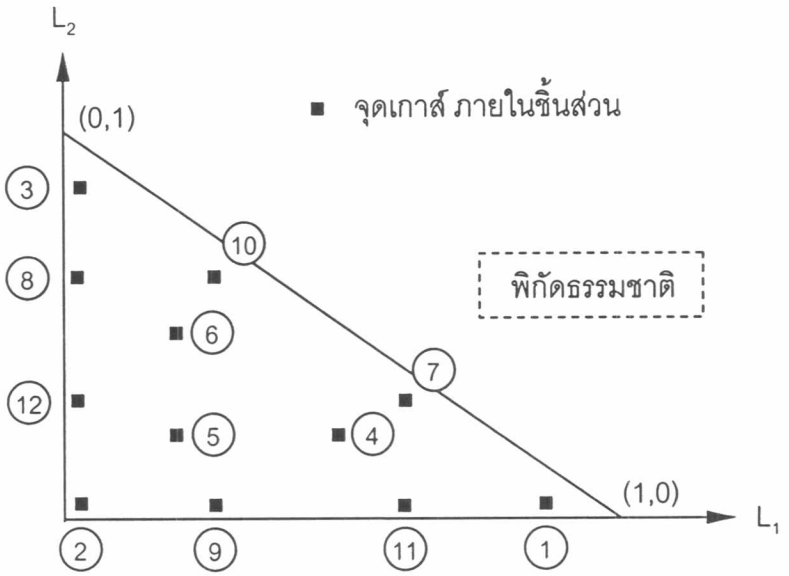
รูปที่ 2.5 พิกัดของจุดต่อ i และพิกัดข้างเคียงสำหรับ Laplacian Mesh Smoothing



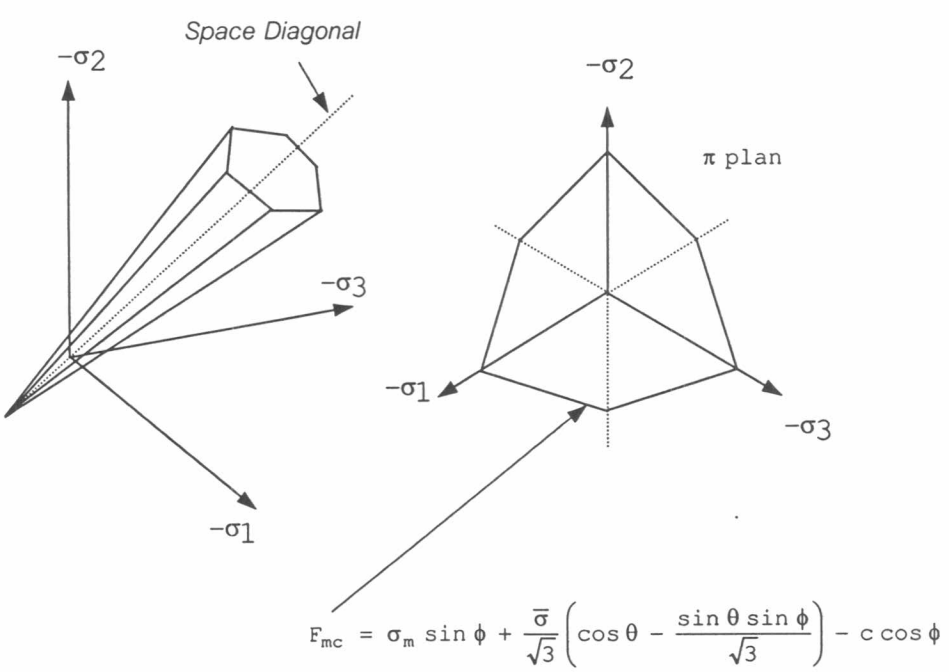
รูปที่ 2.6 ผลของการปรับปรุงรูปร่างของโครงข่ายชิ้นส่วนโดยวิธี Laplacian Mesh Smoothing



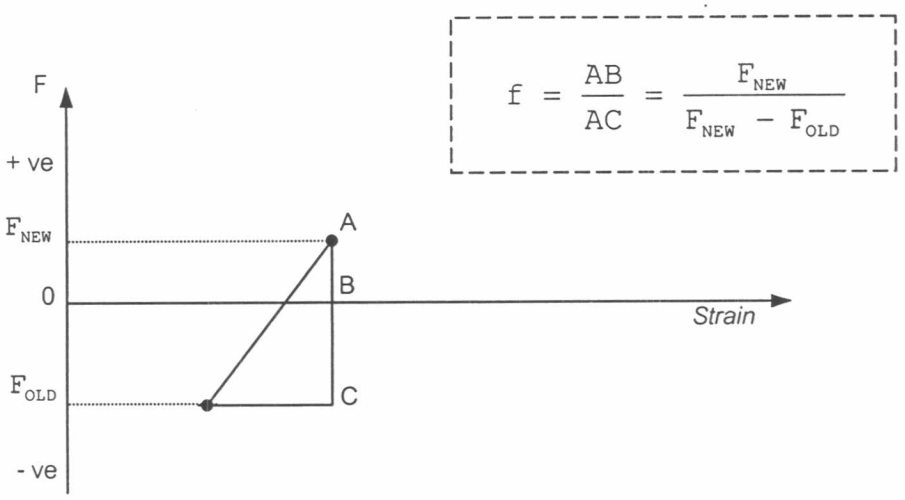
รูปที่ 2.7 โครงข่ายของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสิบห้าจุดต่อ



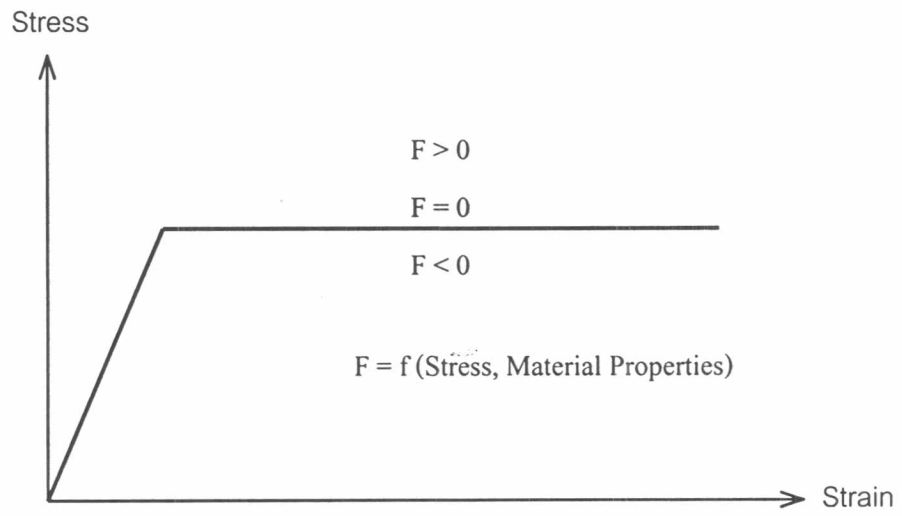
รูปที่ 2.8 การจัดเรียงตำแหน่งจุดเกาส์ของชิ้นส่วน



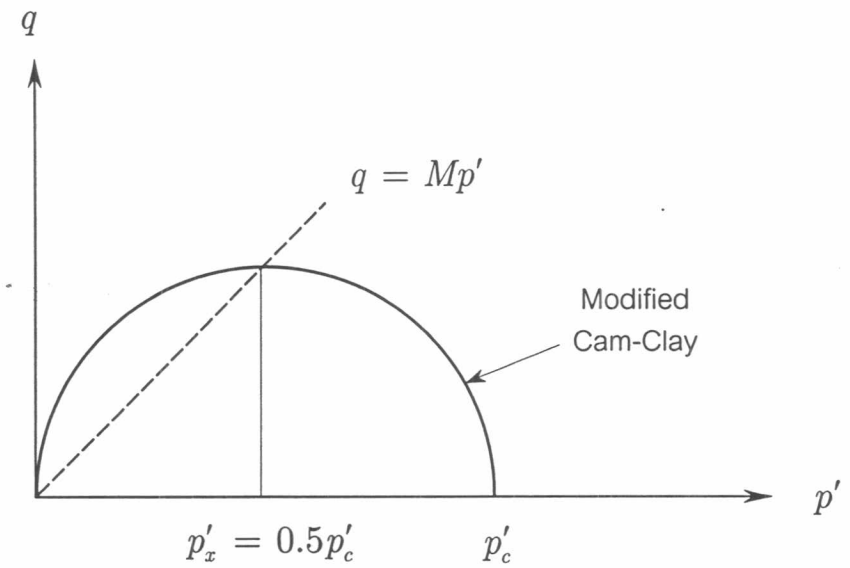
รูปที่ 2.9 Mohr-Coulomb Failure Criterion



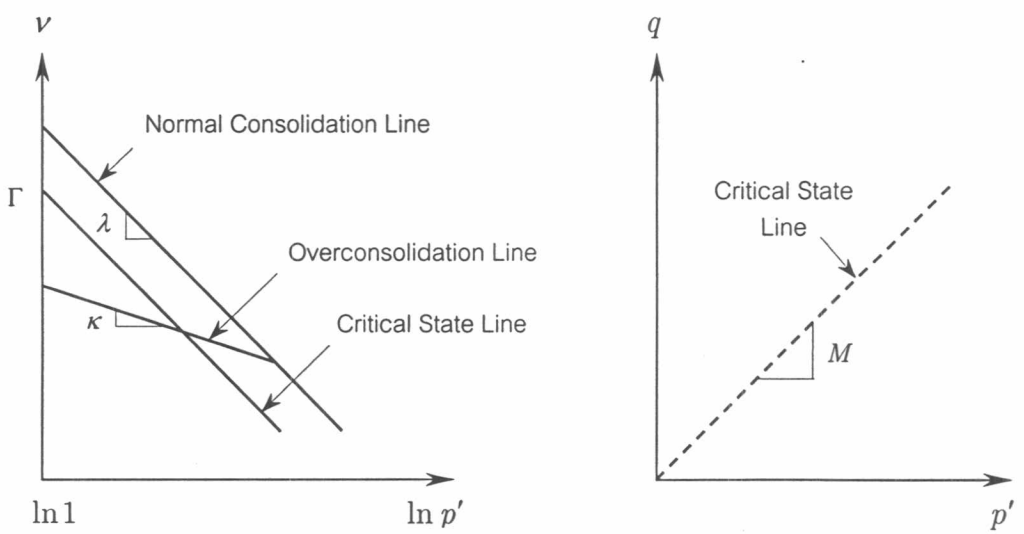
รูปที่ 2.10 การปรับแก้ค่าของหน่วยแรงสำหรับวัตถุที่เข้าสู่สภาวะพลาสติก



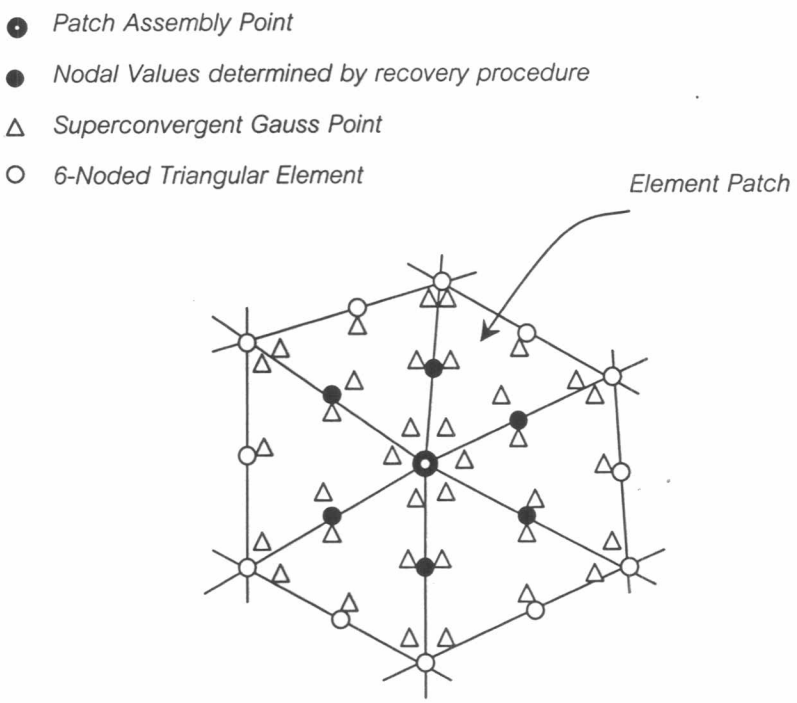
รูปที่ 2.11 แบบจำลอง Elastic-Perfectly Plastic Material



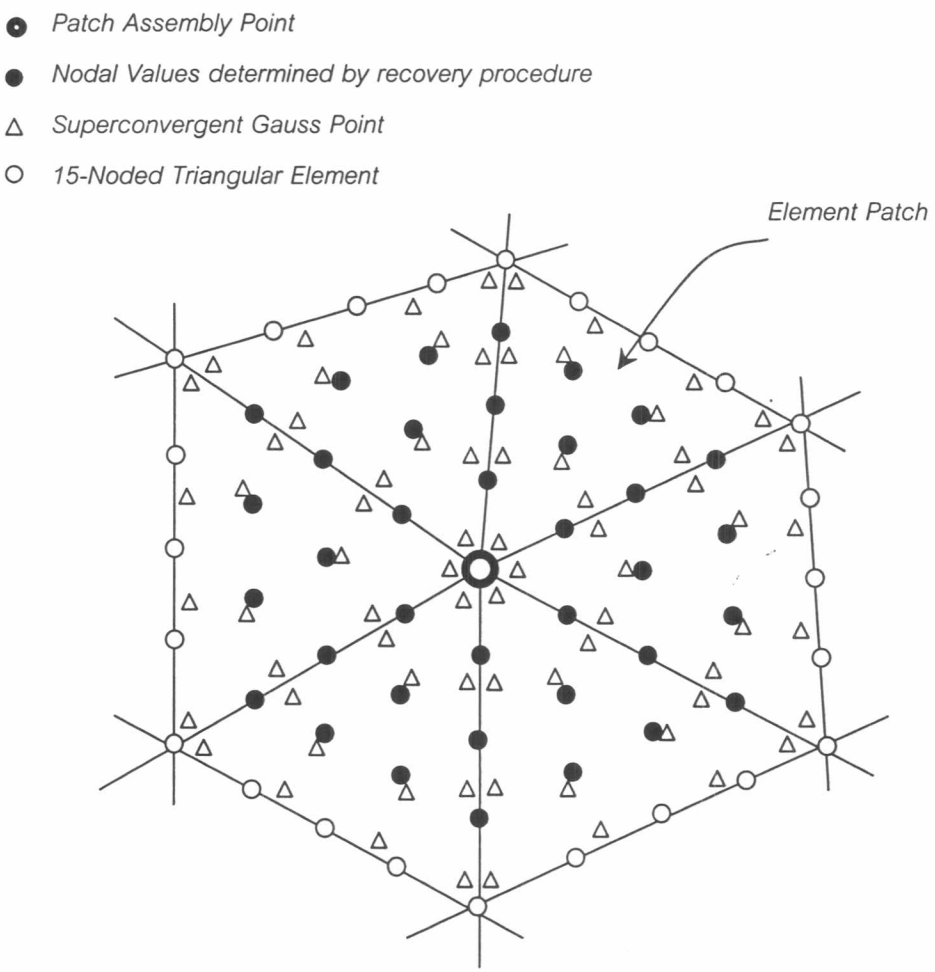
รูปที่ 2.12 Yield Function ของแบบจำลอง Modified Cam-Clay



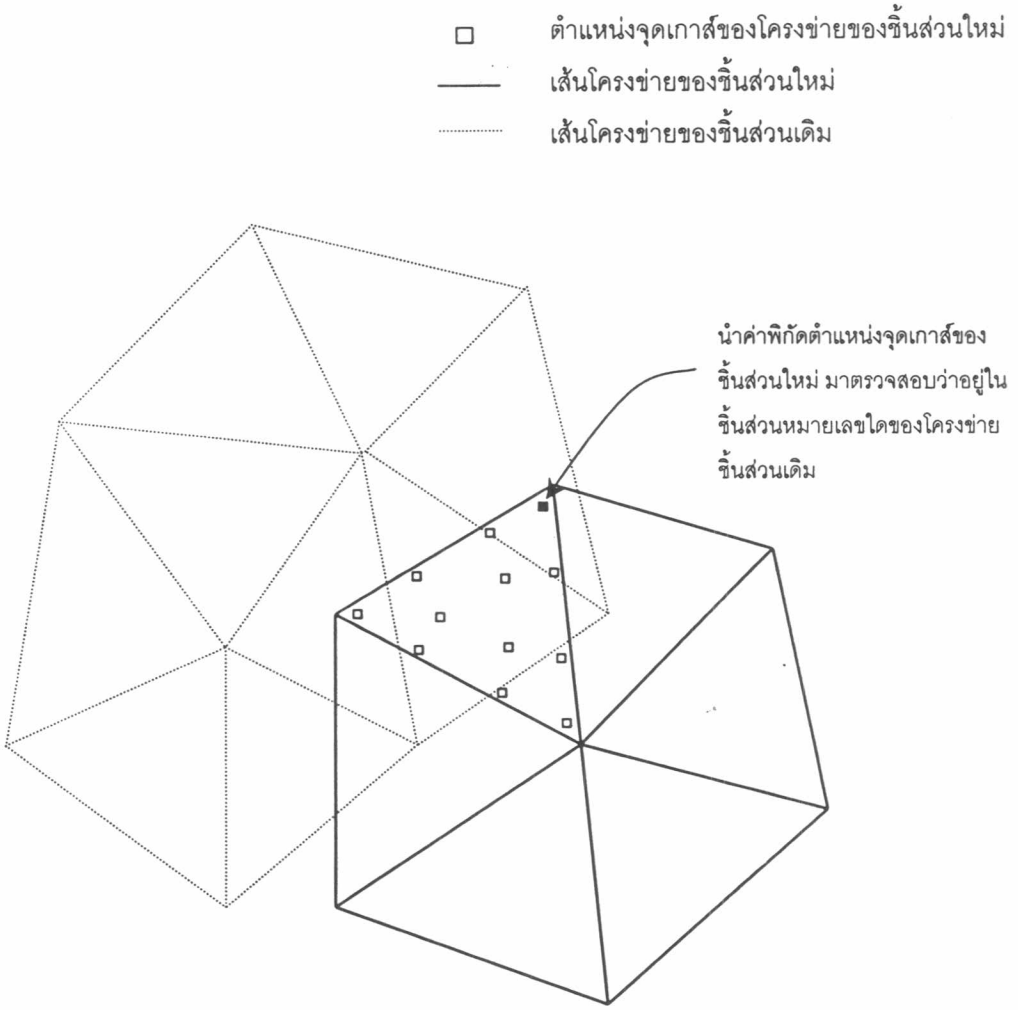
รูปที่ 2.13 ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลอง Modified Cam-Clay



รูปที่ 2.14 ตำแหน่งของกลุ่มจุดเกาส์ ที่มีอิทธิพลรอบจุดต่อที่ต้องการพิจารณา สำหรับโครงข่ายของชิ้นส่วน 6 จุดต่อ



รูปที่ 2.15 ตำแหน่งของกลุ่มจุดเกาส์ ที่มีอิทธิพลรอบจุดต่อที่ต้องการพิจารณา สำหรับโครงข่ายของชิ้นส่วน 15 จุดต่อ



พิจารณาตำแหน่งจุดเกาส์ที่แรเงา นำค่าพิกัดตำแหน่งจุดเกาส์ (x, y) ของชิ้นส่วนใหม่ มาแปลงให้อยู่ในรูปค่าพิกัดธรรมชาติ (L_1, L_2, L_3) ของโครงข่ายของชิ้นส่วนเดิมโดยอาศัยความสัมพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในของชิ้นส่วน

รูปที่ 2.16 การถ่ายโอนค่าของตัวแปรสถานะ (State Variable Mapping)