ผนวก ก.

ให้ $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ โดยที่ A_{11}, A_{22} เป็น square nonsingular matrices เราจะได้ว่า

$$|A| = |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| \cdot |A_{22}|$$

<u>พิสูจน์</u>

ให้

$$B = \begin{pmatrix} I & -A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$B A B' = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$|B A B'| = |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| \cdot |A_{22}|$$

แต่

$$|B A B'| = |B| \, |A| \, |B'| = |A|$$

ดังนั้น

$$|A| = |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| \cdot |A_{22}|$$

ผนวก ข

ให้

$C = (c_{ij})$; $(c_{ij} = 0,\ i > j)$ เป็น nonsingular triangular matrix จะได้ว่า Jacobian ของการแปลง

$D^{*} = C\,D\,C'$ คือ $|J| = |C|^{p+1}$

<u>พิสูจน์</u>

จาก

$$D^{*} = C\,D\,C'$$

$$D^{*} = (d^{*}_{ij}) \quad ; \quad D = (d_{ij})$$

ดังนั้น

$$d^{*}_{ij} = \sum_{k,l}^{p} c_{ik}\, d_{kl}\, c_{jl}$$

$$\frac{\partial d^{*}_{ij}}{\partial d_{kk}} = c_{ik}\, c_{jk}$$

$$\frac{\partial d^{*}_{ij}}{\partial d_{kl}} = c_{ik}\, c_{jl} + c_{il}\, c_{jk} \quad ; \quad l \neq k.$$

$$\left|\frac{\partial (d^{*}_{11}, d^{*}_{12}, \ldots, d^{*}_{pp})}{\partial (d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{pp})}\right| = \begin{vmatrix} c_{11}^2 & 2c_{11}c_{12} & \cdots & 2c_{11}c_{1p} & c_{12}^2 & \cdots & c_{1p}^2 \\ 0 & c_{11}c_{22} & \cdots & c_{11}c_{2p} & c_{12}c_{22} & \cdots & c_{1p}c_{2p} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdots & c_{11}c_{pp} & 0 & & c_{1p}c_{pp} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{22}^2 & \cdots & c_{2p}^2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_{pp}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{p} c_{ii}^{p+1} = |C|^{p+1}$$

ผนวก ค.

ให้

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

A_{11}, B_{11} เป็น matrices ที่มีแถวและคอลัมน์ในลำดับเดียวกัน

โดยที่

$$AB = I$$

จะได้ว่า

$$B_{11} = A^{-1}_{11.2}$$

โดยที่

$$A^{-1}_{11.2} = A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}$$

<u>พิสูจน์</u>

เนื่องจาก

$$AB = I$$

ดังนั้น

(๑) ..... $A_{21} B_{11} + A_{22} B_{21} = 0$

และ

(๒)..... $A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} = I$

จาก (๑) ได้ว่า

$$A_{21} B_{11}^{-1} = -A_{22} B_{21}$$

$$A_{22}^{-1} A_{21} = -B_{21} B_{11}^{-1}$$

จาก (๒) ได้ว่า

$$A_{11} + A_{12} B_{21} B_{11}^{-1} = B_{11}^{-1}$$

แทนค่า $B_{21} B_{11}^{-1}$ ด้วย $-A_{22}^{-1} A_{21}$

ดังนั้น

$$A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = B_{11}^{-1}$$

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1}$$

$$= A_{11.2}^{-1}$$

ผนวก ง.

ในสูตร (๓.๖.๒) เราต้องการพิสูจน์ว่า

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1-1+h}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(n-1+q_1)\;\Gamma(n-1+h)}{\Gamma(n-1+q_1+h)\;\Gamma(n-1)}.$$

<u>**พิสูจน์**</u>

จาก

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(n-1)}{2^{n-2}}\;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{n+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+h-1}{2}\right) = \left(\frac{n+h-2}{2}\right)\left(\frac{n+h-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{h+2}{2}\right)$$

$$\cdot\ \frac{h}{2}\,\Gamma\left(\frac{h}{2}\right)\ \frac{h+1}{2}\ \Gamma\left(\frac{h+1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(n+h-1)}{2^{n-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{h+1}{2}\right)}{\Gamma(h)}$$

$$\Gamma\left(\frac{n+q_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1-1}{2}\right) = \left(\frac{n+q_1-2}{2}\right)\left(\frac{n+q_1-3}{2}\right) \cdots$$

$$\left(\frac{q_1+2}{2}\right) \frac{q_1}{2}\,\Gamma\left(\frac{q_1}{2}\right)\left(\frac{1+q_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+q_1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(n+q_1-1)}{2^{n-1}} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{q_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+q_1}{2}\right)}{\Gamma(q_1)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+q_1-1)}{2^{n-1}} \quad \frac{\Gamma(q_1)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{q_1-1}\ \Gamma(q_1)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+q_1-1)}{2^{n+q_1-2}} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{n+q_1+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1+h-1}{2}\right) = \frac{(n+q_1+h-2)}{2}\ \frac{(n+q_1+h-3)}{2} \cdots \frac{(q_1+h+2)}{2}$$

$$\frac{(q_1+h)}{2}\,\Gamma\left(\frac{q_1+h}{2}\right)\left(\frac{q_1+h+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{q_1+h+1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(n+q_1+h-1)}{2^{n-1}} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{q_1+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q_1+h+1}{2}\right)}{\Gamma(q_1+h)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+q_1+h-1)}{2^{n-1}} \quad \frac{\Gamma(q_1+h)\ \Gamma\left(\frac{h}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1+h}{2}\right)}{2^{q}\ \Gamma(q_1+h)\ \Gamma(h)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+q_1+h-1)}{2^{n+q-1}} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{h}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1+h}{2}\right)}{\Gamma(h)}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1-1+h}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+h-1)\;.\;\Gamma\left(\frac{h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{h+1}{2}\right).}{2^{n-1}\qquad\Gamma(h)} \cdot \frac{\Gamma(n+q_1-1)\;\;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{n+q_1-2}}$$

$$\frac{2^{n-2}}{\Gamma(n-1)\;\;\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{2^{n+q-1}\qquad\qquad\Gamma(h)}{\Gamma(n+q_1+h-1)\;\Gamma\left(\frac{h}{2}\right)\;\Gamma\left(\frac{1+h}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(n+q_1-1)\,\Gamma(n+h-1)}{\Gamma(n+q_1-1+h)\,\Gamma(n-1)}$$

ผนวก จ.

<u>การแจกแจง β</u> (β - distribution)

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มี density function เป็น

$$f(x) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\Gamma(\frac{1}{2}a)\,\Gamma(\frac{1}{2}b)} \; x^{\frac{1}{2}a-1} \, (1-x)^{\frac{1}{2}b-1}$$

เรากล่าวว่า X มีการแจกแจง β ซึ่งมี parameters a, b เราจะเขียนแทน f(x) ด้วย $\beta(X\,;\,\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}b)$ เราจะได้ว่า moment ที่ h ของ X คือ

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(a+b)\quad \Gamma(\frac{1}{2}a+h)}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(a+b)+h\right]\Gamma(\frac{1}{2}a)}$$

<u>พิสูจน์</u>

$$E(X^h) = \int_0^1 X^h \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(a+b))}{\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{b}{2})} X^{\frac{1}{2}a-1} (1-X)^{\frac{1}{2}b-1} \, dX$$

$$= \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]}{\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{b}{2})} \int_0^1 X^{h+\frac{1}{2}a-1} (1-X)^{\frac{1}{2}b-1} \, dX$$

เพราะว่า

$$\int_0^1 X^{m-1} (1-X)^{n-1} \, dX = \beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

ดังนั้น

$$E(X^h) = \frac{\Gamma\frac{1}{2}(a+b)}{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})} \frac{\Gamma(\frac{a}{2}+h)\ \Gamma(\frac{b}{2})}{\Gamma(\frac{a+b}{2}+h)}$$

$$= \frac{\Gamma\frac{1}{2}(a+b)\ \Gamma(\frac{1}{2}a+h)}{\Gamma(\frac{a}{2})\ \Gamma\left[\frac{1}{2}(a+b)+h\right]}$$

ผนวก ฉ.

ถ้า X มี density function เป็น $\beta(X ; \frac{a}{2} ; \frac{b}{2})$[๑๒] ให้

$Y = \frac{1-X}{X} \cdot \frac{a}{b}$ จะได้ว่า Y มี density function เป็น

$$f(y) = \frac{\Gamma(\frac{a+b}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{b}{2})} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{2}} \frac{y^{\frac{b}{2}-1}}{(1+\frac{b}{a}y)^{\frac{a+b}{2}}}$$

<u>พิสูจน์</u>

$$f(y) = \beta\left(\frac{a}{by+a} ; \frac{a}{2} ; \frac{b}{2}\right)|J|$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{a+b}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{b}{2})} \left(\frac{a}{by+a}\right)^{\frac{1}{2}a-1} \left(1-\frac{a}{by+a}\right)^{\frac{1}{2}b-1} \frac{ab}{(by+a)^2}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{a+b}{2})\; a^{\frac{a}{2}}\; b^{\frac{b}{2}}\; y^{\frac{b}{2}-1}}{\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{b}{2})\; a^{\frac{a+b}{2}}\,(1+\frac{b}{a}y)^{\frac{a+b}{2}}}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{a+b}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{b}{2})} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{2}} \frac{y^{\frac{b}{2}-1}}{(1+\frac{b}{a}y)^{\frac{a+b}{2}}}$$

---

[๑๒] ดูผนวก จ.

<u>โน้ต</u> ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็ม $a = \nu_1$, $b = \nu_2$ density function

ของ Y ก็คือ $f(y) = \dfrac{\Gamma(\frac{a+b}{2})}{\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{b}{2})} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{2}} \dfrac{y^{\frac{b}{2}-1}}{(1+\frac{b}{a}y)^{\frac{a+b}{2}}}$

จากนี้เราเห็นได้ว่า Y มีการแจกแจง F ซึ่งมี ν_1, ν_2 เป็นองศาแห่งความอิสสระ

ผนวก ช.

ในหัวข้อ (๔.๒.๒), (๔.๒.๖) และ (๔.๓.๑๓) เราได้ใช้ค่าของ D^{-1} เมื่อ D เป็น matrix ในรูป

(๑) $$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}$$

และ

(๒) $$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{pmatrix}$$

โดยที่ D_{ii} อยู่ในรูป

(๓) $$D_{ii} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2m & m & \cdots\cdots & m \\ m & 2m & \cdots\cdots & m \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ m & m & \cdots\cdots & 2m \end{pmatrix}}_{p \text{ คอลัมน์}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 2m \\ m \\ \cdot \\ \cdot \\ m \end{pmatrix}}\right\} p \text{ แถว}$$

$$= D_p$$

ถ้า D เป็น matrix ในสูตร (๑) เราจะได้ว่า

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{-1} \end{pmatrix}$$

เพราะว่า

$$DD^{-1} = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

และในทำนองเดียวกัน เมื่อ D เป็น matrix ในสูตร (๒) เราจะได้ว่า

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44}^{-1} \end{pmatrix}$$

ดังนั้นจึงต้องหาค่า D_p^{-1} เมื่อ D_p คือ matrix ที่กล่าวไว้ในสูตร (๓) เราอาจแสดงได้ว่า Cofactor ของ element ในแถวแรกของ D_p ตั้งแต่คอลัมน์ที่ ๒ เป็นต้นไป มีค่าเท่ากับ -1 คูณกับ determinant ของ

$$C_{p-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} m & m & \cdots\cdots & m \\ m & 2m & \cdots\cdots & m \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ m & m & \cdots\cdots & 2m \end{pmatrix}}_{(p\,-\,1)\ \text{คอลัมน์}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} m \\ m \\ \cdot \\ \cdot \\ m \end{pmatrix}}\right\} (p - 1)\ \text{แถว}$$

ดังนั้น

$$|D_p| = 2m\,|D_{p-1}| - (p-1)m|C_{p-1}|$$

โดยการกระจาย $|C_{p-1}|$ เราได้

$$|C_{p-1}| = m^{p-1}$$

เพราะฉะนั้น $|D_p|$

$$= 2m\left[2m\,|D_{p-2}| - (p-2)\,m^{p-1}\right] - (p-1)\,m^p$$

$$= 2m\left[2m\left[2m\,|D_{p-3}| - (p-3)\,m^{p-2}\right] - (p-2)\,m^{p-1}\right] - (p-1)\,m^p$$

$$= m^p\left\{2^p - 1 \,.\, 2^{p-2} - \ldots\ldots - (p-3)\,2^2 - (p-2)2 - (p-1)\right\}$$

$$= m^p\left\{2^p - (2^p - (p+1)\right\}$$

$$= m^p\,(p+1)$$

$$\text{Adj. } D_p = \begin{pmatrix} |D_{p-1}| & -|C_{p-1}| & \cdots\cdots & -|C_{p-1}| \\ -|C_{p-1}| & |D_{p-1}| & \cdots\cdots & -|C_{p-1}| \\ -|C_{p-1}| & -|C_{p-1}| & \cdots\cdots & |D_{p-1}| \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$D_p^{-1} = \frac{1}{m\,(p+1)} \begin{pmatrix} p & -1 & \cdots\cdots & -1 \\ -1 & p & \cdots\cdots & -1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\ -1 & -1 & \cdots\cdots & p \end{pmatrix}$$

บรรณานุกรม

๑. T.W. Anderson An Introduction to Multivariate Statistical Analysis (New York. John Wiley and Sons, Inc.,1958).

๒. Robert V. Hogg and Allen T. Craig Introduction to Mathematical Statistics. (New York. The Macmillan Company, 1964).