บทที่ ๔

ประโยชน์ของทฤษฎีว่าด้วยการทดสอบสมมติฐานเชิงเส้น โดยใช้อัตราส่วนไลค์ลิฮูด

๔.๑ ข้อมูลชนิดแยกประเภทหนึ่งทาง (One - way Layout)

เราได้กล่าวถึงข้อมูลชนิดแยกประเภทหนึ่งทางมาครั้งหนึ่งแล้วในบทที่ ๒ โดยมี $Y_\alpha^{(i)}$ เป็นเวคเตอร์สุ่ม $\alpha = 1, \ldots, N_i$, $i = 1, \ldots, q$, $Y_\alpha^{(i)}$ แต่ละตัวไม่ขึ้นแก่กันและมีการแจกแจง $N(\mu^{(i)}, \Sigma)$ สมมติฐานที่เราต้องการทดสอบ คือสมมติฐาน $H_o^{(1)}$ ของหัวข้อ ๒.๒ เพื่อทดสอบสมมติฐานนี้ โดยใช้อัตราส่วนไลค์ลิฮูด เราให้ $X_1, \ldots, X_N$, $Z_\alpha, \beta, \beta_1, \beta_2$ เป็น matrices ซึ่งกำหนดไว้ในสูตร (๒.๒.๕) ถึงสูตร (๒.๒.๑๒) เช่นนี้ สมมติฐาน $H_o^{(1)}$ จึงกลายเป็น

$$H_o \; ; \; \beta_1 = 0$$

ดังนั้น matrix A ในสูตร (๒.๓.๒๗) คือ

(๔.๑.๑)
$$A = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha Z_\alpha'$$

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_1 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_2 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ N_1 & N_2 & \cdots & N_{q-1} & N \end{bmatrix}$$

อาจจะแสดงได้โดยง่ายว่า

(๔.๑.๒) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{N_1+N_q}{N_1N_q} & \frac{1}{N_q} & \cdots\cdots & \frac{1}{N_q} & -\frac{1}{N_q} \\ \frac{1}{N_q} & \frac{N_2+N_q}{N_2N_q} & \cdots\cdots & \frac{1}{N_q} & -\frac{1}{N_q} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \frac{1}{N_q} & \frac{1}{N_q} & \cdots\cdots & \frac{N_{q-1}+N_q}{N_{q-1}N_q} & -\frac{1}{N_q} \\ -\frac{1}{N_q} & -\frac{1}{N_q} & \cdots\cdots & -\frac{1}{N_q} & \frac{1}{N_q} \end{pmatrix}$$

ในกรณีนี้ matrix C ในสูตร (๒.๓.๒๖) คือ

(๔.๑.๓) $$C = \sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha Z_\alpha'$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha^{(1)}, \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha^{(2)}, \ldots, \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha^{(q-1)}, \sum_{i=1}^{q} \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha^{(i)} \right)$$

ดังนั้นจากสูตร (๔.๑.๒) และสูตร (๔.๑.๓) เราคำนวณ $C A^{-1} C'$ ได้

(๔.๑.๔) $$C A^{-1} C' = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha^{(i)} \frac{1}{N_i} \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha^{(i)\prime} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} N_i \overline{Y}^{(i)} \overline{Y}'^{(i)}$$

โดยที่

$$\overline{Y}^{(i)} = \frac{1}{N_i} \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha^{(i)}$$

ดังนั้น matrix $N \hat{\Sigma}_\Omega$ ในสูตร (๒.๓.๓๓) คือ

$$(๔.๑.๖) \quad N\hat{\Sigma}_{\Omega} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} Y_{\alpha}^{(i)} Y_{\alpha}^{(i)'} - \sum_{i=1}^{q} N_i \bar{Y}^{(i)} \bar{Y}^{(i)'}$$

$$= \sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} (Y_{\alpha}^{(i)} - \bar{Y}^{(i)})(Y_{\alpha}^{(i)} - \bar{Y}^{(i)})'$$

และในกรณีนี้ matrices A_{22} และ C_2 ในสูตร (๒.๓.๓๕)
คือ

$$A_{22} = N \qquad \text{และ}$$

$$(๔.๑.๘) \quad C_2 = \sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} Y_{\alpha}^{(i)}$$

จาก (๔.๑.๗) และ (๔.๑.๘) เราคำนวณ $C_2 A_{22}^{-1} C_2'$ ได้

$$(๔.๑.๙) \quad C_2 A_{22}^{-1} C_2' = \left(\sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} Y_{\alpha}^{(i)}\right)\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} Y_{\alpha}^{(i)'}\right)$$

$$= N\bar{Y}\bar{Y}'$$

โดยที่

$$(๔.๑.๑๐) \quad \bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} Y_{\alpha}^{(i)}$$

ดังนั้น matrix $N\hat{\Sigma}_{\omega}$ ในสูตร (๒.๓.๔๒) คือ

$$(๔.๑.๑๑) \quad N\hat{\Sigma}_{\omega} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} Y_{\alpha}^{(i)} Y_{\alpha}^{(i)'} - N\bar{Y}\bar{Y}'$$

$$= \sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} (Y_{\alpha}^{(i)} - \bar{Y})(Y_{\alpha}^{(i)} - \bar{y})'$$

ดังนั้นในกรณีนี้ เราได้ U ซึ่งกล่าวไว้ในสูตร (๒.๓.๔๕) คือ

$$(๔.๑.๑๒) \quad U = \frac{\left|\sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} (Y_{\alpha}^{(i)} - \bar{Y}^{(i)})(Y_{\alpha}^{(i)} - \bar{Y}^{(i)})'\right|}{\left|\sum_{i=1}^{q}\sum_{\alpha=1}^{N} (Y_{\alpha}^{(i)} - \bar{Y})(Y_{\alpha}^{(i)} - \bar{Y})'\right|}$$

๔.๒ ข้อมูลชนิดแยกประเภทสองทาง (Two - way Layout)

ให้ Y_{ij} $(i = 1, \ldots\ldots, I ; j = 1, \ldots\ldots, J)$ เป็นเวคเตอร์สุ่ม p - มิติ มีจำนวน IJ ตัว และ Y_{ij} ไม่ขึ้นแก่กัน สมมติ

$$E(Y_{ij}) = \mu + \lambda_i + \nu_j \; ; \quad \mu , \lambda_i , \nu_j \text{ เป็น}$$

เวคเตอร์ขนาด p - มิติ และมี Σ เป็น covariance matrix ขนาด $p \times q$ สมมติฐานที่ต้องการทดสอบคือ สมมติฐาน $H_o^{(2)}$ ของหัวข้อ ๒.๒ เพื่อทดสอบสมมติฐานนี้โดยใช้อัตราส่วนไลค์ลิฮูด เราให้ $X_1, \ldots\ldots, X_N$, Z_α β , β_1, β_2 เป็น matrices ซึ่งกำหนดไว้ในสูตร (๒.๒.๒๗) ถึงสูตร (๒.๒.๓๑) เช่นนี้ สมมติฐาน $H_o^{(2)}$ จึงกลายเป็น

$$H_o \; ; \; \beta_1 = 0$$

ดังนั้น matrix A ในสูตร (๒.๓.๒๗) คือ

(๔.๒.๑) $$A = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_\alpha Z_\alpha'$$

$$= \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc} N & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2J & J & \cdots\cdots & J & J & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & J & 2J & \cdots\cdots & J & J & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & J & J & \cdots\cdots & 2J & J & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & J & J & \cdots\cdots & J & 2J & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 2I & I & \cdots\cdots & I & I \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & I & I & \cdots\cdots & 2I & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & I & I & \cdots\cdots & I & 2I \end{array}\right] \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(I-1)\ \text{คอลัมน์}} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(J-1)\ \text{คอลัมน์}} \end{array} \begin{array}{l} \vphantom{N} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} (I-1)\ \text{แถว} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} (J-1)\ \text{แถว} \\ \vphantom{\underbrace{x}_{x}} \end{array}$$

เราสามารถคำนวนได้ว่า ๑๐

$$(๔.๒.๒)\quad A^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc}
\frac{1}{N} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{I-1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} & \cdots & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{IJ} & \frac{I-1}{IJ} & \cdots & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} & \cdots & -\frac{1}{IJ} & \frac{I-1}{IJ} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{J-1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} & \cdots & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{IJ} & \frac{J-1}{IJ} & \cdots & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} & \cdots & -\frac{1}{IJ} & \frac{J-1}{IJ}
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ (I-1)\text{ แถว} \\ \\ (J-1)\text{ แถว} \end{array}$$

(I - 1) คอลัมน์ (J-1) คอลัมน์

ในกรณีนี้ matrix C ในสูตร (๒.๓.๒๖) คือ

$$(๔.๒.๓)\quad C = \sum_{\alpha=1}^{N} X_{\alpha} Z'_{\alpha}$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij},\ \sum_{j=1}^{J} Y_{1j} - \sum_{j=1}^{J} Y_{Ij},\ \cdots\cdots,$$

$$\sum_{j=1}^{J} Y_{(I-1)j} - \sum_{j=1}^{J} Y_{Ij},\ \sum_{i=1}^{I} Y_{i1} - \sum_{i=1}^{I} Y_{iJ},\ \cdots\cdots,$$

$$\sum_{i=1}^{I} Y_{i(J-1)} - \sum_{i=1}^{I} Y_{iJ} \Big)$$

---

๑๐ ดูผนวก ข.

จากสูตร (๔.๒.๒) และสูตร (๔.๒.๓) เราคำนวณ $C A^{-1} C'$ ได้

(๔.๒.๔) $$C A^{-1} C' = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{I}\left[\left(\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{J} Y_{ij}\right)'\right] + \frac{1}{I}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}\right)'\right] - \frac{1}{IJ}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}\right)\left(\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}\right)'$$

ดังนั้น $N\hat{\Sigma}_{\Omega}$ ในสูตร (๒.๓.๓๒) คือ

(๔.๒.๕) $$N\hat{\Sigma}_{\Omega} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij} Y_{ij}' - \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{I}\left[\left(\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}\right)\left(\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}\right)'\right] - \frac{1}{I}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}\right)'\right] + \frac{1}{IJ}\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}\right)\left(\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}\right)'$$

$$= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij} Y_{ij}' - J\sum_{i=1}^{I} Y_{i.} Y_{i.}' - I\sum_{j=1}^{J} Y_{.j} Y_{.j}' + IJ\, Y_{..} Y_{..}'$$

โดยที่

$$Y_{i.} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}$$

$$Y_{..} = \frac{1}{IJ}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}$$

ในกรณีที่ A_{22} ในสูตร (๒.๓.๓๕) คือ

(๔.๒.๖. $$A_{22} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|ccccc} N & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2I & I & \cdots\cdots & I & I \\ 0 & I & 2I & \cdots\cdots & I & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & I & I & \cdots\cdots & I & 2I \end{array}\right]}_{J \text{ คอลัมน์}} \Bigg\} J \text{ แถว}$$

เราหา A_{22}^{-1} ได้ในทำนองเดียวกันกับการหา A^{-1} ในสูตร (๔.๒.๒) ว่า

$$(๔.๒.๗) \qquad A_{22}^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{N} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{J-1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} & \cdots\cdots & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} \\ 0 & -\frac{1}{IJ} & \frac{J-1}{IJ} & \cdots\cdots & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{IJ} & -\frac{1}{IJ} & \cdots\cdots & -\frac{1}{IJ} & \frac{J-1}{IJ} \end{array}\right]$$

และ C_2 ในสูตร (๒.๓.๓๕) คือ

$$(๔.๒.๘) \qquad C_2 = \left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}, \sum_{i=1}^{I} Y_{i1} - \sum_{i=1}^{I} Y_{iJ}, \cdots\cdots\cdots, \sum_{i=1}^{I} Y_{i(J-1)} - \sum_{i=1}^{I} Y_{iJ}\right).$$

จากสูตร (๔.๒.๗) และสูตร (๔.๒.๘) เราคำนวณ $C_2 A_{22}^{-1} C_2'$ ได้

$$(๔.๒.๙) \qquad C_2 A_{22}^{-1} C_2' = \frac{1}{I}\sum_{j=1}^{J}\left[\left(\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}'\right)\right]$$

$$= I \sum_{j=1}^{J} Y_{\cdot j} Y_{\cdot j}'$$

โดยที่

$$Y_{\cdot j} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} Y_{ij}$$

ดังนั้น matrix $N\hat{\Sigma}_{\omega}$ ในสูตร (๒.๓.๔๒) คือ

$$(๔.๒.๑๐) \qquad N\hat{\Sigma}_{\omega} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij} Y_{ij}' - I\sum_{j=1}^{J} Y_{\cdot j} Y_{\cdot j}'$$

ในกรณีนี้ U ซึ่งกล่าวไว้ในสูตร (๒.๓.๔๕) คือ

$$(๔.๒.๑๑)\quad U = \frac{\left|\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}Y_{ij}' - J\sum_{i=1}^{I} Y_{i.}Y_{i.}' - I\sum_{j=1}^{J} Y_{.j}Y_{.j}' + IJY_{..}Y_{..}'\right|}{\left|\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}Y_{ij}' - I\sum_{j=1}^{J} Y_{.j}Y_{.j}'\right|}$$

ถ้าเราต้องการทดสอบสมมติฐาน $H_o^{(3)}$; $\nu_j = 0$

เราจะได้ U ซึ่งกล่าวไว้ในสูตร (๒.๓.๔๒) คือ

$$(๔.๒.๑๒)\quad U = \frac{\left|\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}Y_{ij}' - J\sum_{i=1}^{I} Y_{i.}Y_{i.}' - I\sum_{j=1}^{J} Y_{.j}Y_{.j}' + IJY_{..}Y_{..}'\right|}{\left|\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} Y_{ij}Y_{ij}' - J\sum_{i=1}^{I} Y_{i.}Y_{i.}'\right|}$$

๔.๓ จตุรัสลาติน (Latin Square)

ให้ Y_{ijk} (i , $j = 1,\ldots\ldots\ldots m$, k เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งน้อยที่สุดที่ congruent กับ $j - i + 1$) เป็นเวคเตอร์สุ่ม p -มิติ จำนวน m^2 ตัว และ Y_{ijk} ไม่ขึ้นต่อกัน สมมติ

$$(๔.๓.๑)\quad E(Y_{ijk}) = \mu + r_i + c_j + t_k$$

โดยที่ μ , r_i, c_j และ t_k ต่างก็เป็นเวคเตอร์ขนาด $p \times 1$ ให้ $\Sigma = (\sigma_{kl})$ เป็น convariance matrix ขนาด $p \times p$

ในการทดสอบ

$$H_o^{(4)}\ ;\ t_k = 0$$

เราอาจใช้อัตราส่วนไลค์ลิฮูดทดสอบสมมติฐาน $H_o^{(4)}$ โดยกำหนดให้

(๔.๓.๒) $(Y_{111}, Y_{122}, \ldots\ldots, Y_{1mm}, Y_{21m}, \ldots\ldots, Y_{mm1})$

$$= (X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_N) \quad ; \quad N = m^2$$

(๔.๓.๓) $\beta = (\mu\ , r_1, \ldots\ldots, r_{m-1}, c_1, \ldots\ldots, c_{m-1}, t_1, \ldots, t_{m-1})$

$$= (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots\ldots, \beta^{(m)}, \beta^{(m+1)}, \ldots, \beta^{(2m-1)}, \ldots, \beta^{(3m-2)})$$

และ Z_α เป็นคอลัมน์ที่ α ของ matrix Z ดังได้แสดงไว้ในหน้าต่อไป

(๔.๓.๔)

$$
Z = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|c|ccccc|ccccc}
1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\cdots & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\cdots & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & -1\cdots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 1 & 1\cdots & 1 & 1 & -1 & -1 & -1\cdots & -1 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0\cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\cdots & 0 & -1 & \cdots\cdots & 1 & 0 & 0\cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\cdots & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0\cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\cdots & 0 & -1 & \cdots\cdots & 0 & 1 & 0\cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1\cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\cdots & 0 & -1 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 1\cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\cdots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0\cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\cdots & 1 & -1 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\cdots & 1 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0\cdots & 0 & -1 & -1 & 1 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0\cdots & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\cdots & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1\cdots & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\cdots & -1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0\cdots & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\cdots & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots & -1 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
1\ \text{แถว} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} (m-1)\ \text{แถว} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} (m-1)\ \text{แถว} \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} (m-1)\ \text{แถว}
\end{array}
$$

m คอลัมน์ $\quad$ m คอลัมน์ $\quad$ m คอลัมน์ $\quad$ m คอลัมน์ $\quad$ m คอลัมน์

ทั้งสิ้น m^2 คอลัมน์

ดังนั้น X_{α} , $\alpha = 1, \ldots\ldots, N$ เป็นเวคเตอร์สุ่ม N ตัวซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน และ X_{α} แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(\beta Z_{\alpha}, \Sigma)$

และ matrix A ในสูตร (๒.๓.๒๗) คือ

(๔.๓.๕) $$A = \sum_{\alpha=1}^{N} Z_{\alpha} Z_{\alpha}'$$

$$
\left[\begin{array}{c|cccccc|cccccc|cccccc}
m^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 2m & m & m & \cdots & m & m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & m & 2m & m & \cdots & m & m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & m & m & 2m & \cdots & m & m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & m & m & m & \cdots & 2m & m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & m & m & m & \cdots & m & 2m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2m & m & m & \cdots & m & m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & 2m & m & \cdots & m & m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & m & 2m & \cdots & m & m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & m & m & \cdots & 2m & m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & m & m & \cdots & m & 2m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2m & m & m & \cdots & m & m \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & 2m & m & \cdots & m & m \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & m & 2m & \cdots & m & m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & m & m & \cdots & m & 2m \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & m & m & \cdots & m & 2m
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-1 \text{ แถว} \\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-1 \text{ แถว} \\
\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-1 \text{ แถว}
\end{array}
$$

(m - 1) คอลัมน์ (m-1) คอลัมน์ (m-1) คอลัมน์

เราสามารถหา inverse ของ matrix A ในสูตร (๔.๓.๕) ได้ในทำนองเดียวกันกับการหา inverse ของ matrix A ในสูตร (๔.๒.๑) ดังนั้น inverse ของ matrix A ในสูตร (๔.๓.๕) คือ

(๔.๓.๖) A^{-1} =

$$
\left(\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc}
\frac{1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \frac{m-1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -\frac{1}{m^2} & \frac{m-1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & -\frac{1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & \frac{m-1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m-1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{m^2} & \frac{m-1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & \frac{m-1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m-1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{m^2} & \frac{m-1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & \frac{m-1}{m^2}
\end{array}\right)
$$

ในกรณีนี้ matrix C ในสูตร (๒.๓.๒๖) คือ

(๔.๓.๗) $$C = \sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha Z_\alpha'$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}, \sum_{j=1}^{m} Y_{1jk} - \sum_{j=1}^{m} Y_{mjk}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} Y_{(m-1)jk} - \sum_{j=1}^{m} Y_{mjk},$$

$$\sum_{i=1}^{m} Y_{i1k} - \sum_{i=1}^{m} Y_{imk}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} Y_{i(m-1)k} - \sum_{i=1}^{m} Y_{imk},$$

$$\sum_{i=1}^{m} Y_{ij1} - \sum_{i=1}^{m} Y_{ijm}, \sum_{i=1}^{m} Y_{ij2} - \sum_{i=1}^{m} Y_{ijm}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} Y_{ij(m-1)} - \sum_{i=1}^{m} Y_{ijm}\Big)$$

จากสูตร (๔.๓.๖) และ (๔.๓.๗) เราคำนวณ $C A^{-1} C'$ ได้

(๔.๓.๘) $$C A^{-1} C'$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{j=1} Y_{ijk}\Big)' + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)'\Big]$$

$$- \frac{1}{m^2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)' + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)'\Big]$$

$$- \frac{1}{m^2}\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)'$$

ดังนั้น matrix $N\hat{\Sigma}_{\Omega}$ ในสูตร (๒.๓.๓๒) คือ

$$(๔.๓.๙)\quad N\hat{\Sigma}_{\Omega} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}Y'_{ijk} - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} Y'_{ijk}\right)\right]$$

$$- \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} Y'_{ijk}\right)\right] - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} Y'_{ijk}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y'_{ijk}\right) + \frac{1}{m^2}\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} Y'_{ijk}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}Y'_{ijk} - m\sum_{i=1}^{m} Y_{i.k}Y'_{i.k} - m\sum_{j=1}^{m} Y_{.jk}Y'_{.jk}$$

$$- m\sum_{k=1}^{m}\left[Y_{.jk}Y'_{.jk}\right] + 2m^2 Y_{...}Y'_{...}$$

โดยที่ $Y_{i.k} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}$, $Y_{.jk} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}$

และ

$$Y_{...} = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk} = \frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk} .$$

เพื่อทดสอบ $H_o^{(4)}$ เราแบ่ง β โดย

ให้

$$\beta = (\beta_1, \beta_2)$$

โดยที่

$$(๔.๓.๑๐)\quad \beta_1 = (\beta^{(2m)}, \ldots, \beta^{(3m-2)})$$

และ

$$(๔.๓.๑๑)\quad \beta_2 = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots\ldots, \beta^{(2m-1)})$$

ดังนั้น $H_o^{(4)}$ คือ H_o เมื่อ $\beta_1 = 0$

ในกรณีนี้ matrix A_{22} ในสูตร (๒.๓.๓๕) คือ

$$
(๔.๓.๑๒)\quad A_{22} = \left(\begin{array}{c|cccc|cccc}
m^2 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\hline
0 & 2m & m & \cdots\cdots & m & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
0 & m & 2m & \cdots\cdots & m & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & m & m & \cdots\cdots & 2m & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 2m & m & \cdots\cdots & m \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & m & 2m & \cdots\cdots & m \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & m & m & \cdots & 2m
\end{array}\right)
$$

เราสามารถคำนวณหา A_{22}^{-1} ได้ในทำนองเดียวกันกับการหา A^{-1} ที่กล่าวไว้ใน สูตร (๔.๒.๖) ดังนั้นจึงได้ว่า

$$
(๔.๓.๑๓)\quad A_{22}^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccc|cccc}
\frac{1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \frac{m-1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -\frac{1}{m^2} & \frac{m-1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & -\frac{1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & \frac{m-1}{m^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{m-1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{m^2} & \frac{m-1}{m^2} & \cdots & -\frac{1}{m^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{m^2} & -\frac{1}{m^2} & \cdots & \frac{m-1}{m^2}
\end{array}\right)
$$

และ matrix C_2 ในสูตร (๒.๓.๓๕) คือ

$$(๔.๓.๑๔) \qquad C_2 = \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk},\ \sum_{j=1}^{m} Y_{1jk} - \sum_{j=1}^{m} Y_{mjk}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} Y_{(m-1)jk} - \sum_{j=1}^{m} Y_{mjk}\Big)$$

$$\Big) \sum_{i=1}^{m} Y_{i1k} - \sum_{i=1}^{m} Y_{imk}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} Y_{i(m-1)k} - \sum_{i=1}^{m} Y_{imk}\Big)$$

จากสูตร (๔.๓.๑๓) และ (๔.๓.๑๔) เราคำนวณ $C_2 A_{22}^{-1} C_2'$ ได้

$$(๔.๓.๑๕) \qquad C_2 A_{22}^{-1} C_2' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)'\Big]$$

$$+ \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)'\Big]$$

$$- \frac{1}{m^2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)'$$

ดังนั้น matrix $N\hat{\Sigma}_\omega$ ในสูตร (๒.๓.๔๒) คือ

$$(๔.๓.๑๖) \qquad N\hat{\Sigma}_\omega = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk} Y_{ijk}' - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[\Big(\sum_{j} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{j} Y_{ijk}\Big)'\Big]$$

$$- \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m} Y_{ijk}\Big)'\Big]$$

$$+ \frac{1}{m^2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}\Big)'$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk} Y_{ijk}' - m\sum_{i=1}^{m} Y_{i.k} Y_{i.k}' - m\sum_{j=1}^{m} Y_{.jk} Y_{.jk}'$$

$$+ m^2 Y_{...} Y_{...}'$$

ดังนั้น U ที่กล่าวไว้ในสูตร (๒.๓.๔๕) คือ

(๔.๓.๑๗) U =

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}Y'_{ijk} - m\sum_{i=1}^{m} Y_{i.k}Y'_{i.k} - m\sum_{j=1}^{m} Y_{.jk}Y'_{.jk} - m\sum_{k=1}^{m} Y_{.jk}Y'_{.jk} + 2m^2 Y_{...}Y'_{...}\right|}{\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ijk}Y'_{ijk} - m\sum_{i=1}^{m} Y_{i.k}Y'_{i.k} - m\sum_{j=1}^{m} Y_{.jk}Y'_{.jk} + m^2 Y_{...}Y'_{...}\right|}$$

๔.๔ ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

ผลลัพธ์สำคัญที่ได้จากการเรียบเรียงวิทยานิพนธ์นี้ก็คือ วิธีทดสอบสมมติฐานเชิงเส้นทั่ว ๆ ไป (สมมติฐาน H_o ในหัวข้อ ๒.๒) โดยใช้สถิติ U ซึ่งให้ไว้ในสูตร (๒.๓.๔๕) เป็น criterion ในการนี้ เราจำต้องทราบการแจกแจงของ U เราพบว่าในกรณีทั่ว ๆ ไปนั้น แม้จะสามารถทราบโมเมนต์ต่าง ๆ ของสถิติตัวนี้ได้โดยครบถ้วน ก็ยังเป็นการยากที่จะคำนวณหา distribution function ของมัน ดังนั้นเราจึงต้องศึกษาหา distribution function ของ U เป็นกรณี ๆ ไป ในวิทยานิพนธ์นี้ เราหาการแจกแจงของ U ได้เฉพาะในกรณีที่ข้อมูลประกอบด้วยเวคเตอร์ ๑ มิติ หรือ ๒ มิติเท่านั้น การหาการแจกแจงของ U ในกรณีที่ข้อมูลประกอบด้วยเวคเตอร์หลาย ๆ มิติ ยังคงเป็นปัญหาที่เราจะต้องทำการวิจัยกันต่อไป .