บทที่ ๓

การแจกแจงของ U

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

๓.๑ การแจกแจงของ $N\hat{\Sigma}_{\Omega}$

ทฤษฎีบทที่ ๓.๑.๑

ให้ X_α ; $\alpha = 1, \ldots, N$ เป็นเวคเตอร์สุ่ม N ตัว ซึ่งไม่ขึ้นแก่กันและมีการแจกแจง $N(\mu, \Sigma)$, $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha$ ถ้า $D = \sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})'$ จะได้ว่า D มีการแจกแจงเหมือน $\sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha S_\alpha'$; $(n = N - 1)$ โดยที่ S_α $\alpha = 1 \ldots n$ ไม่ขึ้นแก่กันและต่างมีการแจกแจง $N(0, \Sigma)$.

พิสูจน์

เราสามารถหา orthogonal matrix B ขนาด $N \times N$

$$B = (b_{\alpha\beta}) \qquad (๓.๑.๑)$$

โดยที่แถวสุดท้ายของ B มีค่า $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

เราให้

$$S_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta} X_\beta \;;\quad \alpha = 1, \ldots, N \qquad (๓.๑.๒)$$

ดังนั้น

$$S_N = \sum_{\beta=1}^{N} b_{N\beta} X_\beta = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} X_\beta = \sqrt{N}\,\bar{X} \qquad (๓.๑.๓)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha S_\alpha' = \sum_{\alpha=1}^{N}\left[\left(\sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta} X_\beta\right)\left(\sum_{\gamma=1}^{N} b_{\alpha\gamma} X_\gamma'\right)\right] \qquad (๓.๑.๔)$$

$$= \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} b_{\alpha\beta} b_{\alpha\gamma} \right) X_\beta X_\gamma'$$

$$= \sum_{\beta,\gamma=1}^{N} \delta_{\beta\gamma} X_\beta X_\gamma'$$

โดยที่ $\delta_{\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \beta = \gamma \\ 0 & \beta \neq \gamma \end{cases}$

ดังนั้น

(๓.๑.๕) $$\sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha S_\alpha' = \sum_{\beta=1}^{N} X_\beta X_\beta'$$

ในกรณีนี้ matrix D ในสูตร (๒.๓.๑๖) คือ

(๓.๑.๖) $$D = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})' = \sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha X_\alpha' - N \bar{X} \bar{X}'$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha S_\alpha' - S_N S_N' = \sum_{\alpha=1}^{N-1} S_\alpha S_\alpha'$$

ตั้งแต่นี้เป็นต้นไป เราจะใช้ n แทน $N - 1$

ดังนั้น

(๓.๑.๗) $$D = \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha S_\alpha'$$

(๓.๑.๘) $$E(S_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta} E(X_\beta) \qquad (\alpha = 1, \ldots\ldots, n)$$

$$= \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta} \mu = \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta} b_{N\beta} \sqrt{N} \mu = 0$$

$$(๓.๑.๙) \quad Cov\,(S_\alpha, S_\gamma)^{[๒]} = E\left[\left(\sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta} X_\beta\right)\left(\sum_{\varepsilon=1}^{N} b_{\gamma\varepsilon} X_\varepsilon'\right)\right]$$

$$= \sum_{\beta,\varepsilon=1}^{N} b_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\varepsilon}\, E\,(X_\beta X_\varepsilon')$$

$$= \sum_{\beta,\varepsilon=1}^{N} b_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\varepsilon}\, \delta_{\beta\varepsilon}\, \Sigma$$

$$= \sum_{\beta=1}^{N} b_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\beta}\, \Sigma = \delta_{\alpha\gamma}\, \Sigma$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๑.๒</u>

ให้ $u_1, \ldots\ldots, u_n$ เป็นตัวแปรสุ่ม n ตัว ซึ่งไม่ขึ้นแก่กันและ u_α แต่ละตัวมีการแจกแจง $N\,(\Gamma w_\alpha, 1)$ โดยที่ w_α เป็นเวคเตอร์ขนาด $q \times 1$ $(n \geq q)$ และ Γ เป็น matrix ขนาด $1 \times q$ ให้ $H = \sum_{\alpha=1}^{n} w_\alpha w_\alpha'$ เป็น non - singular matrix ถ้า $G = \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha w_\alpha' H^{-1}$ จะได้ว่า $\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^2 - GHG'$ มีการแจกแจงเหมือน $\sum_{\alpha=1}^{n-q} v_\alpha^2$ โดยที่ $v_\alpha; \alpha=1,..n-q$ ไม่ขึ้นแก่กันและต่างมีการแจกแจง N (0, 1) และได้ด้วยว่า $\sum_{\alpha=1}^{n-q} v_\alpha^2$ กับ GHG' ไม่ขึ้นต่อกัน

<u>พิสูจน์</u>

ให้

$$(๓.๑.๑๐) \quad W = (w_1, \ldots\ldots\ldots, w_n)$$

---

[๒] Covariance ของ random vector M_1 กับ M_2 คือ

$$Cov\,(M_1, M_2) = E\left[(M_1 - E\,(M_1))(M_2 - E\,(M_2))'\right]$$

และให้ F เป็น square matrix ขนาด $q \times q$ โดยที่ $FHF' = I$ ให้

(๓.๑.๑๑) $$E_2 = FW$$

และจะได้ว่า

(๓.๑.๑๒) $$E_2 E_2' = F W W' F' = FHF' = I$$

นั่นคือ E_2 เป็น matrix ขนาด $q \times n$ ซึ่งมีแถวเป็น orthogonal เวคเตอร์ที่มีขนาด ๑ หน่วย ดังนั้นเราสามารถหา matrix E_1 ขนาด $(n - q) \times n$ ซึ่งทำให้

(๓.๑.๑๓) $$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = (e_{\alpha\beta})$$

เป็น orthogonal matrix ให้

(๓.๑.๑๔) $$U = (u_1, \ldots\ldots u_n)$$

และ

(๓.๑.๑๕) $V = UE'$ เพราะฉนั้น $U = VE$ ถ้า v_α เป็นคอลัมน์ที่ α ของ V เราจะได้ว่า

(๓.๑.๑๖) $$v_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} e_{\alpha\beta} u_\beta$$

(๓.๑.๑๗) $$E(v_\alpha) = E\left(\sum_{\beta=1}^{n} e_{\alpha\beta} u_\beta\right) = \sum_{\beta=1}^{n} e_{\alpha\beta} E(u_\beta) = \sum_{\beta=1}^{n} e_{\alpha\beta} \Gamma w_\alpha$$

ถ้า $\Gamma = 0$ เราจะได้ว่า

(๓.๑.๑๘) $$E(v_\alpha) = 0$$

(๓.๑.๑๙) $$\operatorname{Cov}(v_\alpha, v_\gamma) = E\left[\left(\sum_{\beta=1}^{n} e_{\alpha\beta} u_\beta\right)\left(\sum_{\varepsilon=1}^{n} e_{\gamma\varepsilon} u_\varepsilon\right)\right]$$

$$= \sum_{\beta,\varepsilon=1}^{n} e_{\alpha\beta} e_{\gamma\varepsilon} E(u_\beta u_\varepsilon)$$

$$= \sum_{\beta,\varepsilon=1}^{n} e_{\alpha\beta} e_{\gamma\varepsilon} \delta_{\beta\varepsilon}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{n} e_{\alpha\beta} e_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}$$

ดังนั้น v_α มีการแจกแจง N (0, 1)

ในทำนองเดียวกันกับสูตร (๓.๑.๕) เราจะได้ว่า

(๓.๑.๒๐) $$\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^2$$

จาก

(๓.๑.๒๑) $$G = \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha w_\alpha' H^{-1}$$

(๓.๑.๒๒) $$G = U W' H^{-1}$$

ดังนั้น

(๓.๑.๒๓) $$G H G' = (U W' H^{-1}) H (H^{-1} W U')$$

$$= U W' H^{-1} W U'$$

$$= V E E_2' (F^{-1})' H^{-1} F^{-1} E_2 E' V'$$

$$= V \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} E_2' E_2 (E_1', E_2') V'$$

$$= V \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} (0\ I) V'$$

$$= V \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} V' = \sum_{\alpha=n-q+1}^{n} v_\alpha^2$$

จากสูตร (๓.๑.๒๐) และ (๓.๑.๒๓) เราได้

$$(๓.๑.๒๕) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^2 - G H G' = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^2 - \sum_{\alpha=n-q+1}^{n} v_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{n-q} v_\alpha^2$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^2 - G H G'$ มีการแจกแจงเหมือน $\sum_{\alpha=1}^{n-q} v_\alpha^2$
และได้ด้วยว่า $\sum_{\alpha=1}^{n-q} v_\alpha^2$ กับ $G H G'$ ไม่ขึ้นต่อกัน

<u>บทแทรกที่ ๓.๑.๑</u>

ให้ v_α ; $\alpha = 1, \ldots\ldots, n - q$ เป็นตัวแปรสุ่ม $n - q$ ตัว ซึ่งไม่ขึ้นแก่กันและ v_α แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(0, 1)$ เราได้ว่า $\sum_{\alpha=1}^{n-q} v_\alpha^2$ มีการแจกแจงเป็นแบบการแจกแจง χ^2 (χ^2 - distribution) ซึ่งมีองศาแห่งความอิสสระ $n - q$ เพราะฉนั้น $\sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^2 - \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha w_\alpha' (\sum_{\alpha=1}^{n} w_\alpha w_\alpha')^{-1} \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha w_\alpha$ มีการแจกแจง χ^2 ด้วย และมี density function เป็น

$$(๓.๑.๒๖) \qquad \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n-q)} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-q)\right]} \, t^{\frac{1}{2}(n-q)-1} \, e^{-\frac{1}{2}t}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๑.๓</u>

ให้ X_α ; $\alpha = 1, \ldots, N$ เป็นเวคเตอร์สุ่ม N ตัว ซึ่งไม่ขึ้นแก่กันและ X_α แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(\mu, I)$ ถ้า

$D = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})' = (d_{ij})$ เราจะได้ว่า joint density function ของ d_{ij} คือ

$$(๓.๑.๒๔) \qquad \frac{|D|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} D}}{2^{\frac{1}{2}np} \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]}$$

พิสูจน์

ให้

$$(๓.๑.๒๕) \qquad d_{(i)} = (d_{i,i+1}, d_{i,i+2}, \ldots\ldots, d_{ip})$$

และ

$$(๓.๑.๒๖) \qquad D_{ii} = (d_{jk}) \; ; \; j, k = 1, \ldots\ldots, p$$

เราได้

$$(๓.๑.๒๗) \qquad D_{ii} = \begin{bmatrix} d_{ii} & d_{(i)} \\ d'_{(i)} & D_{i+1,i+1} \end{bmatrix}$$

และให้

$$(๓.๑.๒๘) \qquad d_{ii.i+1,\ldots,p} = d_{ii} - d_{(i)} D^{-1}_{i+1,i+1} d'_{(i)}$$

เนื่องจาก s_α เป็นเวคเตอร์ที่กล่าวไว้โดยสูตร (๓.๑.๒) ดังนั้นเราจึงได้ว่า s_α; $\alpha=1, \ldots N$ ไม่ขึ้นแก่กัน จากสูตร (๓.๑.๘) และ (๓.๑.๙) เราได้ว่า s_α มีการแจกแจง N (O, I) ดังนั้น $s_{i\alpha}$ และ $s_{j\alpha}$ ไม่ขึ้นต่อกัน $i \neq j$ และ $s_{i\alpha}$ มีการแจกแจง N (O, 1) นั่นคือ $(s_{i1}, \ldots s_{in})$ ไม่ขึ้นกับ $(s_{j1}, \ldots, s_{jn})$ ให้

$$(๓.๑.๒๙) \qquad s_\alpha^{(j)'} = (s_{j\alpha}, s_{j+1,\alpha}, \ldots\ldots, s_{p\alpha})$$

และเนื่องจาก D เป็น matrix ที่กำหนดไว้ใน (๓.๑.๗) จึงได้ว่า

$$(๓.๑.๓๐) \qquad d_{(i)} = \sum_{\alpha=1}^{n} s_{i\alpha} s_\alpha^{(i+1)'}$$

(๓.๑.๓๑) $$D_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{n} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(i)'}$$

(๓.๑.๓๒) $$d_{ii.i+1,..p} = d_{ii} - d_{(i)} D_{i+1,i+1}^{-1} d_{(i)}'$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} s_{i\alpha}^{2} - \sum_{\alpha=1}^{n} s_{i\alpha} S_{\alpha}^{(i+1)'} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} S_{\alpha}^{(i+1)} S_{\alpha}^{(i+1)'}\right)^{-1} \sum_{\alpha=1}^{n} s_{i\alpha} S_{\alpha}^{(i+1)}$$

จากทฤษฎีบทที่ ๓.๑.๒ และบทแทรกที่ ๓.๑.๑ จะได้ว่า $d_{ii.i+1,\ldots,p}$ มีการแจกแจง χ^2 ซึ่งมีองศาแห่งความอิสสระ n - (p-i) กำหนดให้

(๓.๑.๓๓) $$S_{\alpha}^{(i+1)} = \zeta_{\alpha}^{(i+1)}$$

เราจะได้ว่า

(๓.๑.๓๔) $$d_{(i)}' = s_{i1}\zeta_{1}^{(i+1)} + s_{i2}\zeta_{2}^{(i+1)} + \ldots + s_{in}\zeta_{n}^{(i+1)}$$

(๓.๑.๓๕) $$E(d_{(i)}') = E(s_{i1}\zeta_{1}^{(i+1)} + s_{i2}\zeta_{2}^{(i+1)} + \ldots + s_{in}\zeta_{n}^{(i+1)}) = 0$$

(๓.๑.๓๖) $$\operatorname{cov}(d_{(i)}', d_{(i)}') = E\left[\left(\sum_{\alpha=1}^{n} s_{i\alpha}\zeta_{\alpha}^{(i+1)}\right)\left(\sum_{\beta=1}^{n} s_{i\beta}\zeta_{\beta}^{(i+1)'}\right)\right]$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \zeta_{\alpha}^{(i+1)} \zeta_{\beta}^{(i+1)'} \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} \zeta_{\alpha}^{(i+1)} \zeta_{\alpha}^{(i+1)'} = D_{i+1,i+1}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $d_{(i)}'$ มีการแจกแจง $N(0, D_{i+1,i+1})$ และได้ว่า joint density function ของ $d_{ii.i+1,\ldots,p}$ และ $d_{(i)}$ เมื่อกำหนด $D_{i+1,i+1}$ คือ

(๓.๑.๓๗) $$f_i(d_{ii.i+1,\ldots,p}, d_{(i)} \mid D_{i+1,i+1})$$

$$= \frac{d_{ii.i+1,\ldots,p}^{\frac{1}{2}[n-(p-i)]-1} \; e^{-\frac{1}{2} d_{ii.i+1,\ldots,p}}}{2^{\frac{1}{2}[n-(p-i)]}\,\Gamma\left\{\frac{1}{2}[n-(p-i)]\right\}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} d_{(i)} D_{i+1,i+1}^{-1} d_{(i)}'}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(p-i)} \left| D_{i+1,i+1} \right|^{\frac{1}{2}}}$$

และ joint density function ของ $d_{11.2,\ldots,p}$, $d_{(1)}$, $d_{22.3,\ldots,p}$, $d_{(2)},\ldots,$, $d_{p-1,p-1.p}$, $d_{(p-1)}$, d_{pp} คือ

(๓.๑.๓๘) $f_1(d_{11.2,\ldots,p}, d_{(1)} | D_{22}) \cdots f_{p-1}(d_{p-1,p-1.p}, d_{(p-1)} | d_{pp}) \cdot f_p(d_{pp})$

$$= \frac{d_{pp}^{\frac{1}{2}(n)-1} e^{-\frac{1}{2} d_{pp}}}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma(\frac{1}{2}n)} \cdot \prod_{i=1}^{p-1} \left\{ \frac{d_{ii,i+1,\ldots,p}^{\frac{1}{2}[n-(p-i)]-1} e^{-\frac{1}{2} d_{ii.i+1,\ldots,p}}}{2^{\frac{1}{2}[n-(p-i)]} \Gamma[\frac{1}{2}[n-(p-i)]]} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2} d_{(i)} D_{i+1,i+1}^{-1} d'_{(i)}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(p-i)} |D_{i+1,i+1}|^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

กำลังของ e ในสูตร (๓.๑.๓๘) คือ

(๓.๑.๓๙) $$-\frac{1}{2}\left[d_{pp} + \sum_{i+1}^{p-1} d_{ii.i+1,\ldots,p} + \sum_{i=1}^{p-1} d_{(i)} D_{i+1,i+1}^{-1} d'_{(i)} \right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[d_{pp} + \sum_{i=1}^{p-1} d_{ii} \right] = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} d_{ii} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} D$$

จาก[๓]

(๓.๑.๔๐) $$d_{ii.i+1,\ldots,p} = \frac{\begin{vmatrix} d_{ii} & d_{(i)} \\ d'_{(i)} & D_{i+1,i+1} \end{vmatrix}}{\left|D_{i+1,i+1}\right|} = \frac{\left|D_{ii}\right|}{\left|D_{i+1,i+1}\right|}$$

(๓.๑.๔๑) $$d_{pp} \prod_{i=1}^{p-1} d_{ii.i+1,\ldots,p} = d_{pp} \prod_{i=1}^{p-1} \frac{\left|D_{ii}\right|}{\left|D_{i+1,i+1}\right|}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

(๓.๑.๔๒) $$d_{pp}^{\frac{1}{2}n-1} \left[\prod_{i=1}^{p-1} d_{ii.i+1,\ldots,p}^{\frac{1}{2}\left[n-(p-i)\right]-1} \Big/ \left|D_{i+1,i+1}\right|^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= d_{pp}^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \; d_{pp}^{\frac{1}{2}(p-1)} \left(\prod_{i=1}^{p-1} d_{ii.i+1,\ldots,p}^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\right)\left(\prod_{i=1}^{p-1} \frac{d_{ii.i+1,\ldots,p}^{\frac{1}{2}(i-1)}}{\left|D_{i+1,i+1}\right|^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \left|D\right|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \; d_{pp}^{\frac{1}{2}(p-1)} \prod_{i=1}^{p-1} \frac{\left|D_{ii}\right|^{\frac{1}{2}(i-1)}}{\left|D_{i+1,i+1}\right|^{\frac{1}{2}i}} = \left|D\right|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}$$

กำลังของ π ใน (๓.๑.๓๘) คือ

---

[๓] ดูผนวก ก.

(๓.๑.๔๓) $\frac{1}{2}\left[(p-1)+(p-2)+\ldots+1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(p-1)\,p}{2}\right] = \frac{1}{4}\,p\,(p-1)$

กำลังของ 2 ในสูตร (๓.๑.๓๘) คือ

(๓.๑.๔๔) $-\left(\frac{1}{2}n + \sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{2}\left\{n-(p-i)\right\} + \sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{2}(p-i)\right)$

และ

$$= -\left(\frac{1}{2}\,n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1} n\right) = -\frac{1}{2}np$$

และ

(๓.๑.๔๕) $\Gamma(\frac{1}{2}n)\prod_{i=1}^{p-1}\Gamma\left\{\frac{1}{2}\left[n-(p-i)\right]\right\} = \prod_{i=1}^{p}\Gamma\left\{\frac{1}{2}(n-i+1)\right\}$

Jacobian ของการแปลง $d_{ii.i+1,\ldots,p}$ ซึ่งเป็น matrix ที่กล่าวไว้โดยสูตร (๓.๑.๒๘) คือ

(๓.๑.๔๖) $$\left|\frac{\partial\,(d_{11.2,\ldots,p},\ d_{22.3,\ldots,p},\ d_{pp})}{\partial\,(d_{11},\ d_{22},\ldots\ldots,\ d_{pp})}\right| = 1$$

ดังนั้น joint density function ของ $d_{11.2,\ldots,p}$, $d_{(1)}$, $d_{22.3,\ldots,p}$, $d_{(2)},\ldots\ldots d_{p-1,p-1,p}$, $d_{(p-1)}$ d_{pp} คือ joint density function ของ d_{11}, $d_{(1)},\ldots\ldots, d_{pp}$ ดังนั้นเราจึงได้ density function ของ $d_{11}, d_{12},\ldots, d_{pp}$

(๓.๑.๔๗) $$\frac{|D|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\ e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} D}}{2^{\frac{1}{2}np}\ \pi^{p(p-1)/4}\ \prod_{i=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๑.๔</u>

ให้ X_α , $\alpha = 1 ,\ldots, N$ เป็นเวคเตอร์สุ่ม N ตัวซึ่งไม่ขึ้นแก่กัน และ X_α แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(\mu, \Sigma)$ ถ้า D เป็น matrix ซึ่งกำหนดไว้ในทฤษฎีบทที่ ๓.๑.๓ เราจะได้ joint density function ของ d_{ij} คือ

$$(๓.๑.๔๘) \qquad \frac{|D|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \; e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} D\Sigma^{-1}}}{2^{\frac{1}{2}np} \; \pi^{p(p-1)/4} \; |\Sigma|^{\frac{1}{2}n} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]}$$

<u>พิสูจน์</u>

ให้

$$(๓.๑.๔๙) \qquad S^*_\alpha = CS_\alpha , \quad \alpha = 1 ,\ldots, N$$

โดยที่ S_α ไม่ขึ้นแก่กันและต่าง มีการแจกแจง $N(0, \Sigma)$ และ

$$(๓.๑.๕๐) \qquad C = (c_{ij})$$

เป็น triangular matrix ($c_{ij} = 0, \; i > j$) โดยที่

$$(๓.๑.๕๑) \qquad C \Sigma C' = I$$

$$(๓.๑.๕๒) \qquad E(S^*_\alpha) = E(CS_\alpha) = 0$$

$$(๓.๑.๕๓) \qquad \operatorname{Cov}(S^*_\alpha, S^*_\beta) = E(CS_\alpha S'_\beta C')$$

$$= C\,E(S_\alpha S'_\beta)\,C' = \delta_{\alpha\beta} C\Sigma C' = \delta_{\alpha\beta} I$$

ดังนั้น S^*_α มีการแจกแจง $N(0, I)$ ให้

$$(๓.๑.๕๔) \qquad D^* = C D C'$$

เนื่องจาก D และ S^*_α เป็น matricesที่กำหนดไว้ในสูตร (๓.๑.๗) และสูตร (๓.๑.๔๙) ตามลำดับ เราจึงได้ว่า

(๓.๑.๕๕) $$D^* = \sum_{\alpha=1}^{n} S^*_\alpha S^{*\prime}_\alpha$$

จากสูตร (๓.๑.๕๑) เราได้ว่า

(๓.๑.๕๖) $$|C| = 1 / \sqrt{|\Sigma|}$$

(๓.๑.๕๗) $$\Sigma = (C'C)^{-1}$$

(๓.๑.๕๘) $$|CDC'| = |D| / |\Sigma|$$

ดังนั้น

(๓.๑.๕๙) $$\mathrm{tr}\ C D C' = \mathrm{tr}\ D C C' = \mathrm{tr}\ D \Sigma^{-1}$$

แทนค่า D ด้วย C D C$'$ ลงในสูตร (๓.๑.๔๗) และเนื่องจาก Jacobian ของการแปลง D^* ซึ่งกำหนดโดยสูตร (๓.๑.๕๔) มีค่าเท่ากับ $|C|^{p+1}$ เราจะได้ joint density function ของ d_{ij} เป็น

(๓.๑.๖๐) $$\frac{|D|^{\frac{1}{2}(n-p-1)}\ e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ D\Sigma^{-1}}}{2^{\frac{1}{2}np}\ \pi^{p(p-1)/4}\ |\Sigma|^{\frac{1}{2}np} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]}$$

---

๔ ดูผนวก ง.

๓.๒ ความสัมพันธ์ระหว่าง $N\hat{\Sigma}_{\Omega}$, $N\hat{\Sigma}_{\omega}$

ทฤษฎีบทที่ ๓.๒.๑

ให้ $\hat{\beta}_{\Omega}$ และ $\hat{\beta}_{2\omega}$ เป็น matrices ซึ่งให้ไว้ใน (๒.๓.๓๒) และ (๒.๓.๓๖) ตามลำดับ แบ่ง $\hat{\beta}_{\Omega} = (\hat{\beta}_{1\Omega}, \hat{\beta}_{2\Omega})$ เช่นเดียวกับที่แบ่ง $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ใน (๒.๒.๔) เราจะได้ว่า

(๓.๒.๑) $$\hat{\beta}_{2\omega} - \hat{\beta}_{2\Omega} = (\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^{*})\, A_{12} A_{22}^{-1}$$

พิสูจน์

C เป็น matrix ซึ่งได้กล่าวไว้โดยสูตร (๒.๓.๓๒) ดังนั้นจึงได้ว่า

(๓.๒.๒) $$(\hat{\beta}_{1\Omega}, \hat{\beta}_{2\Omega}) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = (c_1, c_2)$$

$$\hat{\beta}_{1\Omega} A_{12} + \hat{\beta}_{2\Omega} A_{22} = C_2$$

(๓.๒.๓) $$\hat{\beta}_{2\Omega} = (c_2 - \hat{\beta}_{1\Omega} A_{12})\, A_{22}^{-1}$$

และ $\hat{\beta}_{2\omega}$ เป็น matrix ซึ่งให้ไว้ใน (๒.๓.๓๖)

ดังนั้น

(๓.๒.๔) $$\hat{\beta}_{2\omega} - \hat{\beta}_{2\Omega} = (\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^{*})\, A_{12} A_{22}^{-1}$$

แบ่ง

(๓.๒.๕) $$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $N\hat{\Sigma}_{\omega}$ ซึ่งเป็น matrix ที่ให้ไว้ใน (๒.๓.๓๘) คือ

(๓.๒.๖) $$N\hat{\Sigma}_{\omega} = (X - \beta_1^{*} Z_1 - \hat{\beta}_{2\omega} Z_2)(X - \beta_1^{*} Z_1 - \hat{\beta}_{2\omega} Z_2\;)'$$

$$= \left[(X - \hat{\beta}_{\Omega} Z) + (\hat{\beta}_{2\Omega} - \hat{\beta}_{2\omega}) Z_2 + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1) Z_1\right]$$

$$\left[(X - \hat{\beta}_{\Omega} Z) + (\hat{\beta}_{2\Omega} - \hat{\beta}_{2\omega}) Z_2 + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1) Z_1\right]'$$

โดยทฤษฎีบทที่ ๓.๒.๑ ดังนั้นจึงได้ว่า

$$N \hat{\Sigma}_{\omega} = \left[(X - \hat{\beta}_{\Omega} Z) - (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1) A_{12} A_{22}^{-1} Z_2 + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1) Z_1\right]$$

$$\left[(X - \hat{\beta}_{\Omega} Z) - (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1) A_{12} A_{22}^{-1} Z_2 + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1) Z_1\right]'$$

$$= \left[(X - \hat{\beta}_{\Omega} Z) + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1)(Z_1 - A_{12} A_{22}^{-1} Z_2)\right]$$

$$\left[(X - \hat{\beta}_{\Omega} Z) + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1)(Z_1 - A_{12} A_{22}^{-1} Z_2)\right]'$$

$$= (X - \hat{\beta}_{\Omega} Z)(X - \hat{\beta}_{\Omega} Z)'$$

$$+ (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1)(Z_1 - A_{12} A_{22}^{-1} Z_2)(Z_1 - A_{12} A_{22}^{-1} Z_2)'(\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1)'$$

$$= N \hat{\Sigma}_{\Omega} + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1)(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})(\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1)'$$

$$= N \hat{\Sigma}_{\Omega} + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1) A_{11.2} (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1)'$$

โดยที่

(๓.๒.๗) $$A_{11.2} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

ดังนั้นอัตราส่วนไลค์ลิฮูดเขียนได้เป็น

(๓.๒.๘) $$\lambda = \frac{\left|N \hat{\Sigma}_{\Omega}\right|^{\frac{N}{2}}}{\left|N \hat{\Sigma}_{\Omega} + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1) A_{11.2} (\hat{\beta}_{1\Omega} - \overset{*}{\beta}_1)'\right|^{N/2}}$$

นั่นคือ

$$(๓.๒.๙.) \quad U = \frac{|N\hat{\Sigma}_{\Omega}|}{|N\hat{\Sigma}_{\Omega} + (\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*) A_{11.2} (\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*)'|}$$

๓.๓ การแจกแจงของ $(\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*) A_{11.2} (\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*)'$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๓.๑</u>

ให้ $\hat{\beta}$ เป็น matrix ในสูตร (๒.๓.๒๕) เราจะได้ว่า $E(\hat{\beta}) = \beta$ ในที่นี้ β คือ matrix ในสูตร (๒.๒.๓)

<u>พิสูจน์</u>

$$(๓.๓.๑) \quad E(\hat{\beta}) = E\left(\sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha Z_\alpha' A^{-1}\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \beta Z_\alpha Z_\alpha' A^{-1} = \beta A A^{-1} = \beta$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๓.๒</u>

ให้ $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_j$ เป็นแถวที่ i และแถวที่ j ของ matrix $\hat{\beta}$ ในทฤษฎีบทที่ ๓.๓.๑ เราจะได้ covariance[๕] ระหว่างแถวที่ i และแถวที่ j ของ β คือ $\sigma_{ij} A^{-1}$

<u>พิสูจน์</u>

$$(๓.๓.๒) \quad Cov\left[(\hat{\beta}_i - \beta_i), (\hat{\beta}_j - \beta_j)\right]$$

$$= E\left\{\left[\sum_{\alpha=1}^{N} (x_{i\alpha} - E(x_{i\alpha})) Z_\alpha' A^{-1}\right]' \left[\sum_{\gamma=1}^{N} (x_{j\gamma} - E(x_{j\gamma})) Z_\gamma' A^{-1}\right]\right\}$$

---

[๕] Covariance ของ random vector (row vectors) R_1 กับ R_2 คือ

$$cov(R_1, R_2) = E\left([R_1 - E(R_1)]'[R_2 - E(R_2)]\right)$$

$$= A^{-1} E\left\{ \left(\sum_{\alpha=1}^{N} (x_{i\alpha} - E(x_{i\alpha}))\, Z_\alpha\right)\left(\sum_{\gamma=1}^{N} (x_{j\gamma} - E(x_{j\gamma}))\, Z_\gamma\right)' \right\} A^{-1}$$

$$= A^{-1} \sum_{\alpha,\gamma=1}^{N} E\left[(x_{i\alpha} - E(x_{i\alpha}))(x_{j\gamma} - E(x_{j\gamma}))\right] Z_\alpha Z_\gamma' A^{-1}$$

$$= A^{-1} \sum_{\alpha,\gamma=1}^{N} \delta_{\alpha\gamma}\, \sigma_{ij} Z_\alpha Z_\gamma' A^{-1}$$

$$= A^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} \sigma_{ij} Z_\alpha Z_\alpha' A^{-1} = \sigma_{ij} A^{-1}$$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๓.๑</u>

ให้ $(\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*)\, A_{11.2}\, (\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*)'$ เป็นปริมาณเวคเตอร์ที่ให้ไว้ในสูตร (๓.๒.๘) ถ้า Y_γ ; $\gamma = 1,\dots,q_1$ เป็นเวคเตอร์ q_1 ตัวที่ไม่ขึ้นต่อกันและ Y_γ แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(0, \Sigma)$ เราจะได้ว่า

$(\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*)\, A_{11.2}\, (\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*)'$ มีการแจกแจงเหมือน $\sum_{\gamma=1}^{q_1} Y_\gamma Y_\gamma'$

<u>พิสูจน์</u>

covariance ระหว่างแถวที่ i และแถวที่ j ของ $\hat{\beta}_{1\Omega}$ คือผลคูณระหว่าง σ_{ij} กับ submatrix หนึ่งของ A^{-1} submatrix นี้คือ $A^{-1}_{11.2}$ [๖]
ให้ E เป็น matrix ขนาด $q_1 \times q_1$ โดยที่

(๓.๓.๓) $$E\, A_{11.2}\, E' = I$$

และให้

(๓.๓.๔) $$\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^* = YE = (Y_1, \dots, Y_{q_1})\, E$$

---

๖ ดูผนวก ค.

(๓.๓.๕) $(\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*) A_{11.2} (\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*)' = Y' E' A_{11.2} E Y$

$$= Y' Y = \sum_{\gamma=1}^{q_1} Y_\gamma Y_\gamma'$$

(๓.๓.๖) $E(Y) = E\left[(\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*) E^{-1}\right] = 0$

เราเขียนแทนแถวที่ i ของ $\hat{\beta}_{1\Omega}$ ด้วย $\hat{\beta}_{i1}$ และแถวที่ i ของ Y ด้วย $\tilde{Y}_i$ ดังนั้น

(๓.๓.๗) $\mathrm{Cov}(\tilde{Y}_i, \tilde{Y}_j) = E\left[(E^{-1})'(\hat{\beta}_{i1} - \beta_{i1}^*)'(\hat{\beta}_{j1} - \beta_{j1}^*) E^{-1}\right]$

$$= \sigma_{ij} \left[(E^{-1})' A_{11.2} E'\right]^{-1} = \sigma_{ij} I$$

ดังนั้นจึงได้ว่า Y_γ มีการแจกแจง $N(0, \Sigma)$

๓.๔ การแจกแจงวิชาร์ท (Wishart Distribution)

นิยามที่ ๓.๔.๑

ให้ $D = (d_{ij})$ เป็น real positive definite symmetric matrix ขนาด $p \times p$ โดยที่ d_{ij} เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้า joint density function ของ D เขียนได้ดังที่กล่าวไว้ในสูตร (๓.๑.๖๐) เรากล่าวว่า D มีการแจกแจงวิชาร์ท และเขียนโดยย่อว่า D มีการแจกแจง $W(\Sigma, n)$

ข้อสังเกต เราจะเห็นว่า $N\hat{\Sigma}_\Omega$ มีการแจกแจง $W(\Sigma, n)$ และ $(\hat{\beta}_{1\Omega} - \beta_1^*) A_{11.2} (\hat{\beta}_1 - \beta_1^*)'$ มีการแจกแจง $W(\Sigma, q_1)$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๔.๑</u>

ถ้า $S_1, \ldots\ldots, S_n$ เป็นเวคเตอร์สุ่ม n ตัว ซึ่งไม่ขึ้นต่อกัน และ S_α แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(0, \Sigma)$, $D = \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha S_\alpha'$ เราจะได้ว่า characteristic function ของ $D_{11}, \ldots\ldots, D_{pp}, 2D_{12}, \ldots, 2D_{p-1,p}$ คือ

$$(๓.๔.๑) \qquad \varphi(\Theta) = E\left[\exp\left(i\, tr\, D\,\Theta\right)\right] = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}n}}{|\Sigma^{-1} - 2i\Theta|^{\frac{1}{2}n}}$$

<u>พิสูจน์</u>

$$(๓.๔.๒) \qquad D = \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha S_\alpha'$$

ให้ $\Theta = (\Theta_{ij})$ เป็น symmetrix matrix ขนาด $p \times p$ characteristic function ของ $D_{11}, \ldots, D_{pp}, 2D_{12}\ 2D_{13}, \ldots, 2D_{p-1,p}$ คือ

$$(๓.๔.๓) \qquad E\left[\exp\left(i\, tr\, D\,\Theta\right)\right] = E\left[\exp\left(i\, tr \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha S_\alpha' \Theta\right)\right]$$

$$= E\left[(\exp)(i\, tr \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha' \Theta S_\alpha)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(i \sum_{\alpha=1}^{n} S_\alpha' \Theta S_\alpha\right)\right]$$

$$= \prod_{\alpha=1}^{n} E\left[\exp\left(i S_\alpha' \Theta S_\alpha\right)\right]$$

$$= \left\{E\left|\exp\left(i S' \Theta S\right)\right|\right\}^n$$

โดยที่ S เป็นเวคเตอร์สุ่ม $p \times 1$ และมีการแจกแจง $N(0, \Sigma)$ และเราสามารถหา non - singular matrix B ขนาด $p \times p$ โดยที่

$$(๓.๔.๔) \qquad B' \Sigma^{-1} B = I$$

และ

(๓.๔.๕) $$B'\Theta^{-1}B = W = (w_{jj})$$ เป็น real diagonal matrix

ขนาด $p \times p$

ให้

(๓.๔.๖) $$S = BY$$

ดังนั้น

(๓.๔.๗) $$E\left[\exp(i\, S'\Theta S)\right] = E\left[\exp(i\, Y' W Y)\right]$$

$$= E\left[\prod_{j=1}^{p} (\exp i\, w_{jj}\, y_j^2)\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{p} E\left[\exp i\, w_{jj}\, y_j^2\right]$$

และเนื่องจาก y_j มีการแจกแจง $N(0, 1)$ ดังนั้น

(๓.๔.๘) $$E\left[\exp i\, w_{jj}\, y_j^2\right] = (1 - 2i\, w_{jj})^{-\frac{1}{2}}$$

(๓.๔.๙) $$\prod_{j=1}^{p} E\left[\exp i\, w_{jj}\, y_j^2\right] = |I - 2i\, W|^{-\frac{1}{2}}$$

$|I - 2iW|$ เป็น diagonal matrix

(๓.๔.๑๐) $$|I - 2iW| = |B'\Sigma^{-1}B - 2iB'\Theta B|$$

$$= |B'(\Sigma^{-1} - 2i\Theta)B|$$

$$= |B'|\,|\Sigma^{-1} - 2i\Theta|\,|B|$$

$$= |B|^2\,|\Sigma^{-1} - 2i\Theta|$$

จากสูตร (๓.๔.๔) ได้

(๓.๔.๑๑) $$|B|^2 = 1 / |\Sigma^{-1}|$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

(๓.๔.๑๒) $$E\left[\exp(i \operatorname{tr} D \Theta)\right] = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}n}}{|\Sigma^{-1} - 2i\Theta|^{\frac{1}{2}n}}$$

<u>โน้ต</u> โดยอาศัย Uniqueness Theorem ของ Characteristic Function ถ้า D มีการแจกแจง $W(\Sigma, n)$ Characteristic Function ของ D ย่อมเป็น

(๓.๔.๑๓) $$\varphi(\Theta) = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}n}}{|\Sigma^{-1} - 2i\Theta|^{\frac{1}{2}n}}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๔.๒</u>

ถ้า D_1, D_2 ไม่ขึ้นต่อกันและแต่ละตัวมีการแจกแจง $W(\Sigma, n_1)$, $W(\Sigma, n_2)$ ตามลำดับ เราจะได้ว่า

(๓.๔.๑๔) $$D = D_1 + D_2$$

มีการแจกแจง $W(\Sigma, n_1 + n_2)$

<u>พิสูจน์</u>

D_1, D_2 มีการแจกแจง $W(\Sigma, n_1)$ และ $W(\Sigma, n_2)$ ตามลำดับ ดังนั้น

(๓.๔.๑๕) $$E\left[\exp(i \operatorname{tr} D_1 \Theta)\right] = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}n_1}}{|\Sigma^{-1} - 2i\Theta|^{\frac{1}{2}n_1}}$$

และ

(๓.๔.๑๖) $$E\left[\exp(i \operatorname{tr} D_2 \Theta)\right] = \frac{|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}n_2}}{|\Sigma^{-1} - 2i\Theta|^{\frac{1}{2}n_2}}$$

(๓.๔.๑๗) $E\left[\exp\left(i\ \mathrm{tr}\ (D_1+D_2)\Theta\right)\right] = E\left[\exp(i\ \mathrm{tr}\ D_1\Theta)\right] \cdot E\left[\exp\left(i\ \mathrm{tr}\ D_2\Theta\right)\right]$

$$= \frac{|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}{|\Sigma^{-1} - 2i\Theta|^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)}}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $D_1 + D_2$ มีการแจกแจง $W(\Sigma, n_1 + n_2)$

<u>ทฤษฎีบทที่ ๓.๔.๓</u>

ให้ U_α ; $\alpha = 1, \ldots\ldots, m$ **เป็นเวคเตอร์สุ่ม**m ตัวที่ไม่ขึ้นแก่กัน และ U_α แต่ละตัวมีการแจกแจง $N(O, \Sigma)$ ถ้า $F = \sum_{\alpha=1}^{m} U_\alpha U_\alpha'$ จะได้ว่า moment ที่ - h ของ $|F|$ คือ

(๓.๔.๑๘) $$|\Sigma|^{-h} \prod_{i=1}^{p} \left\{ 2^{-h} \frac{\Gamma\left[\left(\frac{1}{2}(m+1-i)-h\right]\right.}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)\right]} \right\} = 2^{-hp}|\Sigma|^{-h} \frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)-h\right]}{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)\right]}$$

<u>พิสูจน์</u>

ให้

(๓.๔.๑๙) $$W_\alpha = C\,U_\alpha$$

โดยที่

(๓.๔.๒๐) $C\Sigma C' = I$ เราหาการแจกแจงของ W_α ในทำนองเดียวกับการหาการแจกแจงของ S_α^* ซึ่งแสดงไว้ในสูตร (๓.๑.๔๙) ถึงสูตร (๓.๑.๕๓) ดังนั้นเราจึงได้ว่า W_α มีการแจกแจง $N(0, I)$ และจากสูตร (๓.๔.๒๐) ได้

(๓.๔.๒๑) $|C C'| = I / |\Sigma|$

ให้

(๓.๔.๒๒) $B = \sum_{\alpha=1}^{m} W_\alpha W_\alpha' = \sum_{\alpha=1}^{m} C U_\alpha U_\alpha' C' = C F C'$

(๓.๔.๒๓) $|B| = |F| / |\Sigma|$

ให้

(๓.๔.๒๔) $B_{ii} = (b_{jk})$; $j, k = i, \ldots\ldots, p$

(๓.๔.๒๕) $b_{(i)} = (b_{i,i+1}, b_{i,i+2}, \ldots\ldots, b_{ip})$

และ

(๓.๔.๒๖) $b_{ii.i+1,\ldots,p} = b_{ii} - b_{(i)} B^{-1}_{i+1,i+1} b'_{(i)}$

ดังนั้น

(๓.๔.๒๗) $|B| = b_{11.2,\ldots,p} \cdot b_{22.3,\ldots\ldots,p} \cdot \ldots\ldots b_{pp}$

ดังได้กล่าวไว้ในทฤษฎีบทที่ ๓.๑.๓ ว่า $b_{11.2,\ldots\ldots,p}, \ldots\ldots, b_{pp}$ ไม่ขึ้นแก่กันและ $b_{ii.i+1,\ldots,p}$ แต่ละตัวมีการแจกแจง χ^2 ซึ่งมีองศาแห่งความอิสสระ $m - (p-i)$ ดังนั้น $|B|$ มีการแจกแจง $\chi^2_m \cdot \chi^2_{m-1} \ldots\ldots \chi^2_{m-p+1}$ จากสูตร (๓.๔.๒๒) ได้

(๓.๔.๒๘)
$$|F| = |\Sigma| \cdot |B|$$
$$= |\Sigma| \chi^2_m \cdot \chi^2_{m-1} \ldots\ldots \chi^2_{m-p}$$

เนื่องจาก moment ที่ - h ของตัวแปรสุ่ม χ^2 ซึ่งมีองศาแห่งความอิสสระ m มีค่า

(๓.๔.๒๙)
$$\frac{2^{-h}\,\Gamma(\frac{1}{2}m - h)}{\Gamma(\frac{1}{2}m)}$$

ดังนั้นเราจึงได้ว่า monent ที่ $-h$ ของ $|F|$ คือ

(๓.๔.๓๐) $$|\Sigma|^{-h} \prod_{i=1}^{p} \left\{ \frac{2^{-h}\, \Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)-h\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)\right]} \right\}$$

$$= 2^{-hp} \, |\Sigma|^{-h} \, \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\left(\frac{1}{2}(m+1-i)-h\right)\right]}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\frac{1}{2}(m+1-i)\right]}$$

๓.๕ โมเมนต์ของ U

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ให้

(๓.๕.๑) $$G = N \hat{\Sigma}_{\Omega}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า U ในสูตร (๓.๒.๙) คือ

(๓.๕.๒) $$U = \frac{|G|}{\left|G + \sum_{\gamma}^{q_1} Y_\gamma Y_\gamma'\right|} = \varphi(G, Y)$$

ให้

(๓.๕.๓) $F = G + \sum_{\gamma=1}^{q_1} Y_\gamma Y_\gamma'$ ดังนั้น moment ที่ h ของ U คือ

(๓.๕.๔) $$E(U^h) = E\left(|G|^h \, |F|^{-h}\right)$$

$$= \int\cdots\int K(\Sigma, n)\, |G|^h \, |E|^{-h} \, |G|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \exp\left(-\frac{1}{2} tr\, \Sigma^{-1} G\right) (2\pi)^{-\frac{1}{2}q_1 p} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}q_1}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i}^{q_1} Y_i' \, \Sigma^{-1} \, Y_i\right) dG \; dY$$

โดยที่

(๓.๕.๕) $$K^{-1}(\Sigma, n) = 2^{\frac{1}{2}np} \pi^{p(p-1)/4} |\Sigma|^{\frac{1}{2}n} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left[\left(\frac{1}{2}(n+1-i)\right)\right]$$

และ

(๓.๕.๖) $$d\,G = d\,g_{11}, \ldots\ldots, d\,g_{pp}$$

(๓.๕.๗) $$d\,Y = d\,y_{11}, \ldots\ldots, dy_{pq_1}$$

(๓.๕.๘) $$E(U^h) = \frac{K(\Sigma, n)}{k(\Sigma, n+2h)} \int\ldots\int |F|^{-h} K(\Sigma, n+2h) |G|^{\frac{1}{2}(n+2h-p-1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}G\right)$$
$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}q_1 p} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}q_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q_1} Y_i' \Sigma^{-1} Y_i\right) d\,G\,d\,Y$$

จากข้างบนนี้ทำให้ได้ว่า G มีการแจกแจง $W(\Sigma, n+2h)$ **และเนื่องจาก** F เป็น matrix ที่กล่าวไว้ในสูตร **(๓.๕.๓)** เราจึงได้ว่า F มีการแจกแจง $W(\Sigma, n+2h+q_1)$ ดังนั้น

(๓.๕.๙) $$E(U^h) = \frac{K(\Sigma,n)}{K(\Sigma,n+2h)} \int\ldots\int |F|^{-h} W(F|\Sigma, n+2h+q_1)\,d\,F$$

เนื่องจาก

(๓.๕.๑๐) $$E(|F|^{-h}) = \int\ldots\int |F|^{-h} W(F|\Sigma, n+2h+q_1)\,d\,F$$

และโดยทฤษฎีบทที่ ๓.๔.๓ เราได้

(๓.๕.๑๑) $$E(|F|^{-h}) = 2^{-hp}|\Sigma|^{-h}\left\{\frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+2h+q_1+1-i)-h\right]}{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+2h+q_1+1-i)\right]}\right\}$$

$$= 2^{-hp}|\Sigma|^{-h}\left\{\frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(N-q_2+1-i)\right]}{\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left[\frac{1}{2}(N-q_2+1-i)+h\right]}\right\}$$

ดังนั้น

(๓.๕.๑๒) $$E(U^h) = \prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(N-q_1-q_2+1-i)+h\right].\Gamma\left[\frac{1}{2}(N-q_2+1-i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(N-q_1-q_2+1-i)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(N-q_2+1-i)+h\right]}\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)+h\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+q_1+1-i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+q_1+1-i)+h\right]}\right\}$$

ในที่นี้และต่อไปเราจะใช้ $n = N - q$.

๓.๖ การแจกแจงของ U เมื่อ $p = 2$

ให้ $p = 2$ ดังนั้น เราจะได้ $E(U^h)$ ในสูตร (๓.๕.๑๒) คือ

(๓.๖.๑) $$E(U^h) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+h)\,\Gamma(\frac{n+q_1}{2})\,.\,\Gamma(\frac{n-1}{2}+h)\,\Gamma(\frac{n+q_1-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{n+q_1}{2}+h)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\Gamma(\frac{n+q_1-1}{2}+h)}$$

(๓.๖.๒) $$E(\sqrt{U})^h = E(U^{\frac{h}{2}})$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1+h}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+q_1-1+h}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(n-1+q_1)\,\Gamma(n-1+h)}{\Gamma(n-1+q_1+h)\,\Gamma(n-1)}$$ [๗]

$$= \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(2(n-1)+2q_1)\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(2(n-1)+h\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(2(n-1)+2q_1)+h\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}(2(n-1)\right]}$$

นี่ก็คือ moment ที่ h ของ β - distribution ซึ่งมี parameters $a = 2(n-1)$, $b = 2q_1$[๘] ดังนั้น $\sqrt{U}$ มี distribution เป็น $\beta(\sqrt{U}; \frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ซึ่งมี parameters $a = 2(n-1)$, $b = 2q_1$ ดังนั้นจึงได้ว่า[๙]

(๓.๖.๓) $$F = \frac{1-\sqrt{U}}{\sqrt{U}} \cdot \frac{n-1}{q}$$ มีการแจกแจง F

และมี $2(n-1)$, $2q_1$ เป็นองศาแห่งความอิสสระ

---

๗ ดูผนวก ง.

๘ ดูผนวก จ.

๙ ดูผนวก ฉ.