บทที่ ๒

W Test

๒.๑ นิยาม

ให้

(๒.๑.๑)

$$\begin{matrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ X_{1n} & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{matrix}$$

เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่ไม่ขึ้นต่อกัน (independent continuous random variables)

ให้

(๒.๑.๒)
$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } X_{1j} < X_{ij} \\ 1 & \text{ถ้า } X_{1j} > X_{ij} \end{cases}$$

(๒.๑.๓)
$$W_j = \sum_{i=2}^{k} W_{ij}$$

(๒.๑.๔)
$$W = \sum_{j=1}^{n} W_j$$

เราจะใช้ W เป็นตัวสถิติในการทดสอบดูว่า $X_{1j} > X_{ij}$ $(2 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq n)$ หรือไม่

ให้ H_o เป็นสมมติฐาน

(๒.๑.๕) $$H_o : \text{Prob}\ (X_{i_1 j} < X_{i_2 j} < \dots < X_{i_k j}) = \frac{1}{k!}$$

สำหรับทุก ๆ การจัดลำดับ (permutation) $i_1, i_2, \dots, i_k$
เราจะปฏิเสธสมมติฐาน H_o เมื่อ W มีค่ามากเกินไป ในการนี้เราจำต้องหาค่า W_α ไว้สำหรับพิจารณาเปรียบเทียบกับค่า W ที่ได้จากการทดลอง เราหาค่า W_α โดยการเลือก W_α ให้ความน่าจะเป็นของการปฏิเสธสมมติฐานเมื่อมันเป็นจริงมีค่าน้อยพอ นั่นคือ เลือก W_α ให้

$$\text{Prob}\ (W \geq W_\alpha) \leq \alpha \quad \text{โดยที่} \quad 0 < \alpha < 1$$ เราเรียก α ว่า

ระดับความมีนัยสำคัญ (ในทางปฏิบัติเรานิยมใช้ $\alpha = 0.01$ หรือ 0.05)
และเรียกค่า W_α ว่า ค่าวิกฤติ (critical value)

๒.๒ การกระจายของ W

เราจะศึกษาการกระจายของ W ภายใต้ H_o จาก H_o เราได้

(๒.๒.๑) $$\text{Prob}\ (W_j = 0) = \dots = \text{Prob}\ (W_j = k-1) = \frac{1}{k}$$

เพื่อความสะดวกในการศึกษา power ของการทดสอบ เราให้

(๒.๒.๒) $$\text{Prob}(W_j = j) = p_j$$

โดยที่ $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$

ให้

$G_{w_j}(s)$ เป็น generating function ของ W_j ดังนั้น

(๒.๒.๓) $$G_{w_j}(s) = p_o + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_{k-1} s^{k-1}$$

โดยที่ $p_o + p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1} = 1,\ p_j \geq 0,\ j = 0, 1, 2, \dots, k-1$

เนื่องจาก W_i และ W_j ไม่ขึ้นต่อกันสำหรับ $1 \leq i, j \leq n$

และ $$W = \sum_{j=1}^{n} W_j$$

เราได้

(๒.๒.๔) $$G_W(s) = (p_o + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_{k-1} s^{k-1})^n$$

$$= \sum \dots \sum_{n_o + \dots + n_{k-1} = n} \frac{n!}{n_o!\, n_1! \dots n_{k-1}!}\, p_o^{n_o} (p_1 s)^{n_1} \dots (p_{k-1} s^{k-1})^{n_{k-1}}$$

$$= \sum \dots \sum_{n_o + \dots + n_{k-1} = n} \frac{n!}{n_o!\, n_1! \dots n_{k-1}!}\, p_o^{n_o} p_1^{n_1} \dots p_{k-1}^{n_{k-1}} s^{n_1 + 2n_2 + \dots + (k-1)n_{k-1}}$$

เพราะฉะนั้น

(๒.๒.๕) $$\text{Prob}(W=r) = \sum \dots \sum_{n_1 + 2n_2 + \dots (k-1)n_{k-1} = r} \frac{n!}{n_o!\, n_1! \dots n_{k-1}!}\, p_o^{n_o} p_1^{n_1} \dots p_{k-1}^{n_{k-1}}$$

เมื่อแทนค่า $p_o = p_1 = p_2 = \dots p_{k-1} = \frac{1}{k}$

จะได้

(๒.๒.๖) $$\text{Prob}\ (W=r) = \sum_{n_1+2n_2+\dots+(k-1)n_{k-1}=r} \frac{n!}{n_o!\,n_1!\dots n_{k-1}!}\left(\frac{1}{k}\right)^n$$

จากสมการข้างบนเราอาจคำนวณค่าวิกฤติ W_α สำหรับค่าต่าง ๆ ของ n ได้

๒.๓ <u>W Test เมื่อ $k = 2$</u>

เมื่อ $k = 2$ ข้อมูลจะมีลักษณะเป็น

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ X_n & Y_n \end{matrix}$$

(๒.๓.๑) $$W_i = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } X_i < Y_i \\ 1 & \text{ถ้า } X_i > Y_i \end{cases}$$

(๒.๓.๒) $$W = \sum_{i=1}^{n} W_i,\ i = 1, 2, \dots, n$$

ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่า W คือจำนวน X_i ที่ $X_i > Y_i$ นั่นเอง

สำหรับ

(๒.๓.๓) H_o : Prob $(X_i < Y_i) = \frac{1}{2}$

เราจะปฏิเสธสมมติฐานนี้เมื่อ $W \geq W_\alpha$ เราคำนวณ W_α ได้จากการกระจายของ W โดยการให้ W_α เป็นจำนวนเต็มซึ่งมีค่ามากที่สุดที่ทำให้

(๒.๓.๔) $$\sum_{r=W_\alpha}^{r=n} \text{Prob}(W=r) = \sum_{r=W_\alpha}^{r=n} \frac{n!}{r!(n-r)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \alpha$$

ตารางข้างล่างแสดงการหาค่าวิกฤติ W_α เมื่อ $n = 10$, $\alpha = 0.05$

0.0107

n		8	9	10
Prob(W=r)		0.0440	0.0097	0.0010

0.0547

นั่นคือ เมื่อ $n = 10$, $\alpha = 0.05$, $W_\alpha = 9$

ตารางที่ ๑ แสดงค่าวิกฤติ w_{α} เมื่อ n มีค่าต่าง ๆ

n	$w_{.01}$	$w_{.05}$	n	$w_{.01}$	$w_{.05}$
8	8	7	17	14	13
9	9	8	18	15	13
10	10	9	19	15	14
11	10	9	20	16	15
12	11	10	25	19	18
13	12	10	30	24	19
14	12	11	40	28	27
15	13	12	50	34	32
16	14	12	100	63	59

๒.๔ W Test เมื่อ $k = 3$

ให้

$$
\begin{array}{ccc}
X_1 & Y_1 & Z_1 \\
X_2 & Y_2 & Z_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
X_n & Y_n & Z_n
\end{array}
\qquad (๒.๔.๑)
$$

เป็นตัวแปรสุ่มที่ต่อเนื่องและไม่ขึ้นต่อกัน (independent continuous random variable)

ให้ $X_{1j} = X_j$, $X_{2j} = Y_j$, $X_{3j} = Z_j$ เราจะได้

(๒.๔.๒) $$W_{2j} = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } X_j < Y_j \\ 1 & \text{เมื่อ } X_j > Y_j \end{cases}$$

(๒.๔.๓) $$W_{3j} = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } X_j < Z_j \\ 1 & \text{เมื่อ } X_j > Z_j \end{cases}$$

(๒.๔.๔) $$W_j = W_{2j} + W_{3j}$$

(๒.๔.๕) $$W = \sum_{j=1}^{n} W_j$$

ในการทดสอบสมมติฐาน

(๒.๔.๖) $$H_o : \text{Prob}(X_{i_1 j} < X_{i_2 j} < X_{i_3 j}) = \frac{1}{3!}$$

สำหรับทุก ๆ การจัดลำดับ i_1, i_2, i_3 $(i=1, 2, 3;\ 1 \leq j \leq n)$

เราจะปฏิเสธสมมติฐานเมื่อ $W \geq W_\alpha$ เราคำนวณหาค่า W_α ได้จากการกระจายของ W โดยการให้ W_α เป็นจำนวนเต็มซึ่งมีค่ามากที่สุดที่ทำให้

(๒.๔.๗) $$\sum_{r=W_\alpha}^{r=2n} \text{Prob}(W=r) = \sum_{r=W_\alpha}^{r=2n} \sum_{\ell+2k=r} \frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\leq \alpha$$

ตารางข้างล่างแสดงการหาค่าวิกฤติ W_α เมื่อ $n = 8$, ที่ระดับความมีนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$

0.01942 (12–16 ... : 13–16)

n		12	13	14	15	16
Prob(W=r)		0.03458	0.01468	0.00468	0.00104	0.00013

0.05400

จากตารางนี้เราเห็นได้ว่า เมื่อ $n = 8$, $\alpha = 0.05$, เราได้ $W_\alpha = 13$

ตาราง[๑] ที่ ๒ แสดงค่าวิกฤติ W_{α} เมื่อ n มีค่าต่าง ๆ

n	$W_{.01}$	$W_{.05}$	n	$W_{.01}$	$W_{.05}$
6	11	10	44	63	60
8	14	13	46	65	63
10	17	15	48	68	65
12	19	18	50	73	71
14	22	20	52	75	73
16	24	22	54	77	76
18	27	25	56	79	78
20	29	27	58	81	80
22	32	29	60	84	82
24	34	31	62	86	84
26	37	34	64	89	87
28	39	36	66	93	91
30	44	41	68	97	94
32	47	44	70	100	98
34	50	47	72	103	100
36	52	50	74	105	103
38	55	53	76	108	106
40	58	55	78	111	108
42	60	58	80	112	111

---

[๑] ดูภาคผนวกท้ายเล่ม