บทที่ 5

การวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลา

5.1 กล่าวนำ

คำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงเวลาของวงจรใด ๆ จะได้จากการแก้ระบบสมการดิฟเฟอเรนเชียลของวงจรนั้น ๆ ซึ่งอยู่ในรูป

$$F(x, \dot{x}, t) = 0 \qquad \text{...(5.1.1)}$$

เมื่อ

x = ตัวแปรคำตอบที่ต้องการหา

$\dot{x}$ = derivative ของ x เมื่อเทียบกับเวลา

t = เวลา

การแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลนี้ จะใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) โดยแบ่งช่วงเวลาที่ต้องการหา [0, T] ออกเป็นจุดเวลาย่อย ๆ (Discrete timepoints) 0, t_1 , t_2 ,. ...., T เพื่อหาคำตอบที่แต่ละจุดเวลานั้น ๆ ช่วงเวลาย่อย ๆ ระหว่างจุดเวลาแต่ละจุดจะมีค่าไม่เท่ากัน (Variable Timestep) โดยใช้อัลกอริทึมใน การหาช่วงเวลาย่อย เพื่อให้ประหยัดช่วงเวลาคำนวณได้อย่างปลอดภัย

5.2 การอินทิเกรตแบบ Forward Euler

การอินทิเกรตแบบ Forward Euler จะทำได้โดยการกระจายคำตอบ x_{n+1} ด้วย Taylor series รอบจุด t_n ดังนี้

$$x_{n+1} = x_n + h_n\dot{x}_n + \frac{h_n^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\bigg|_{t_n} \qquad ...(5.2.1)$$

เมื่อ

$x_{n+1} = x(t_{n+1})$

$x_n = x(t_n)$

$\frac{h_n^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}$ = LTE (Local Truncation Error)

ขั้นตอนของการอินทิเกรตแบบ Forward Euler มีดังนี้

1. หา $\dot{x}_n$ โดย

$$\dot{x}_n = (x_n - x_{n-1})/h_{n-1} \qquad ...(5.2.2)$$

2. คำนวณหา x_{n+1} โดย

$$x_{n+1} = x_n + h_n \cdot \dot{x}_n \qquad ...(5.2.3)$$

ค่า x_{n+1} ที่ได้จะมีค่าแตกต่างกับค่าคำตอบที่แท้จริง ไม่เกินกว่าค่า LTE ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{h_n^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t_n}$

5.3 การอินทิเกรตแบบ Backward Euler

การอินทิเกรตแบบ Backward Euler จะทำโดยการกระจายทั้ง x_{n+1} และ $\dot{x}_{n+1}$ ด้วย Taylor series รอบจุด t_n

$$x_{n+1} = x_n + h_n\dot{x}_n + \frac{h_n^2}{2} \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t_n} \qquad \ldots(5.3.1)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h_n \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t_n} \qquad \ldots(5.3.2)$$

แทนสมการที่ 5.3.2 ลงในสมการที่ 5.3.1 จะได้

$$x_{n+1} = x_n + h_n\cdot\dot{x}_{n+1} - \frac{h_n^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \ldots(5.3.3)$$

โดย

$$LTE = \frac{h_n^2}{2} \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t_n}$$

การอินทิเกรตแบบ Backward Euler สามารถกระทำได้โดยตัดเทอม LTE ในสมการที่ 5.3.3 ออก

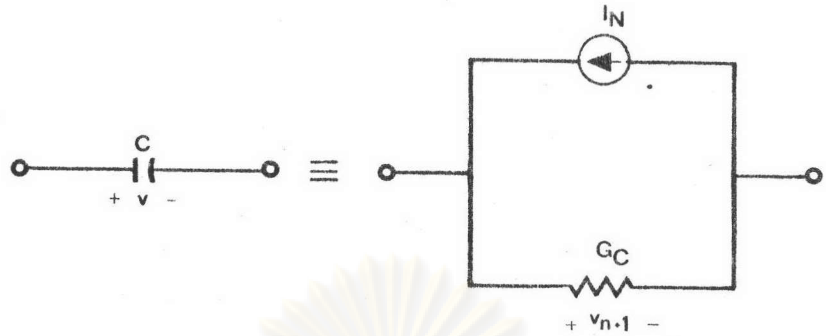
$$x_{n+1} = x_n + h_n\cdot\dot{x}_{n+1} \qquad \ldots(5.3.4)$$

หรือ

$$\dot{x}_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)/h_n \qquad \ldots(5.3.5)$$

และจากความสัมพันธ์ในสมการที่ 5.3.4 สามารถนำมาสร้างเป็นแบบประทับสมการเมตริกซ์ ซึ่งเมื่อแก้สมการเมตริกซ์นี้แล้วคำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบของสมการดิฟเฟอเรนเชียลนั่นเอง

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณากรณีองค์ประกอบวงจรเป็นตัวเก็บประจุ



รูปที่ 5.1 โมเดลทัดเทียมแบบ Backward Euler ของตัวเก็บประจุ

จาก

$$i_c = C\frac{dv}{dt} \qquad \ldots(5.3.6)$$

แทนสมการที่ 5.3.5 ลงในสมการ 5.3.6

$$i_c = (v_{n+1} - v_n)\, C/h \qquad \ldots(5.3.7)$$

$$i_c = (C/h)\cdot v_{n+1} - (C/h)\cdot v_n \qquad \ldots(5.3.8)$$

จากสมการที่ 5.3.8 นำมาเขียนเป็นโมเดลทัดเทียมของตัวเก็บประจุได้ดังรูปที่ 5.1 โดย

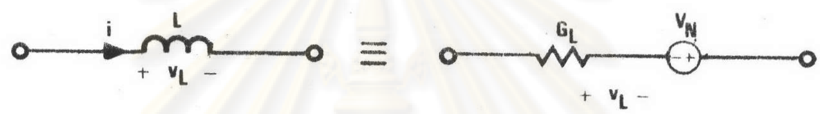
$$G_c = C/h \qquad \ldots(5.3.9)$$

$$I_N = (C/h)\cdot v_n \qquad \ldots(5.3.10)$$

เมื่อนำมาเขียนเป็นแบบประทับของตัวเก็บประจุ จะได้

$$
\begin{array}{lcc}
 & \begin{array}{cc} i & j \end{array} & \text{RHS} \\
\text{KCL } i & \left|\begin{array}{cc} C/h & -C/h \end{array}\right| & \left|\begin{array}{c} C/h \cdot v_n \end{array}\right| \\
\text{KCL } j & \left|\begin{array}{cc} -C/h & C/h \end{array}\right| & \left|\begin{array}{c} -C/h \cdot v_n \end{array}\right|
\end{array}
$$

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณากรณีองค์ประกอบวงจรเป็นตัวเหนี่ยวนำ



รูปที่ 5.2 โมเดลหัดเทียมแบบ Backward Euler ของตัวเหนี่ยวนำ

จาก

$$v_L = L\frac{di}{dt} \qquad \text{...(5.3.11)}$$

$$v_L = (L/h)\cdot i_{n+1} - (L/h)\cdot i_n \qquad \text{...(5.3.12)}$$

จากสมการที่ 5.3.12 นำมาเขียนเป็นโมเดลหัดเทียมได้ดังรูปที่ 5.2 โดย

$$G_L = L/h \qquad \text{...(5.3.13)}$$

$$V_N = (L/h)\cdot i_n \qquad \text{...(5.3.14)}$$

เขียนเป็นแบบประทับของตัวเหนี่ยวนำได้

	i	j	i_L	RHS
KCL i			+1.0	0
KCL j			-1.0	0
BCR	+1.0	-1.0	-L/h	$(-L/h)\cdot i_n$

5.4 ขั้นตอนการวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลา

การวิเคราะห์ผลตอบสนองเชิงเวลาโดยคำนวณช่วงเวลาที่ก้าวอย่างเหมาะสม มีขั้นตอนดังนี้ คือ

1. กำหนดช่วงเวลาก้าวเริ่มต้น จากจุดเวลาเริ่มต้น
2. ทำการอินทิเกรตแบบ Forward Euler เก็บผลลัพธ์ที่ได้ จากการอินทิเกรตไว้
3. สร้างสมการเชิงเส้นโดยแทนองค์ประกอบไม่เชิงเส้นด้วย โมเดลเชิงเส้น และทำการอินทิเกรตแบบ Backward Euler
4. แก้สมการเมตริกซ์ เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับคำตอบของครั้งที่แล้ว ถ้าคำตอบไม่เข้าสู่ผลลัพธ์ให้กลับไปทำข้อ 3 ใหม่
5. คำนวณหา LTE โดย

$$\text{LTE} = \max \left| (\text{ผลลัพธ์ของ F.E.} - \text{ผลลัพธ์ของ B.E.})/2.0 \right|$$

6. เปรียบเทียบ LTE ที่ได้ กับค่า ε (Precision Index)

6.1 ถ้า LTE น้อยกว่า ε แล้ว ทำการคำนวณหาช่วงเวลาก้าวใหม่ โดย

$$h = 0.9\sqrt{\varepsilon/(\text{LTE}/h^2)} \qquad \ldots(5.4.1)$$

แล้ว คำนวณหาจุดเวลาถัดไป กลับไปทำข้อ 2 อีก

6.2 ถ้า LTE มากกว่า ε (Precision Index) แล้ว ทำการคำนวณหาช่วง

เวลาก้าวใหม่ โดย

$$h = 0.9\sqrt{\varepsilon/(LTE/h^2)}$$

แล้วย้อนกลับไปที่จุดเวลาเดิม ทำข้อ 2 ใหม่ โดยใช้ช่วงเวลาก้าวใหม่

7. ถ้า t_n => T แล้ว หยุดการคำนวณ