

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าแบบไม่เชิงเส้น

3.1 กล่าวนำ

ถ้ามีตัวองค์ประกอบในวงจรไฟฟ้าที่มีความสัมพันธ์ระหว่างกระแสที่ไหลผ่าน และแรงดันที่ตกคร่อมตัวองค์ประกอบนั้นเป็นแบบไม่เชิงเส้นแล้ว จะทำให้ระบบสมการของวงจรไฟฟ้านั้น ๆ เป็นสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equation) ไปด้วย การหาคำตอบของสมการจึงต้องเป็นการแก้สมการแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งได้เลือกใช้เทคนิคการแก้สมการไม่เชิงเส้นแบบ Newton-Raphson (NR) [4] และควบคุมการก้าวเข้าหาคำตอบของขบวนการ NR โดยวิธี Alternating Bias [5]

3.2 ระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น

ในวงจรไฟฟ้าทั่ว ๆ ไปเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันในรูปแบบทั่วไปแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$I = G(v) \quad \dots(3.2.1)$$

ซึ่งเป็นสมการที่ได้จากการสร้างสมการแบบ Nodal Equation Formulation และถ้าในวงจรที่ทำกรวิเคราะห์มีองค์ประกอบแบบไม่เชิงเส้น เช่น องค์ประกอบพาสซีฟกึ่งตัวนำต่ออยู่ในวงจรด้วยแล้ว จะทำให้สมการที่ 3.2.1 เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้นด้วย เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสที่ไหลและแรงดันที่ตกคร่อมตัวไดโอดจะเป็น

$$I_D = I_S(\exp(v_D/v_T) - 1) \quad \dots(3.2.2)$$

เมื่อมีไดโอดต่ออยู่ในวงจรด้วยแล้ว จะทำให้ระบบสมการเป็นระบบสมการไม่เชิงเส้นไปด้วย

เขียนสมการ 3.2.1 ใหม่เป็น

$$G(v) = G(v) - I = 0 \quad \dots(3.2.3)$$

ให้สมการ 3.2.3 เป็นสมการไม่เชิงเส้นแล้ว เมื่อหารากของสมการที่ 3.2.3 ($G(v) = 0$) แล้ว รากที่ได้จะเป็นคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นที่ต้องการทราบผลลัพธ์

3.3 การหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้นด้วยวิธี Newton-Raphson

ให้สมการไม่เชิงเส้นอยู่ในรูป

$$f(x) = 0 \quad \dots(3.3.1)$$

เมื่อกระจายฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วย Taylor Series รอบจุด x_0 แล้ว จะได้

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \dots = 0 \quad \dots(3.3.2)$$

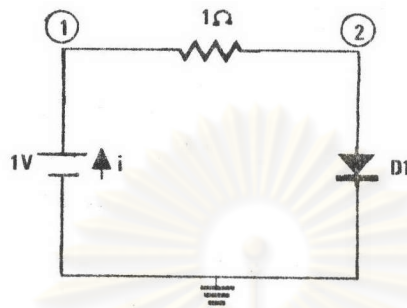
ถ้าพิจารณาถึงเฉพาะเทอม First Order Derivative และจัดเทอมในสมการ 3.3.2 ใหม่ จะได้

$$x = x_0 - f(x_0) / f'(x_0) \quad \dots(3.3.3)$$

จะเห็นว่า เมื่อแทนค่า x_0 ลงในสมการ 3.3.3 จะได้ค่า x ใหม่มา และถ้านำค่า x ใหม่ที่แทนเทอม x_0 ในสมการ 3.3.3 ซ้ำอีกเรื่อย ๆ ค่า x ใหม่ที่ได้จะเข้าใกล้คำตอบที่แท้จริงเพิ่มขึ้น จนเป็นที่ยอมรับได้ว่าค่า x ที่ได้เป็นรากของสมการนั้น คำตอบที่ได้จะได้จากขบวนการแทนค่าคำตอบ (Iterative Solutions) ซึ่งคำตอบที่ได้นี้จะเข้าใกล้รากของสมการที่แท้จริงจะต้องผ่านจำนวนการแทนค่าคำตอบจำนวนหนึ่งเสียก่อน ขบวนการแทนค่าคำตอบภายใต้กฎเกณฑ์

สมการที่ 3.3.3 นี้เรียกว่า วิธี Newton-Raphson Iteration Method

ตัวอย่าง



รูปที่ 3.1

ถ้าให้กระแสอิ่มตัวย้อนกลับของไดโอด $I_s = 10^{-14}$ A และ $V_T = 0.025$ V แล้วความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับแรงดันตกคร่อมไดโอดจะเป็น

$$I_D = 10^{-14} (\exp(40v_D) - 1)$$

เขียนระบบสมการ Modified Nodal Approach (MNA) ได้เป็น

$$\text{KCL ที่ node 1: } (v_1 - v_2) - i = 0 \quad \dots(3.3.4)$$

$$\text{KCL ที่ node 2: } -(v_1 - v_2) + 10^{-14}(\exp(40v_2) - 1) = 0 \quad \dots(3.3.5)$$

$$\text{BCR : } v_1 = 1 \quad \dots(3.3.6)$$

แทนค่า v_1 จาก 3.3.6 ลงใน 3.3.4 และ 3.3.5 ได้ว่า

$$1 - v_2 - i = 0 \quad \dots(3.3.7)$$

$$v_2 + 10^{-14}(\exp(40v_2)) - 1 - 10^{-14} = 0 \quad \dots(3.3.8)$$

แทนค่า v_2 จาก 3.3.7 ลงใน 3.3.8 ได้ว่า

$$f(i) = 1 - i + 10^{-14}(\exp(40(1-i)) - 1) - 10^{-14} = 0 \quad \dots(3.3.9)$$

$$f'(i) = -1 - (40 \cdot 10^{-14}(\exp(40(1-i)))) = 0 \quad \dots(3.3.10)$$

แทนค่าความล้มพันธ์ของ $f(i)$ และ $f'(i)$ ลงในสมการ 3.3.3 ด้วย วิธี NR และกำหนดค่า $i_0 = 0.35$ A ผลลัพธ์ของการแทนค่าคำตอบ จะได้ดังตารางที่ 3.3.1

ตารางที่ 3.3.1

อันดับที่ของ การแทนค่า	i	v_2	$f(i)$	$f'(i)$
1	.3500E+00	.6500E+00	-.3480E+00	-.1078E+01
2	.2723E-01	.9728E+00	.7921E+03	-.3169E+05
3	.5223E-01	.9478E+00	.2914E+03	-.1166E+05
4	.7722E-01	.9228E+00	.1072E+03	-.4290E+04
5	.1022E+00	.8978E+00	.3939E+02	-.1580E+04
6	.1271E+00	.8729E+00	.1445E+02	-.5839E+03
7	.1519E+00	.8481E+00	.5266E+01	-.2177E+03
8	.1760E+00	.8240E+00	.1883E+01	-.8335E+02
9	.1986E+00	.8014E+00	.6355E+00	-.3436E+02
10	.2171E+00	.7829E+00	.1810E+00	-.1692E+02
11	.2278E+00	.7722E+00	.3173E-01	-.1138E+02
12	.2306E+00	.7694E+00	.1555E-02	-.1029E+02
13	.2308E+00	.7692E+00	.4215E-05	-.1023E+02
14	.2308E+00	.7692E+00	-.1660E-06	-.1023E+02

คำตอบคือ $v_2 = 0.7692$ V และ

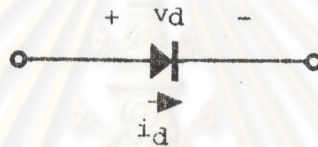
$i = 0.2308$ A



3.4 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าไม่เชิงเส้น

งานการแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีองค์ประกอบบางจรแบบไม่เชิงเส้น เช่น ไดโอด ทรานซิสเตอร์ต่ออยู่ในวงจรด้วยนั้นจะสามารถทำได้โดยง่าย ด้วยวิธีแปลงรูป องค์ประกอบไม่เชิงเส้นให้เป็นโมเดลเชิงเส้น (Linearized Model) เสียก่อน จากนั้นก็หาคำตอบของระบบสมการออกมา และนำคำตอบที่ได้นี้กลับไปแทนในสมการเดิม (Iterative Solution) ด้วยวิธีการ Newton-Raphson จนกระทั่งคำตอบที่ได้เข้าสู่คำตอบที่แท้จริง

3.4.1 โมเดลเชิงเส้นของไดโอด (Linearized Model of Diode)



ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันของไดโอด จะเป็น

$$i_D = I_s(\exp(v_D/v_T) - 1) \dots(3.4.1)$$

เมื่อ

- i_D คือ กระแสที่ไหลผ่านไดโอด
- I_s คือ กระแสอิ่มตัวย้อนกลับ (Reverse Saturation Current)
- v_D คือ แรงดันที่ตกคร่อมไดโอด
- v_T คือ Volt equivalent of temperature

การ Linearize ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันของ ไดโอด สามารถกระทำได้ด้วย

$$i_d^{n+1} = i_d^n + \left. \frac{\partial i_d}{\partial v_d} \right|_{v_d=v_d^n} \cdot (v_d^{n+1} - v_d^n) \dots(3.4.2)$$

n คือ จำนวนนับของการแทนค่าคำตอบ (Iteration Counter)

เมื่อ Linearize สมการที่ 3.4.1 จะได้

$$i_d^{n+1} = I_s [\exp(v_d^n / v_T) - 1] + \frac{I_s}{v_T} [\exp(v_d^n / v_T) \cdot (v_d^{n+1} - v_d^n)] \quad \dots(3.4.3)$$

จัดเทอมใหม่

$$i_d^{n+1} = \frac{I_s}{v_T} [\exp(v_d^n / v_T) \cdot v_d^{n+1}] + I_s [\exp(v_d^n / v_T) - 1] - \frac{I_s}{v_T} [\exp(v_d^n / v_T) \cdot v_d^n] \quad \dots(3.4.4)$$

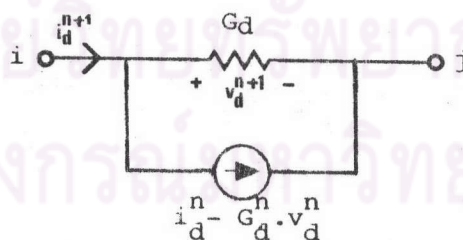
ถ้ากำหนดค่าให้

$$G_d^n = \frac{\partial i_d}{\partial v_d} \Big|_{v_d=v_d^n} = \frac{I_s}{v_T} \cdot \exp(v_d^n / v_T) \quad \text{แล้ว}$$

เขียนสมการ 3.4.4 ใหม่ ได้เป็น

$$i_d^{n+1} = G_d^n \cdot v_d^{n+1} + (i_d^n - G_d^n \cdot v_d^n) \quad \dots(3.4.5)$$

จากสมการ 3.4.5 จะเห็นว่าอิมพีแดนซ์เชิงเส้นของไดโอด จะเป็น



รูปที่ 3.2

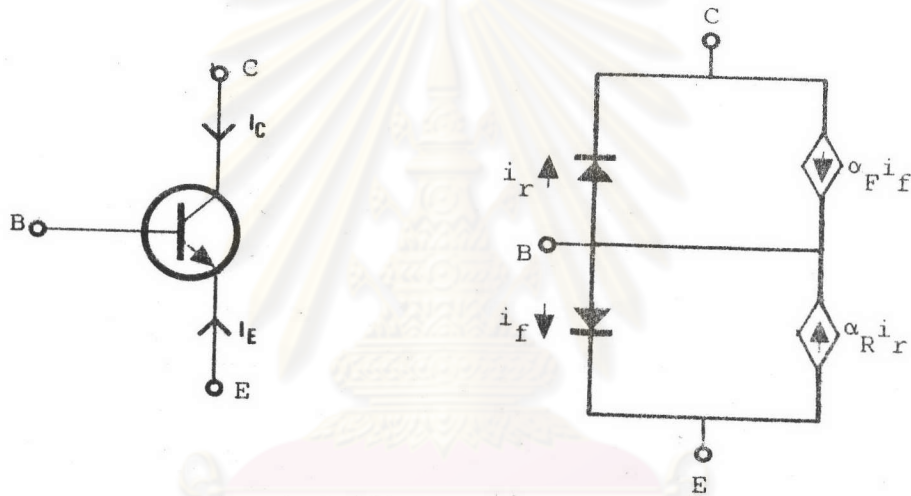
อิมพีแดนซ์เชิงเส้นของไดโอดจากรูปที่ 3.2 จะใช้เป็นอิมพีแดนซ์ที่ระดับตรงกลางในสมการเมตริกซ์ เพื่อสร้างระบบสมการเชิงเส้นของวงจรไฟฟ้าขึ้นมา

3.4.2 โมเดลเชิงเส้นของทรานซิสเตอร์แบบรอยต่อไบโพลาร์ (Linearized Model of Bipolar Junction Transistor)

ทรานซิสเตอร์แบบรอยต่อไบโพลาร์สามารถแทนได้ด้วย Ebers-Moll Model [7] ดังแสดงในรูปที่ 3.3 โดย

$$I_c = f_1 (V_{BC}, V_{BE}) \quad \dots(3.4.6)$$

$$I_E = f_2 (V_{BC}, V_{BE}) \quad \dots(3.4.7)$$



รูปที่ 3.3 Ebers-Moll Model ของทรานซิสเตอร์แบบรอยต่อ npn

$$I_c = \alpha_F i_f - i_r \quad \dots(3.4.8)$$

$$I_E = -i_f + \alpha_R i_r \quad \dots(3.4.9)$$

เมื่อ

$$i_f = I_{Es} [\exp(V_{BE}/V_T) - 1] \quad \dots(3.4.10)$$

$$i_r = I_{Cs} [\exp(V_{BC}/V_T) - 1] \quad \dots(3.4.11)$$

เมื่อ

I_{ES} , I_{CS} คือ กระแสอิ่มตัวระหว่างรอยต่อขั้ว Base-Emitter และ Base-Collector ตามลำดับ

V_{BE} , V_{BC} คือ แรงดันตกคร่อมรอยต่อขั้ว Base-Emitter และ Base-Collector ตามลำดับ

α_F , α_R คือ อัตราขยายกระแสในโหมด Common-base (Current gain of a common-base transistor) แบบ Forward และ Reverse ตามลำดับ

เมื่อ Linearize สมการที่ 3.4.6 และ 3.4.7 จะได้

$$I_C = f_1(v_{BC}^n, v_{BE}^n) + \frac{\partial f_1}{\partial v_{BE}} \bigg|_{v_{BE}^n, v_{BC}^n} (v_{BE}^{n+1} - v_{BE}^n) + \frac{\partial f_1}{\partial v_{BC}} \bigg|_{v_{BE}^n, v_{BC}^n} (v_{BC}^{n+1} - v_{BC}^n) \quad (3.4.12)$$

$$I_E = f_2(v_{BC}^n, v_{BE}^n) + \frac{\partial f_2}{\partial v_{BE}} \bigg|_{v_{BE}^n, v_{BC}^n} (v_{BE}^{n+1} - v_{BE}^n) + \frac{\partial f_2}{\partial v_{BC}} \bigg|_{v_{BE}^n, v_{BC}^n} (v_{BC}^{n+1} - v_{BC}^n) \quad (3.4.13)$$

แทนค่า 3.4.8 และ 3.4.9 ลงในสมการที่ 3.4.12 และ 3.4.13 จะได้

$$I_C = Y_{CCX} \cdot v_{BC} - Y_{CEX} \cdot v_{BE} + I_{CTX} \quad \dots (3.4.14)$$

และ

$$I_E = Y_{EEX} \cdot v_{BE} - Y_{ECX} \cdot v_{BC} + I_{ETX} \quad \dots (3.4.15)$$

โดย

$$Y_{EEX} = I_{ES} / v_T \cdot \exp(v_{BE}^n / v_T) \quad \dots (3.4.16)$$

$$Y_{CCX} = I_{CS} / v_T \cdot \exp(v_{BC}^n / v_T) \quad \dots(3.4.17)$$

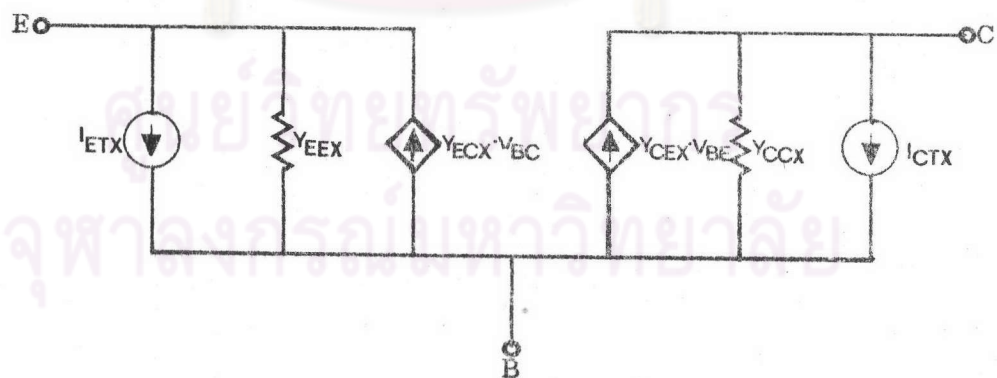
$$Y_{ECX} = \alpha_R / v_T \cdot I_{CS} \cdot \exp(v_{BC}^n / v_T) \quad \dots(3.4.18)$$

$$Y_{CEX} = \alpha_F / v_T \cdot I_{ES} \cdot \exp(v_{BE}^n / v_T) \quad \dots(3.4.19)$$

$$\begin{aligned} I_{ETX} = & \alpha_R I_{CS} [\exp(v_{BC}^n / v_T) - 1.0 - (v_{BC}^n / v_T) \cdot \exp(v_{BC}^n / v_T)] \\ & - I_{ES} [\exp(v_{BE}^n / v_T) - 1.0 - (v_{BE}^n / v_T) \cdot \exp(v_{BE}^n / v_T)] \end{aligned} \quad \dots(3.4.20)$$

$$\begin{aligned} I_{CTX} = & \alpha_F I_{ES} [\exp(v_{BE}^n / v_T) - 1.0 - (v_{BE}^n / v_T) \cdot \exp(v_{BE}^n / v_T)] \\ & - I_{CS} [\exp(v_{BC}^n / v_T) - 1.0 - (v_{BC}^n / v_T) \cdot \exp(v_{BC}^n / v_T)] \end{aligned} \quad \dots(3.4.21)$$

จากสมการที่ 3.4.14 และ 3.4.15 เขียนเป็น Linearized Model ของทรานซิสเตอร์ได้ ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 โมเดลเชิงเส้นของทรานซิสเตอร์

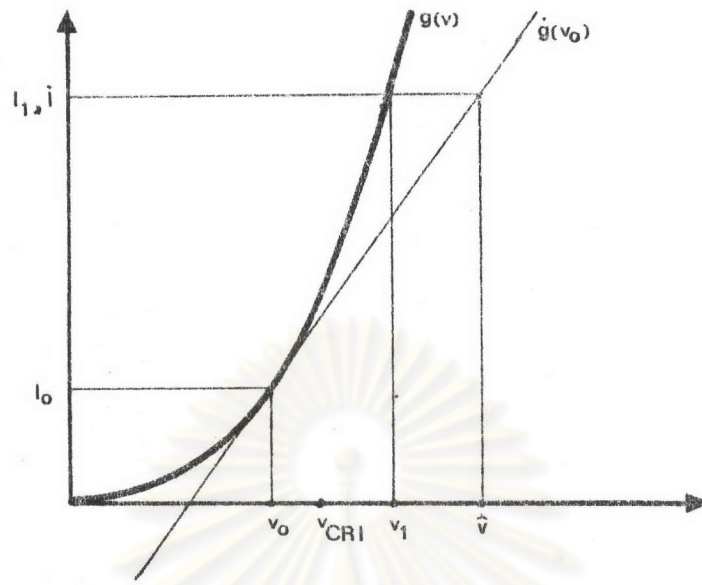
3.4.3 ขั้นตอนของการวิเคราะห์วงจรแบบไม่เชิงเส้น

ขั้นตอนของการวิเคราะห์วงจรแบบไม่เชิงเส้นแสดงได้ดังต่อไปนี้ คือ

- 1) สมมติค่าคำตอบเริ่มต้น
- 2) แปลงรูปองค์ประกอบวงจรแบบไม่เชิงเส้นให้เป็นโมเดลเชิงเส้น
- 3) สร้างสมการเมตริกซ์ของวงจรจากโมเดลเชิงเส้น
- 4) แก้สมการเมตริกซ์หาคำตอบ
- 5) เปรียบเทียบคำตอบที่ได้ กับคำตอบที่ได้จากการแทนค่าครั้งที่แล้ว หากคำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกัน จนเป็นที่ยอมรับได้แล้ว ก็สรุปคำตอบที่ได้นี้ว่าเป็นคำตอบของวงจร แล้วจึงผ่านไปขั้นตอนที่ 6 หากคำตอบทั้งสองยังไม่ใกล้เคียงกัน ให้ย้อนกลับไปขั้นตอนที่ 2 ใหม่
- 6) สิ้นสุดการวิเคราะห์วงจรไม่เชิงเส้น

3.4.4 Modified Newton-Raphson Method

เนื่องจากอุปกรณ์สารกึ่งตัวนำจำพวกรอยต่อ pn มีความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันเป็นแบบ Exponential เช่น กระแสที่ไหลผ่านไดโอดจะมีความมหาศาล (Infinity) ถ้าแรงดันตกคร่อมไดโอดเป็นแรงดันตามที่มีค่ามาก (Large forward bias) ซึ่งค่ากระแสจำนวนมหาศาลนี้จะทำให้เกิด Overflow ในเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ ใช้ทำการคำนวณอยู่ และโอกาสที่แรงดันตกคร่อมไดโอดที่ผ่านขั้นตอนการแทนค่าคำตอบ แบบ NR จะทำให้ได้ผลลัพธ์เป็นแรงดันตกคร่อมไดโอดแบบตามที่มีค่ามาก ๆ ได้ ดังนั้น ในการวิเคราะห์วงจรแบบไม่เชิงเส้นที่มีองค์ประกอบพวกไดโอด หรือ ทรานซิสเตอร์ จะต้อง มีการควบคุมค่า แรงดัน ตกคร่อมรอยต่อ pn ไม่ให้ก้าวไปเกินค่าที่ปลอดภัยในขั้นตอนการ NR ซึ่งได้ทดสอบวิธีการควบคุมในแต่ละวิธีและเลือกวิธี Alternating Bias [5] ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5

เมื่อ

- v_0 = แรงดันไดโอดตอนเริ่มต้น
- \hat{v} = แรงดันไดโอดที่คำนวณได้หลังจากผ่าน NR ไป 1 ครั้ง
- v_1 = แรงดันไดโอดสำหรับขั้นตอนการคำนวณ NR ครั้งต่อไป
- $g(v)$ = ความชัน (slope) ที่จุดแรงดันเท่ากับ v
- V_{CRI} = แรงดันไดโอดอ้างอิงที่กำหนดไว้เพื่อควบคุมแรงดัน

โดยมีเงื่อนไขการควบคุม ดังต่อไปนี้

- | <u>เงื่อนไข</u> | <u>การควบคุม</u> |
|---|--|
| 1. $\hat{v} \leq 0$ หรือ $\hat{v} \leq v_0$ | $v_1 = \hat{v}$ |
| 2. $\hat{v} > V_{CRI}$ | $v_1 = v_0 + v_T \ln[(\hat{v} - v_0)/v_T] + 1$ |

ในการหาค่าแรงดัน v ที่ได้จากการแทนค่าคำตอบ (Iteration) มีค่ามากกว่า V_{CRI} (Critical Voltage) แล้ว จะทำให้ค่ากระแสที่ไหลจากการคำนวณอาจเกิด Overflow ขึ้นได้

ดังนั้น ในการควบคุมแรงดัน จะควบคุมโดย คำนวณหาค่า v_1 และเป็นค่าที่จะใช้แทน v ซึ่งเป็นค่าที่มากเกินไป โดยกำหนดให้

$$\bar{I} = I_1 = g(v_1) \quad \dots(3.4.22)$$

นั่นคือ

$$\bar{I} = I_1 = I_s[\exp(v_1/v_T) - 1.0] \quad \dots(3.4.23)$$

หรือ

$$v_1 = v_T \ln(I_1/I_s + 1.0)$$

และจาก $\bar{I} = I_1$ เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 3.5 จะได้ว่า

$$\bar{I} - I_0 = g(v) \Big|_{v=v_0} (\hat{v} - v_0) \quad \dots(3.4.24)$$

แต่

$$I_0 = I_s[\exp(v_0/v_T) - 1.0] \quad \dots(3.4.25)$$

และ

$$g(v) \Big|_{v=v_0} = I_s/v_T \exp(v_0/v_T) \quad \dots(3.4.26)$$

แทนค่าใน (3.4.24)

$$\bar{I} = I_s/v_T \exp(v_0/v_T) \cdot (\hat{v} - v_0) + I_s[\exp(v_0/v_T) - 1.0] \quad \dots(3.4.27)$$

และจาก

$$I_1 = I_s[\exp(v_1/v_T) - 1.0] \quad \dots(3.4.28)$$

$$v_1 = v_0 + v_T \ln[(\hat{v} - v_0) / v_T + 1.0] \quad \dots(3.4.29)$$

ค่า v_1 ที่ได้นี้จะ เป็นค่าของแรงดันตกคร่อมไดโอดที่ถูกจำกัดไว้



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย