

การกำหนดวงโคจรของดาวเคราะห์จากสังเกตการณ์โดยวิธีลาปลาซ



นางสาวอุไรวรรณ บัวคง


สถาบันวิทยบริการ  
วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์  
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2544

ISBN 974-17-0377-5

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

PLANETS ORBIT DETERMINATION FROM OBSERVATION BY LAPLACE METHOD



Miss Uraiwun Bourkong

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science in physics

Department of Physics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2001

ISBN 974-17-0377-5

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การกำหนดวงโคจรของดาวเคราะห์จากสังเกตการณ์โดยวิธีลาปลาซ

โดย

นางสาว อุไรวรรณ บัวคง

สาขาวิชา

ฟิสิกส์

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พีรพัฒน์ ศิริสมบุญรณาลภ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

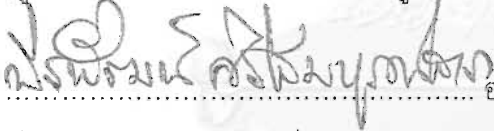
..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.พีรพัฒน์ การเที่ยง) รักษาราชการแทนคณบดีคณะวิทยาศาสตร์

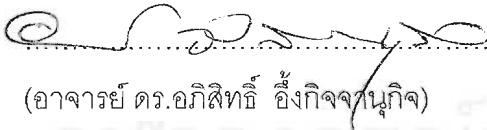
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขจรยศ อยู่ดี)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พีรพัฒน์ ศิริสมบุญรณาลภ)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.อภิสิทธิ์ อึ้งกิจจานุกิจ)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.รุจิกร ธนวิทยาพล)

อุไรวรรณ บัวคง : การกำหนดวงโคจรของดาวเคราะห์จากสังเกตการณ์โดยวิธีลาปลาซ  
(PLANETS ORBIT DETERMINATION FROM OBSERVATION BY LAPLACE  
METHOD) อ.ที่ปรึกษา: ผศ.ดร.พีรพัฒน์ ศิริสมบุญธรรมาภ 160 หน้า.ISBN 974-17-0377-5.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการศึกษาวิธีการกำหนดหลักมูลวงโคจรของดาวอังคารและดาวเสาร์ จากการสังเกตการณ์การเคลื่อนที่ของดาวโดยการถ่ายภาพบนผิวโลก และวิเคราะห์ภาพถ่ายด้วยวิธีการสถานะสังเกต(กรณีดาวอังคารห้วงฟ้าดวง) เพื่อให้ได้ข้อมูลสังเกตการณ์ที่แต่ละชุดประกอบด้วย เวลา และ ตำแหน่งเชิงมุม(ละติจูดท้องฟ้าและ ลองติจูดท้องฟ้า) จากนั้นนำข้อมูลสังเกตการณ์ 9 ชุด มาทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยวิธีลาปลาซโดยอาศัยสมการลากรางจ์เพื่อหาหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นในระบบสุริยะวิถีสุริยะมัธยม และใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดของสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรในการปรับปรุงวงโคจรให้ดีขึ้นด้วยข้อมูลสังเกตการณ์ขณะเวลาอื่นๆที่สังเกตการณ์ไว้แล้ว ปรากฏว่าดาวอังคารให้ค่าหลักมูลวงโคจรที่ใกล้เคียงกับค่าอ้างอิง [34] ในขณะที่หลักมูลวงโคจรของดาวเสาร์ที่ได้ค่อนข้างคลาดเคลื่อน

## สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา ฟิสิกส์  
สาขาวิชา ฟิสิกส์  
ปีการศึกษา 2544

ลายมือชื่อนิสิต.....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

# # 417 2551523 : MAJOR PHYSICS

KEY WORD: LAPLACE / ORBIT DETERMINATION / PRELIMINARY ORBIT / PLANETS

URAIWUN BOURKONG : PLANETS ORBIT DETERMINATION FROM  
OBSERVATION BY LAPLACE METHOD. THESIS ADVISOR : ASSIST. PROF.  
PIRAPAT SIRISOMBOONLARP, D.Sc., 160 pp. ISBN 974-17-0377-5.

The purpose of this thesis is to determine the classical elements of Mars and Saturn based on the observational data. Using the observational data, the preliminary orbit determination is performed by Laplace method using nine sets of angular positions at epoch time measurement obtained by Dependency method (five comparisons). The orbital data is then obtained by solving numerically the scalar equation of Lagrange based on heliocentric ecliptic orbit. Using the orbital data, we compute the preliminary elements and the result obtained is then improved by using multiple linear least squares regression. Our result for Mars agrees well with that in Ref. [34] while there are some discrepancies in the case of Saturn which might be due to the errors in the observational data.



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยคำแนะนำและความช่วยเหลืออย่างดีของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พีรพัฒน์ ศิริสมบุญธรรมา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ที่มีประโยชน์ต่อผู้วิจัยเป็นอย่างมาก จึงขอกราบขอบพระคุณไว้ ณ โอกาสนี้ อีกทั้งขอขอบคุณ คุณศรันย์ ภิวาลชนน ที่ให้คำปรึกษาในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ขอขอบคุณ คุณยุทธการ รัตนชัย ให้คำแนะนำในการบันทึกภาพและเอื้อเฟื้อภาพถ่ายบางส่วน สุดท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณบิดา และมารดา ซึ่งคอยให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยตลอดมา



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญ

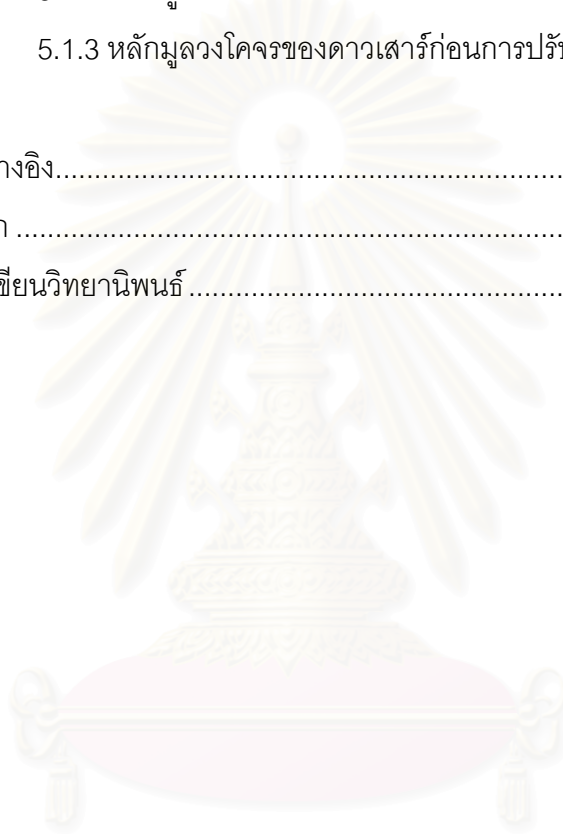
	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย .....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญรูป.....	ญ
สารบัญตาราง.....	ฐ
บทที่ 1 บทนำ .....	1
บทที่ 2 ทฤษฎีพื้นฐาน.....	3
2.1 สมการการเคลื่อนที่ .....	3
2.1.1 สมการการเคลื่อนที่ในออร์บิต.....	3
2.1.2 สมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ .....	4
2.1.3 สมการการเคลื่อนที่ที่นำไปใช้งาน.....	5
2.2 ปัญหาวัตถุสองชิ้น.....	6
2.2.1 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น.....	6
2.2.2 กฎการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น.....	8
2.2.3 กฎวิส-วีว่า.....	15
2.2.4 ความสัมพันธ์ทั่วไปทางเรขาคณิต.....	17
2.2.5 ความสัมพันธ์เรขาคณิตและเวลา .....	19
2.3 การหาหลักมูลทางโคจรจากตำแหน่งและความเร็ว .....	22
2.3.1 เวกเตอร์พื้นฐานสามตัว.....	23
2.3.2 พารามิเตอร์ a, e, q .....	24
2.3.3 มุมที่ใช้กำหนดทิศทาง.....	25
2.3.4 มุมกวาดเฉลี่ย .....	26
2.3.5 เวลาที่ผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์.....	28
2.4 การหาตำแหน่งและความเร็วจากหลักมูลทางโคจร .....	28

## สารบัญ (ต่อ)

2.5 ข้อมูลเบื้องต้นในการกำหนดวงโคจร.....	30
2.5.1 เวลาสากลและวันจูเลียน .....	30
2.5.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย L.....	30
2.5.3 เวกเตอร์ตำแหน่งดวงอาทิตย์.....	31
2.6 วิธีลาปลาซ .....	32
2.6.1 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง.....	32
2.6.2 สมการลากรานจ์.....	34
2.7 การปรับปรุงวงโคจร .....	34
2.7.1 เงื่อนไขของสมการเชิงอนุพันธ์ .....	35
2.7.2 การคำนวณเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.....	36
บทที่ 3 การทดลอง .....	37
3.1 การถ่ายภาพ.....	37
3.1.1 การบันทึกภาพดาวอังคาร 38	
3.1.2 การบันทึกภาพดาวเสาร์.....	39
3.2 การคัดเลือกภาพถ่าย.....	41
3.3 การวิเคราะห์ภาพถ่าย.....	42
3.3.1 วิธีการสถานะสังกัดกรณีดาวข้างอิงสามดวง .....	42
3.3.2 วิธีการสถานะสังกัดกรณีดาวข้างอิงห้าดวง .....	43
บทที่ 4 การคำนวณ .....	44
4.1 ขั้นตอนการคำนวณ .....	44
4.2 ผลเฉลยของโปรแกรม .....	47
4.2.1 ผลเฉลยของโปรแกรม OU1.cpp.....	47
4.2.2 ผลเฉลยของโปรแกรม OU2.cpp และ OU3.cpp .....	49
4.2.3 ผลเฉลยของโปรแกรม OU4.cpp .....	68
4.2.4 ผลเฉลยของโปรแกรม OU5.cpp.....	75
4.2.5 ผลเฉลยของโปรแกรม OU6.cpp.....	79
4.2.6 ผลเฉลยของโปรแกรม OU7.cpp.....	82
4.2.7 ผลเฉลยของโปรแกรม OU8.cpp.....	85



4.2.8 ผลเฉลยของโปรแกรม OU9.cpp .....	89
4.2.9 ผลเฉลยของโปรแกรม OU10.cpp .....	110
บทที่ 5 สรุปและวิจารณ์ .....	112
5.1 การวิเคราะห์หลักมูลวงโคจร .....	112
5.1.1 หลักมูลวงโคจรของดาวอังคารก่อนการปรับปรุง .....	112
5.1.2 หลักมูลวงโคจรของดาวอังคารหลังการปรับปรุง .....	114
5.1.3 หลักมูลวงโคจรของดาวเสาร์ก่อนการปรับปรุง .....	114
รายการอ้างอิง .....	118
ภาคผนวก .....	119
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....	160



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 3.1 การบันทึก .....	39
ตารางที่ 3.2 การบันทึก .....	40
ตารางที่ 3.3 การคัดเลือกภาพถ่ายของดาวอังคาร .....	43
ตารางที่ 3.4 การคัดเลือกภาพถ่ายของดาวเสาร์ .....	44
ตารางที่ 4.1 วันเวลาของภาพถ่ายที่ผ่านการคัดเลือกของภาพถ่ายดาวอังคาร .....	47
ตารางที่ 4.2 วันเวลาของภาพถ่ายที่ผ่านการคัดเลือกของภาพถ่ายดาวเสาร์ .....	48
ตารางที่ 4.3 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากวิธีการสถานะสังเกต .....	49
ตารางที่ 4.3 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากวิธีการสถานะสังเกต .....	49
ตารางที่ 4.4 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากวิธีการสถานะสังเกต .....	58
ตารางที่ 4.5 การสุ่มเลือกชุดข้อมูลของดาวอังคาร .....	69
ตารางที่ 4.6 ตำแหน่งเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุมของดาวอังคาร .....	71
ตารางที่ 4.7 การสุ่มเลือกชุดข้อมูลของดาวอังคาร .....	72
ตารางที่ 4.8 ตำแหน่งเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุมของดาวเสาร์ .....	74
ตารางที่ 4.9 ตำแหน่งเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุมของดวงอาทิตย์ .....	75
ตารางที่ 4.10 ตำแหน่งความเร็วในวงโคจรของดาวอังคาร .....	80
ตารางที่ 4.11 ตำแหน่งความเร็วในวงโคจรของดาวเสาร์ .....	81
ตารางที่ 4.12 หลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของข้อมูลสังเกตการณ์ของดาวอังคาร .....	83
ตารางที่ 4.13 หลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของข้อมูลสังเกตการณ์ของดาวเสาร์ .....	84
ตารางที่ 4.14 ตำแหน่งและความเร็วในระบบศูนย์สูตรสุริยะวิถีสุริยะมัธยมด้วย การคำนวณย้อนกลับของโปรแกรม OU8.cpp ของดาวอังคาร .....	87
ตารางที่ 4.15 ตำแหน่งและความเร็วในระบบศูนย์สูตรสุริยะวิถีสุริยะมัธยม ด้วยการคำนวณย้อนกลับของโปรแกรม OU8.cpp ของดาวเสาร์ .....	88
ตารางที่ 4.16 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์ และจากการ คำนวณย้อนกลับของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่1 .....	90
ตารางที่ 4.17 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์ และจากการ คำนวณย้อนกลับของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่2 .....	91
ตารางที่ 4.18 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์ และจากการ คำนวณย้อนกลับของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่3 .....	92
ตารางที่ 4.19 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์ และจากการ	



จำนวนย้อนกลับของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่10.....	109
ตารางที่ 4.36 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์ และจากการ	
จำนวนย้อนกลับของหลักมูลวงโคจรที่ปรับปรุงแล้ว.....	110
ตารางที่ 5.1 เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของดาวอังคาร.....	113
ตารางที่ 5.2 เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักมูลวงโคจรของดาวอังคาร.....	114
ตารางที่ 5.3 เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของดาวเสาร์.....	113



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 2.1 แรงโน้มถ่วงที่มีมวลหลัก $m$ , กระทำทำต่อวัตถุอื่น.....	4
รูปที่ 2.2 วงโคจรของวัตถุสองชิ้น .....	7
รูปที่ 2.3 อัตราของวงโคจรและรัศมี.....	7
รูปที่ 2.4 ปัญหาวัตถุสองชิ้น .....	10
รูปที่ 2.5 เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม $h^P$ .....	12
รูปที่ 2.6 ส่วนประกอบต่างๆ ของวงโคจรวงรี.....	13
รูปที่ 2.7 ลักษณะของภาคตัดกรวยทั้งสี่ชนิด.....	13
รูปที่ 2.8 เวกเตอร์พื้นที่ $WdA^P$ .....	14
รูปที่ 2.9 ระบบพิกัดระนาบวงโคจร .....	17
รูปที่ 2.10 ระบบของวงรี.....	19
รูปที่ 2.11 ลักษณะทางเรขาคณิตของหลักมูลทางโคจร .....	22
รูปที่ 2.12 เวกเตอร์พื้นฐาน คือ $e^P, h^P$ และ $N^P$ .....	23
รูปที่ 2.13 เวกเตอร์หน่วย $P^P, Q^P, W^P$ .....	28
รูปที่ 2.14 เรขาคณิตของวงโคจรเริ่มต้น .....	30
รูปที่ 2.15 เวกเตอร์ตำแหน่งดวงอาทิตย์ .....	35
รูปที่ 3.1 ภาพถ่ายดาวอังคารเปิดหน้ากล้อง F4 นาน 15 วินาที.....	37
รูปที่ 3.2 ภาพถ่ายดาวอังคารเปิดหน้ากล้อง F8 นาน 5 นาที.....	38
รูปที่ 3.3 การกำหนดตำแหน่งดาวอ้างอิงกรณีดาวสามดวง.....	40
รูปที่ 3.4 การกำหนดตำแหน่งดาวอ้างอิงกรณีดาวห้าดวง .....	41
รูปที่ 4.1 ขั้นตอนการคำนวณ.....	44
รูปที่ 4.2 ขั้นตอนการทำงานในการกำหนดวงโคจรของดาวเคราะห์โดยวิธีลาปลาซ.....	46
รูปที่ 4.3 การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ในช่วงเวลา $t-t_0$ .....	85
รูปที่ 4.4 การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ในช่วงเวลา $t-t_0$ .....	89
รูปที่ 5.1 แสดงตำแหน่งในการสังเกตการณ์ที่ใกล้เคียงกันเกินไป .....	115

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 แนวคิดและที่มาของวิทยานิพนธ์

การกำหนดหลักมูลวงโคจรของวัตถุท้องฟ้ามีมานานกว่า 220 ปีมาแล้ว โดยมีผู้นำเสนอหลัก การกำหนดหลักมูลวงโคจรไว้หลากหลายวิธีด้วยกัน เช่น วิธีลาปลาส วิธีเกาส์ วิธีโอดเบอร์ และอื่นๆ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการกำหนดวงโคจรของดาวเคราะห์โดยวิธีลาปลาส ซึ่งค้นพบโดยลาปลาส ในปี 1780[32] และในปี 1985 มาร์สเดนได้นำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณ[19] เพื่อให้ สามารถประมาณค่าหลักมูลวงโคจรได้อย่างอิงข้อมูลสังเกตการณ์ที่มากขึ้น ทำให้หลักมูลวงโคจรที่ได้ มีความน่าเชื่อถือมากขึ้น และสะดวกรวดเร็วในการคำนวณ ต่อมาในปี 1991 เดน แอล บูลเล็ท ได้ นำเสนอการปรับปรุงวงโคจรจากข้อมูลสังเกตการณ์อื่นๆเพิ่มเติม[6] หลังการกำหนดหลักมูลวงโคจร เบื้องต้นซึ่งเป็นแนวทางที่ใช้เป็นหลักในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ในปีหนึ่งๆ เราจะสังเกตเห็นวัตถุท้องฟ้าผ่านเข้ามาใกล้โลกหลายๆ ดวง ดาวอังคารและดาว เสาร์จัดเป็นดาวเคราะห์ที่เคลื่อนที่อยู่ไม่ไกลจากโลกมากนัก สามารถมองเห็นได้ด้วยตาเปล่า สังเกตการณ์ได้โดยง่ายจากผิวโลก (ปรากฏให้เห็นในตำแหน่งที่เหมาะสมไม่ใกล้ขอบฟ้าเกินไป) สามารถบันทึกภาพได้ด้วยกล้องถ่ายภาพความยาวโฟกัสประมาณ 50 มิลลิเมตรขึ้นไป[4] ซึ่งมีจำหน่าย ในท้องตลาดทั่วไปในการเก็บข้อมูลและแปรข้อมูลจากภาพถ่ายไปสู่ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์ใน การกำหนดหลักมูลวงโคจรได้ต่อไป

### 1.2 วัตถุประสงค์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มุ่งศึกษาหลักมูลวงโคจรของดาวอังคารและดาวเสาร์ เพื่อมุ่งหวังพัฒนา โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้ศึกษาการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ในระบบสุริยะ และศึกษาถึงข้อดี ข้อเสีย ข้อจำกัด ของวิธีลาปลาสในการกำหนดวงโคจรของวัตถุท้องฟ้าที่มีวงโคจรรู ปวงรี

### 1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ดังที่กล่าวข้างต้นวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เน้นศึกษาเฉพาะดาวอังคาร และดาวเสาร์เท่านั้น โดยในการกำหนดหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของดาวเคราะห์ในครั้งนี้อาศัยวิธีลาปลาซซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหาวัตถุประสงค์ซึ่งโดยมีขั้นตอนการประมวลผลตามลำดับต่อไปนี้

1. ถ่ายรูปดาวเคราะห์เพื่อวิเคราะห์หาตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์เทียบกับผิวโลก ณ จุดสังเกตการณ์ด้วยวิธีสถานะสังเกต กรณีดาวอังคาร 3 ดวง และ 5 ดวง ดังแสดงในบทที่ 3
2. นำข้อมูลตำแหน่งเชิงมุม 9 ครั้ง และข้อมูลตำแหน่งดวงอาทิตย์เทียบกับโลกมาทำการกำหนดหลักมูลวงโคจรเบื้องต้น โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข 2 ลักษณะด้วยกัน ดังแสดงในบทที่ 4 คือ
  - ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด (linear regression) สำหรับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว หาตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์ขณะเวลากลางที่พิจารณา
  - ใช้วิธีแทรกสอดพหุนาม (interpolating polynomial) เพื่อหาตำแหน่งดวงอาทิตย์เทียบกับผิวโลก ณ จุดสังเกตการณ์
3. กำหนดหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นจากข้อมูลที่ได้ด้วยวิธีลาปลาซ ตามเงื่อนไขของรูปร่างวงโคจร และตรวจสอบวงโคจรด้วยการคำนวณย้อนกลับ โดยอาศัยองค์ความรู้ในบทที่ 2 เป็นหลัก
4. ปรับปรุงวงโคจรจากข้อมูลสังเกตการณ์อื่นๆ ด้วยกำลังสองน้อยสุดสำหรับสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร ดังแสดงในบทที่ 4
5. วิเคราะห์และสรุปหลักมูลวงโคจรที่ได้ พร้อมทั้งอภิปรายข้อดี ข้อจำกัดของวิธีลาปลาซ ดังแสดงในบทที่ 5

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 2

### ทฤษฎีพื้นฐาน

#### 2.1 สมการการเคลื่อนที่

การเคลื่อนที่เป็นวงโคจรของวัตถุท้องฟ้า(celestial body) จะถูกอธิบายโดยสมการซึ่งจะแสดงถึงความเร่งชั่วขณะในเทอมของแรงทั้งหมด เราสามารถที่จะลดปัญหาลงได้โดยการให้สนามแรงโน้มถ่วงมีลักษณะเป็นสมมาตรเชิงทรงกลมและไม่คิดผลกระทบใดๆ นอกจากแรงโน้มถ่วงเท่านั้น การประยุกต์หลักการพื้นฐานนี้ทำให้เราได้สมการการเคลื่อนที่ ซึ่งสามารถที่จะนำไปใช้คำนวณการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ต่างๆ และจะอธิบายผลกระทบที่เกิดจากวัตถุใดๆ ที่มารบกวนพวกมัน

##### 2.1.1 สมการการเคลื่อนที่อินเนอร์เซีย(The Equation of Inertial Motion)

เมื่อวัตถุขนาดใหญ่ที่มีมวล  $m_1$  ส่งแรงโน้มถ่วงกระทำต่อวัตถุอื่นๆ ที่มีมวล  $m_2, m_3, \dots, m_N$  กำหนดให้  $R_1^p$  เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของ  $m_1$  เมื่อเทียบกับจุดกำเนิดอินเนอร์เซีย  $O$  และกำหนดให้  $r_q^p$  เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของมวลอันดับที่  $q$  เมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางของมวล  $m_1$  เราสามารถเขียนเวกเตอร์ของแรงโน้มถ่วงที่  $m_1$  กระทำกับวัตถุใดๆ ได้คือ

$$F_q^p = k^2 \frac{m_1 m_q}{r_q^3} r_q^p \quad (2.1)$$

เมื่อ  $k$  คือค่าคงที่แรงโน้มถ่วงของเกาส์  
แรงสุทธิ  $F^p$  ที่กระทำต่อ  $m_1$  คือ

$$F^p = \sum_{q=2}^N F_q^p \quad (2.2)$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน ความเร่งอินเนอร์เซีย  $A_1^p$  ของมวล  $m_1$  คือ

$$A_1^p = \frac{F^p}{m_1}$$

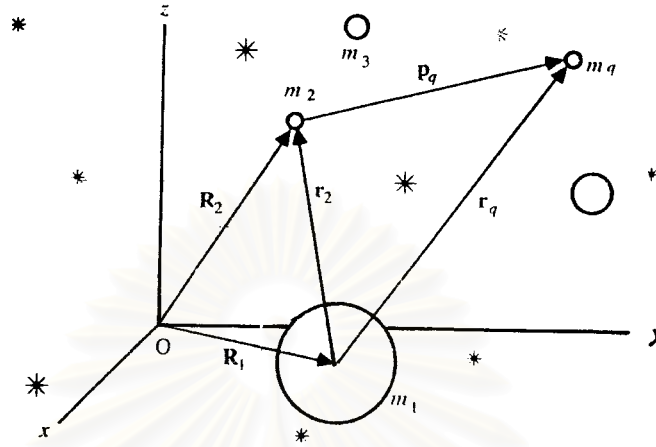
ดังนั้น

$$A_1^p = \sum_{q=2}^N \frac{k^2 m_q}{r_q^3} r_q^p \quad (2.3)$$



สมการ (2.3) เรียกว่าสมการการเคลื่อนที่อีเนอร์เซียของมวล  $m_1$  เมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย

## 2.1.2 สมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์(The Equation of Relative Motion)



รูปที่ 2.1 ปัญหาความโน้มถ่วงของวัตถุหลายชิ้น

รูปที่ 2.1 แสดงถึงปัญหาความโน้มถ่วงที่เราต้องแก้เพื่อที่จะคำนวณวงโคจรของมัน มวลต่างๆ  $m_1, m_2, \dots, m_N$  เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรงดึงดูดร่วมระหว่างกัน เวกเตอร์  $R_1$  และ  $R_2$  แสดงถึงตำแหน่งของ  $m_1$  และ  $m_2$  เมื่อเทียบกับจุดกำเนิดอีเนอร์เซีย  $O$  ตามลำดับ  $r_q$  และ  $p_q$  คือเวกเตอร์ตำแหน่งของ  $m_q$  สัมพัทธ์กับ  $m_1$  และ  $m_2$  ตามลำดับ ดังนั้นจากรูปที่ 2.2 เราจะได้

$$r_2^p = R_2^p - R_1^p \quad (2.4)$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะพบว่าแรงดึงดูดทำให้  $m_1$  และ  $m_2$  ถูกเร่งเมื่อเทียบกับจุดกำเนิดอีเนอร์เซีย ความเร่ง  $a_2^p$  ของ  $m_2$  เทียบกับ  $m_1$  สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการ (2.4) เทียบกับเวลาสองครั้ง เราก็จะได้

$$a_2^p = A_2^p - A_1^p \quad (2.5)$$

เมื่อ  $A_1^p$  และ  $A_2^p$  คือความเร่งอีเนอร์เซียของมวล  $m_1$  และ  $m_2$  ตามลำดับ จากสมการ(2.3) เมื่อนำมาเขียนใหม่จะได้

$$A_1^p = \frac{k^2 m_2 r_2^p}{r_2^3} + \sum_{q=3}^N \frac{k^2 m_q r_q^p}{r_q^3} \quad (2.6)$$

โดยการอุปมาเปรียบเทียบกับสมการ (2.6) เราสามารถที่จะเขียน  $A_2^p$  ในเทอมของ  $m_1, r_2^p, m_q$  และ  $p_q$  ได้คือ

$$A_2^p = -\frac{k^2 m_1 r_2^p}{r_2^3} + \sum_{q=3}^N \frac{k^2 m_q p_q^p}{p_q^3} \quad (2.7)$$

โดยที่  $\dot{p}_q = \dot{r}_q - \dot{r}_2$  และ  $p_q = |\dot{p}_q|$

เทอมแรกทางขวามือของสมการ (2.7) เป็นลบเพราะความเร่งของ  $m_2$  เนื่องจาก  $m_1$  มีทิศทางตรงข้ามกับ  $\dot{r}_2$  เมื่อนำสมการ (2.6) และ (2.7) ไปแทนลงในสมการ (2.5) จะได้

$$\dot{p}_2 = -\frac{k^2(m_1 + m_2)}{r_2^3} \dot{r}_2 + \sum_{q=3}^N k^2 m_q \left( \frac{\dot{p}_q}{p_q^3} - \frac{\dot{r}_q}{r_q^3} \right) \quad (2.8)$$

สมการ(2.8) เรียกว่าสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของมวล  $m_2$  เมื่อเทียบกับจุดกำเนิดที่อยู่จุดศูนย์กลางมวล  $m_1$

### 2.1.3 สมการการเคลื่อนที่ที่นำไปใช้งาน

กลับไปพิจารณาสมการ (2.8) อีกครั้ง เราสามารถเขียนสมการนี้ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น โดยให้  $m_1$  เป็นมวลศูนย์กลาง คืออยู่ที่จุดกำเนิด O และ  $m_2$  เป็นมวลของวัตถุที่โคจร นอกจากนั้นในระบบพิกัดสุริยะมัธยม (heliocentric coordinate system) และ ระบบพิกัดโลกามัธยม (geocentric coordinate system) ค่ามวล  $m_1$  จะทำให้เป็นหนึ่งหน่วย (Boulet 1991) ดังนั้นเราสามารถนิยามค่ามวลรวมได้คือ

$$\mu \equiv 1 + m_2 \quad (2.9)$$

เราจะเลิกใช้สัญลักษณ์  $\dot{d}_2$  และ  $\dot{r}_2$  และปรับค่าดัชนีให้เหมาะสมโดยจะให้เริ่มต้นที่  $q = 1$  จนถึง  $n$  ซึ่งเท่ากับจำนวนของวัตถุที่มารบกวน ดังนั้นสมการ(2.8) ก็จะกลายเป็น

$$\dot{d} = -\frac{k^2 \mu}{r^3} \dot{r} + \sum_{q=1}^n k^2 m_q \left( \frac{\dot{p}_q}{p_q^3} - \frac{\dot{r}_q}{r_q^3} \right) \quad (2.10)$$

เราสามารถทำสมการนี้ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น โดยการนิยาม modified time ( $\tau$ ) คือ

$$\tau \equiv k(t - t_0) \quad (2.11)$$

ดังนั้น

$$d\tau = kdt \quad (2.12)$$

โดย  $t$  คือเวลาใดๆ

$t_0$  คือเวลาเริ่มต้น (epoch)

เมื่อเราหาอนุพันธ์ของ  $\dot{r}$  เทียบกับ  $\tau$  เราจะได้ว่า

$$\dot{r} = \left( \frac{1}{k} \right) \dot{r}^{\tau} \quad (2.13)$$

$$\dot{d} = \left( \frac{1}{k^2} \right) \dot{d}^{\tau} \quad (2.14)$$

ดังนั้นเมื่อเราคูณสมการ(2.10) ด้วย  $\frac{1}{k^2}$  ทั้งสองข้างเราจะได้

$$\mathcal{L} = -\frac{\mu}{r^3} \dot{r}^2 + \sum_{q=1}^n m_q \left( \frac{\dot{p}_q}{p_q^3} - \frac{\dot{r}_q}{r_q^3} \right) \quad (2.15)$$

สมการ(2.15) นี้เป็นสมการการเคลื่อนที่ที่เราจะนำไปใช้ในการคำนวณ จากสมการนี้ถ้าเราทราบตำแหน่งและความเร็วของวัตถุที่เวลาเริ่มต้น เราก็จะสามารถหาตำแหน่งและความเร็วที่เวลาต่างๆได้ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยเพื่อความสะดวก เราจะนิยามสัญลักษณ์  $v$  และ  $a$  ใหม่ดังนี้

$$v \equiv \dot{r} \quad (2.16)$$

$$a \equiv \dot{v} \quad (2.17)$$

เนื้อหาตั้งแต่นี้ไป ทุกการเคลื่อนที่ที่เราจะกำหนดให้อ้างอิงเทียบกับเวลา  $\tau$

## 2.2 ปัญหาวัตถุสองชิ้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคำนวณวงโคจรของวัตถุสองชิ้นโดยการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายซึ่งจะไม่คิดการรบกวนทุกชนิด และจะพิจารณาเฉพาะแรงดึงดูดระหว่างวัตถุที่โคจรกับมวลที่ศูนย์กลาง การเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นเช่นนี้จะเป็นวงโคจรพื้นฐานซึ่งเราสามารถที่จะนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นได้

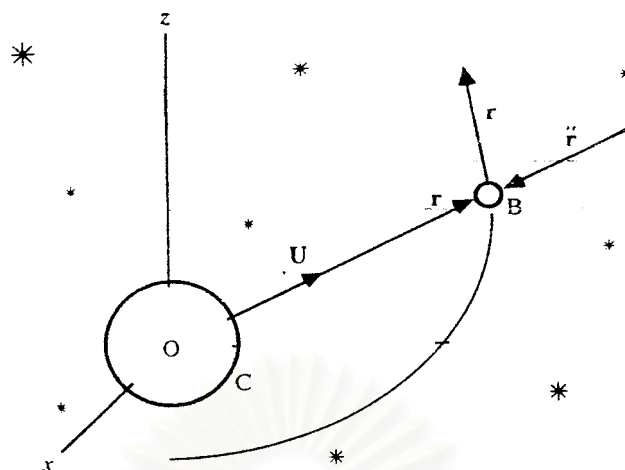
### 2.2.1 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น

ปัญหาวัตถุสองชิ้นนั้นเป็นกรณีเฉพาะของปัญหาวัตถุหลายชิ้น(many-body problem) ซึ่งแสดงโดยสมการ(2.15)คือ

$$\mathcal{L} = -\frac{\mu}{r^3} \dot{r}^2 + \sum_{q=1}^n m_q \left( \frac{\dot{p}_q}{p_q^3} - \frac{\dot{r}_q}{r_q^3} \right)$$

สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นสามารถหาได้จากสมการข้างต้นโดยการตัดทุกเทอมที่มีมวล  $m_q$  ดังนั้นในการคำนวณวงโคจรโดยการประมาณอันดับแรก เราจะได้

$$\mathcal{L} = -\frac{\mu}{r^3} \dot{r}^2 \quad (2.20)$$



รูปที่ 2.2 วงโคจรของวัตถุสองชิ้น

ซึ่งสมการ(2.20) ก็คือสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น ในรูปที่ 2.3 ความเร่ง  $\mathcal{R}$  ปกติจะมีทิศทางชี้ไปที่จุดกำเนิด O ซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวัตถุ C ซึ่งเป็นทิศทางของแรงสุทธิที่กระทำบนวัตถุ B ผลที่เกิดขึ้นก็คือวัตถุ B จะไม่เคลื่อนที่ออกไปจากระนาบที่ประกอบด้วย  $r^P$ ,  $\mathcal{R}$  และ O ดังนั้นวงโคจรของวัตถุสองชิ้นจะถูกจำกัดขอบเขตให้อยู่ในระนาบซึ่งวางผ่านจุดศูนย์กลางของวัตถุศูนย์กลาง ก่อนที่จะแก้สมการหาผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น เราจะต้องเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเคลื่อนที่ตลอดทั้งเส้นทางวงโคจรกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของเวกเตอร์รัศมี  $r^P$  ในรูปที่ 2.2 วัตถุ B มีความเร็ว  $\mathcal{R}$  ซึ่งก็คือเส้นสัมผัสวงโคจรที่  $r^P$  ขนาดของ  $\mathcal{R}$  คืออัตราเร็วในการโคจร  $v$  ดังนั้นเราจะได้

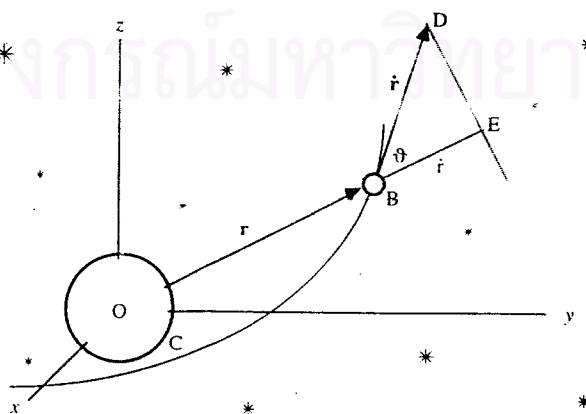
$$v = |\mathcal{R}| \quad (2.21)$$

ให้  $\mathcal{R}$  แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของสเกลาร์  $r$  เมื่อเทียบกับ  $\tau$  จะได้

$$\mathcal{R} = \frac{dr}{d\tau} \quad (2.22)$$

โดยที่

$$r = |r^P| \quad (2.23)$$



รูปที่ 2.3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของวงโคจรและรัศมี

สมการ(2.22) คือความสัมพันธ์เชิงสเกลาร์ซึ่งแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของระยะห่างระหว่างวัตถุ B และ C เมื่อเวลาเปลี่ยนไป ในสามเหลี่ยม DBE ในรูป 2.3  $\theta$  จะแทนมุมระหว่างด้านทั้งสอง ซึ่งความยาวของมันอยู่ในอัตราส่วนของ  $\frac{r}{v}$  ดังนั้น

$$r \cos \theta = v \cos \theta \quad (2.24)$$

จากนิยามของผลคูณสเกลาร์เราจะได้ว่า

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = r v \cos \theta \quad (2.25)$$

แต่ต้องระมัดระวังว่า  $r \neq |\vec{r}|$  แต่เป็น  $v = |\vec{v}|$

แทนค่าสมการ(2.21) และ (2.23) ลงในสมการ(2.25) จะได้

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = r v \cos \theta \quad (2.26)$$

ดังนั้นเมื่อเทียบกับสมการ(2.24) เราจะได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญ คือ

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = r v \quad (2.27)$$

## 2.2.2 กฎการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น

เมื่อเราแก้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ผลเฉลยที่ได้จะเป็นไปตามกฎของเคปเลอร์(Kepler's Law) ซึ่งเป็นกฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์เสนอโดย โจฮันเนส เคปเลอร์(Johannes Kepler) มี 3 ข้อ (Boulet 1991)คือ

1. ดาวเคราะห์ทุกดวงจะโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงรี โดยมีดวงอาทิตย์เป็นจุดโฟกัสจุดหนึ่ง (กฎภาคตัดกรวย)

2. เส้นตรงที่ลากเชื่อมระหว่างดวงอาทิตย์และดาวเคราะห์จะกวาดจากพื้นที่ในอวกาศเท่ากันในช่วงระยะเวลาที่ใช้เท่ากัน(กฎแห่งพื้นที่)

3. คาบเวลาดาราคติ(sideral period) ของดาวเคราะห์ยกกำลังสองจะเป็นปฏิกภาคโดยตรงกับระยะครึ่งแกนยาวของวงโคจร(หรือระยะทางเฉลี่ยของดาวเคราะห์ถึงดวงอาทิตย์)ยกกำลังสาม(กฎฮาร์โมนิก)

### กฎภาคตัดกรวย(The Conic Section Law)

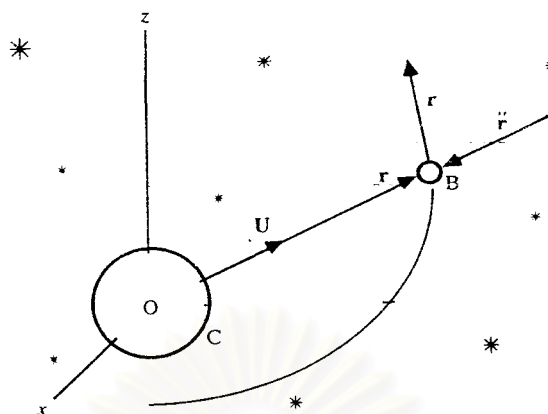
จากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้นคือ

$$\vec{F} = -\frac{\mu}{r^2} \vec{U} \quad (2.28)$$

โดยที่

$$U = \frac{r}{r} \quad (2.29)$$

คือเวกเตอร์หน่วยซึ่งมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์รัศมีดังที่แสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.4 ปัญหาวัตถุสองชิ้น

เมื่อทำผลคูณเวกเตอร์ระหว่างสมการ(2.28) กับ  $\hat{r}$  เราจะได้

$$\hat{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2} (\hat{r} \times \dot{\mathbf{r}})$$

$$\hat{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (2.30)$$

เนื่องจาก  $\hat{r}$  และ  $\dot{\mathbf{r}}$  ขนานกัน ทำให้ผลคูณเวกเตอร์เป็นศูนย์(null vector) เมื่อพิจารณาหาอนุพันธ์ต่อไปนี้เทียบกับ  $\tau$

$$\frac{d}{d\tau} (\hat{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (\dot{\hat{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) + (\hat{r} \times \ddot{\mathbf{r}})$$

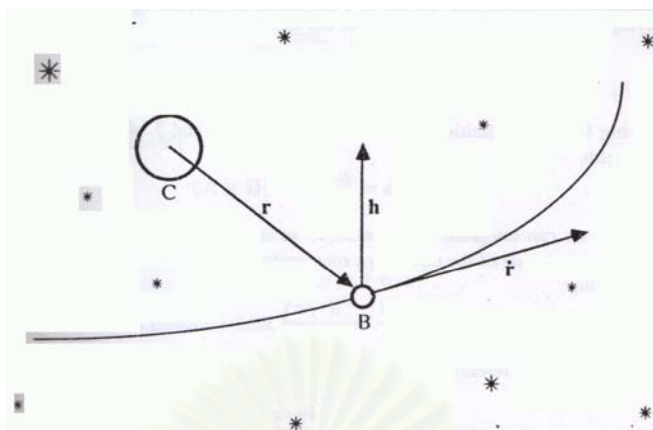
ซึ่งจะได้

$$\frac{d}{d\tau} (\hat{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (2.31)$$

เนื่องจากสมการ(2.30) และ  $\dot{\hat{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$  ด้วยเหตุผลทำนองเดียวกัน ถ้าเราทำการอินทิเกรตสมการ(2.31) เราจะได้ว่า

$$\hat{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}^{\nu} \quad (2.32)$$

เมื่อ  $\mathbf{h}^{\nu}$  คือเวกเตอร์คงที่จากการอินทิเกรตซึ่งมีค่าเท่ากับโมเมนตัมเชิงมุมต่อหน่วยมวลของระบบวัตถุสองชิ้น เรียกว่าเวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม

รูปที่ 2.5 เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุม  $h^P$ 

ดังแสดงในรูปที่ 2.5  $h^P$  เป็นเวกเตอร์คงที่ซึ่งหมายความว่าขนาดและทิศทางของมันในอวกาศไม่เปลี่ยนแปลง ทิศทางของ  $h^P$  จะอยู่ในทิศทางตั้งฉากกับระนาบวงโคจรในระบบพิกัดฉาก เมื่อส่วนประกอบในแนวแกน z ของ  $h^P$  มีค่าเป็นบวก วัตถุ B จะเคลื่อนที่ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้านที่เป็นบวกในแนวแกน z ซึ่งจะเป็นการเคลื่อนที่ในทางตรง(direct motion) แต่เมื่อส่วนประกอบในแกน z ของ  $h^P$  มีค่าเป็นลบ วัตถุ B จะเคลื่อนที่ไปตามเข็มนาฬิกาเมื่อมองจากด้านที่เป็นบวกในแนวแกน z ซึ่งจะเป็นการเคลื่อนที่ย้อนกลับ(retrograde motion)

เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมสามารถที่จะนำไปใช้แปลงสมการการเคลื่อนที่ซึ่งจะทำให้ง่ายต่อการอินทิเกรต ย้อนกลับไปที่สมการ(2.28) เมื่อเราทำผลคูณเวกเตอร์ระหว่างสมการนี้กับ  $h^P$  เราจะได้

$$\mathcal{R} \times h^P = -\frac{\mu}{r^2} (U \times h^P) \quad (2.33)$$

ดังนั้น 
$$\mathcal{R} \times h^P = -\frac{\mu}{r^2} (U \times (r^P \times \mathcal{R})) \quad (2.34)$$

เนื่องจาก  $h^P = r^P \times \mathcal{R}$  จากคุณสมบัติของเวกเตอร์ เมื่อ  $A, B$  และ  $C$  คือเวกเตอร์ใดๆ จะได้

$$A^P \times (B^P \times C^P) = (A^P \cdot C^P) B^P - (A^P \cdot B^P) C^P \quad (2.35)$$

เมื่อนำคุณสมบัตินี้ไปประยุกต์ใช้กับสมการ (2.34) จะได้

$$\mathcal{R} \times h^P = -\frac{\mu}{r^2} [(U^P \cdot \mathcal{R}^P) \cdot r^P - (U^P \cdot r^P) \cdot \mathcal{R}^P]$$

แทน  $U^P$  ตามนิยามและใช้สมการ (2.27) เราจะได้รูปแบบอย่างง่าย คือ

$$\mathcal{R} \times h^P = \frac{\mu}{r^2} (r \mathcal{R} - r \mathcal{R}) \quad (2.36)$$

พิจารณาสมการ



$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{r^{\rho}}{r} \right) \quad (2.37)$$

หาอนุพันธ์ทางด้านขวาของสมการ (2.37) จะได้

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{r^{\rho}}{r} \right) = \frac{r r^{\rho} - r^{\rho} \dot{r}}{r^2} \quad (2.38)$$

พิจารณาหาอนุพันธ์ของ  $r^{\rho} \times h^{\rho}$  เทียบกับ  $\tau$  จะได้

$$\frac{d}{d\tau} (r^{\rho} \times h^{\rho}) = (\dot{r}^{\rho} \times h^{\rho}) + (r^{\rho} \times \dot{h}^{\rho}) \quad (2.39)$$

$h^{\rho}$  เป็นเวกเตอร์คงที่ ดังนั้น

$$\dot{h}^{\rho} = 0 \quad (2.40)$$

สมการ(2.39) ก็จะต้องอยู่ในรูปร่างง่ายคือ

$$\frac{d}{d\tau} (r^{\rho} \times h^{\rho}) = (\dot{r}^{\rho} \times h^{\rho}) \quad (2.41)$$

ย้อนกลับไปที่สมการ(2.36) เราจะเห็นว่าทางขวามือและทางซ้ายมือของสมการสามารถถูกแทนได้โดยสมการ(2.38) และ (2.41) ตามลำดับ เมื่อแทนเข้าไปแล้วเราจะได้

$$\frac{d}{d\tau} (r^{\rho} \times h^{\rho}) = \mu \frac{d}{d\tau} \left( \frac{r^{\rho}}{r} \right) \quad (2.42)$$

เมื่อทำการอินทิเกรตสมการนี้ เราจะได้

$$r^{\rho} \times h^{\rho} = \mu \left( \frac{r^{\rho}}{r} + e^{\rho} \right) \quad (2.43)$$

เมื่อ  $e^{\rho}$  คือเวกเตอร์คงที่ใดๆ จากการอินทิเกรต เมื่อเราทำผลคูณสเกลาร์ระหว่างสมการ (2.43) กับ  $r^{\rho}$  เราจะได้

$$(r^{\rho} \times h^{\rho}) \cdot r^{\rho} = \mu \left( \frac{r^{\rho} \cdot r^{\rho}}{r} + e^{\rho} \cdot r^{\rho} \right) \quad (2.44)$$

โดยการใช้คุณสมบัติของเวกเตอร์ คือ

$$(A^{\rho} \times B^{\rho}) \cdot C^{\rho} = (C^{\rho} \times A^{\rho}) \cdot B^{\rho} \quad (2.45)$$

และ  $r^{\rho} \cdot r^{\rho} = r^2$  (2.46)

เราจะเขียนสมการ(2.44) ได้ในรูปแบบใหม่ คือ

$$(r^{\rho} \times r^{\rho}) \cdot h^{\rho} = \mu(r + e^{\rho} \cdot r^{\rho}) \quad (2.47)$$

นำสมการ (2.32) มาแทนจะได้

$$h^2 = \mu(r + e^{\rho} \cdot r^{\rho}) \quad (2.48)$$

จากนิยามของผลคูณสเกลาร์ เราจะได้

$$e^{\rho} \cdot r^{\rho} = er \cos \nu \quad (2.49)$$



โดยที่

$$e = |e^P|$$

และ

$$v \text{ คือมุมระหว่าง } e^P \text{ และ } r^P$$

แทนค่าสมการ (2.49) ลงในสมการ (2.48) จะได้ความสัมพันธ์เชิงสเกลาร์อีกอย่างหนึ่งคือ

$$h^2 = \mu r^2 (1 + e \cos v) \quad (2.50)$$

หรือ

$$r = \frac{h^2 / \mu}{1 + e \cos v} \quad (2.51)$$

ความหมายทางเรขาคณิตของสมการ (2.51) เห็นได้จากการเปรียบเทียบกับสมการทั่วไปของภาคตัดกรวยที่เขียนอยู่ในรูปของพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) คือ

$$r = \frac{\wp}{1 + e \cos v} \quad (2.52)$$

โดยที่จุดกำเนิดอยู่ที่จุดโฟกัส มุมเชิงขั้ว  $v$  คือมุมระหว่างเวกเตอร์รัศมีกับจุดบนทางโคจรที่อยู่ใกล้กับจุดโฟกัสมากที่สุด โดยที่

$$\wp = \frac{h^2}{\mu} \quad (2.53)$$

สรุปก็คือวงโคจรของวัตถุสองชิ้นโดยปกติจะมีลักษณะเป็นภาคตัดกรวยซึ่งตั้งอยู่บนระนาบคงที่ที่ลากผ่านวัตถุศูนย์กลางที่จุดโฟกัส ซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่หนึ่งของเคปเลอร์ โดยที่รูปร่างของวงโคจรกำหนดจากค่าของ  $e$  กล่าวคือ

ถ้า	$e = 0$	วงโคจรจะเป็นวงกลม
	$0 < e < 1$	วงโคจรจะเป็นวงรี
	$e = 1$	วงโคจรจะเป็นพาราโบลา
	$e > 1$	วงโคจรจะเป็นไฮเพอร์โบลา

ซึ่งค่า  $e$  นี้ เราเรียกว่าความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity)

.ในกรณีของวงรี ส่วนประกอบต่างๆ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.5 ซึ่ง  $e^P$  กำหนดโดยทิศทางของจุดใกล้โฟกัส (perifocus) และ

$v$  คือ มุมกวาดจริง (true anomaly)

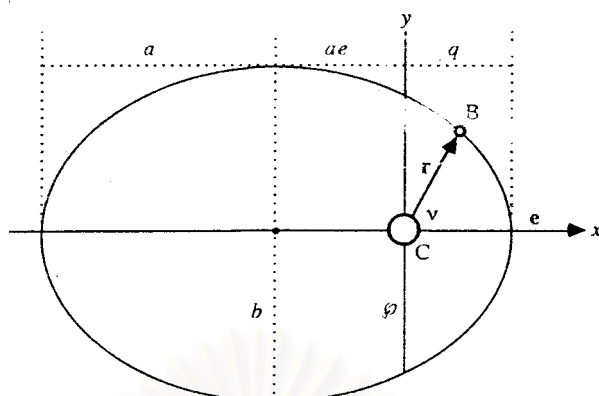
$\wp$  คือ พารามิเตอร์ย่อย (semiparameter)

$e$  คือ ความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) หรือความรี

$q$  คือ ระยะของจุดใกล้โฟกัส (perifocal distance)

$a$  คือ ครึ่งแกนยาว (semimajor axis)

$b$  คือ ครึ่งแกนสั้น (semiminor axis)



รูปที่ 2.6 ส่วนประกอบต่างๆ ของวงโคจรวงรี

ส่วนประกอบต่างๆ มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\phi = q(1 + e) \quad (2.54)$$

$$q = a(1 - e) \quad (2.55)$$

$$\phi = a(1 - e^2) \quad (2.56)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (2.57)$$

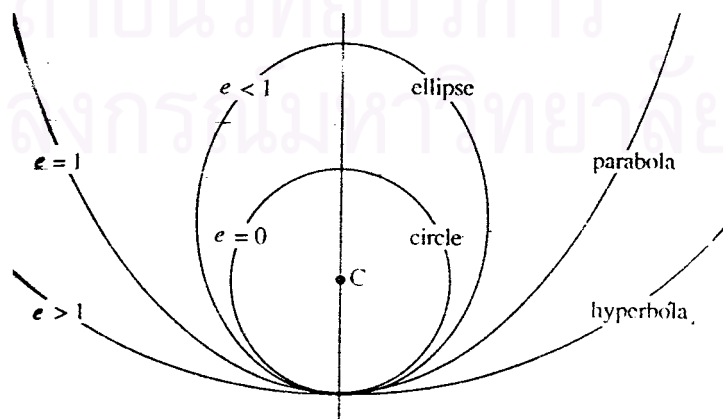
$$b = \sqrt{\phi a} \quad (2.58)$$

ค่าความเยื้องศูนย์กลางกลางเป็นคุณสมบัติเฉพาะของภาคตัดกรวยซึ่งแสดงโดยสมการ (2.51) ลักษณะของวงโคจรทั้ง 4 ชนิด แสดงในรูปที่ 2.7

จากสมการ (2.43) เราจะได้ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ที่มีประโยชน์ คือ

$$e^p = \frac{r \times h^p}{\mu} - \frac{r^p}{r} \quad (2.59)$$

โดยที่  $e^p$  คือเวกเตอร์ความเยื้องศูนย์กลาง



รูปที่ 2.7 ลักษณะของภาคตัดกรวยทั้งสี่ชนิด

ดังนั้นเราสามารถที่จะหาค่า  $e$  โดยที่  $e = |e^i|$  และทิศทางของจุดใกล้โฟกัสในอวกาศได้ เมื่อทราบ  $r^i$  และ  $\dot{r}^i$  ที่จุดใดๆ ในวงโคจร

**กฎแห่งพื้นที่(The Law of Areas)**

จากความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตดังที่แสดงในรูปที่ 2.8 เราจะได้ผลคูณเวกเตอร์ ดังนี้

$$w dA = \frac{1}{2} (r \times dr) \tag{2.60}$$

เมื่อ  $dA$  คือ พื้นที่ของสามเหลี่ยมเล็กๆ ที่ถูกกวาดโดย  $r^i$  ในช่วงเวลาน้อยๆ  $d\tau$

$dr^i$  คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้นของ  $r^i$  ในช่วงเวลาสั้นๆ

$w^i$  คือ เวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบวงโคจรซึ่งมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์พื้นที่

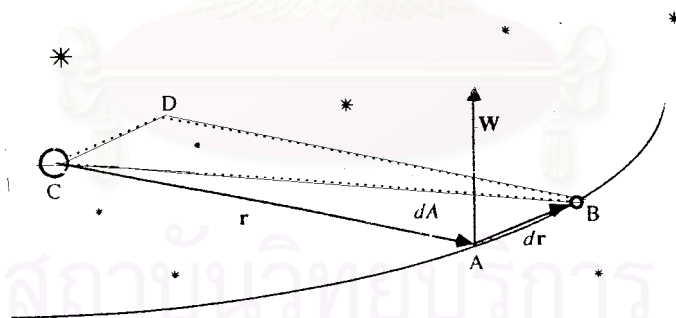
ค่าคงที่  $\frac{1}{2}$  แสดงให้เห็นว่าผลคูณเวกเตอร์นี้มีค่าเท่ากับเวกเตอร์พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

เมื่อหารทั้งสองข้างของสมการ(2.60) ด้วยช่วงเวลาน้อยๆ  $d\tau$  ซึ่งเป็นช่วงเวลาที่กวาดไปเป็นพื้นที่สามเหลี่ยม เราจะได้

$$w \frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2} (r \times \frac{dr}{d\tau})$$

ซึ่งจะได้

$$w \frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2} (r \times \dot{r})$$



รูปที่ 2.8 เวกเตอร์พื้นที่  $w dA$

จากสมการ (2.32) เราจะได้

$$w \frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2} h \tag{2.61}$$

โดยการหาขนาดของสมการ(2.61) ก็จะได้

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{h}{2} \quad (2.62)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า อัตราของพื้นที่ที่เวกเตอร์รัศมีกวาดไปจะคงที่ หรืออีกอย่างก็คือเวกเตอร์รัศมีจะกวาดให้เกิดพื้นที่ที่เท่ากันในเวลาที่เท่ากัน ซึ่งก็คือกฎข้อที่สองของเคปเลอร์

### กฎฮาร์โมนิก (The Harmonic Law)

จัดสมการ (2.62) ใหม่ โดยแทน  $d\tau$  ด้วย  $kdt$  เราจะได้

$$2(dA) = hk(dt) \quad (2.63)$$

ในกรณีที่วงโคจรเป็นวงรี การอินทิเกรตพื้นที่ที่ถูกกวาดโดยเวกเตอร์รัศมีในช่วงเวลาหนึ่งคาบของการโคจร จะได้ผลที่ตามมาคือ

$$2(\pi ab) = hk(P) \quad (2.64)$$

เมื่อ  $\pi ab$  คือพื้นที่ของวงรีและ  $P$  คือคาบของการโคจร เมื่อย้อนกลับไปใช้สมการ (2.53) และสมการ (2.58) คือ

$$h = \sqrt{\mu \wp}$$

$$b = \sqrt{\wp a}$$

สมการ (2.64) ก็จะกลายเป็น

$$P^2 = \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{2\pi}{k} \right)^2 \right] a^3 \quad (2.65)$$

ซึ่งก็คือรูปแบบทั่วไปของกฎข้อที่สามของเคปเลอร์นั่นเอง

### 2.2.3 กฎ vis-viva (The Vis-viva Law)

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในการโคจรกับตำแหน่ง สามารถที่จะหาได้จากการอินทิเกรตสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุสองชิ้น คือ

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu r^p}{r^3}$$

เมื่อทำผลคูณสเกลาร์ระหว่างสมการนี้กับ  $2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  และใช้สมการ (2.27) เราจะได้ว่า

$$2(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \dot{\mathcal{E}} = 2 \left( -\frac{\mu \dot{\mathcal{E}}}{r^2} \right) \quad (2.66)$$

เมื่อพิจารณาอนุพันธ์ของ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) &= (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \\ &= 2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

และ

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\mu}{r} \right) = \frac{-\mu \dot{r}}{r^2} \quad (2.68)$$

เมื่อแทนค่าสมการ (2.67) และ (2.68) ลงใน (2.66) จะได้

$$\frac{d}{d\tau} (r \dot{\theta}) = 2 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\mu}{r} \right) \quad (2.69)$$

อินทิเกรตสมการ (2.69) จะได้

$$r \dot{\theta} = \frac{2\mu}{r} + \varepsilon$$

ซึ่งก็คือ

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \varepsilon \quad (2.70)$$

โดยที่  $\varepsilon$  คือค่าคงที่ใดๆ จากการอินทิเกรต ซึ่งสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขที่มีอยู่เมื่อวัตถุอยู่ที่จุดใกล้โฟกัส ที่จุดใกล้โฟกัสนี้  $r = q$  ซึ่งจะได้

$$\varepsilon = v^2 - \frac{2\mu}{q} \quad (2.71)$$

เนื่องจาก  $r$  ตั้งฉากกับ  $\dot{r}$  ที่จุดใกล้โฟกัส เราจะใช้นิยามของผลคูณเวกเตอร์เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์อย่างง่าย คือ

$$\begin{aligned} h &= |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = rv \sin 90^\circ \\ &= qv \quad (\text{ที่จุดใกล้โฟกัส}) \end{aligned} \quad (2.72)$$

เมื่อนำสมการ (2.72) มายกกำลังสองและแทนด้วยสมการ (2.53) และ (2.54) เราจะได้

$$v^2 = \frac{\mu(1+e)}{q} \quad (2.73)$$

นำสมการ (2.73) และ (2.55) ไปแทนลงในสมการ (2.71) จะได้ค่า  $\varepsilon$  เป็น

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{a} \quad (2.74)$$

ในท้ายที่สุด เมื่อนำค่า  $\varepsilon$  ที่ได้จากสมการ (2.74) ไปแทนลงในสมการ (2.70) เราก็จะได้

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.75)$$

สมการ(2.75) นี้เรียกว่าสมการ vis-viva (Boulet 1991) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงให้เห็นว่าผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ในระบบวัตถุสองชิ้นจะคงที่ สมการนี้มีประโยชน์อย่างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการหาค่าครึ่งแกนยาว (a) เมื่อทราบตำแหน่งและเวกเตอร์ความเร็วที่จุดใดจุดหนึ่งของโคจร โดยหาได้จากสมการ

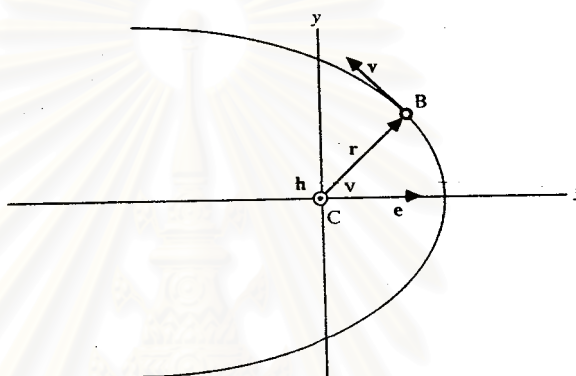
$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \quad (2.76)$$

## 2.2.4 ความสัมพันธ์ทั่วไปทางเรขาคณิต

ผลเฉลยของปัญหาวัตถุสองชิ้นจะสามารถบ่งบอกลักษณะได้โดยปริมาณเชิงตัวเลขหกตัว ซึ่งสัมพันธ์กับค่าคงที่ใดๆ ที่ได้จากการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu r^{\dot{p}}}{r^3}$$

ปริมาณพื้นฐานเหล่านี้เป็นปริมาณข้อมูลที่น้อยที่สุดที่จำเป็นสำหรับการกำหนดทางโคจรและตำแหน่งของวัตถุท้องฟ้าในอวกาศ เราเรียกปริมาณนี้ว่าหลักมูลทางโคจร (orbital elements)



รูปที่ 2.9 ระบบพิกัดระนาบวงโคจร

รูปที่ 2.9 แสดงถึงวงโคจรของวัตถุ B รอบจุดศูนย์กลาง C ที่ตั้งอยู่บนจุดกำเนิดของระบบพิกัดฉาก ระนาบ  $\bar{x}\bar{y}$  ซ้อนทับกันพอดีกับระนาบวงโคจร และแกน  $\bar{x}$  อยู่ในแนวเดียวกับครึ่งแกนยาวของวงโคจร เวกเตอร์  $\dot{p}$  คือความเร็วของวัตถุ B ณ. ที่จุดที่เวกเตอร์รัศมีทำมุมกวาดจริง  $\nu$  กับแกน  $\bar{x}$

ย้อนกลับไปสมการ (2.32) เราจะเขียนได้ว่า

$$\dot{h}^p = \dot{r}^p \times \dot{v}^p \quad (2.77)$$

ในระบบพิกัดระนาบวงโคจร เราจะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}^p &= \{0, 0, h\} \\ \dot{r}^p &= \{\bar{x}, \bar{y}, 0\} \\ \dot{v}^p &= \{\bar{x}\dot{\bar{x}}, \bar{y}\dot{\bar{y}}, 0\} \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

เมื่อทำผลคูณสเกลาร์ระหว่างสมการ (2.77) กับ  $\dot{h}^p$  เราจะได้

$$\dot{h}^p \cdot \dot{h}^p = \dot{h}^p \cdot (\dot{r}^p \times \dot{v}^p)$$

ซึ่งจะกลายเป็น

$$h^2 = h(\bar{x}\dot{\bar{y}} - \bar{y}\dot{\bar{x}})$$

เพราะฉะนั้น

$$h = \bar{x} \dot{y} - \dot{\bar{x}} \bar{y} \quad (2.79)$$

### โมเมนตัมเชิงมุมและอัตราเร็วเชิงมุม

สมการ(2.79) สามารถนำไปใช้หาความสัมพันธ์ระหว่าง  $h$  และอัตราเร็วเชิงมุม  $\dot{\theta}$  จากรูปที่ 2.11 เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\bar{x} = r \cos \nu \quad (2.80)$$

$$\bar{y} = r \sin \nu \quad (2.81)$$

หาอนุพันธ์ของสองสมการนี้เทียบกับเวลา  $\tau$  จะได้

$$\dot{\bar{x}} = -r \dot{\nu} \sin \nu + r \dot{\nu} \cos \nu \quad (2.82)$$

$$\dot{\bar{y}} = r \dot{\nu} \cos \nu + r \dot{\nu} \sin \nu \quad (2.83)$$

แทนสมการ (2.80) จนถึง (2.83) ลงในสมการ (2.79) และใช้คุณสมบัติของตรีโกณมิติที่ว่า

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (2.84)$$

เราจะได้

$$h = r^2 \dot{\nu} \quad (2.85)$$

### อัตราเร็วเชิงรัศมีและมุมกวาดจริง

เราสามารถใส่สมการ (2.85) เพื่อหาอัตราเร็วเชิงรัศมี  $\dot{r}$  จากสมการทั่วไปของภาคตัดกรวย เราทราบว่า

$$\rho = r(1 + e \cos \nu) \quad (2.86)$$

โดยที่

$$\rho = \frac{h^2}{\mu}$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (2.86) เทียบกับ  $\tau$  จะได้

$$\dot{\rho}(1 + e \cos \nu) - r e \dot{\nu} \sin \nu = 0$$

เมื่อคูณ  $r$  เข้าไปจะได้

$$r \dot{\rho}(1 + e \cos \nu) - r^2 e \dot{\nu} \sin \nu = 0$$

เมื่อแทนสมการ (2.85) และ (2.86) เข้าไปจะได้

$$\dot{\rho} - h e \sin \nu = 0$$

เนื่องจาก  $h = \sqrt{\mu \rho}$  ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} e \sin \nu \quad (2.87)$$

### ความเยื้องศูนย์กลาง

พิจารณาสมการของเวกเตอร์ความเยื้องศูนย์กลาง  $e^P$  ตามสมการ (2.59) คือ

$$e^P = \frac{v^P \times h^P}{\mu} - \frac{r^P}{r}$$

เนื่องจาก  $h^P = r^P \times v^P$  ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$e^P = \frac{v^P \times (r^P \times v^P)}{\mu} - \frac{r^P}{r} \quad (2.88)$$

จากคุณสมบัติของเวกเตอร์ที่ว่า

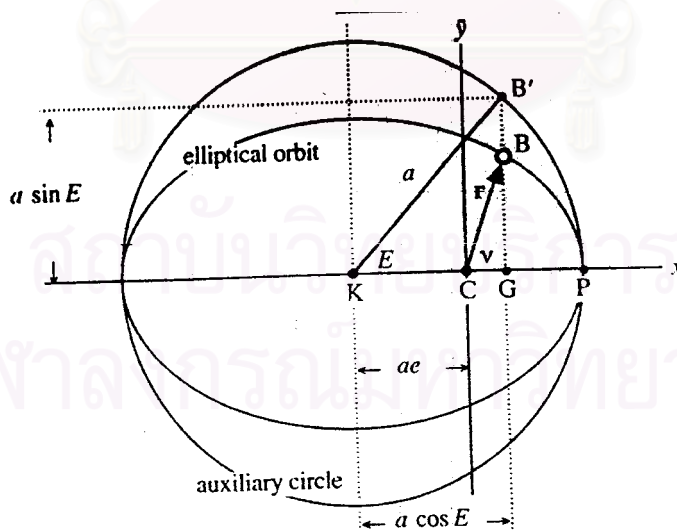
$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

ดังนั้นสมการ (2.88) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ คือ

$$e^P = \left( \frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right) r^P - \left( \frac{r \cdot v}{\mu} \right) v^P \quad (2.89)$$

### 2.2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตและเวลา

เมื่อนำสมการ (2.79) ไปประยุกต์ใช้กับวงโคจรที่เป็นวงรี ก็จะสามารถหาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างตำแหน่งในระนาบวงโคจรกับเวลาที่ล่วงไปจากเวลาเริ่มต้น (epoch) ซึ่งจะมีลักษณะของฟังก์ชันเป็นไปตามสมการสำหรับวงโคจรวงรีที่ถูกสร้างขึ้นโดยเคปเลอร์



รูปที่ 2.10 ระบบของวงรี

พิจารณาโครงสร้างทางเรขาคณิตของวงโคจรที่เป็นวงรี(elliptical orbit)ในรูปที่ 2.10 ซึ่งประกอบด้วยวงกลมเสริม(auxiliary circle) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด K ล้อมรอบรูปวงรีของการ



โคจรรอบจุด C เมื่อวัตถุท้องฟ้า B โคจรไปตามวงรี มันจะถูกตามโดยจุด B' ซึ่งนิยามโดยการฉายภาพของ B ในทิศทางของแกน y ลงบนวงกลมเสริม มุม E เป็นมุมที่เป็นสัดส่วนกับพื้นที่แรเงา เรียกว่ามุมกวาดเยื้อง (eccentric anomaly) ซึ่งจะวัดในระนาบวงโคจรจากแกน  $x^-$  ไปยังเส้น KB' ระยะจาก B' ไปยัง K จะมีค่าเท่ากับ  $a$  ซึ่งก็คือระยะครึ่งแกนยาวของวงรี และระยะจาก K ไปยัง C มีค่าเท่ากับ  $ae$  โดยที่  $e$  คือความเยื้องศูนย์กลาง หรือความรีของวงรี

ประโยชน์ของวงกลมเสริมคือช่วยในการกระจาย  $x^-$  และ  $y^-$  ในเทอมของมุมกวาดเยื้อง E แทนมุมกวาดจริง  $v$  เพื่อให้สมการ (2.79) สามารถที่จะลดรูปลงไปสู่รูปแบบที่ง่ายต่อการอินทิเกรต จากรูปที่ 2.9 เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด  $x^-$  ของวัตถุท้องฟ้ากับมุมกวาดเยื้อง E คือ

$$x^- = a(\cos E - e) \quad (2.90)$$

จากสมการทั่วไปของภาคตัดกรวย คือสมการ (2.86) จะได้

$$\wp = r + e(r \cos v) \quad (2.91)$$

เมื่อแทนสมการ (2.80) ลงใน (2.90) เราจะได้

$$r \cos v = a \cos E - ae \quad (2.92)$$

ดังนั้น แทนสมการ (2.92) ลงใน (2.91) ก็จะได้

$$\wp = r + ae \cos E - ae^2 \quad (2.93)$$

ย้อนกลับไปสมการ (2.56) คือ

$$\wp = a(1 - e^2)$$

นำสมการ (2.93) มาจัดใหม่ให้อยู่ในรูปของ  $r$  ได้

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.94)$$

เราจะสร้างสมการของ  $y^-$  โดยการแทน  $x^-$  และ  $r$  ลงในความสัมพันธ์ทั่วไปคือ

$$r^2 = x^{-2} + y^{-2}$$

ซึ่งจะได้

$$y^{-2} = a^2(1 - e^2)(1 - \cos^2 E)$$

จากการประยุกต์ใช้คุณสมบัติทางตรีโกณมิติของสมการ (2.84) ก็จะได้

$$y^- = a(1 - e^2) \sin E$$

เมื่อถอดรากที่สองก็จะกลายเป็น

$$y^- = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (2.95)$$

ส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร็วสามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการสำหรับ  $x^-$  และ  $y^-$  ดังนั้นจากสมการ (2.90) เราจะได้

$$\dot{x}^- = -aE \sin E \quad (2.96)$$

และจากสมการ (2.95) เราก็จะได้

$$y' = a\sqrt{1-e^2} E \sin E \quad (2.97)$$

เมื่อแทนสมการ (2.90), (2.95), (2.96) และ (2.97) ลงในสมการ (2.79) ก็จะได้

$$h = a^2 \sqrt{1-e^2} (\cos^2 E - e \cos E + \sin^2 E) E'$$

เมื่อจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = (1 - e \cos E) E' \quad (2.98)$$

เมื่อใช้คุณสมบัติทางตรีโกณมิติของสมการ (2.84) กับใช้ข้อเท็จจริงที่ว่า

$$h = \sqrt{\mu a} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$$

และ

$$E' = \frac{dE}{d\tau}$$

สมการที่ (2.98) ก็จะกลายเป็น

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} d\tau = (1 - e \cos E) dE$$

เมื่อทำการอินทิเกรตสมการนี้จะทำให้ได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tau = E - e \cos E$$

โดยที่ค่าคงที่ใดๆ ของการอินทิเกรตเป็นศูนย์ เนื่องจากเรากำหนดให้  $\tau$  เป็นศูนย์เมื่อ  $E$  เป็นศูนย์ ให้  $T$  แทนเวลาที่ผ่านจุดใกล้โฟกัส ดังนั้นตำแหน่งของวัตถุท้องฟ้าที่เวลา  $t$  ใดๆ สามารถเขียนได้เป็น

$$n(t - T) = E - e \sin E$$

เมื่อ  $n$  คือการเคลื่อนที่เฉลี่ย(mean motion) โดยที่

$$n = k \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (2.99)$$

และ  $M$  คือมุมกวาดเฉลี่ย(mean anomaly) โดยที่

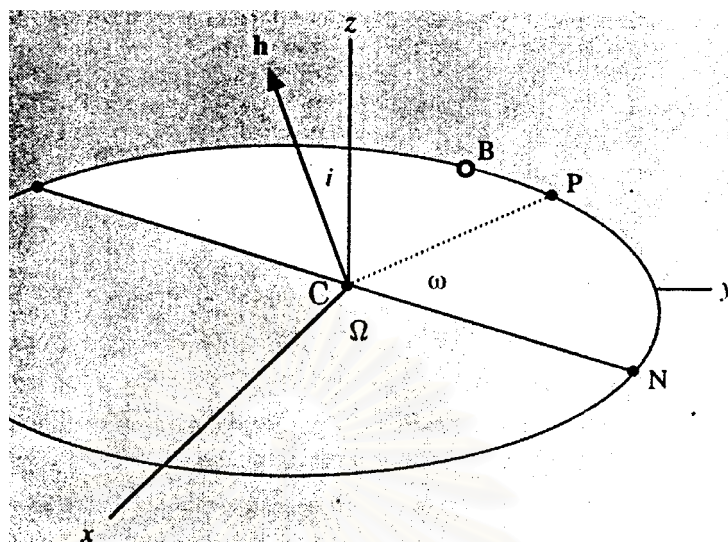
$$M = n(t - T) \quad (2.100)$$

ในที่สุดเราก็จะได้

$$M = E - e \sin E \quad (2.101)$$

สมการนี้เรียกว่าสมการเคปเลอร์(Kepler's equation) (Roy 1980) ซึ่งเป็นสมการสำหรับวงโคจรที่เป็นวงรี แต่สมการนี้ก็สามารถที่จะนำไปใช้กับวงโคจรที่เป็นวงกลมโดยที่  $e = 0$  ได้เช่นเดียวกัน

## 2.3 การหาหลักมูลทางโคจรจากตำแหน่งและความเร็ว



รูปที่ 2.11 ลักษณะทางเรขาคณิตของหลักมูลทางโคจร

ส่วนประกอบของ  $\mathcal{P}$  และ  $\mathcal{V}$  สามารถที่จะบรรยายลักษณะทั่วไปของการเคลื่อนที่ได้ แต่จะไม่สามารถที่จะแสดงให้เห็นถึงขนาด รูปร่าง และทิศทางของวงโคจรในอวกาศได้อย่างชัดเจน ในการที่จะแสดงลักษณะทางเรขาคณิตของวงโคจรซึ่งเป็นสามมิติดังที่แสดงในรูปที่ 2.11 เราจะต้องแปลง  $\mathcal{P}$  และ  $\mathcal{V}$  ไปเป็นหลักมูลทางโคจร (orbital elements) (พีรพัฒน์ 2533) ดังต่อไปนี้

$a$  คือ ครึ่งแกนยาว (semimajor axis)

$q$  คือ ระยะใกล้จุดโฟกัส (perifocal distance)

หรือระยะของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (perihelion distance)

$e$  คือ ความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) หรือความรี

$i$  คือ ความเอียง (inclination)

$\Omega$  คือ ระยะแวงของจุดได้ขึ้น (longitude of ascending node)

$\omega$  คือ ระยะมุมของจุดใกล้โฟกัส (argument of the perifocus)

หรือระยะมุมของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (argument of perihelion)

$n$  คือ การเคลื่อนที่เฉลี่ย (mean motion)

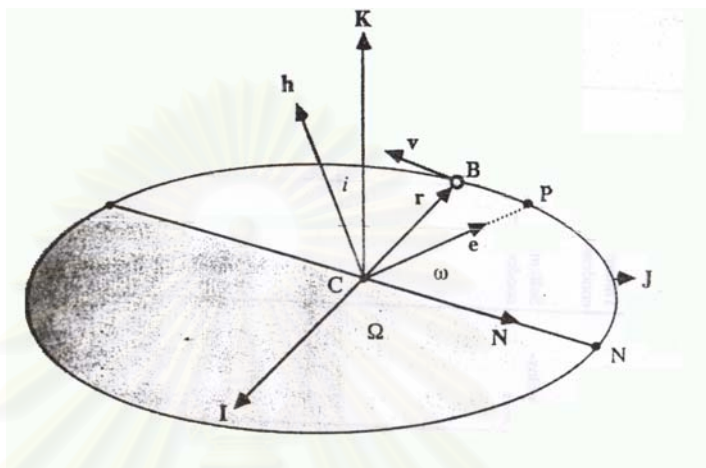
$M$  คือ มุมกวาดเฉลี่ย (mean anomaly)

$T$  คือ เวลาที่ผ่านจุดใกล้โฟกัส (time of perifocal passage)

หรือเวลาที่ผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (time of perihelion passage)

### 2.3.1 เวกเตอร์พื้นฐานสามตัว

เราเริ่มกระบวนการหาหลักมูลทางโคจรโดยการสร้างเวกเตอร์พื้นฐานสามตัว คือ  $e^P, h^P$  และ  $N^P$  ดังที่แสดงในรูปที่ 2.12 ให้จุดกำเนิดของระบบพิกัดคาร์ทีเซียนอยู่ที่จุดศูนย์กลาง  $C$  และ  $I, J$  และ  $K$  คือเวกเตอร์หน่วยที่ขนานกับแกน  $x, y$  และ  $z$  ตามลำดับ



รูปที่ 2.12 เวกเตอร์พื้นฐาน คือ  $e^P, h^P$  และ  $N^P$

ระบบพิกัดนี้จะให้แกน  $+x$  มีทิศชี้ไปยังจุดวสันตวิษุวัต(vernal equinox) และระนาบ  $xy$  ซ้อนทับกันพอดีกับระนาบสุริยวิถี(ecliptic plane) โดยให้ดวงอาทิตย์เป็นจุดศูนย์กลาง ดังนั้นที่เวลา  $t$  ใดๆ เราจะมี

$$r^P = \{x, y, z\}$$

$$v^P = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$$

และ

$$\left. \begin{aligned} r &= |r^P| \\ v^2 &= v^P \cdot v^P \\ r \dot{\theta} &= r^P \cdot v^P \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

จากสมการ (2.89) เวกเตอร์ความเยื้องศูนย์กลางคือ

$$e^P = \left( \frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right) r^P - \left( \frac{r \dot{\theta}}{\mu} \right) v^P \quad (2.103)$$

ซึ่ง

$$e^P = \{e_x, e_y, e_z\} \quad (2.104)$$

ดังนั้น

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \left( \frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right) x - \left( \frac{r}{\mu} \right) \dot{x} \\ e_y &= \left( \frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right) y - \left( \frac{r}{\mu} \right) \dot{y} \\ e_z &= \left( \frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right) z - \left( \frac{r}{\mu} \right) \dot{z} \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมหาได้จากผลคูณเวกเตอร์

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.106)$$

ซึ่ง

$$\mathbf{h} = \{h_x, h_y, h_z\} \quad (2.107)$$

ดังนั้น

$$\left. \begin{aligned} h_x &= y\dot{z} - z\dot{y} \\ h_y &= z\dot{x} - x\dot{z} \\ h_z &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

และเวกเตอร์ของจุดไต่ขึ้น  $\mathbf{N}$  หาได้จากผลคูณเวกเตอร์ของ  $\mathbf{K}$  และ  $\mathbf{h}$  คือ

$$\mathbf{N} = \mathbf{K} \times \mathbf{h} \quad (2.109)$$

ซึ่ง

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \{0, 0, 1\} \\ \mathbf{h} &= \{h_x, h_y, h_z\} \end{aligned}$$

และ

$$\mathbf{N} = \{N_x, N_y, N_z\} \quad (2.110)$$

ดังนั้น

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -h_y \\ N_y &= +h_x \\ N_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

### 2.3.2 พารามิเตอร์ $a, e, q$

พารามิเตอร์ของวงรี  $a, e, q$  สามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ต่างๆ ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว จากสมการ vis-viva เราจะได้

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \quad (2.112)$$

ซึ่งเราจะสามารถหาค่า  $a$  ได้ ส่วนความเยื้องศูนย์กลาง  $e$  สามารถหาได้จากสมการ (2.103) คือ

$$e = |\mathbf{e}^P| \quad (2.113)$$

เราจะหาระยะของจุดใกล้ดวงอาทิตย์  $q$  โดยใช้สมการ (2.106) จะได้

$$h = |\mathbf{h}^P| \quad (2.114)$$

ดังนั้นจากสมการ (2.53) คือ

$$\wp = \frac{h^2}{\mu} \quad (2.115)$$

และจากสมการ (2.54) เราก็จะได้

$$q = \frac{\wp}{1+e} \quad (2.116)$$

### 2.3.3 มุมที่ใช้กำหนดทิศทาง

กลับไปดูรูปที่ 2.12 เราจะพบว่ามุม  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  สามารถหาได้จากผลคูณสเกลาร์ต่างๆ ระหว่างเวกเตอร์พื้นฐาน  $\mathbf{e}^P$ ,  $\mathbf{h}^P$ ,  $\mathbf{N}^P$  และเวกเตอร์หน่วย  $\mathbf{I}^P$ ,  $\mathbf{J}^P$ ,  $\mathbf{K}^P$  ดังนั้นความเอียง  $i$  จะคำนวณได้จากผลคูณสเกลาร์

$$\mathbf{K}^P \cdot \mathbf{h}^P = |\mathbf{K}^P| |\mathbf{h}^P| \cos i \quad (2.117)$$

โดยที่

$$\mathbf{K}^P = \{0, 0, 1\}$$

$$\mathbf{h}^P = \{h_x, h_y, h_z\}$$

ดังนั้นเราจะพบว่า

$$\mathbf{K}^P \cdot \mathbf{h}^P = h_z$$

$$|\mathbf{K}^P| = 1$$

$$|\mathbf{h}^P| = h$$

สมการที่ (2.117) ก็จะอยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$\cos i = \frac{h_z}{h} \quad (2.118)$$

ในกรณีของ  $\Omega$  เราเริ่มจากผลคูณสเกลาร์

$$\mathbf{I}^P \cdot \mathbf{N}^P = |\mathbf{I}^P| |\mathbf{N}^P| \cos \Omega \quad (2.119)$$

โดยที่

$$\mathbf{I}^P = \{1, 0, 0\}$$

$$\mathbf{N}^P = \{N_x, N_y, N_z\}$$

ดังนั้น

$$\vec{I} \cdot \vec{N} = N_x$$

$$|\vec{I}| = I$$

$$|\vec{N}| = N$$

สมการ (2.119) ก็จะลดลงเหลือ

$$\cos \Omega = \frac{N_x}{N} \quad (2.120)$$

ถ้า  $N_y < 0$  จะได้  $\Omega > 180^\circ$

ในกรณีของ  $\omega$  ก็สามารถหาได้จากผลคูณสเกลาร์

$$\vec{N} \cdot \vec{e}^p = |\vec{N}| |\vec{e}^p| \cos \omega \quad (2.121)$$

โดยที่

$$\vec{N} = \{N_x, N_y, N_z\}$$

$$\vec{e}^p = \{e_x, e_y, e_z\}$$

$$|\vec{N}| = N$$

$$|\vec{e}^p| = e$$

ดังนั้นสมการ (2.121) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\cos \omega = \frac{\vec{N} \cdot \vec{e}^p}{N e} \quad (2.122)$$

ถ้า  $e_z < 0$  จะได้  $\omega > 180^\circ$

บางครั้ง  $\omega$  นี้ ก็จะถูกแทนด้วยระยะแวงของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (longitude of perihelion)

$\tilde{\omega}$  ซึ่งหาได้จาก

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega$$

หรือก็คือ

$$\omega = \tilde{\omega} - \Omega$$

### 2.3.4 มุมกวาดเฉลี่ย

จากสมการ (2.80) และ (2.81) ตำแหน่งของวัตถุท้องฟ้าเมื่ออ้างอิงกับระบบพิกัดระนาบวงโคจรคือ

$$\bar{x} = r \cos v \quad (2.123)$$

$$\bar{y} = r \sin v \quad (2.124)$$

เมื่อนำสมการของภาคตัดกรวยมาจัดรูปใหม่จะได้

$$r \cos v = \frac{\rho - r}{e}$$



ซึ่งจะทำให้เราสามารถเขียนสมการ (2.123) ได้ในรูปของ

$$\bar{x} = \frac{\wp - r}{e} \quad (2.125)$$

เมื่อย้อนกลับไปทีสมการ(2.87) เรามี

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{e}} e \sin v$$

เมื่อนำ  $r$  มาคูณตลอดทั้งสองข้าง จะได้

$$r \sin v = \frac{r}{e} \sqrt{\frac{\wp}{\mu}}$$

แทนค่าสมการข้างบนลงในสมการ (2.124) เราจะได้

$$\bar{y} = \frac{r}{e} \sqrt{\frac{\wp}{\mu}} \quad (2.126)$$

เมื่อวงโคจรเป็นวงรี เราจะใช้สมการ (2.90) และ (2.95) คือ

$$\bar{x} = a(\cos E - e) \quad (2.127)$$

$$\bar{y} = b \sin E \quad (2.128)$$

โดยที่

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (2.129)$$

ซึ่ง  $\bar{x}$  และ  $\bar{y}$  สามารถหาได้จากสมการ (2.125) และ (2.126) ตามลำดับ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\cos E = \frac{\bar{x}}{a} + e \quad (2.130)$$

$$\sin E = \frac{\bar{y}}{b} \quad (2.131)$$

ก็จะสามารถหาค่ามุมกวาดเยื้อง  $E$  ได้

ดังนั้นมุมกวาดเฉลี่ย  $M$  และการเคลื่อนที่เฉลี่ย  $n$  ของวงรี ก็จะสามารถหาได้ในหน่วยของ  
เรเดียน (radian) ดังนี้

$$M = E - e \sin E \quad (2.132)$$

$$n = k \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (2.133)$$

และคาบของวงโคจรก็สามารถหาได้จากสมการ (2.65)

ในบางครั้งเราจะใช้ระยะแวงเฉลี่ย (mean longitude)  $L$  แทนมุมกวาดเฉลี่ย  $M$  โดยจะมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$L = \tilde{\omega} + M$$

หรือ

$$M = L - \tilde{\omega}$$



ดังนั้น

$$M = L - \omega - \Omega$$

### 2.3.5 เวลาที่ผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์

สามารถหาได้จากสมการของมุมกวาดเฉลี่ย คือ

$$M = n(t - T) \quad (2.134)$$

ดังนั้น

$$M = L - \omega - \Omega$$

### 2.4 เวลาที่ผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์

สามารถหาได้จากสมการของมุมกวาดเฉลี่ย คือ

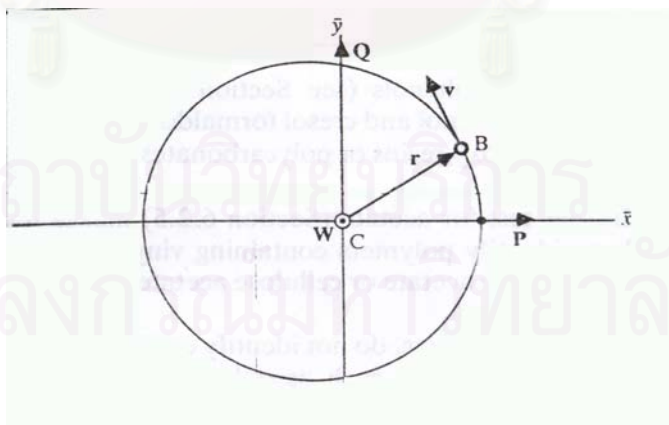
$$M = n(t - T) \quad (2.134)$$

ซึ่งก็จะได้

$$T = t - \frac{M}{n} \quad (2.135)$$

ดังนั้นในการหาค่า  $T$  เราจะต้องคำนวณหาค่า  $M$  และ  $n$  ให้ได้ก่อน

### 2.4 การหาดำแหน่งและความเร็วจากหลักมูลทางโคจร



รูปที่ 2.13 เวกเตอร์หน่วย  $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{W}$

การแปลงหลักมูลทางโคจรไปเป็นตำแหน่งและความเร็วที่เวลาเริ่มต้น(epoch) ที่กำหนดสามารถทำได้ง่ายขึ้นโดยการกำหนดเวกเตอร์หน่วย  $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{W}$  ซึ่งตั้งฉากกันในระบบพิกัดระนาบวงโคจร ดังที่แสดงในรูปที่ 2.13

$P^{\prime}$  มีทิศทางในแนวแกน  $\bar{x}$  ซึ่งไปยังจุดใกล้ดวงอาทิตย์  $Q^{\prime}$  มีทิศทางในแนวแกน  $\bar{y}$  และ  $W^{\prime}$  มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบวงโคจร ดังนั้น

$$W^{\prime} = P^{\prime} \times Q^{\prime} \quad (2.136)$$

ดังนั้นตำแหน่งและความเร็วของวัตถุท้องฟ้า B ที่โคจรรอบจุด C จะเขียนได้ในเทอมของเวกเตอร์หน่วยดังนี้

$$\left. \begin{aligned} r^{\prime} &= x\bar{P}^{\prime} + y\bar{Q}^{\prime} \\ v^{\prime} &= x\bar{P}^{\prime} + y\bar{Q}^{\prime} \end{aligned} \right\} \quad (2.137)$$

ในวงโคจรที่เป็นวงรี เราจะได้เซตของหลักมูลทางโคจร คือ  $\{a, e, i, \Omega, \omega, M\}$  มุมกวาดเฉลี่ย  $M$  และมุมกวาดเยื้อง  $E$  จะสัมพันธ์กันโดยสมการเคปเลอร์คือ

$$M = E - e \sin E \quad (2.138)$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$f = E - e \sin E - M \quad (2.139)$$

หาอนุพันธ์ของ  $f$  เทียบกับ  $E$  ได้

$$\frac{df}{dE} = 1 - e \cos E \quad (2.140)$$

ในการประมาณครั้งแรกของมุมกวาดเยื้อง เราให้  $E = M$  สมการ (2.139) และ (2.140) สามารถแก้หาค่า  $E$  ได้อย่างถูกต้องแม่นยำโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทำซ้ำต่อเนื่องกันไปเรื่อยๆ เมื่อได้ค่า  $E$  ที่มีความละเอียดตามที่ต้องการแล้ว เราจะใช้สมการ (2.94) คือ

$$r = a(1 - e \cos E)$$

และนำสมการ (2.98) มาเขียนใหม่จะได้

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} = a(1 - e \cos E) E^{\prime} \quad (2.141)$$

แทนค่าสมการ (2.94) และสมการ (2.141) แล้วจัดใหม่ ในที่สุดเราจะได้

$$E^{\prime} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (2.142)$$

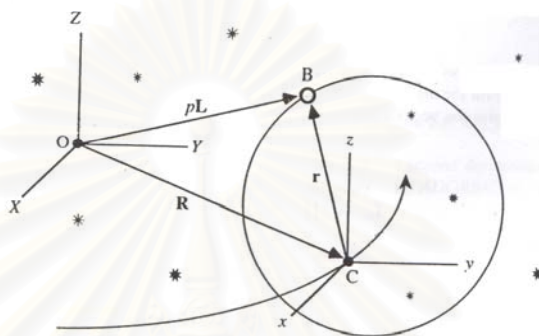
และใช้สมการ (2.90), (2.95), (2.96), (2.97) เพื่อคำนวณหาส่วนประกอบสเกลาร์ของตำแหน่งและความเร็ว จะได้

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= a(\cos E - e) \\ \bar{y} &= b \sin E \\ x^{\prime} &= -aE^{\prime} \sin E \\ y^{\prime} &= bE^{\prime} \cos E \end{aligned} \right\} \quad (2.143)$$

โดยที่  $b = a\sqrt{1 - e^2}$

## 2.5 ข้อมูลเบื้องต้นในการกำหนดทางโคจร

ในการคำนวณหลักมูลทางโคจรของวัตถุท้องฟ้า จำเป็นที่จะต้องอาศัยข้อมูลเบื้องต้นที่ประกอบด้วย เวลาที่ทำการสังเกตการณ์ เวกเตอร์หน่วยที่แสดงทิศทางจากตำแหน่งสังเกตการณ์ไปยังวัตถุท้องฟ้า  $\hat{L}$  และ เวกเตอร์ตำแหน่งของโลกเทียบกับดวงอาทิตย์  $\hat{R}$  ดังแสดงความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของวงโคจรเบื้องต้นดังรูป 2.14



รูปที่ 2.14 เรขาคณิตของวงโคจรเบื้องต้น

### 2.5.1 เวลาสากล และวันจูเลียน

เวลาสากล (UT) เป็นเวลาที่วัดจากเวลาที่ท้องถิ่นที่ตำบล กรีนวิช ประเทศอังกฤษมีความสัมพันธ์กับเวลามาตรฐานประเทศไทยดังสมการ

$$UT = \text{Thailand Standard time} - 7 \quad (2.144)$$

โดยสามารถคำนวณหาค่าวันจูเลียน (JD) ซึ่งเป็นวันที่ต่อเนื่องเป็นมาตรฐานเดียวกันทั่วโลกสัมพันธ์กับเวลาสากลตามสมการ

$$JD = J_0 + \frac{UT}{24} \quad (2.145)$$

เมื่อ  $J_0$  คือ คือวันจูเลียนที่ศูนย์ชั่วโมง เวลาสากล

$$J_0 = 367Y - \left\langle \frac{7[Y + \langle (M+9)/12 \rangle]}{4} \right\rangle + \left\langle \frac{275M}{9} \right\rangle + D + 1721013.5$$

### 2.5.2 เวกเตอร์หน่วย $\hat{L}$

เมื่อ  $\hat{L}$  เป็น เวกเตอร์ที่แสดงตำแหน่งจากจุดสังเกตการณ์ไปยังวัตถุท้องฟ้า โดยสามารถหาได้จากข้อมูลสังเกตการณ์ สำหรับการสังเกตการณ์  $n$  ครั้ง จะประกอบด้วยชุดข้อมูล

$$\begin{array}{ccc}
 t_1 & \alpha_1 & \delta_1 \\
 t_2 & \alpha_2 & \delta_2 \\
 t_3 & \alpha_3 & \delta_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 t_n & \alpha_n & \delta_n
 \end{array}$$

สามารถสร้างเวกเตอร์หน่วย  $\hat{L}$  ได้จากความสัมพันธ์

$$\hat{L}_i = \{ \hat{L}_{ix}, \hat{L}_{iy}, \hat{L}_{iz} \},$$

เมื่อ

$$\hat{L}_{ix} = \cos \delta_i \cos \alpha_i$$

$$\hat{L}_{iy} = \cos \delta_i \sin \alpha_i$$

$$\hat{L}_{iz} = \sin \delta_i$$

และจะสามารถหา  $\hat{L}_t, \hat{L}_i, \hat{L}_t$  ซึ่งกระจายในรูปแบบของ  $\{t, \alpha_i, \delta_i, \alpha_i, \delta_i, \alpha_i, \delta_i\}$  ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\hat{L}_t = \{ \hat{L}_{tx}, \hat{L}_{ty}, \hat{L}_{tz} \}$$

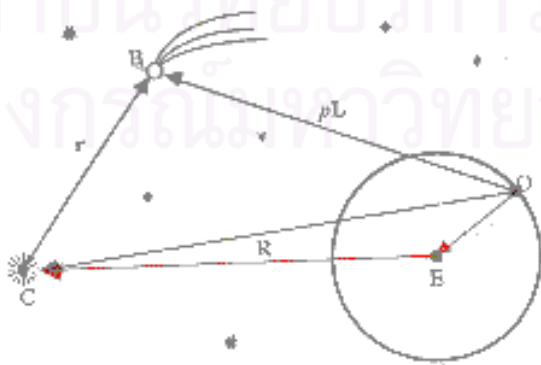
$$\hat{L}_i = \{ \hat{L}_{ix}, \hat{L}_{iy}, \hat{L}_{iz} \}$$

$$\hat{L}_t = \{ \hat{L}_{tx}, \hat{L}_{ty}, \hat{L}_{tz} \},$$

(2.146)

### 2.5.3 เวกเตอร์ตำแหน่งดวงอาทิตย์ $\hat{R}$

การคำนวณหาค่าเวกเตอร์ตำแหน่งของวัตถุท้องฟ้า อาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง เวกเตอร์ตำแหน่งดวงอาทิตย์  $\hat{R}$  และเวกเตอร์  $p\hat{L}$  ดังรูป 2.15



รูปที่ 2.15 เวกเตอร์ตำแหน่งดวงอาทิตย์

จากรูป 2.13 จะได้

$$\vec{R} = \vec{g} + \vec{G} \quad (2.167)$$

เมื่อ  $\vec{g}$  คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของจุดสังเกตการณ์เทียบกับจุดศูนย์กลางโลก

$A_c$  คือ รัศมีของโลกที่ที่ระนาบศูนย์สูตรเท่ากับ  $4.263523 \times 10^5$

จะได้

$$\begin{aligned} g_{ix} &= -A_c \cos \phi \cos \theta_i \\ g_{iy} &= -A_c \cos \phi \sin \theta_i \\ g_{iz} &= -A_c \sin \phi . \end{aligned} \quad (2.168)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} R_{ix} &= g_{ix} + G_{ix} \\ R_{iy} &= g_{iy} + G_{iy} \\ R_{iz} &= g_{iz} + G_{iz} \end{aligned} \quad (2.169)$$

สามารถประมาณค่า  $\vec{R}_i$ ,  $\vec{R}_i$  และ  $\vec{R}_i$  ได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \vec{R}_i &= \{R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}\} \\ \vec{R}_i &\approx \{G_{ix}, G_{iy}, G_{iz}\} \\ \vec{R}_i &= \{G_{ix}, G_{iy}, G_{iz}\} . \end{aligned} \quad (2.170)$$

## 2.6 วิธีลาปลาซ

การคำนวณหลักมูลทางโคจรของวัตถุท้องฟ้าใดๆ จำเป็นที่จะต้องสร้างวงโคจรเบื้องต้น เพื่อเป็นเสมือนโครงร่างของวงโคจร ก่อนที่จะนำไปปรับปรุงเพื่อหาวงโคจรที่แท้จริงต่อไป วิธีการลาปลาซเป็นวิธีการที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ในการกำหนดทางโคจรเบื้องต้นโดยวิเคราะห์จากชุดข้อมูลตั้งต้น

$$\{t, \vec{L}, \vec{L}, \vec{L}, \vec{R}, \vec{R}, \vec{R}\}$$

### 2.6.1 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

จากสมการความสัมพันธ์

$$r = pL - \vec{R}$$

และการเคลื่อนที่ของวัตถุ 2 ชั้น

$$\vec{F} = -u\vec{r}$$

เมื่อ  $u = \frac{\mu}{r^3}$  จะได้ความสัมพันธ์ตามสมการ

$$(up + \vec{p})\vec{L} + 2p\vec{L} + p\vec{L} = \vec{F} + u\vec{R} \quad (2.171)$$

เมื่อเราทำผลคูณเวกเตอร์ระหว่าง  $\vec{L}$  กับสมการ (2.171) แล้วนำไปทำผลคูณสเกลาร์กับ  $\vec{L}$  จะได้

$$p\vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{L}) = \vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{F}) + u\vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{R}) \quad (2.172)$$

แล้วจัดรูปสมการเพื่อหาค่า  $p$  จากสมการ

$$p = A + \frac{\mu B}{r^3} \quad (2.173)$$

เมื่อ

$$A = \frac{\vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{F})}{D_0}$$

$$B = \frac{\vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{R})}{D_0}$$

$$D_0 = \vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{L})$$

และในการทำงานเดียวกันเมื่อเราทำผลคูณเวกเตอร์ระหว่าง  $\vec{L}$  กับสมการ (2.171) แล้วนำไปทำผลคูณสเกลาร์กับ  $\vec{L}$  จะได้

$$2p\vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{L}) = \vec{L} \cdot (\vec{R} \times \vec{L}) + u\vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{L}) \quad (2.174)$$

แล้วจัดรูปสมการเพื่อหาค่า  $p$  จากสมการ

$$p = C + \frac{\mu D}{r^3} \quad (2.175)$$

$$C = \frac{\vec{L} \cdot (\vec{R} \times \vec{L})}{2D_0}$$

$$D = \frac{\vec{L} \cdot (\vec{R} \times \vec{L})}{2D_0}$$

$$D_0 = \vec{L} \cdot (\vec{L} \times \vec{L})$$

## 2.6.2 สมการลากรานจ์

พิจารณา

$$\dot{r} \cdot \dot{r} = (p\dot{L} - \dot{R}) \cdot (p\dot{L} - \dot{R})$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$r^2 = p^2 + pE + F,$$

เมื่อ  $E = -2(\dot{L} \cdot \dot{R})$  และ  $F = R^2$ . และแทนค่า  $p$ ,  $\dot{p}$  และ  $\dot{r}$  จะได้สมการ

$$r^2 = A^2 + \frac{2\mu AB}{r^3} + \frac{\mu^2 B^2}{r^6} + AE + \frac{\mu BE}{r^3} + F. \quad (2.176)$$

คูณสมการ (2.176) ด้วย  $r^6$  ลากรานจ์

$$r^8 + ar^6 + br^3 + c = 0$$

เมื่อ

$$a = -(A^2 + AE + F)$$

$$b = -\mu(2AB + BE)$$

$$c = -\mu^2 B^2$$

หาค่า  $r$  เพื่อหาค่าขนาดของ  $\dot{r}$  โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน นำไปสู่การหาค่า  $p$ ,  $\dot{p}$  เพื่อหาค่า

$$\dot{r} = p\dot{L} - \dot{R} \quad (2.177)$$

$$\dot{\mathcal{R}} = \dot{p}\dot{L} + p\dot{L} - \dot{R} \quad (2.178)$$

และสามารถคำนวณหาเวลาขณะที่แสงออกจากวัตถุ

$$t_c = t - \frac{p}{c} \quad (2.179)$$

เมื่อแสงเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $c = 173.1446 \text{ au / day}$ .

## 2.7 การปรับปรุงวงโคจร

ในการกำหนดวงโคจรของวัตถุท้องฟ้าไม่ว่าจะเป็นด้วยวิธีการใดๆก็ตาม สุดท้ายเราจะต้องนำหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นที่ได้มาทำการปรับปรุง และทำการคำนวณย้อนกลับไปในอดีต ขณะที่เราทำการสังเกตการณ์ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของหลักมูลวงโคจรดังกล่าว สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ทำการปรับปรุงวงโคจรโดยอาศัยวิธีการกำลังสองน้อยสุดของสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรที่ได้จากข้อมูลสังเกตการณ์อื่นๆ อย่างไรก็ตามแต่เราไม่สามารถการันตีได้ว่า



ค่าที่ได้จากการปรับปรุงวงโคจรจะเป็นค่าหลักมูลทางโคจรที่ดีกว่าเสมอไป (Boulet 1991) ทั้งนี้ เราสามารถยืนยันความถูกต้องของหลักมูลทางโคจรที่ได้โดยการคำนวณย้อนกลับไปสู่ค่าตำแหน่งเชิงมุมขณะสังเกตการณ์เพื่อเปรียบเทียบความเที่ยงตรงที่ได้จากหลักมูลวงโคจรเท่านั้น

### 2.7.1 เงื่อนไขของสมการเชิงอนุพันธ์

เนื่องจากตำแหน่งและความเร็วในระนาบวงโคจรของวัตถุท้องฟ้าขึ้นกับพิกัดและความเร็วตามแกนทั้งสามของระบบพิกัดศูนย์สูตรสุริยะมัธยม (heliocentric equatorial coordinate system) ดังสมการ

$$r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$$

$$v_0 = \{\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\}$$

เมื่อ  $t_0$  เป็นเวลาขณะที่ทำการศึกษา ดังนั้นเราสามารถกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงมุมและพิกัดศูนย์สูตรสุริยะมัธยม (heliocentric equatorial coordinate system) ดังสมการ

$$\alpha = \alpha(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (2.180)$$

$$\delta = \delta(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (2.181)$$

และสามารถประยุกต์สมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์รวมได้เป็น

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial z_0} dz_0 + \dots + \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{x}_0} d\dot{x}_0$$

$$d\delta = \frac{\partial \delta}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \delta}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \delta}{\partial z_0} dz_0 + \dots + \frac{\partial \delta}{\partial \dot{x}_0} d\dot{x}_0$$

เมื่อกำหนดให้ ผลต่างระหว่างค่าตำแหน่งเชิงมุมที่ได้จากการคำนวณย้อนกลับเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการสังเกตการณ์เป็น  $\Delta\alpha$  และ  $\Delta\delta$  จะได้

$$\Delta\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial \alpha}{\partial z_0} \Delta z_0 + \dots + \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 \quad (2.182)$$

$$\Delta\delta = \frac{\partial \delta}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial \delta}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial \delta}{\partial z_0} \Delta z_0 + \dots + \frac{\partial \delta}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0 \quad (2.183)$$

เราสามารถเขียนสมการเชิงเส้น 6 ตัวแปรสำหรับการสังเกตการณ์  $n$  ครั้งใดๆ ได้ตามสมการ

$$\Delta\alpha_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial z_0} \Delta z_0 + \dots + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0$$

$$\Delta\alpha_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial z_0} \Delta z_0 + \dots + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0$$

$$\Delta\alpha_3 = \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial z_0} \Delta z_0 + \dots + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \dot{x}_0} \Delta \dot{x}_0$$



$$\begin{aligned}
 & \text{N} \\
 \Delta\alpha_n &= \frac{\partial\alpha_n}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\alpha_n}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\alpha_n}{\partial z_0}\Delta z_0 + \dots + \frac{\partial\alpha_n}{\partial \mathbf{x}_0}\Delta \mathbf{x}_0 \\
 \Delta\delta_1 &= \frac{\partial\delta_1}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\delta_1}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\delta_1}{\partial z_0}\Delta z_0 + \dots + \frac{\partial\delta_1}{\partial \mathbf{x}_0}\Delta \mathbf{x}_0 \\
 \Delta\delta_2 &= \frac{\partial\delta_2}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\delta_2}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\delta_2}{\partial z_0}\Delta z_0 + \dots + \frac{\partial\delta_2}{\partial \mathbf{x}_0}\Delta \mathbf{x}_0 \\
 \Delta\delta_3 &= \frac{\partial\delta_3}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\delta_3}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\delta_3}{\partial z_0}\Delta z_0 + \dots + \frac{\partial\delta_3}{\partial \mathbf{x}_0}\Delta \mathbf{x}_0 \\
 & \text{M} \\
 \Delta\delta_n &= \frac{\partial\delta_n}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\delta_n}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\delta_n}{\partial z_0}\Delta z_0 + \dots + \frac{\partial\delta_n}{\partial \mathbf{x}_0}\Delta \mathbf{x}_0 \quad (2.184)
 \end{aligned}$$

เมื่อ  $n \geq 3$ . จากสมการดังกล่าวข้างต้นเราสามารถใช่วิธีการกำลังสองน้อยสุดของสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรในการคำนวณหาค่า  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \Delta \mathbf{x}_0, \Delta \mathbf{y}_0$  และ  $\Delta \mathbf{z}$

## 2.7.2 การคำนวณเชิงตัวเลขของสมการอนุพันธ์ย่อย

การคำนวณหาค่าอนุพันธ์ย่อยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยของตำแหน่งเชิงมุมเทียบกับตำแหน่งและความเร็วตามพิกัดศูนย์กลางสุริยะมัธยมตั้งสมการ

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial \varepsilon} \approx \frac{\alpha_i(x_0, \dots, e_0 + \Delta\varepsilon, \dots, \mathbf{x}_0) - \alpha_i(x_0, \dots, e_0, \dots, \mathbf{x}_0)}{\Delta\varepsilon} \quad (2.185)$$

$$\frac{\partial\delta_i}{\partial \varepsilon} \approx \frac{\delta_i(x_0, \dots, e_0 + \Delta\varepsilon, \dots, \mathbf{x}_0) - \delta_i(x_0, \dots, e_0, \dots, \mathbf{x}_0)}{\Delta\varepsilon} \quad (2.186)$$

เมื่อ  $\Delta\varepsilon$  คือ ค่าตำแหน่งหรือความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปในแนวแกนที่พิจารณา

$e_0$  คือ ค่าตำแหน่งหรือความเร็วที่พิจารณา

สุดท้ายเราจะสามารถหาค่าตำแหน่งและความเร็วที่ปรับปรุงร่วมกับข้อมูลสังเกตการณ์อื่นๆเป็นไปตามสมการ

$$r_0 = \{x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0, z_0 + \Delta z_0\} \quad (2.187)$$

$$v_0 = \{\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 + \Delta \mathbf{z}_0\} \quad (2.188)$$

และสามารถนำค่าที่ได้จากสมการ (2.187) และ (2.188) ไปใช้คำนวณหลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์ต่อไป

## บทที่ 3

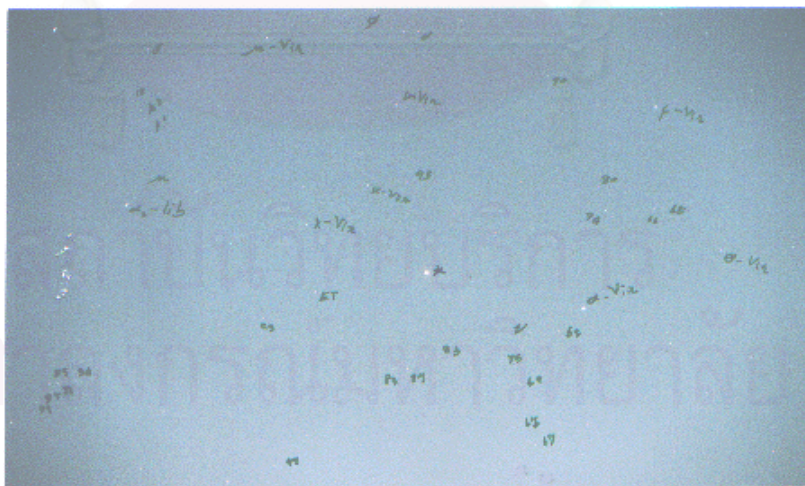
### การสังเกตการณ์ดาวเคราะห์

การสังเกตการณ์การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของดาวเคราะห์นั้นเราสามารถบันทึกภาพเพื่อคำนวณหาตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์เทียบกับดาวฤกษ์อ้างอิงโดยการวิเคราะห์ตำแหน่งด้วยวิธีการสังกัต (Mouton 1970) เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปใช้ในการวิเคราะห์หลักมูลวงโคจรของดาวเคราะห์ต่อไป

#### 3.1 การถ่ายภาพ

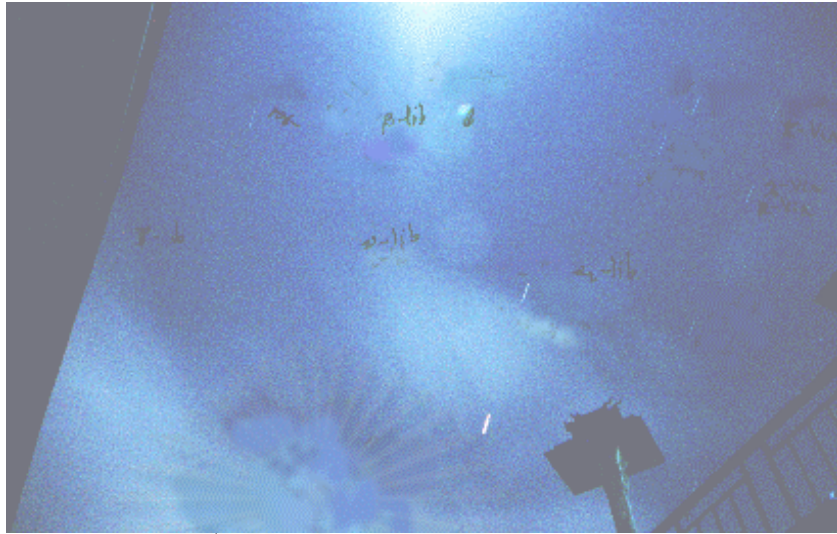
เราทำการสังเกตการณ์การเคลื่อนที่ของดาวอังคารและดาวเสาร์โดยการถ่ายภาพด้วยกล้องมินิอิต้า ความยาวโฟกัสของเลนส์มาตรฐาน 55 มิลลิเมตร ด้วยฟิล์มสี ISO 400 ว่าเป็นฟิล์มที่มีความไวแสงมากกว่าฟิล์มที่เราใช้ในการถ่ายรูปทั่วไป ให้ขาตั้งกล้องช่วยในการถ่ายภาพเพื่อให้ภาพนิ่งไม่สั่นไหว แบ่งการถ่ายภาพออกเป็น 2 กรณีดังนี้

**กรณีที่ 1** ถ่ายภาพโดยเปิดหน้ากล้อง F4 นาน 15 วินาที ภาพถ่ายที่ได้ออกมาจะมีลักษณะเป็นจุดเล็กๆ ดังรูป 3.1



รูปที่3.1 ภาพถ่ายดาวอังคาร เปิดหน้ากล้อง F4 นาน 15 วินาที

**กรณีที่ 2** ถ่ายภาพโดยเปิดหน้ากล้อง F8 นาน 5 นาที ภาพถ่ายที่ได้ออกมาจะมีลักษณะเป็นขีดเล็กๆ เนื่องจากการหมุนรอบตัวเองของโลกดังรูป 3.2

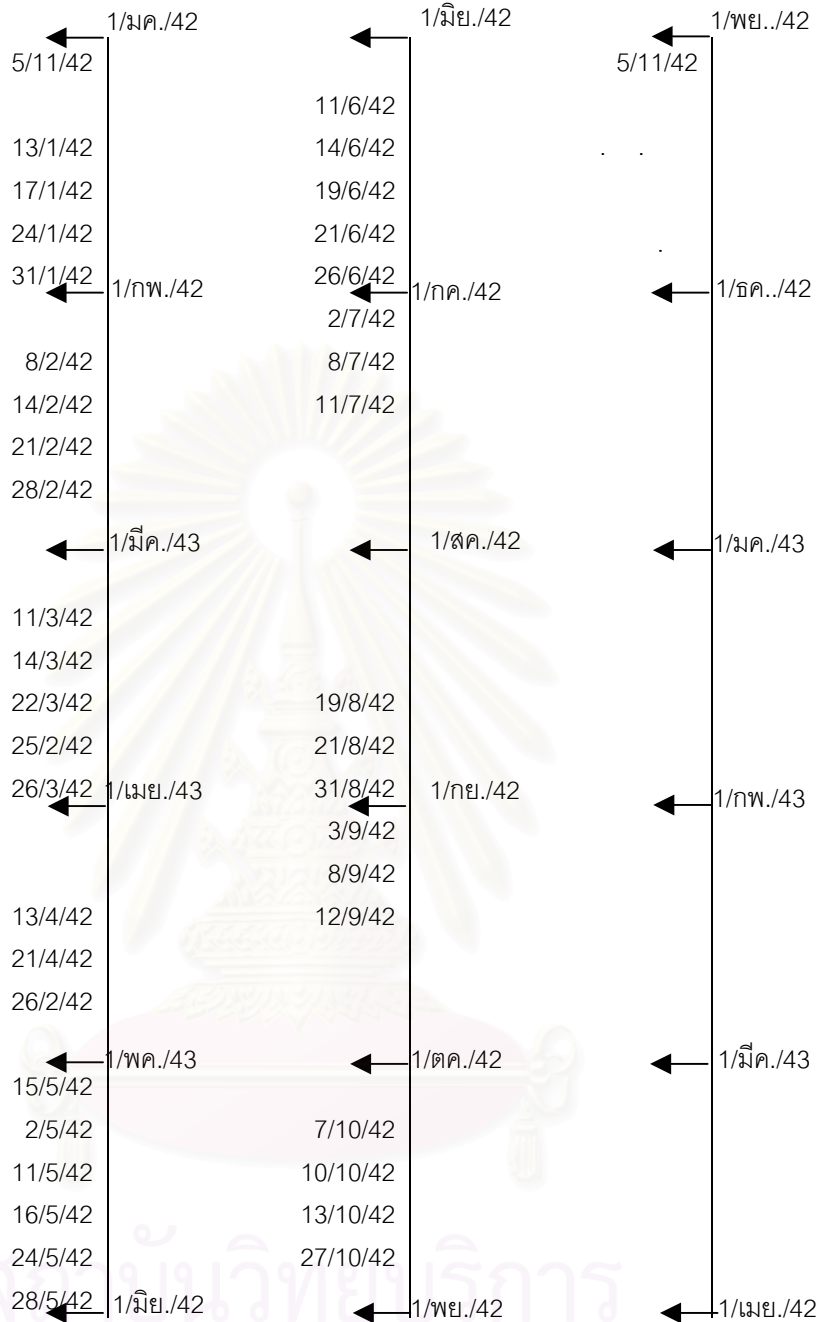


รูปที่3.2 ภาพถ่ายดาวอังคาร เปิดหน้ากล้อง F8 นาน 5 นาที

จากนั้นนำภาพที่ได้จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 และแผนที่ดาวมาลงตำแหน่งของดาวที่ปรากฏในรูปกรณีที่ 1 โดยอาศัยภาพถ่ายในกรณีที่ 2 แยกภาพดาวที่แท้จริงออกจากเมฆดิสที่ผิดเพี้ยนในการอัดภาพ

### 3.1.1 การบันทึกภาพดาวอังคาร

เราเริ่มติดตามดาวอังคารมาตั้งแต่ปลายเดือนธันวาคม 2541 แต่สภาพท้องฟ้าในกรุงเทพฯไม่อำนวย ประกอบกับดาวอังคารปรากฏให้เห็นในช่วงหลังเที่ยงคืนซึ่งท้องฟ้าขณะนั้นมีเมฆมากจึงไม่สามารถบันทึกภาพได้ เริ่มบันทึกภาพได้ครั้งแรกวันที่ 13 มกราคม 2542 ด้วยระดับความสว่างประมาณ 0.9 แมกนิจูด บันทึกภาพเรื่อยมาจนถึงกลางเดือนมิถุนายน ท้องฟ้ามีเมฆมากและมีฝนตก จึงต้องหยุดการบันทึกภาพไว้ชั่วคราว มาเริ่มถ่ายภาพอีกครั้งในช่วงกลางเดือนกันยายน 2542 จนสิ้นสุดการถ่ายภาพในวันที่ 5 พฤศจิกายน 2542 รวมภาพถ่ายทั้งสิ้น 153 ภาพ แบ่งเป็น ภาพถ่ายที่เปิดหน้ากล้อง F4 นาน 15 วินาที จำนวน 98 รูป และภาพถ่ายที่เปิดหน้ากล้อง F8 นาน 5 นาที จำนวน 55 รูป ดังแสดงในตารางที่ 3.1



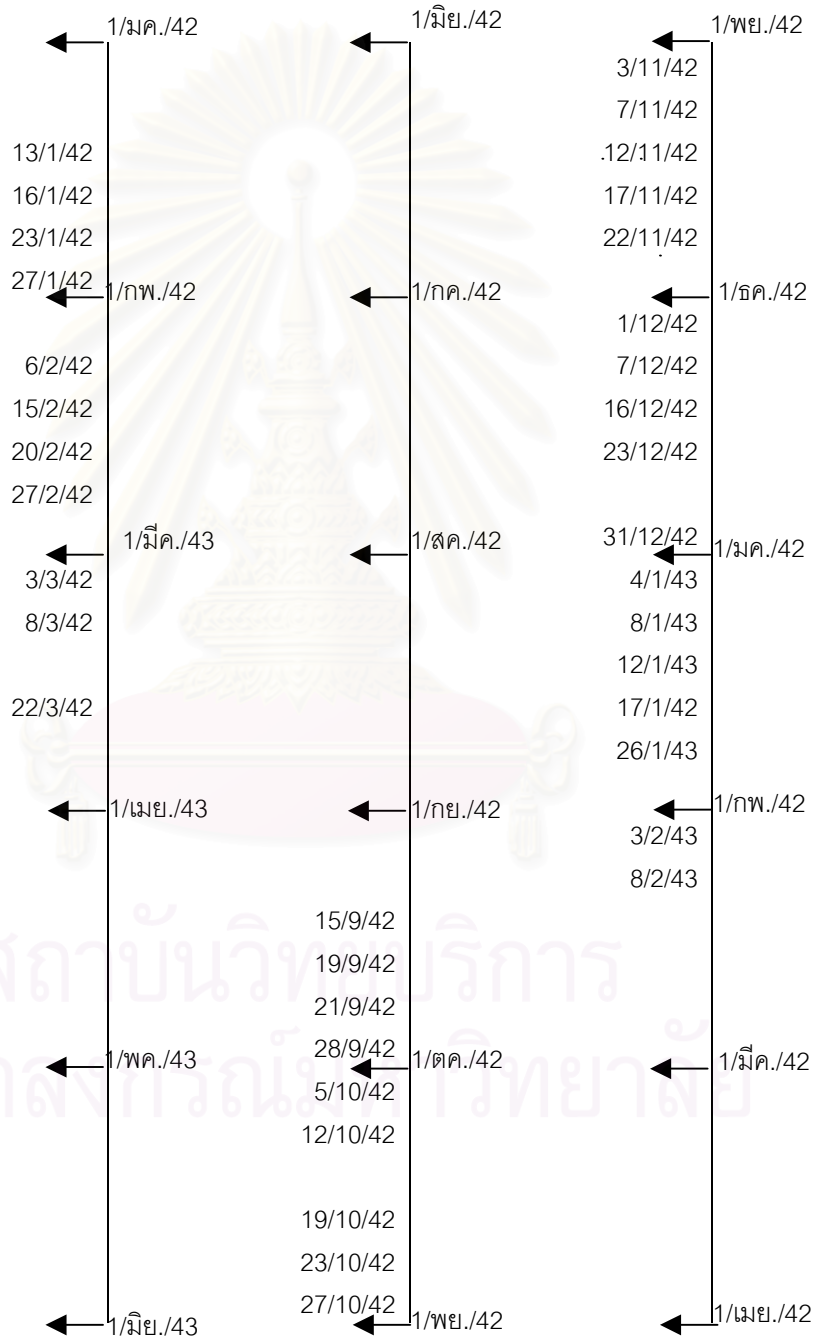
ตาราง 3.1 การบันทึกภาพดาวอังคาร

## จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### 3.1.2 การบันทึกภาพดาวอังคาร

เราเริ่มติดตามดาวเสาร์มาตั้งแต่ปลายเดือนพฤศจิกายน 2541 แต่สภาพท้องฟ้าในกรุงเทพฯ ไม่อำนวย ประกอบกับท้องฟ้ามีเมฆมากจึงไม่สามารถบันทึกภาพได้ เริ่มบันทึกภาพได้ครั้งแรกวันที่ 13 มกราคม 2542 ด้วยระดับความสว่างประมาณ 1.5 แมกนิจูด บันทึกภาพเรื่อยมาจน

ถึงปลายเดือนมีนาคม ดาวเสาร์ปรากฏให้เห็นใกล้ดวงจันทร์ทำให้แสงสว่างของดวงจันทร์บดบัง  
 ความสว่างของดาวฤกษ์อ้างอิงที่อยู่ใกล้เคียงจึงต้องหยุดการบันทึกภาพไว้ชั่วคราว มาเริ่มถ่าย  
 ภาพอีกครั้งในช่วงกลางเดือนกันยายน 2542 จนสิ้นสุดการถ่ายภาพในวันที่ 8 กุมภาพันธ์ 2543  
 รวมภาพถ่ายทั้งสิ้น 144 ภาพ แบ่งเป็น ภาพถ่ายที่เปิดหน้ากล้อง F4 นาน 15 วินาที จำนวน 95  
 รูป และภาพถ่ายที่เปิดหน้ากล้อง F8 นาน 5 นาที จำนวน 49 รูป ดังแสดงในตารางที่ 3.2



ตาราง 3.1 การบันทึกภาพดาวอังคาร



โดยสภาพท้องฟ้าในกรุงเทพมหานคร โดยปกติมองท้องฟ้าด้วยตาเปล่าสามารถเห็นดาวที่มีระดับความสว่างสลัวได้ถึง 3 หรือ 4 แมกนิจูดตามสถานที่ ส่วนในการถ่ายรูปลนั้นสามารถถ่ายสลัวได้ถึงประมาณ 5 แมกนิจูด (พีรพัฒน์ 2541) สำหรับเลนส์มาตรฐานความยาวโฟกัส 55 มิลลิเมตร ในสภาพการณ์เช่นนี้เพียงพอที่จะได้ภาพดาวฤกษ์อ้างอิงที่ต้องการ รวมทั้งการที่มีข้อมูลตำแหน่งดาวฤกษ์ที่สลัวถึงระดับความสว่าง 5 แมกนิจูด รวมทั้งแผนที่ดาวที่มีความละเอียดถึงดาวฤกษ์ระดับ 6 แมกนิจูด (โดยคำนยามทั่วไป ดาวฤกษ์ที่มีระดับความสว่างที่ 6 แมกนิจูด คือดาวฤกษ์ที่สว่างที่สุดที่สามารถมองเห็นได้ด้วยตาเปล่าในสถานที่ที่ท้องมืดที่สุด) เป็นสภาพการณ์เท่าที่เป็นไปได้ที่จำกัดอย่างยิ่งที่จะสามารถสังเกตการณ์ถ่ายภาพดาวเคราะห์และนำมาวิเคราะห์วัดและนำมาคำนวณกำหนดวงโคจรของดาวเคราะห์ได้

### 3.2 การคัดเลือกภาพถ่าย

ในการถ่ายภาพ ต้องจัดกล้องให้มีดาวฤกษ์อ้างอิงติดอยู่ในรูปถ่ายด้วยในสภาพที่ค่อนข้างล้อมรอบดาวเคราะห์ ซึ่งอาจมีดาวฤกษ์อ้างอิงที่ถ่ายติดโดยไม่สามารถมองเห็นด้วยตาเปล่า เราทำการคัดเลือกภาพถ่ายแบ่งเป็น 3 ขั้นตอนดังนี้

1. แยกภาพที่ถ่ายติดชัดเจนจากดาวทั้งสองออกเป็นสองกลุ่ม
  - กลุ่มที่ 1 ภาพถ่ายที่เปิดหน้ากล้อง F4 นาน 15 วินาที ได้ภาพดาวอังคาร 36 รูป และภาพถ่ายดาวเสาร์ 50 รูป
  - กลุ่มที่ 2 ภาพถ่ายที่เปิดหน้ากล้อง F8 นาน 5 นาที ได้ภาพดาวอังคาร 31 รูป และภาพถ่ายดาวเสาร์ 41 รูป
2. คัดเลือกภาพที่มีดาวฤกษ์อ้างอิงมากกว่า 5 ดวง ล้อมรอบภาพดาวเคราะห์จากภาพดาวทั้งสองกลุ่มได้ดังนี้
  - กลุ่มที่ 1 ภาพถ่ายที่เปิดหน้ากล้อง F4 นาน 15 วินาที ได้ภาพดาวอังคาร 34 รูป และภาพถ่ายดาวเสาร์ 30 รูป
  - กลุ่มที่ 2 ภาพถ่ายที่เปิดหน้ากล้อง F8 นาน 5 นาที ได้ภาพดาวอังคาร 25 รูป และภาพถ่ายดาวเสาร์ 27 รูป
3. เปรียบเทียบภาพดาวที่ผ่านการคัดเลือกในขั้นตอนที่ 2 เปรียบเทียบกับแผนที่ดาวเพื่อลงตำแหน่งดาวฤกษ์อ้างอิงข้างเคียงให้มากที่สุดเพียงภาพเดียวสำหรับการสังเกตการณ์ของดาวเคราะห์ครั้งหนึ่งๆ ปรากฏว่า
  - ภาพถ่ายของดาวอังคารที่สามารถวิเคราะห์ได้มี 22 รูป
  - ภาพถ่ายของดาวเสาร์ที่สามารถวิเคราะห์ได้มี 19 รูป

ดังแสดงในตาราง 3.3 และ 3.4 ตามลำดับ

**การคัดเลือกภาพถ่ายดาวอังคาร**

ชนิดของ ภาพถ่าย วัน เดือน ปี	จำนวน รวม		คัดเลือก ครั้งที่1		คัดเลือก ครั้งที่2		คัดเลือก ครั้งที่3	
	F4	F8	F4	F8	F4	F8	F4	F8
13 ม.ค. 2542	3	1	-	1	-	-	-	-
16 ม.ค. 2542	2	1	2	1	1	-	1	1
23 ม.ค. 2542	2	2	2	1	2	1	1	1
31 ม.ค. 2542	2	1	1	1	1	1	1	-
8 ก.พ. 2542	3	1	-	-	-	-	-	-
14 ก.พ. 2542	2	2	1	1	1	1	1	1
21 ก.พ. 2542	3	1	2	1	2	1	1	1
28 ก.พ. 2542	2	1	1	1	1	1	1	1
11 มี.ค. 2542	2	2	-	1	-	-	-	-
14 มี.ค. 2542	2	1	2	1	2	1	1	1
22 มี.ค. 2542	2	2	2	1	2	1	1	1
25 มี.ค. 2542	3	1	1	1	1	1	1	1
26 มี.ค. 2542	2	1	2	1	1	1	1	1
13 เม.ย. 2542	2	1	-	-	-	-	-	-
21 เม.ย. 2542	2	2	1	1	1	1	1	1
26 เม.ย. 2542	3	1	2	1	1	1	-	-
1 พ.ค. 2542	3	1	1	1	-	-	-	-
2 พ.ค. 2542	3	1	2	1	2	1	1	1
11 พ.ค. 2542	2	2	-	-	-	-	-	-
16 พ.ค. 2542	2	1	1	1	1	1	-	-
24 พ.ค. 2542	3	1	1	1	1	1	1	1
28 พ.ค. 2542	2	2	-	-	-	-	-	-
11 มิ.ย. 2542	3	1	-	-	-	-	-	-
14 มิ.ย. 2542	2	2	1	1	1	1	1	1
19 มิ.ย. 2542	2	1	2	1	2	1	1	1
21 มิ.ย. 2542	3	1	2	1	2	1	1	1
26 มิ.ย. 2542	2	2	-	-	-	-	-	-
2 ก.ค. 2542	3	1	1	1	1	1	1	1
8 ก.ค. 2542	3	1	2	1	2	1	1	1

ชนิดของ ภาพถ่าย วัน เดือน ปี	จำนวน รวม		คัดเลือก ครั้งที่1		คัดเลือก ครั้งที่2		คัดเลือก ครั้งที่3	
	F4	F8	F4	F8	F4	F8	F4	F8
11 ก.ค. 2542	2	2	-	1	-	-	-	-
19 ส.ค. 2542	2	1	-	1	-	-	-	-
21 ส.ค. 2542	3	1	1	1	1	1	1	1
31 ส.ค. 2542	3	1	-	-	-	-	-	-
3 ก.ย. 2542	2	1	1	2	1	1	1	1
8 ก.ย. 2542	3	1	2	1	2	1	1	1
12 ก.ย. 2542	2	2	1	1	1	1	-	-
7 ต.ค. 2542	3	1	-	-	-	-	-	-
10 ต.ค. 2542	2	2	1	1	1	1	1	1
13 ต.ค. 2542	3	1	-	1	-	-	-	-
27 ต.ค. 2542	2	2	-	-	-	-	-	-
5 พ.ย. 2542	2	2	-	-	1	1	-	-
19 พ.ย. 2542	2	1	1	-	-	-	-	-
TOTAL	98	55	36	31	34	25	22	22
41 วัน	153 รูป		67 รูป		59 รูป		39 รูป	

ตาราง 3.3 การคัดเลือกภาพถ่ายของดาวอังคาร

### การคัดเลือกภาพถ่ายดาวเสาร์

ชนิดของ ภาพถ่าย วัน เดือน ปี	จำนวน รวม		คัดเลือก ครั้งที่1		คัดเลือก ครั้งที่2		คัดเลือก ครั้งที่3	
	F4	F8	F4	F8	F4	F8	F4	F8
13 ม.ค. 2542	3	1	3	1	-	-	-	-
16 ม.ค. 2542	2	2	2	1	2	1	1	1
23 ม.ค. 2542	2	1	3	1	1	1	1	1
27 ม.ค. 2542	2	1	-	1	-	1	-	-
6 ก.พ. 2542	3	1	-	1	1	-	-	-
15 ก.พ. 2542	3	1	1	1	1	-	-	-
20 ก.พ. 2542	2	2	2	2	1	2	1	1
27 ก.พ. 2542	3	1	2	1	1	1	1	1
3 มี.ค. 2542	2	1	2	1	-	1	-	-
8 มี.ค. 2542	2	2	1	1	1	-	-	-



ชนิดของ ภาพถ่าย วัน เดือน ปี	จำนวน รวม		คัดเลือก ครั้งที่1		คัดเลือก ครั้งที่2		คัดเลือก ครั้งที่3	
	F4	F8	F4	F8	F4	F8	F4	F8
22 มี.ค. 2542	2	2	-	1	-	1	-	-
15 ก.ย. 2542	3	1	1	1	1	1	-	-
19 ก.ย. 2542	2	1	1	2	1	1	1	1
21 ก.ย. 2542	2	2	-	1	-	1	-	-
28 ก.ย. 2542	2	2	-	1	-	-	-	-
5 ต.ค. 2542	2	1	2	2	1	2	1	1
12 ต.ค. 2542	3	1	1	1	1	-	-	-
19 ต.ค. 2542	2	2	1	2	1	1	1	1
23 ต.ค. 2542	3	1	-	1	-	1	-	-
27 ต.ค. 2542	3	1	3	1	2	1	1	1
3 พ.ย. 2542	3	1	-	1	-	-	-	-
7 พ.ย. 2542	2	2	1	1	1	1	1	1
12 พ.ย. 2542	3	1	2	1	1	1	1	1
17 พ.ย. 2542	3	1	2	1	2	1	1	1
22 พ.ย. 2545	3	2	1	1	1	-	-	-
1 ธ.ค. 2542	3	1	2	1	1	1	1	1
7 ธ.ค. 2542	3	1	3	1	2	1	1	1
16 ธ.ค. 2542	2	1	2	1	1	1	1	1
23 ธ.ค. 2542	3	1	2	1	1	1	1	1
31 ธ.ค. 2542	3	2	1	1	-	-	-	-
4 ม.ค. 2542	2	2	1	1	1	1	1	1
8 ม.ค. 2542	3	1	-	1	-	-	-	-
12 ม.ค. 2542	2	1	2	1	1	1	1	1
17 ม.ค. 2542	3	2	1	2	1	1	1	1
26 ม.ค. 2542	3	1	2	1	1	1	1	1
3 ก.พ. 2542	3	1	1	1	1	-	-	-
8 ก.พ. 2542	3	1	2	-	-	-	-	-
TOTAL	95	49	50	41	30	27	19	19
38 วัน	144 รูป		91 รูป		57 รูป		38 รูป	

ตาราง 3.4 การคัดเลือกภาพถ่ายของดาวเสาร์

## สาเหตุหลักๆ ที่ไม่สามารถนำภาพถ่ายมาวิเคราะห์ได้

1. ความไม่คมชัดของภาพถ่าย เนื่องจากการอัดภาพที่ทำให้เกิดเม็ดสีสกปรกขึ้นบนภาพ
2. ภาพที่บันทึกสว่างเกินไปจนมองไม่เห็นดาวฤกษ์อ้างอิง เนื่องจากดาวเคราะห์ปรากฏใน ตำแหน่ง ใกล้ดวงจันทร์
3. ไม่มีดาวฤกษ์อ้างอิงในแผนที่ดาว เนื่องจากดาวฤกษ์ที่ปรากฏในภาพถ่ายมีความสว่างสลัวสูงกว่า 5 แมกนิจูด

### 3.3 การวิเคราะห์ภาพถ่าย

การวิเคราะห์ภาพถ่ายเพื่อหาตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์นั้นถูกพัฒนาขึ้นครั้งแรกในปี ค.ศ.1911 โดย F. Schlesinger และถูกพัฒนาออกเป็นสองแบบด้วยกัน (Smart 1953) คือ วิธีการสถานะสังกัดกรณีดาวอ้างอิง 3 ดวง และ วิธีการสถานะสังกัดกรณีดาวอ้างอิง n ดวง

#### 3.3.1 วิธีการสถานะสังกัดกรณีดาวอ้างอิง 3 ดวง

เรากำหนดค่าตัวเลขสังกัด ( $D_1, D_2$  และ  $D_3$ ) ในการวิเคราะห์ตำแหน่งเชิงมุมของดาวฤกษ์ตามความสัมพันธ์

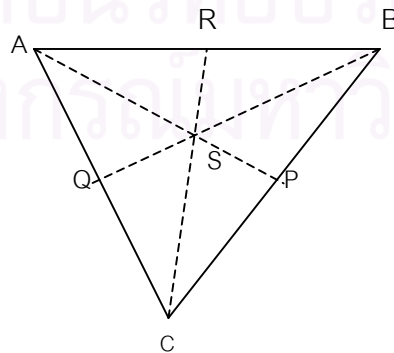
$$D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + D_3\alpha_3 = \alpha_s \quad (3.1)$$

$$D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + D_3\delta_3 = \delta_s \quad (3.2)$$

$$D_1 + D_2 + D_3 = 1 \quad (3.3)$$

เมื่อ  $D_1 = SA/AP$ ,  $D_2 = QS/QB$  และ  $D_3 = RS/RC$ . กำหนดตำแหน่งของดาวฤกษ์อ้างอิง (A, B, C) ให้ล้อมรอบดาวเคราะห์ที่ต้องการศึกษา และ (S) โดยกำหนดจุดตัด D, P, Q, R ดังรูป

3.3



รูปที่ 3.3 การกำหนดตำแหน่งดาวอ้างอิงกรณีดาว 3 ดวง

สำหรับการวิเคราะห์หาตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์กรณีดาวอังคาร 3 ดวงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้ภาพขนาดขยายกว้าง 4 นิ้ว ยาว 6 นิ้ว ในการสร้างรูปสามเหลี่ยมของดาวฤกษ์อังคาร และวัดระยะต่างๆ ด้วยไม้บรรทัดที่มีความละเอียด 0.5 เซนติเมตร ดังแสดงในตัวอย่าง

รูปที่ 3.4 การสร้างสามเหลี่ยมของดาวอังคาร

เมื่อ A, B, C คือตำแหน่งของดาวฤกษ์อังคาร  $\lambda-Vir$ ,  $\zeta-Vir$  และ  $\delta-Crv$  ตามลำดับ

### 3.3.2 วิธีการสถานะสังกัดกรณีดาวอังคาร 5 ดวง

การวิเคราะห์ตำแหน่งเชิงมุมด้วยวิธีการสังกัดกรณีดาวอังคาร 5 ดวง โดยการนำภาพถ่ายขนาดขยายกว้าง 4 นิ้ว ยาว 6 นิ้ว มาทำการสแกนด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปโฟโตชอป 6.0 (photoshop 6.0) และแปลงพิกัดของแกนใดๆ  $(x_i, y_i)$  ของภาพถ่าย เป็นพิกัดจุดศูนย์กลาง

ภาพ  $(X_i, Y_i)$  โดยอาศัยความสัมพันธ์ตามสมการ

$$\sum_{i=1}^n X_i - nx_r = 0 \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i - ny_r = 0 \quad (3.5)$$

จะได้

$$X_i = x_i - x_r$$

$$Y_i = y_i - y_r$$

$$X_s = x_s - x_s$$

$$Y_s = y_s - y_r$$

เมื่อ  $(X_s, Y_s)$  คือ ตำแหน่งดาวฤกษ์อังคารในพิกัดจุดศูนย์กลางภาพ

เมื่อ  $(x_s, y_s)$  คือ ตำแหน่งดาวฤกษ์อังคารในพิกัดของภาพถ่าย

แสดงการสแกนภาพเพื่อหาพิกัดของดาวเคราะห์ที่ต้องการศึกษา และพิกัดดาวอังคารด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปซึ่งสามารถบ่งพิกัดของดาวในภาพถ่ายได้ละเอียดถึง 0.02 เซนติเมตร ดังรูปที่

3.5 โดยพิกัด  $(x, y)$  ที่ปรากฏในกรอบสี่เหลี่ยมคือ ตำแหน่งดาวที่มีแกนเป็นขอบด้านขวาและด้านล่างของภาพถ่าย (แกนใดๆ)

รูปที่ 3.5 ลักษณะการทำงานของโปรแกรมโฟโตชอป 6.0

และสามารถคำนวณหาค่าตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์ที่ต้องการศึกษา  $(\alpha_s, \delta_s)$  ดังสมการ

$$\alpha_s = X_s + \sum_{i=1}^n D_i \alpha_i - \sum_{i=1}^n D_i X_i \quad (3.6)$$

$$\delta_s = Y_s + \sum_{i=1}^n D_i \delta_i - \sum_{i=1}^n D_i Y_i \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^n D_i = 1 \quad (3.8)$$

เมื่อ ค่าคงที่เลขสังกัด ( $D_i$ ) เป็นไปตามสมการ

$$D_i = PX_i - QY + R_i \quad (3.9)$$

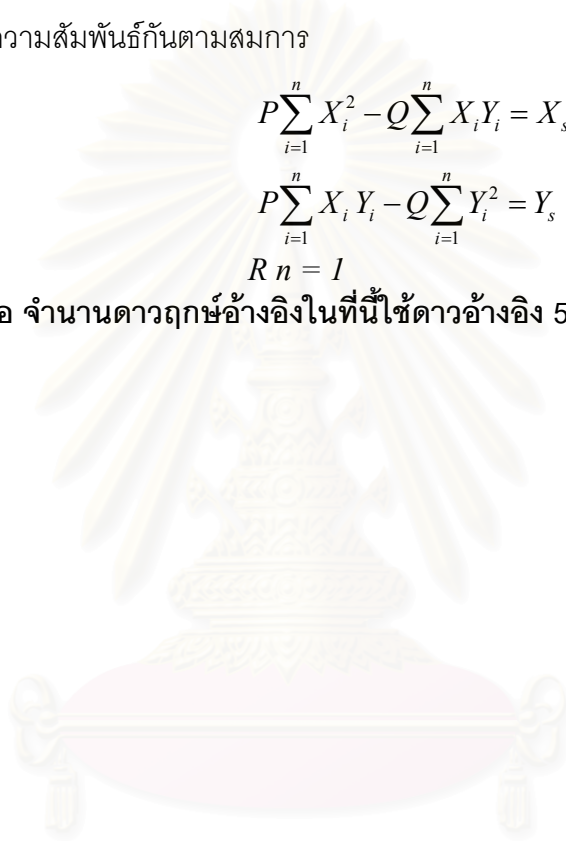
โดยที่  $P, Q, R$  มีความสัมพันธ์กันตามสมการ

$$P \sum_{i=1}^n X_i^2 - Q \sum_{i=1}^n X_i Y_i = X_s \quad (3.10)$$

$$P \sum_{i=1}^n X_i Y_i - Q \sum_{i=1}^n Y_i^2 = Y_s \quad (3.11)$$

$$R n = 1 \quad (3.12)$$

เมื่อ  $n$  คือ จำนวนดาวฤกษ์อ้างอิงในที่นี้ใช้ดาวอ้างอิง 5 ดวง เพราะฉะนั้น  $n = 5$ .



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

4.1.2 ผลเฉลยของโปรแกรม OU2.cpp และOU3.cpp

ดาวอังคาร

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์  2541+	ดาว อ้างอิง  3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 3 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง  5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 5 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
1.	195.31597222	<i>k-Vir</i> <i><math>\alpha</math>-Vir</i> <i>80-Vir</i>	13.60761755	-8.136483443	0.3	<i>k-Vir</i> <i><math>\alpha</math>-Vir</i> <i><math>\theta</math>-Vir</i> <i><math>\zeta</math>-Vir</i> <i><math>\iota</math>-Vir</i>	13.67801201	-7.36931426	0
2.	202.34375000	<i>k-Vir</i> <i><math>\alpha</math>-Vir</i> <i>80-Vir</i>	13.88081993	-9.67633918	0.2	<i>k-Vir</i> <i><math>\alpha</math>-Vir</i> <i><math>\theta</math>-Vir</i> <i><math>\zeta</math>-Vir</i> <i><math>\iota</math>-Vir</i>	13.84286276	-9.13251284	0
3.		<i><math>\iota</math>-Vir</i>				<i><math>\mu</math>-Vir</i> <i><math>\iota</math>-Vir</i>			

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว ข้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 3 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 5 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
	209.31250000	$\lambda$ -Vir $\alpha$ -Vir	14.06678809	-10.09735445	0.2	$\lambda$ -Vir $\alpha$ -Vir 89-Vir	14.01560862	-10.05597818	0
4.	223.32291667	$\iota$ -Vir $\alpha_2$ -Lib $\alpha$ -Vir	13.10580555	-10.13936722	8.3	$\alpha_2$ -Lib $\iota$ -Vir $\lambda$ -Vir $\alpha$ -Vir $\mu$ -Vir	14.33969634	-11.58187098	0
5.	230.31250000	$\iota$ -Vir $\pi$ -Hyd $\beta$ -Lib	15.57404373	-12.69543044	7.7	$\alpha_2$ -Lib $\iota$ -Vir $\pi$ -Hyd K-Vir $\beta$ -Lib $\alpha_2$ -Lib	14.46349353	-11.58187098	0

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์  2541+	ดาว ข้างอิง  3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง  5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
6.	237.29166667	$\alpha_2$ -Lib $\lambda$ -Vir $\mu$ -Vir	14.59501685	-12.76971812	0.2	$\iota$ -Vir $\lambda$ -Vir K-Vir $\mu$ -Vir	14.57136674	-12.7951707	0
7.	251.29861111	$\beta$ -Lib $\iota$ -Lib K-Vir	14.83680721	-13.47930277	0.9	$\alpha_2$ -Lib $\iota$ -Vir $\beta$ -Lib $\iota$ -Lib K-Vir	14.69500933	-13.32072846	0
8.	259.21875000	$\alpha_2$ -Lib $\lambda$ -Vir $\mu$ -Vir	14.58986886	-13.34091949	0.6	$\alpha_2$ -Lib $\iota$ -Vir $\lambda$ -Vir $\beta$ -Lib $\mu$ -Vir	14.69292719	-13.45352043	0

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว ข้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 3 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 5 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
			9.	262.27083333			$\mu$ -Vir $\lambda$ -Vir $\alpha_2$ -Lib	14.70411309	
10.	263.39583333	$\sigma$ -Lib $\beta$ -Lib K-Vir	14.63762107	-13.39642595	0.3	$\gamma$ -Lib $\sigma$ -Lib $\beta$ -Lib $\mu$ -Vir K-Vir	14.68248306	-13.36655223	0
11.	290.16666667	$\alpha_2$ -Lib $\iota$ -Lib $\alpha$ -Vir	14.37018297	-11.82712094	0.9	$\mu$ -Vir $\alpha_2$ -Lib $\iota$ -Lib $\alpha$ -Vir	14.22364284	-11.70690724	0



ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว อ้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
						$\gamma$ -Hyd			
12.	301.13541667	$\epsilon$ -Vir $\lambda$ -Vir $\alpha$ -Vir	13.99011000	-10.85550579	0.2	K-Vir $\epsilon$ -Vir $\lambda$ -Vir $\alpha$ -Vir $\xi$ -Vir	13.54526569	-10.75695714	0
13.	314.20833333	K-Vir $\theta$ -Vir $\alpha$ -Vir	13.67804388	-9.91376008	0.1	$\xi$ -Vir K-Vir $\theta$ -Vir $\alpha$ -Vir $\lambda$ -Vir	13.68330792	-9.93408355	0
		$\xi$ -Vir				$\xi$ -Vir $\eta$ -Crv $\theta$ -Vir			

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์  2541+	ดาว อ้างอิง  3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง  5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
14.	323.04166667	$\eta$ -Crv $\theta$ -Vir	13.14203179	-6.65119633	0.1	$\iota$ -Vir $\lambda$ -Vir	13.55816263	-9.46897649	0
15.	344.13194444	$\gamma$ -Hyd $\gamma$ -Vir $\iota$ -Vir	13.55684933	-9.77014360	0.6	$\zeta$ -Vir $\gamma$ -Hyd $\gamma$ -Vir $\iota$ -Vir $\lambda$ -Vir	13.48964433	-10.23540606	0
16.	349.03472222	$\zeta$ -Vir $\lambda$ -Vir $\delta$ -Crv	13.63774022	-10.45851304	0.3	$\theta$ -Vir $\zeta$ -Vir $\lambda$ -Vir $\delta$ -Crv $\iota$ -Vir	13.58087533	-10.50756510	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว อ้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
17.	351.07291667	<i>K-Vir</i> <i><math>\theta</math>-Vir</i> <i>69-Vir</i>	14.07395395	-11.42781537	3.4	<i><math>\alpha</math>-Vir</i> <i><math>\zeta</math>-Vir</i> <i>69-Vir</i> <i><math>\theta</math>-Vir</i> <i>K-Vir</i>	13.60621825	-10.93958941	0
18.	362.07291167	<i><math>\lambda</math>-Vir</i> <i>69-Vir</i> <i><math>\theta</math>-Vir</i>	13.99223220	-12.36443139	1.5	<i><math>\alpha</math>-Vir</i> <i><math>\zeta</math>-Vir</i> <i>69-Vir</i> <i><math>\theta</math>-Vir</i> <i><math>\lambda</math>-Vir</i>	13.78051798	-12.16548989	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว ข้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
19.	368.03125000	$\alpha_2$ -Lib $\zeta$ -Vir 69-Vir	13.95584157	-12.91914607	0.3	$\alpha_2$ -Lib $\zeta$ -Vir 69-Vir $\alpha$ -Vir $\lambda$ -Vir	13.90877206	-12.89175150	0
20.	412.04861111	$\delta$ -Sco $\sigma$ -Lib $\beta$ -Lib	15.38856107	-20.09970973	0.5	$\delta$ -Sco $\sigma$ -Lib $\beta$ -Lib $\alpha_2$ -Lib $\theta$ -Lib	15.31457423	-19.96497034	0
21.	425.07291667	$\beta$ -Sco K-Lib $\rho$ -Sco	16.48158371	-23.2041146	0.4	$\beta$ -Sco K-Lib $\rho$ -Sco $\pi$ -Lib	15.86395426	-21.97906186	0

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว อ้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารภรณ์		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารภรณ์		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
						$\theta$ -Lib			
22.	430.04166667	$\tau$ -Sco $\theta$ -Lib $\rho$ -Sco	16.15104658	-22.69531761	0.4	$\tau$ -Sco $\pi$ -Sco $\rho$ -Sco $\theta$ -Lib $\beta$ -Sco	16.08702599	-22.59886977	0
23.	462.00000000	$\lambda$ -Sco $\eta$ -Oph $\lambda$ -Sqr	18.40102064	-26.86918279	4.8	$\lambda$ -Sco $\eta$ -Oph $\lambda$ -Sqr $\zeta$ -Oph $\theta$ -Oph	17.52560729	-25.95087608	0

ตาราง 4.3 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากวิธีการสถานะสังเกตดาวอ้างอิง

ดาวเสาร์

จุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว อ้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 3 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 5 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
			1.	195.07638889	$\xi^2 - cet.$ $\mu - Psc$ $\eta - Psc$		1.748378452	8.131819201	0.7
2.	202.29166667	$\xi^1 - Cet.$ $\eta - Psc.$ $\nu - Psc.$	1.77779842	8.43616717	1.6	$\xi^1 - Cet.$ $\alpha - Psc$ $\mu - Psc.$ $\eta - Psc.$ $\beta - Psc.$	1.70452724	8.73092683	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว ข้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 3 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 5 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ลองติจูดท้องฟ้า	ละติจูดท้องฟ้า			ลองติจูดท้องฟ้า	ละติจูดท้องฟ้า	
			( $\alpha$ )	( $\delta$ )			( $\alpha$ )	( $\delta$ )	
3.	230.29166667	$\xi^1 - Cet.$ $\alpha - Psc.$ $\eta - Psc.$	1.87638969	9.01775226	0.4	$\xi^1 - Cet.$ $\beta - Air$ $\alpha - Psc.$ $\eta - Psc.$ $\alpha - Air.$	1.86385091	8.99836926	0
4.	237.30555556	$\eta - Psc.$ $\nu - Psc.$ $\xi^2 - Cet.$	1.90068755	9.22975665	0.3	$\xi^2 - Cet.$ $\beta - Air$ $\alpha - Psc$ $\eta - Psc.$ $\nu - Psc.$	1.90514756	9.22569173	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว ข้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
5.	440.52083333	$\delta - Air$ $\alpha - Air$ $\alpha - Cet$	3.08475594	14.27202137	2.2	$\xi^2 - Cet.$ $\alpha - Air$ $\alpha - Cet$ $\xi - Tau$ $\delta - Air$	3.00198873	14.31223110	0
6.	456.50347222	$\alpha - Air$ $\alpha - Cet$ $\delta - Air$	2.97433824	14.24480540	0.6	$\xi^2 - Cet.$ $\alpha - Air$ $\alpha - Cet$ $\xi - Tau$ $\delta - Air$	2.95377794	14.05213027	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว ข้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 3 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี ดาว 5 ดวง		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ลองติจูดท้องฟ้า	ละติจูดท้องฟ้า			ลองติจูดท้องฟ้า	ละติจูดท้องฟ้า	
			( $\alpha$ )	( $\delta$ )			( $\alpha$ )	( $\delta$ )	
7.	471.45277778	$\xi^1 - Cet.$ $\delta - Air$ $o - Tau$	2.90641078	13.77889487	0.1	$\xi^1 - Cet.$ $\alpha - Air$ $\alpha - Cet$ $o - Tau$ $\delta - Air$	2.90658085	13.69594077	0
8.	479.39652778	$\alpha - Air$ $\alpha - Cet$ $\delta - Air$	3.00632673	14.12165758	0.1	$\xi^2 - Cet.$ $\alpha - Air$ $\alpha - Cet$ $\xi - Tau$ $\delta - Air$	2.90658085	13.69594077	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว ข้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
9.	490.37500000	$\alpha - Air$ $\gamma - Cet$ $\delta - Air$	2.81950893	13.49619592	0.8	$\xi^1 - Cet.$ $\alpha - Air$ $\gamma - Cet$ $\xi - Tau$ $\delta - Air$	2.79590913	13.30505589	0
10.	495.41666667	$\alpha - Psc.$ $\xi - Tau$ $\alpha - Air.$	2.75997379	13.15440288	0.1	$\xi^2 - Cet.$ $\alpha - Psc.$ $\alpha - Air.$ $\xi - Tau$ $\delta - Air$	2.77027999	13.17888480	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์  2541+	ดาว ข้างอิง  3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง  5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า  ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า  ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า  ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า  ( $\delta$ )	
11.	499.54513889	$\gamma - Cet$ $\alpha - Air.$ $\delta - Air$	2.76390821	13.16389207	0.3	$\xi^1 - Cet.$ $\gamma - Cet$ $\alpha - Air.$ $\xi - Tau$ $\delta - Air$	2.74727760	13.06107930	0
12.	514.28472222	$\alpha - Air.$ $\delta - Air$ $\gamma - Cet$	2.68474172	12.9611263	0.5	$\xi^1 - Cet.$ $\gamma - Cet$ $\alpha - Air.$ $\alpha - Cet.$ $\delta - Air$	2.67434310	12.83632788	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว อ้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
13.	520.29166667	$\xi - Tau$ $\alpha - Psc.$ $\alpha - Air.$	2.63890384	12.65200157	0.2	$\xi - Tau$ $\xi^1 - Cet.$ $\alpha - Air.$ $\alpha - Psc.$ $\delta - Air$	2.65522190	12.70114141	0
14.	529.41458333	$\delta - Air$ $\beta - Air.$ $\gamma - Cet.$	2.62705353	12.64092309	0.2	$\xi - Tau$ $\gamma - Cet.$ $\beta - Air.$ $\alpha - Cet.$ $\delta - Air$	2.61328744	12.54798579	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว อ้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
15.	536.28680556	$\beta - Air.$ $\gamma - Cet.$ $\beta - Air.$	2.40885537	15.26815648	2.3	$\xi^1 - Cet.$ $\gamma - Cet.$ $\beta - Air.$ $\alpha - Cet.$ $\delta - Air$	2.59763882	12.53168267	0
16.	548.29930556	$\gamma - Cet.$ $\beta - Air.$ $\delta - Air$	2.61929634	12.98857959	2.3	$\xi^1 - Cet.$ $\gamma - Cet.$ $\beta - Air.$ $\lambda - Cet.$ $\delta - Air$	2.57764336	12.49048908	0

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์ 2541+	ดาว อ้างอิง 3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว อ้างอิง 5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
17.	556.30208333	$\delta - Air$ $\beta - Air$ $\alpha - Psc.$	2.55671379	12.52272865	0.6	$\gamma - Cet.$ $\beta - Air.$ $\alpha - Cet.$ $\alpha - Psc.$ $\delta - Air$	2.57497445	12.49854144	0
18.	561.29513889	$\xi - Tau.$ $\xi^2 - Cet.$ $\alpha - Air.$	2.58972378	12.59042176	0.6	$\xi - Tau.$ $\beta - Air.$ $\alpha - Cet.$ $\alpha - Air.$ $\xi^2 - Cet.$	2.78821167	11.8316968	0

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ที่	เวลา สังเกตการณ์  2541+	ดาว ข้างอิง  3 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D	ดาว ข้างอิง  5 ดวง	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารกรณี		% คลาด เคลื่อน ของ D
			ดาว 3 ดวง				ดาว 5 ดวง		
			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )			ลองติจูดท้องฟ้า ( $\alpha$ )	ละติจูดท้องฟ้า ( $\delta$ )	
19.	570.31250000	$\gamma - Cet.$ $\beta - Air.$ $\delta - Air$	2.58405079	12.68480795	0.9	$\gamma - Cet.$ $\beta - Air.$ $\alpha - Cet.$ $\alpha - Psc.$ $\delta - Air$	2.53473845	12.46328995	0

ตาราง 4.4 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากวิธีการสถานะสังเกตดาวข้างอิง

#### 4.1.3 ผลเฉลยของโปรแกรม OU4.cpp

เราใช้วิธีการกำลังสองน้อยสุดในการประมาณค่าของตำแหน่งเชิงมุมตามสมการ

$$\alpha(\tau) = C_0 + C_1\tau + C_2\tau^2 + C_3\tau^3 + C_4\tau^4$$

$$\delta(\tau) = C'_0 + C'_1\tau + C'_2\tau^2 + C'_3\tau^3 + C'_4\tau^4$$

เมื่อ  $\tau = kdt = k(t - t_0)$

โดยพิจารณาข้อมูลออกเป็นชุดๆ ชุดละ 9 สังเกตการ เมื่อแต่ละสังเกตการณ์ประกอบด้วย เวลาสุ่มสุ่ม และตำแหน่งเชิงมุมจะได้ 9 สมการดังนี้

$$C_0 + C_1\tau_1 + C_2\tau_1^2 + C_3\tau_1^3 + C_4\tau_1^4 = \alpha_1$$

$$C_0 + C_1\tau_2 + C_2\tau_2^2 + C_3\tau_2^3 + C_4\tau_2^4 = \alpha_2$$

M M

$$C_0 + C_1\tau_9 + C_2\tau_9^2 + C_3\tau_9^3 + C_4\tau_9^4 = \alpha_9$$

จากนั้นนำสมการทั้ง 9 มาสร้างสมการทั่วไปโดยอาศัยหลักการกำลังสองน้อยสุดสำหรับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในรูปเมทริกซ์ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} 9 & \sum \tau_i & \sum \tau_i^2 & \sum \tau_i^3 & \sum \tau_i^4 \\ \sum \tau_i & \sum \tau_i^2 & \sum \tau_i^3 & \sum \tau_i^4 & \sum \tau_i^5 \\ \sum \tau_i^2 & \sum \tau_i^3 & \sum \tau_i^4 & \sum \tau_i^5 & \sum \tau_i^6 \\ \sum \tau_i^3 & \sum \tau_i^4 & \sum \tau_i^5 & \sum \tau_i^6 & \sum \tau_i^7 \\ \sum \tau_i^4 & \sum \tau_i^5 & \sum \tau_i^6 & \sum \tau_i^7 & \sum \tau_i^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \alpha_i \\ \sum \alpha_i \tau_i \\ \sum \alpha_i \tau_i^2 \\ \sum \alpha_i \tau_i^3 \\ \sum \alpha_i \tau_i^4 \end{bmatrix}$$

จากนั้นใช้การกำจัดของเกาส์แก้สมการหาค่า  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  เพื่อนำไปคำนวณหา  $\{\alpha, \delta, \alpha, \delta, \alpha, \delta\}$  ตามสมการ

$$\alpha = c_0$$

$$\alpha = c_1$$

$$\alpha = c_2$$

สามารถคำนวณได้ด้วยโปรแกรม OU4.cpp การสุ่มเลือกข้อมูลและผลเฉลยสำหรับดาวอังคาร แสดงในตาราง 4.5 และ 4.6 ตามลำดับ





วัน เดือน ปี	JD 2451000.0+	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคาร		ชุดข้อมูล										
		$\alpha$	$\delta$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
19 JUN 1999	349.03472222	13.58087533	-10.50756510		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
21 JUN 1999	351.07291667	13.60621825	-10.93958941				*	*			*	*	*	
2 JUL 1999	362.07291167	13.78051798	-12.16548989	*	*	*	*		*	*		*		
8 JUL 1999	368.03125000	13.90877206	-12.89175150	*	*	*		*	*	*	*	*	*	
26 AUG 1999	412.04861111	15.31457423	-19.96497034	*		*	*	*	*	*	*		*	
3 SEPT 1999	425.07291667	15.86395426	-21.97906186	*	*					*			*	
8 SEPT 1999	430.04166667	16.08702599	-22.59886977		*	*	*	*	*		*	*	*	
10 OCT 1999	462.00000000	17.52560729	-25.95087608											

ตาราง 4.5 การสุ่มเลือกชุดข้อมูลของดาวอังคาร

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุดข้อมูล	เวลาสังเกตการณ์ 2451000.0+	ตำแหน่งเชิงมุม		ความเร็วเชิงมุม		ความเร่งเชิงมุม	
		$\alpha_i$	$\delta_i$	$\alpha'_i$	$\delta'_i$	$\alpha''_i$	$\delta''_i$
1	349.034722	13.5970356	-10.6800045	0.5374808	-4.8391243	2.2571389	-10.8510176
2	349.034722	13.5840077	-10.6071907	0.5665213	-5.0668179	2.5146239	-12.3553680
3	349.034722	13.5975738	-10.6880055	0.5244300	-4.7887200	2.2412535	-10.6922882
4	349.034722	13.5782655	-10.6001816	0.6016031	-5.2610991	2.6652113	-13.2359606
5	349.034722	13.5910692	-10.6686363	0.5186689	-4.7378816	2.2704689	-10.7368621
6	349.034722	13.5952100	-10.6807372	0.5223004	-4.7824714	2.2753306	-10.7966987
7	349.034722	13.5943555	-10.6737915	0.5352821	-4.8334518	2.3021798	-10.9563556
8	349.034722	13.5930406	-10.6734441	0.5240726	-4.7518432	2.2394380	-10.6607109
9	349.034722	13.5900295	-10.6887327	0.5140122	-4.7520643	2.2391158	-10.5530371
10	351.072917	13.6134155	-10.8478411	0.6035623	-5.1275552	2.2293517	-10.4863251

ตาราง 4.6 ตำแหน่งเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุมของดาวอังคาร ขณะเวลาที่พิจารณา

ผลเฉลยจากการสุ่มเลือกข้อมูลในชุดต่างๆของดาวอังคารและดาวเสาร์ แสดงในตาราง 4.7 และ 4.8 ตามลำดับ

ดาวเสาร์

วัน เดือน ปี	JD 2451000.0+	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคาร		ชุดข้อมูล										
		$\alpha$	$\delta$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
16 JAN 1999	195.07638889	1.68764247	7.98431669											
23 JAN 1999	202.29166667	1.70452724	8.73092683											
20 FEB 1999	230.29166667	1.86385091	8.99836926											
27 FEB 1999	237.30555556	1.90514756	9.22569173											
18 SEPT 1999	440.52083333	3.00198873	14.31223110	*	*	*		*	*			*	*	
4 OCT 1999	456.50347222	2.95377794	14.05213027	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*
19 OCT 1999	471.45277778	2.90658085	13.69594077	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*
27 OCT 1999	479.39652778	2.84025353	13.61673167			*	*		*	*	*			
7 DEC 1999	490.37500000	2.79590913	13.30505589	*	*			*				*	*	*
12 DEC 1999	495.41666667	2.77027999	13.17888480	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*
16 DEC 1999	499.54513889	2.74727760	13.06107930	*		*	*		*	*		*	*	*
1 NOV 1999	514.28472222	2.67434310	12.83632788					*						
7 NOV 1999	520.29166667	2.65522190	12.70114141		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
16 NOV 1999	529.41458333	2.61328744	12.54798579	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*
23 NOV 1999	536.28680556	2.59763882	12.53168267	*	*	*	*	*	*		*			

วัน เดือน ปี	JD 2451000.0+	ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคาร		ชุดข้อมูล									
		$\alpha$	$\delta$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4 JAN 2000	548.29930556	2.57764336	12.49048908					*	*	*			*
12 JAN 2000	556.30208333	2.57497445	12.49854144							*		*	
17 JAN 2000	561.29513889	2.78821167	11.83816968			*			*				
26 JAN 2000	570.31250000	2.53473845	12.46328995	*	*		*				*		

ตาราง 4.7 การสุ่มเลือกชุดข้อมูลของดาวเสาร์

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชุด ข้อ มูล	เวลา สังเกตการณ์ 2451000.0+	ตำแหน่งเชิงมุม		ความเร็วเชิงมุม		ความเร่งเชิงมุม	
		$\alpha_i$	$\delta_i$	$\alpha'_i$	$\delta'_i$	$\alpha''_i$	$\delta''_i$
1	495.416667	2.7705739	13.1672768	-0.3083957	-1.2722323	0.0729469	0.5905129
2	495.416667	2.7722172	13.1754320	-0.3055155	-1.2645456	0.0618753	0.5260960
3	499.545139	2.7469606	13.0868294	-0.3012805	-1.2826465	0.0921998	0.6644842
4	499.545139	2.7467394	13.0802913	-0.2994781	-1.2933637	0.1240207	0.8790483
5	514.284720	2.6754241	12.7983481	-0.2402418	-0.9384454	0.2412546	1.3661724
6	514.284720	2.7475722	13.0882292	-0.3030702	-1.2706898	0.0984730	0.7055595
7	499.545439	2.7469551	13.0826485	-0.3021741	-1.3058893	0.1083292	0.7595050
8	499.545439	2.7623568	13.1536458	-0.3102564	-1.3125455	0.0425356	0.4035626
9	495.416667	2.7717623	13.1719772	-0.3121113	-1.3047306	0.0441597	0.4096978
10	495.416667	2.7717643	13.1722664	-0.3117130	-1.2973607	0.0449343	0.4182561

ตาราง 4.8 ตำแหน่งเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุมของดาวอังคาร ขณะเวลาที่พิจารณา

#### 4.1.4 ผลเฉลยของโปรแกรม OU5.cpp

โปรแกรม OU5.cpp คำนวณค่า  $\dot{R}, \ddot{R}, \dddot{R}$  จากความสัมพันธ์

$$\dot{R} = \dot{r} + \dot{G}$$

และ

$$\begin{aligned} R_t &= \{R_{tx}, R_{ty}, R_{tz}\} \\ \ddot{R}_t &\approx \{\ddot{G}_{tx}, \ddot{G}_{ty}, \ddot{G}_{tz}\} \\ \dddot{R}_t &= \{\dddot{G}_{tx}, \dddot{G}_{ty}, \dddot{G}_{tz}\}. \end{aligned}$$

เมื่อดำเนินการของโลกที่ศูนย์กลางสุริยะเป็น  $A_c = 4.263523 \times 10^{-5}$  และอาศัยการประมาณค่าพหุนามแบบลากรางจ์ตั้งสมการ

$$G(t) = G_1 \frac{l_1}{b_1} + G_2 \frac{l_2}{b_2} + G_3 \frac{l_3}{b_3}$$

โดยที่  $b_1 = (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)$  และ  $l_1 = (t_0 - t_2)(t_0 - t_3)$

$$b_2 = (t_2 - t_1)(t_2 - t_3) \quad l_2 = (t_0 - t_1)(t_0 - t_3)$$

$$b_3 = (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \quad l_3 = (t_0 - t_1)(t_0 - t_2)$$

เมื่อ  $t_0$  คือ เวลาที่พิจารณาประมาณค่าฟังก์ชัน

$t_1, t_2, t_3$  คือ เวลาข้างเคียงของเวลาที่ต้องการประมาณค่าฟังก์ชัน

โปรแกรม OU4.cpp สามารถคำนวณผลเฉลยของตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของเวกเตอร์รัศมีจากจุดสังเกตการณ์บนผิวโลกไปยังดวงอาทิตย์  $\dot{R}, \ddot{R}, \dddot{R}$  และแสดงในตาราง 4.9

เวลาสังเกตการณ์	ตำแหน่ง			ความเร็ว			ความเร่ง		
	$R_{tx}$	$R_{ty}$	$R_{tz}$	$R_{tx}$	$R_{ty}$	$R_{tz}$	$R_{tx}$	$R_{ty}$	$R_{tz}$
2451000+									
195.076389	0.4312541	-0.8112083	-0.3517252	0.9155544	0.4058053	0.1759063	-0.4619613	0.8539695	0.3697042
195.315972	0.4349669	-0.8095246	-0.3509971	0.9136505	0.4093248	0.1774299	-0.4619613	0.8539695	0.3697042
202.291667	0.5410214	-0.7543927	-0.3270992	0.8515763	0.5081747	0.2203021	-0.5758465	0.7863819	0.3413174
202.343750	0.5417748	-0.7539469	-0.3269017	0.8510604	0.5088792	0.2206079	-0.5758465	0.7863819	0.3413174
209.312500	0.6394509	-0.6874523	-0.2980722	0.7766062	0.5989196	0.2597045	-0.6687794	0.7123734	0.3088754
223.322917	0.8055674	-0.5238330	-0.2271267	0.5948998	0.7522812	0.3261214	-0.8411278	0.5464459	0.2362187
230.312500	0.8708552	-0.4296632	-0.1863023	0.4897189	0.8119358	0.3520010	-0.9073637	0.4379677	0.1909350
230.291667	0.8706816	-0.4299491	-0.1864284	0.4900441	0.8117788	0.3519326	-0.9073637	0.4379677	0.1909350
237.291667	0.9230144	-0.3292615	-0.1427706	0.3783560	0.8584267	0.3722177	-0.9475783	0.3318552	0.1439616
251.298611	0.9860455	-0.1147024	-0.0497404	0.1423637	0.9139926	0.3962295	-1.0077313	0.1176024	0.0506907
259.218750	0.9960549	0.0105485	0.0045525	0.0044177	0.9212299	0.3994033	-1.0104348	-0.0202763	-0.0081105
262.270833	0.9948931	0.0588571	0.0255045	-0.0484710	0.9191004	0.3985121	-1.0019864	-0.0679256	-0.0294006
263.395833	0.9937795	0.0766013	0.0332112	-0.0678456	0.9176754	0.3978971	-0.9996208	-0.0841466	-0.0361594
270.581250	0.9778665	0.1891282	0.0820052	-0.1899133	0.9009616	0.3906330	-0.9756272	-0.1858659	-0.0807672
280.547222	0.9311721	0.3401234	0.1474673	-0.3534999	0.8562955	0.3712119	-0.9296676	-0.3342207	-0.1449754
290.166667	0.8602096	0.4766134	0.2066227	-0.5010920	0.7888679	0.3420552	-0.8421417	-0.4788582	-0.2074940
301.135417	0.7512771	0.6162545	0.2671693	-0.6499413	0.6873876	0.2980128	-0.7275807	-0.6011918	-0.2608882



เวลาสังเกตการณ์	ตำแหน่ง			ความเร็ว			ความเร่ง		
	$R_{tx}$	$R_{ty}$	$R_{tz}$	$\dot{R}_{tx}$	$\dot{R}_{ty}$	$\dot{R}_{tz}$	$\ddot{R}_{tx}$	$\ddot{R}_{ty}$	$\ddot{R}_{tz}$
2451000+									
314.208333	0.5878382	0.7545220	0.3271224	-0.7977062	0.5372995	0.2329549	-0.5680739	-0.7383947	-0.3193515
323.041667	0.4605330	0.8274426	0.3587269	-0.8744178	0.4204632	0.1823222	-0.4315469	-0.7988856	-0.3467245
331.368750	0.3312384	0.8792930	0.3812315	-0.9285699	0.3032655	0.1314519	-0.3166480	-0.8394382	-0.3642972
344.131944	0.1211708	-0.0000205	-0.0000102	-0.9771212	0.1129505	0.0490032	-0.1084781	-0.8891151	-0.3852494
349.034722	0.0384463	0.9315995	0.4038914	-0.9832606	0.0378947	0.0164653	-0.0239936	-0.8887771	-0.3855873
351.072917	0.0039604	0.9323706	0.4042317	-0.9837772	0.0067468	0.0029470	0.0077726	-0.8870874	-0.3849115
362.052083	-0.1808142	0.9179028	0.3979571	-0.9676559	-0.1593821	-0.0691376	0.1743760	-0.8698526	-0.3771389
368.031250	-0.2792954	0.8969265	0.3888598	-0.9456646	-0.2482964	-0.1076511	0.2686608	-0.8563351	-0.3703801
412.048611	-0.8585130	0.4910007	0.2128856	-0.5124208	-0.7752123	-0.3361274	-1.0019864	-0.0679256	-0.0294006
425.072917	-0.9516725	0.3068897	0.1330603	-0.3157496	-0.8621533	-0.3737671	-0.9996208	-0.0841466	-0.0361594
430.041667	-0.9752408	0.2321729	0.1006697	-0.2351431	-0.8850633	-0.3836797	0.9607579	-0.2227012	-0.0969882
440.520833	-1.0018280	0.0698810	0.0302729	-0.0590984	-0.9114090	-0.3951771	0.9867792	-0.0645462	-0.0283868
456.503472	-0.9807492	-0.1801587	-0.0781339	0.2124311	-0.8965487	-0.3886602	0.9844136	0.1764037	0.0760361
462.000000	-0.9562769	-0.2640905	-0.1144844	0.3047128	-0.8755734	-0.3795990	0.9617717	0.2757575	0.1192921
471.452778	-0.8942296	-0.4021937	-0.1743989	0.4567588	-0.8201317	-0.3556100	0.9009429	0.4105948	0.1780934
479.396528	-0.8235905	-0.5101127	-0.2211886	0.5755007	-0.7569384	-0.3281489	0.8370726	0.5153556	0.2237150
490.375000	-0.7005510	-0.6429983	-0.2787965	0.7238906	-0.6455215	-0.2798677	0.7221736	0.6657380	0.2882612

เวลาสังเกตการณ์	ตำแหน่ง			ความเร็ว			ความเร่ง		
	$R_{tx}$	$R_{ty}$	$R_{tz}$	$\dot{R}_{tx}$	$\dot{R}_{ty}$	$\dot{R}_{tz}$	$\ddot{R}_{tx}$	$\ddot{R}_{ty}$	$\ddot{R}_{tz}$
2451000+									
495.416667	-0.6351444	-0.6964114	-0.3019556	0.7836810	-0.5853094	-0.2537990	0.6525584	0.7238633	0.3132686
499.545139	-0.5779158	-0.7361433	-0.3191752	0.8279703	-0.5324851	-0.2308949	0.5934192	0.7627262	0.3311793
514.284722	-0.3511883	-0.8453085	-0.3665090	0.9507971	-0.3237380	-0.1403383	0.3680146	0.8833701	0.3832218
520.291667	-0.2511449	-0.8739811	-0.3789408	0.9837164	-0.2305845	-0.0999960	0.2605502	0.9195295	0.3980910
529.414583	-0.0942460	-0.8987312	-0.3896717	1.0117134	-0.0840637	-0.0364627	0.0912433	0.9425093	0.4089051
536.286806	0.0257539	-0.9020718	-0.3911234	1.0156122	0.0273449	0.0118941	-0.0287247	0.9425093	0.4089051
548.299306	0.2335660	-0.8763241	-0.3799566	0.9881376	0.2213637	0.0959416	-0.2490604	0.9249365	0.4007945
556.302083	0.3668047	-0.8371971	-0.3629968	0.9441979	0.3460206	0.1499977	-0.3950496	0.8779631	0.3811941
561.295139	0.4463601	-0.8042794	-0.3487247	0.9070882	0.4198770	0.1820642	-0.4737892	0.8377485	0.3639593
570.312500	0.5808718	-0.7293468	-0.3162292	0.8238533	0.5444426	0.2360562	-0.6065988	0.7640780	0.3305034

ตาราง 4.9 ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของเวกเตอร์รัศมีจากจุดสังเกตการณ์บนผิวโลกไปยังดวงอาทิตย์

#### 4.2.5 ผลเฉลยของโปรแกรม OU6.cpp

โปรแกรม OU6.cpp ทำงานโดยอาศัยความสัมพันธ์ของชุดข้อมูล

$$\left\{ t, \overset{r}{L}, \overset{r}{L}, \overset{r}{L}, \overset{r}{L}, \overset{r}{R}, \overset{r}{R}, \overset{r}{R} \right\}.$$

ที่คำนวณมาแล้วจากโปรแกรม OU4.cpp และ OU5.cpp ใช้สมการลากรานจ์เป็นหัวใจหลักในการคำนวณขนาดของเวกเตอร์รัศมีในวงโคจรของดาวเคราะห์ตามสมการ

$$r^8 + ar^6 + br^3 + c = 0$$

โดยอาศัยระเบียบวิธี นิวตัน – ราฟสัน จากนั้นนำขนาดของเวกเตอร์รัศมีที่ได้คำนวณหาเวกเตอร์ตำแหน่ง และ ความเร็วของดาวเคราะห์เทียบกับจุดสังเกตการณ์เพื่อนำไปคำนวณค่าตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์เทียบกับดวงอาทิตย์เพื่อให้ได้ชุดของข้อมูล  $\left\{ t, \overset{r}{r}, \overset{r}{v} \right\}$  ในการกำหนดหลักมูลวงโคจรเบื้องต้น วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้โปรแกรม OU5.cpp คำนวณหาชุดข้อมูลดังกล่าวดังแสดงในตาราง 4.10 และ 4.11



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ดาวอังคาร

ชุด ที่	เวลา 2451+	ตำแหน่งเทียบกับดวงอาทิตย์			ความเร็วเทียบกับดวงอาทิตย์		
		$r_{ix}$	$r_{iy}$	$r_{iz}$	$v_{ix}$	$v_{iy}$	$v_{iz}$
1	349.034722	-0.8114680	-1.2750523	-0.5634174	0.6955854	-0.2959541	-0.1597885
2	349.034722	-0.6919470	-1.2192844	-0.5376095	0.7593082	-0.2521905	-0.1363780
3	349.034722	-0.8168053	-1.2775550	-0.5646521	0.6801059	-0.3006137	-0.1626151
4	349.034722	-0.6216342	-1.1872853	-0.5230628	0.7947944	-0.2300308	-0.1237253
5	349.034722	-0.7833910	-1.2611854	-0.5573495	0.6604286	-0.3016795	-0.1619386
6	349.034722	-0.7882005	-1.2642856	-0.5585938	0.6726748	-0.2984153	-0.1608389
7	349.034722	-0.7684372	-1.2553207	-0.5544007	0.6810462	-0.2943304	-0.1578876
8	349.034722	-0.8092619	-1.2731073	-0.5627884	0.6693790	-0.3034757	-0.1632330
9	349.034722	-0.8072893	-1.2715085	-0.5625588	0.6581658	-0.3053046	-0.1652002
10	351.072917	-0.7362749	-1.2615047	-0.5580839	0.6845625	-0.2803159	-0.1512255

ตาราง 4.10 ตำแหน่งและความเร็วในวงโคจรของดาวอังคาร

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ดาวเสาร์

จุด ที่	เวลา 2451+	ตำแหน่งเทียบกับดวงอาทิตย์			ความเร็วเทียบกับดวงอาทิตย์		
		$r_{ix}$	$r_{iy}$	$r_{iz}$	$v_{ix}$	$v_{iy}$	$v_{iz}$
1	495.416667	6.4399999	5.8427089	2.1168161	-0.1849639	0.2790686	0.1293978
2	495.416667	6.7608391	6.1318576	2.2190854	-0.2346300	0.1967770	0.0989204
3	499.545139	6.8488674	6.2267988	2.2567695	-0.3068785	0.1149277	0.0614161
4	499.545139	5.7607350	5.2735329	1.9196495	-0.2755015	0.2983602	0.1277554
5	515.284722	6.1485320	5.9601649	2.1692020	-0.2425710	0.2679787	0.1184958
6	499.545139	6.5878516	5.9999615	2.1765872	-0.2993721	0.1528093	0.0784251
7	499.545139	6.4362786	5.8655337	2.1286870	-0.2408417	0.2278180	0.0998521
8	499.545139	6.5561279	5.5668337	2.3588925	-0.2504467	0.2461245	0.0923448
9	495.416667	7.4949179	6.7817597	2.4480165	-0.2971977	0.0152537	0.0301809
10	495.416667	7.3911147	6.6896816	2.4155910	-0.3042991	0.0253691	0.0350661

ตาราง 4.11 ตำแหน่งและความเร็วในวงโคจรของดาวเสาร์

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

#### 4.2.7 ผลเฉลยของโปรแกรม OU7.cpp

จากชุด  $\{t, \dot{r}, \dot{v}\}$  ที่ได้จาก ou6.cpp สามารถนำไปใช้หาหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นได้ โดยเริ่มต้นจากการแปร  $\dot{r}$  และ  $\dot{v}$  จากพิกัดศูนย์กลางสุริยมรรคนิยม ไปสู่ พิกัดสุริยมรรคนิยมด้วยโดยหมุนแกนเป็นมุม 23.4392910. จากนั้นหาค่าความเยื้องของวงโคจรด้วย

สมการ

$$e = \left( \frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right) r - \left( \frac{r\dot{v}}{\mu} \right)^2$$

จากนั้นแยกคำนวณหลักมูลวงโคจรตามเงื่อนไขรูปร่างของวงโคจร ในกรณีวงโคจรรูปวงรี  $e < 1$ . โดยอาศัยกฎข้อที่ 3 ของเคปเลอร์สำหรับวงรีในการประยุกต์หาหลักมูลวงโคจรดัง

สมการ

$$M = E - e \sin E$$

โปรแกรม OU7.cpp คำนวณหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของดาวอังคารและดาวเสาร์ดังแสดงในตาราง 4.11 และ 4.12 ตามลำดับ

ดาวอังคาร

หลักมูล วงโคจร	ข้อมูลชุดที่									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a$	1.555	1.485	1.523	1.449	1.413	1.450	1.436	1.481	1.449	1.410
$M$	248.9	271.5	229.5	280.4	200.02	211.32	213.3	213.8	203.1	210.28
$e$	0.086	0.119	0.090	0.130	0.128	0.110	0.110	0.102	0.117	0.122
$i$	2.203	1.829	2.284	1.590	2.244	2.244	2.148	2.261	2.367	2.125
$\Omega$	50.76	52.65	50.88	53.38	51.42	51.45	51.66	50.83	50.88	51.750
$\omega$	308.9	291.9	326.5	285.4	353.3	343.4	341.9	341.03	350.4	346.09
$period$	708.4	661.1	686.3	636.8	613.4	637.8	628.7	658.1	636.8	611.8

ตาราง 4.12 หลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของข้อมูลสังเกตการณ์ชุดต่างๆ ของดาวอังคาร

ดาวเสาร์

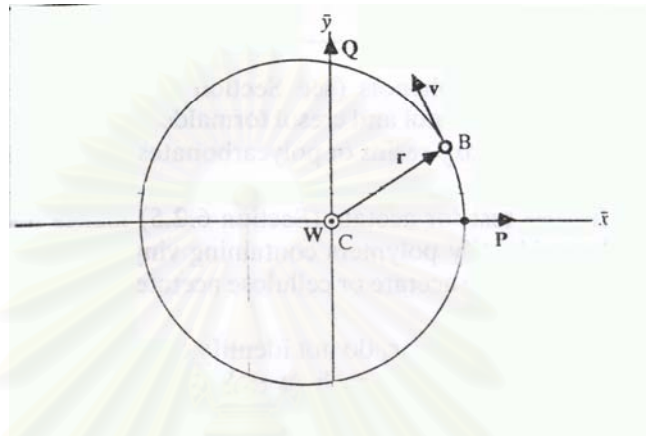
หลักมูลวง โคจร	ข้อมูลชุดที่									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>a</i>	10.56	9.142	9.947	14.81	12.98	10.106	9.684	10.81	9.722	9.947
<i>M</i>	42.60	245.56	303.40	4.048	10.39	304.30	359.7	355.5	301.6	303.4
<i>e</i>	0.267	0.060	0.396	0.461	0.316	0.293	0.074	0.176	0.661	0.633
<i>i</i>	3.049	3.232	2.620	2.398	2.475	2.725	2.436	2.110	4.158	4.123
$\Omega$	97.32	93.431	112.85	135.04	122.2	107.34	130.2	213.9	80.55	80.86
<i><math>\omega</math></i>	237.6	70.899	36.405	256.84	261.5	25.290	274.1	195.1	98.98	94.34
<i>period</i> 10000+	2535.	94.016	1760.5	10829.	7096.	1733.	1005.	2988.	1069.	1456.

ตาราง 4.13 หลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของข้อมูลสังเกตการณ์ชุดต่างๆ ของดาวเสาร์



#### 4.2.8 ผลเฉลยของโปรแกรม OU8.cpp

เราใช้โปรแกรม OU8.cpp ความถูกต้องของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นที่ได้ จากการนำเอาหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นที่ได้จากโปรแกรม OU7.cpp ไปทำการคำนวณย้อนกลับหาค่าตำแหน่งและความเร็วในระบบพิกัดศูนย์กลางสุริยะมัธยมดังรูป 4.1



รูปที่ 4.1 ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $P, Q, W$

ตามสมการ

$$r = \bar{x}P + \bar{y}Q$$

$$v = \bar{x}P + \bar{y}Q$$

เมื่อ  $P, Q, W$  คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดวงโคจรของดาวเคราะห์

โปรแกรม OU8.cpp เริ่มต้นจากการคำนวณค่ามุมกวาดเฉียง  $E$  ของดาวเคราะห์ที่เคลื่อนที่แบบวงรีด้วยสมการเคปเลอร์ ด้วยระเบียบวิธี นิวตัน - ราฟสัน

$$M = E - e \sin E$$

นำค่าของมุมกวาดเฉียงที่ได้มาคำนวณหา  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{y}$  ในระนาบวงโคจรด้วยสมการต่อไปนี้

$$\bar{x} = a(\cos E - e)$$

$$\bar{y} = a\sqrt{1-e^2} \sin E$$

$$\bar{x} = -aE \sin E$$

$$\bar{y} = a\sqrt{1-e^2} E \cos E .$$

จากนั้นทำการแปลงพิกัดจากพิกัดศูนย์กลางสุริยะมัธยมไปสู่พิกัดวงโคจรของดาวเคราะห์ โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการ

$$P = I(+\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) +$$

$$\begin{aligned}
& J(+\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i) + \\
& K(+\sin \omega \sin i) \\
Q &= I(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i) + \\
& J(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i) + \\
& K(+\cos \omega \sin i) \\
W &= I(-\sin \Omega \sin i) + J(-\cos \Omega \cos i) + K(+\cos i)
\end{aligned}$$

เมื่อ  $i$  คือ ความเอียงของระนาบวงโคจรของดาวเคราะห์เทียบกับระนาบสุริยวิถีสุริยมัชฌิม

$\omega$  คือ ระยะมุมระหว่างจุดไต่ขึ้นของดาวอังคารกับจุดใกล้ดวงอาทิตย์ของดาวเคราะห์

$\Omega$  คือ ระยะแวงของจุดไต่ขึ้น

ผลเฉลยของโปรแกรม OU8.cpp ของดาวอังคารและดาวเสาร์แสดงในตาราง 4.13 และ 4.14 ตามลำดับ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ดาวอังคาร

ข้อมูล ชุดที่	เวลา 2451+	ตำแหน่ง			ความเร็ว		
		$r_{ix}$	$r_{iy}$	$r_{iz}$	$\dot{r}_{ix}$	$\dot{r}_{iy}$	$\dot{r}_{iz}$
1	349.034722	-0.8114680	-1.2750523	-0.5634174	0.6955854	-0.2959541	-0.1597885
2	349.034722	-0.6919472	-1.2192843	-0.5376095	0.7593081	-0.2521906	-0.1363781
3	349.034722	-0.8168053	-1.2775550	-0.5646521	0.6801059	-0.3006137	-0.1626151
4	349.034722	-0.6216342	-1.1872853	-0.5230628	0.7947944	-0.2300308	-0.1237254
5	349.034722	-0.7833910	-1.2611854	-0.5573495	0.6604286	-0.3016795	-0.1619386
6	349.034722	-0.7882005	-1.2642856	-0.5585938	0.6726748	-0.2984153	-0.1608389
7	349.034722	-0.7684372	-1.2553207	-0.5544007	0.6810462	-0.2943304	-0.1578876
8	349.034722	-0.8092619	-1.2731073	-0.562788	0.6693790	-0.3034757	-0.1632330
9	349.034722	-0.8072893	-1.2715085	-0.5625588	0.6581658	-0.3053046	-0.1652002
10	351.072917	-0.7362749	-1.2615047	-0.5580839	0.6845625	-0.2803159	-0.1512255

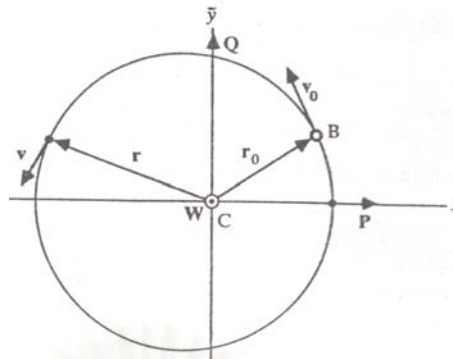
ตาราง 4.15 ตำแหน่งและความเร็วในระบบศูนย์กลางสุริยะมัธยมด้วยการคำนวณย้อนกลับของโปรแกรม OU8.cpp ของดาวอังคาร

## ดาวเสาร์

ข้อมูล ชุดที่	เวลา 2451+	ตำแหน่ง			ความเร็ว		
		$r_{tx}$	$r_{ty}$	$r_{tz}$	$\dot{r}_{tx}$	$\dot{r}_{ty}$	$\dot{r}_{tz}$
1	495.416667	6.4400000	5.8427092	2.1168158	-0.1849639	0.2790686	0.1293978
2	495.416667	6.7608392	6.1318573	2.2190849	-0.2346300	0.1967770	0.0989204
3	499.545139	6.8488673	6.2267988	2.2567690	-0.3068785	0.1149277	0.0614161
4	499.545139	5.7607331	5.2735349	1.9196507	-0.2755016	0.2983601	0.1277554
5	514.284722	6.1485323	5.9601643	2.1692015	-0.2425710	0.2679787	0.1184958
6	499.545139	6.5878517	5.9999616	2.1765871	-0.2993721	0.1528093	0.0784251
7	499.545139	6.4362781	5.8655336	2.1286876	-0.2408417	0.2278180	0.0998521
8	499.545139	6.5561271	5.5668338	2.3588926	-0.2504467	0.2461245	0.0923448
9	495.416667	7.5164594	6.8012520	2.4550529	-0.2967715	0.0152318	0.0301376
10	495.416667	7.3911152	6.6896815	2.4155909	-0.3042991	0.0253691	0.0350661

ตาราง 4.16 ตำแหน่งและความเร็วในระบบศูนย์กลางสุริยะมัธยมด้วยการคำนวณย้อนกลับของโปรแกรม OU8.cpp ของดาวเสาร์

## 4.2.9 ผลเฉลยของโปรแกรม OU9.cpp

รูปที่ 4.2 การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ในช่วงเวลา  $t-t_0$ 

เนื่องจากเราต้องการที่จะตรวจสอบค่าของหลักมูลวงโคจรที่ได้ โดยอ้างอิงการคำนวณย้อนกลับไปในอดีตเพื่อหาตำแหน่งและความเร็วเชิงมุมขณะทำการสังเกตการณ์ของสังเกตการณ์ระยะเวลาต่างๆในชุดข้อมูลนั้น เราจึงมีความจำเป็นต้องคำนวณค่า  $\vec{r}$  และ  $\vec{v}$  จากความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\begin{aligned}\vec{r} &= f\vec{r}_0 + g\vec{v}_0 \\ \vec{v} &= \dot{f}\vec{r}_0 + \dot{g}\vec{v}_0\end{aligned}$$

โปรแกรม OU9.cpp แก้สมการสากลของเคปเลอร์ (the universal Kepler's equation)

$$W = r_0 X - C_0 U + D_0 C$$

โดยที่

$$W = k\sqrt{\mu}(t-t_0)$$

เมื่อ  $t$  คือเวลาขณะสังเกตการณ์ใดๆ และ  $t_0$  คือ ช่วงเวลากลางของชุดข้อมูล เพื่อประมาณค่าของฟังก์ชัน  $f, \dot{f}, g, \dot{g}$  ขณะเวลาสังเกตการณ์ใดๆ ตามสมการ

$$f = 1 - \frac{C}{r_0}$$

$$g = \sqrt{\frac{1}{\mu}}(r_0 S + D_0 C)$$

$$\dot{f} = -\frac{\sqrt{\mu}}{r r_0} S$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{C}{r}$$

นำไปสู่การหาค่าตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์ในระบบศูนย์กลางสุริยมรรคนิยมตามสมการข้างต้น จากนั้นนำค่าที่ได้วิเคราะห์หาตำแหน่งเชิงมุมโดยอาศัยความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\sin \delta &= L_z \\ \cos \delta &= \sqrt{1 - L_z^2} \\ \cos \alpha &= \frac{L_x}{\cos \delta}\end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{L_y}{\cos \delta}$$



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตาราง 4.16 และ 4.17 แสดงค่า ตำแหน่งเชิงมุมที่ได้จากการสังเกตการณ์และวิเคราะห์ด้วยวิธีการสถานะสังเกตการณ์ดาวข้างอิง 5 ดวง กับตำแหน่งดาวเคราะห์ที่ได้มาจากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของข้อมูลทั้ง 10 ชุดตามลำดับ

### ดาวอังคารชุดที่ 1

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน ของ $\alpha_t$	%	ความคลาด เคลื่อน ของ $\delta_t$	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$				
1	262.2708333	14.68474172	-13.37736843	14.7383783	-13.426822	0.05363658	0.365	-0.04945357	0.37
2	263.3958333	14.68248306	-13.36655223	14.730987	-13.4058142	0.04850394	0.33	-0.03926197	0.294
3	314.2083333	13.68330792	-9.93408355	13.7309511	-10.0490889	0.04764318	0.348	-0.11500535	1.158
4	323.0416667	13.55816263	-9.46897649	13.6022562	-9.7499353	0.04409357	0.325	-0.28095881	2.967
5	349.0347222	13.58087533	-10.5075651	13.5968219	-10.6785661	0.01594657	0.117	-0.171001	1.627
6	362.0729117	13.78051798	-12.16548989	13.775513	-12.0782926	-0.00500498	-0.036	0.08719729	-0.72
7	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.9019897	-12.913066	-0.00678236	-0.049	-0.0213145	0.165
8	412.0486111	15.31457423	-19.96497034	15.3973844	-20.3906601	0.08281017	0.541	-0.42568976	2.132
9	425.0729167	15.86395426	-21.97906186	15.9939545	-22.3955375	0.13000024	0.819	-0.41647564	1.895

$a = 1.5552407$   
 $e = 0.0862285$   
 $i = 2.20302$   
 $\Omega = 50.76471$   
 $\omega = 308.91912$   
 $M = 248.96080$   
 period = 708.42648

ตาราง 4.17 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 1

## ดาวอังคารชุดที่ 2

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด		ความคลาด	
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	เคลื่อน ของ $\alpha_t$		เคลื่อน ของ $\delta_t$	
							%		%
1	259.21875	14.69292719	-13.45352043	14.7941205	-13.8412297	0.10119331	0.689	-0.38770927	2.882
2	263.395833	14.68248306	-13.36655223	14.7780345	-13.795746	0.09555144	0.651	-0.42919377	3.211
3	314.208333	13.68330792	-9.93408355	13.7483739	-10.133907	0.06506598	0.476	-0.19982345	2.011
4	323.041667	13.55816263	-9.46897649	13.6074522	-9.7439637	0.04928957	0.364	-0.27498721	2.904
5	349.034722	13.58087533	-10.5075651	13.5838004	-10.6058044	0.00292507	0.022	-0.0982393	0.935
6	362.072912	13.78051798	-12.16548989	13.7698404	-12.0222077	-0.0106776	-0.077	0.14328219	-1.178
7	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.8891029	-12.8188115	-0.0196692	-0.141	0.07294	-0.566
8	425.072917	15.86395426	-21.97906186	15.8522458	-21.9764241	-0.0117085	-0.074	0.00263776	-0.012
9	430.041667	16.08702599	-22.59886977	16.0796932	-22.6492067	-0.0073328	-0.046	-0.05033693	0.223

$a = 1.4853028$   
 $e = 0.0862285$   
 $i = 1.82895$   
 $\Omega = 52.65760$   
 $\omega = 291.93051$   
 $M = 271.54952$   
 period = 661.18174

ตาราง 4.18 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 2

## ดาวอังคารชุดที่ 3



ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน ของ $\alpha_t$	%	ความคลาด เคลื่อน ของ $\delta_t$	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$				
1	259.21875	14.69292719	-13.45352043	14.7980128	-13.5381055	0.10508561	0.715	-0.08458507	0.629
2	262.2708333	14.68474172	-13.37736843	14.7816652	-13.498847	0.09692348	0.66	-0.12147857	0.908
3	314.2083333	13.68330792	-9.93408355	13.7401232	-10.0696612	0.05681528	0.415	-0.13557765	1.365
4	323.0416667	13.55816263	-9.46897649	13.6124528	-9.7711158	0.05429017	0.4	-0.30213931	3.191
5	349.0347222	13.58087533	-10.5075651	13.597361	-10.6865692	0.01648567	0.121	-0.1790041	1.704
6	362.0729117	13.78051798	-12.16548989	13.7673619	-12.0026004	-0.01315608	-0.1	0.16288949	-1.34
7	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.8753661	-12.7333421	-0.03340596	-0.24	0.1584094	-1.23
8	412.0486111	15.31457423	-19.96497034	15.1249777	-19.3047862	-0.18959653	-1.24	0.66018414	-3.31
9	430.0416667	16.08702599	-22.59886977	15.8125958	-21.8571757	-0.27443019	-1.71	0.74169407	-3.28

$$a = 1.5228012$$

$$e = 0.0898846$$

$$i = 2.28445$$

$$\Omega = 50.88013$$

$$\omega = 326.50793$$

$$M = 229.58934$$

$$\text{period} = 686.37768$$

ตาราง 4.19 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 3

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ดาวอังคารชุดที่ 4

ชุด ที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน ของ $\alpha_t$	%	ความคลาด เคลื่อน ของ $\delta_t$	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$				
1	262.2708333	14.68474172	-13.37736843	14.8346022	-13.6846618	0.14986048	1.021	-0.30729337	2.297
2	263.3958333	14.68248306	-13.36655223	14.8261508	-13.6615708	0.14366774	0.978	-0.29501857	2.207
3	314.2083333	13.68330792	-9.93408355	13.7421281	-10.0951499	0.05882018	0.43	-0.16106635	1.621
4	323.0416667	13.55816263	-9.46897649	13.6105337	-9.778917	0.05237107	0.386	-0.30994051	3.273
5	349.0347222	13.58087533	-10.5075651	13.5927077	-10.6720151	0.01183237	0.087	-0.16445	1.565
6	351.0729167	13.60621825	-10.93958941	13.6812636	-11.26586	0.07504535	0.552	-0.32627059	2.982
7	362.0729117	13.78051798	-12.16548989	13.7623485	-11.978384	-0.01816948	-0.13	0.18710589	-1.54
8	412.0486111	15.31457423	-19.96497034	15.1099233	-19.2198712	-0.20465093	-1.34	0.74509914	-3.73
9	430.0416667	16.08702599	-22.59886977	15.7908577	-21.760193	-0.29616829	-1.84	0.83867677	-3.71

$$a = 1.4486970$$

$$e = 0.1174574$$

$$e = 2.3668400$$

$$\Omega = 53.38825$$

$$\omega = 350.4516300$$

$$M = 280.49322$$

$$\text{period} = 636.89037$$

ตาราง 4.20 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 4

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ดาวอังคารชุดที่ 5

ชุด ที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด	%	ความคลาด	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	เคลื่อน ของ $\alpha_t$		เคลื่อน ของ $\delta_t$	
1	259.21875	14.69292719	-13.45352043	14.9392705	-13.9778214	0.2463433	1.677	-0.52430097	3.897
2	262.2708333	14.68474172	-13.37736843	14.9204479	-13.9336441	0.2357062	1.605	-0.55627567	4.158
3	314.2083333	13.68330792	-9.93408355	13.7563084	-10.1432463	0.0730005	0.534	-0.20916275	2.106
4	323.0416667	13.55816263	-9.46897649	13.6168651	-9.8002073	0.0587025	0.433	-0.33123081	3.498
5	349.0347222	13.58087533	-10.5075651	13.5908594	-10.6672255	0.0099841	0.074	-0.1596604	1.519
6	351.0729167	13.60621825	-10.93958941	13.6104653	-10.8397437	0.0042471	0.031	0.09984571	-0.913
7	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.8672910	-12.6951479	-0.0414811	-0.298	0.1966036	-1.525
8	412.0486111	15.31457423	-19.96497034	15.1044254	-19.1959653	-0.2101488	-1.372	0.76900504	-3.852
9	430.0416667	16.08702599	-22.59886977	15.7839401	-21.734445	-0.3030859	-1.884	0.86442477	-3.825

$$a = 1.4129266$$

$$e = 0.1285253$$

$$e = 2.24442$$

$$\Omega = 51.42940$$

$$\omega = 353.32356$$

$$M = 200.02524$$

$$\text{period} = 613.44800$$

ตาราง 4.21 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 5

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน ของ $\alpha_t$	%	ความคลาด เคลื่อน ของ $\delta_t$	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$				
1	259.21875	14.69292719	-13.4535204	14.8522874	-13.7267743	0.15936021	1.085	-0.27325387	2.031
2	263.395833	14.68248306	-13.3665522	14.8261508	-13.6615708	0.14366774	0.978	-0.29501857	2.207
3	314.208333	13.68330792	-9.93408355	13.7421281	-10.0951499	0.05882018	0.43	-0.16106635	1.621
4	323.041667	13.55816263	-9.46897649	13.6105337	-9.778917	0.05237107	0.386	-0.30994051	3.273
5	349.034722	13.58087533	-10.5075651	13.5949992	-10.6793162	0.01412387	0.104	-0.1717511	1.635
6	362.072912	13.78051798	-12.1654899	13.7623485	-11.978384	-0.01816948	-0.132	0.18710589	-1.54
7	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.8699512	-12.7034196	-0.03882086	-0.279	0.1883319	-1.46
8	412.048611	15.31457423	-19.9649703	15.1099233	-19.2198712	-0.20465093	-1.336	0.74509914	-3.73
9	430.041667	16.08702599	-22.5988698	15.7908577	-21.760193	-0.29616829	-1.841	0.83867677	-3.71

$$a = 1.4502134$$

$$e = 0.1103897$$

$$i = 2.24408$$

$$\Omega = 51.45204$$

$$\omega = 343.40361$$

$$M = 211.32711$$

$$\text{period} = 637.89066$$

ตาราง 4.21 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 5

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดาวอังคารชุดที่ 7

ชุด ที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน ของ $\alpha_t$	%	ความคลาด เคลื่อน ของ $\delta_t$	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$				
1	259.21875	14.69292719	-13.45352043	14.8890419	-13.8805126	0.19611471	1.335	-0.42699217	3.174
2	262.2708333	14.68474172	-13.37736843	14.8723233	-13.8400693	0.18758158	1.277	-0.46270087	3.459
3	314.2083333	13.68330792	-9.93408355	13.7513911	-10.1217731	0.06808318	0.498	-0.18768955	1.889
4	323.0416667	13.55816263	-9.46897649	13.6144966	-9.7821657	0.05633397	0.415	-0.31318921	3.308
5	349.0347222	13.58087533	-10.5075651	13.5941451	-10.6723772	0.01326977	0.098	-0.1648121	1.569
6	362.0729117	13.78051798	-12.16548989	13.7677489	-12.0031732	-0.01276908	-0.09	0.16231669	-1.334
7	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.877848	-12.7419685	-0.03092406	-0.22	0.149783	-1.162
8	412.0486111	15.31457423	-19.96497034	15.1468509	-19.3616788	-0.16772333	-1.1	0.60329154	-3.022
9	425.0729167	15.86395426	-21.97906186	15.6430988	-21.2533775	-0.22085546	-1.39	0.72568436	-3.302

$$a = 1.4362895$$

$$e = 0.1099813$$

$$i = 2.14806$$

$$\Omega = 51.66708$$

$$\omega = 341.91283$$

$$M = 213.38486$$

$$\text{Period} = 628.72589$$

ตาราง 4.22 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 7

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ดาวอังคารชุดที่ 8

ชุด ที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน	%	ความคลาด เคลื่อน	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	ของ $\alpha_t$		ของ $\delta_t$	
1	262.2708333	14.68474172	-13.37736843	14.8259552	-13.6630275	0.14121348	0.962	-0.28565907	2.135
2	263.3958333	14.68248306	-13.36655223	14.817566	-13.6400536	0.13508294	0.92	-0.27350137	2.046
3	314.2083333	13.68330792	-9.93408355	13.740762	-10.0919243	0.05745408	0.42	-0.15784075	1.589
4	323.0416667	13.55816263	-9.46897649	13.609908	-9.777665	0.05174537	0.382	-0.30868851	3.26
5	349.0347222	13.58087533	-10.5075651	13.5928288	-10.6720161	0.01195347	0.088	-0.164451	1.565
6	351.0729167	13.60621825	-10.93958941	13.6812128	-11.2646781	0.07499455	0.551	-0.32508869	2.972
7	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.8699512	-12.7034196	-0.03882086	-0.28	0.1883319	-1.461
8	412.0486111	15.31457423	-19.96497034	15.1099233	-19.2198712	-0.20465093	-1.34	0.74509914	-3.732
9	430.0416667	16.08702599	-22.59886977	15.7908577	-21.760193	-0.29616829	-1.84	0.83867677	-3.711

$$a = 1.4807258$$

$$e = 0.1017641$$

$$i = 2.26061$$

$$\Omega = 50.83309$$

$$\omega = 341.03110$$

$$M = 213.82834$$

$$\text{period} = 658.12794$$

ตาราง 4.23 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 8

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดาวอังคารชุดที่ 9

ชุด ที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน	%	ความคลาด เคลื่อน	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	ของ $\alpha_t$		ของ $\delta_t$	
1	262.2708333	14.68474172	-13.37736843	14.794429	-14.0137982	0.10968728	0.747	-0.6364298	4.758
2	263.3958333	14.68248306	-13.36655223	14.789859	-13.9988524	0.10737594	0.731	-0.6323002	4.73
3	314.2083333	13.68330792	-9.93408355	13.750507	-10.1891735	0.06719928	0.491	-0.25509	2.568
4	323.0416667	13.55816263	-9.46897649	13.602256	-9.7499353	0.04409357	0.325	-0.2809588	2.967
5	349.0347222	13.58087533	-10.5075651	13.578061	-10.5988211	-0.00281443	-0.021	-0.091256	0.868
6	351.0729167	13.60621825	-10.93958941	13.600829	-10.791179	-0.00538885	-0.04	0.14841041	-1.357
7	362.0729117	13.78051798	-12.16548989	13.775513	-12.0782926	-0.00500498	-0.036	0.08719729	-0.717
8	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.901990	-12.913066	-0.00678236	-0.049	-0.0213145	0.165
9	430.0416667	16.08702599	-22.59886977	16.237304	-23.0584824	0.15027771	0.934	-0.4596126	2.034

$$a = 1.4486732$$

$$e = 0.1299970$$

$$i = 1.58981$$

$$\Omega = 50.8894900$$

$$\omega = 285.44386$$

$$M = 203.1874600$$

$$\text{period} = 636.87467$$

ตาราง 4.24 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 9

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ดาวอังคารชุดที่ 10



ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน	%	ความคลาด เคลื่อน	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	ของ $\alpha_t$		ของ $\delta_t$	
1	263.3958333	14.68248306	-13.36655223	14.9082912	-14.0093253	0.22580814	1.538	-0.64277307	4.809
2	314.2083333	13.68330792	-9.93408355	13.763693	-10.2007294	0.08038508	0.587	-0.26664585	2.684
3	323.0416667	13.55816263	-9.46897649	13.6218236	-9.8347285	0.06366097	0.47	-0.36575201	3.863
4	349.0347222	13.58087533	-10.5075651	13.5933751	-10.6732443	0.01249977	0.092	-0.1656792	1.577
5	351.0729167	13.60621825	-10.93958941	13.6132081	-10.8464524	0.00698985	0.051	0.09313701	-0.85
6	368.03125	13.90877206	-12.8917515	13.8741689	-12.7209569	-0.03460316	-0.25	0.1707946	-1.32
7	412.0486111	15.31457423	-19.96497034	15.1384606	-19.3173565	-0.17611363	-1.15	0.64761384	-3.24
8	425.0729167	15.86395426	-21.97906186	15.6338281	-21.2102913	-0.23012616	-1.45	0.76877056	-3.5
9	430.0416667	16.08702599	-22.59886977	15.835271	-21.8747928	-0.25175499	-1.56	0.72407697	-3.2

$$a = 1.4104380$$

$$e = 0.1220114$$

$$i = 2.12546$$

$$\Omega = 51.75048$$

$$\omega = 346.09526$$

$$M = 210.28459$$

$$\text{period} = 611.82803$$

ตาราง 4.25 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวอังคารจากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 10

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## ดาวเสาร์ชูดที่ 1

ชูดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน	%	ความคลาด เคลื่อน	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	ของ $\alpha_t$		ของ $\delta_t$	
1	440.5208333	3.00198873	14.3122311	3.0011675	14.2125635	-0.00082123	-0.03	-0.0996676	-0.696
2	456.5034722	2.95377794	14.05213027	2.9628682	14.0153219	0.00909026	0.308	-0.03680837	-0.262
3	471.4527778	2.90658085	13.69594077	2.8964427	13.7085927	-0.01013815	-0.35	0.01265193	0.092
4	490.375	2.79590913	13.30505589	2.7973921	13.2788594	0.00148297	0.053	-0.02619649	-0.197
5	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.7704448	13.1666176	0.00016481	0.006	-0.0122672	-0.093
6	499.5451389	2.7472776	13.0610793	2.7487608	13.0779628	0.0014832	0.054	0.0168835	0.129
7	529.4145833	2.61328744	12.54798579	2.620469	12.6045576	0.00718146	0.275	0.05657181	0.451
8	536.2868056	2.59763882	12.53168267	2.6020650	12.5551656	0.00442618	0.17	0.02348293	0.187
9	570.3125	2.53473845	12.46328995	2.5929005	12.7180092	0.05816205	2.295	0.25471925	2.044

$$a = 10.5618061$$

$$e = 0.2673208$$

$$i = 3.0495100$$

$$\Omega = 97.2321000$$

$$\omega = 237.6612000$$

$$TT = 2450012.01419$$

$$\text{period} = 12535.55712$$

ตาราง 4.26 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชูดที่ 1

## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน ของ $\alpha_t$	%	ความคลาด เคลื่อน ของ $\delta_t$	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$				
1	440.5208333	3.00198873	14.3122311	3.0112703	14.2598774	0.00928157	0.309	-0.0523537	-0.37
2	456.5034722	2.95377794	14.05213027	2.9618676	14.0114433	0.00808966	0.274	-0.040687	-0.29
3	471.4527778	2.90658085	13.69594077	2.8963698	13.7098656	-0.01021105	-0.351	0.01392483	0.102
4	490.375	2.79590913	13.30505589	2.7987584	13.2861694	0.00284927	0.102	-0.0188865	-0.14
5	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.772099	13.1748225	0.00181901	0.066	-0.0040623	-0.03
6	520.2916667	2.6552219	12.70114141	2.653917	12.7132698	-0.0013049	-0.049	0.01212839	0.095
7	529.4145833	2.61328744	12.54798579	2.6212279	12.6034383	0.00794046	0.304	0.05545251	0.442
8	536.2868056	2.59763882	12.53168267	2.6019078	12.5484553	0.00426898	0.164	0.01677263	0.134
9	570.3125	2.53473845	12.46328995	2.5850078	12.6694396	0.05026935	1.983	0.20614965	1.654

$a = 9.1415200$

$e = 0.0596987$

$i = 3.23245$

$\Omega = 93.43053$

$\omega = 70.89859$

TT = 2444609.97359

period = 10,094.01582

ตาราง 4.27 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 2

## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน ของ $\alpha_t$	%	ความคลาด เคลื่อน ของ $\delta_t$	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$				
1	440.5208333	3.00198873	14.3122311	3.0066401	14.3047478	0.00465137	0.155	-0.0074833	-0.05
2	456.5034722	2.95377794	14.05213027	2.9575589	14.0463447	0.00378096	0.128	-0.0057856	-0.04
3	471.4527778	2.90658085	13.69594077	2.8925075	13.7346182	-0.01407335	-0.48	0.03867743	0.282
4	479.3965278	2.84025353	13.61673167	2.8528508	13.5524918	0.01259727	0.444	-0.0642399	-0.47
5	499.5451389	2.7472776	13.0610793	2.7468482	13.0862854	-0.0004294	-0.02	0.0252061	0.193
6	520.2916667	2.6552219	12.70114141	2.6490574	12.6883146	-0.0061645	-0.23	-0.0128268	-0.1
7	529.4145833	2.61328744	12.54798579	2.6155442	12.5663113	0.00225676	0.086	0.01832551	0.146
8	536.2868056	2.59763882	12.53168267	2.5954977	12.5018613	-0.00214112	-0.08	-0.0298214	-0.24
9	561.2951389	2.5850078	12.6694396	2.5666939	12.4918125	-0.0183139	-0.71	-0.1776271	-1.4

$a = 10.1218699$

$e = 0.3964407$

$i = 2.62026$

$\Omega = 112.85695$

$\omega = 36.40513$

TT = 2441667.00774

Period = 11,760.54604

ตาราง 4.28 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 3

## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด		ความคลาด	
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	เคลื่อน ของ $\alpha_t$		เคลื่อน ของ $\delta_t$	
1	456.5034722	2.95377794	14.0521303	2.9567368	14.0700709	0.00295886	0.1	0.01794063	0.128
2	471.4527778	2.90658085	13.6959408	2.8928904	13.7481128	-0.01369045	-0.471	0.05217203	0.381
3	479.3965278	2.84025353	13.6167317	2.8530760	13.5587431	0.01282247	0.451	-0.0579886	-0.426
4	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.7681259	13.1734156	-0.00215409	-0.078	-0.0054692	-0.041
5	499.5451389	2.7472776	13.0610793	2.7465828	13.079579	-0.0006948	-0.025	0.0184997	0.142
6	520.2916667	2.6552219	12.7011414	2.6521216	12.6942839	-0.0031003	-0.117	-0.0068575	-0.054
7	529.4145833	2.61328744	12.5479858	2.6222595	12.5902876	0.00897206	0.343	0.04230181	0.337
8	536.2868056	2.59763882	12.5316827	2.6059870	12.5448527	0.00834818	0.321	0.01317003	0.105
9	570.3125	2.53473845	12.46329	2.6161281	12.7747272	0.08138965	3.211	0.31143725	2.499

$$a = 14.8169238$$

$$e = 0.4611504$$

$$i = 2.39786$$

$$\Omega = 135.04839$$

$$\omega = 256.84028$$

$$TT = 2451265.31076$$

$$\text{Period} = 20829.24016$$

ตาราง 4.29 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 4

## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน	%	ความคลาด เคลื่อน	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	ของ $\alpha_t$		ของ $\delta_t$	
1	440.5208333	3.00198873	14.3122311	2.9885517	14.2452042	-0.013437	-0.448	-0.0670269	-0.468
2	456.5034722	2.95377794	14.05213027	2.9435725	13.9983208	-0.0102054	-0.346	-0.0538095	-0.383
3	490.375	2.79590913	13.30505589	2.7884444	13.2716835	-0.0074647	-0.267	-0.0333724	-0.251
4	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.7630115	13.1607764	-0.0072685	-0.262	-0.0181084	-0.137
5	514.2847222	2.6743431	12.83632788	2.6752832	12.7976707	0.0009401	0.035	-0.0386572	-0.301
6	520.2916667	2.6552219	12.70114141	2.6518268	12.7083231	-0.0033951	-0.128	0.00718169	0.057
7	529.4145833	2.61328744	12.54798579	2.6222148	12.6052867	0.00892736	0.342	0.05730091	0.457
8	536.2868056	2.59763882	12.53168267	2.6054111	12.556685	0.00777228	0.299	0.02500233	0.2
9	548.2993056	2.57764336	12.49048908	2.5887095	12.5367194	0.01106614	0.429	0.04623032	0.37

$a = 12.9893370$

$e = 0.3162459$

$i = 2.47511$

$\Omega = 122.20584$

$\omega = 261.52719$

TT = 2451020.76795

period = 17096.87890

ตาราง 4.30 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 5

## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด	%	ความคลาด	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	เคลื่อน ของ $\alpha_t$		เคลื่อน ของ $\delta_t$	
1	440.5208333	3.00198873	14.3122311	3.0080314	14.2971327	0.00604267	0.201	-0.0150984	-0.105
2	471.4527778	2.90658085	13.69594077	2.8942351	13.7329957	-0.0123458	-0.425	0.0370549	0.271
3	479.3965278	2.84025353	13.61673167	2.8542782	13.5514356	0.01402467	0.494	-0.0652961	-0.48
4	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.7691888	13.1794506	-0.0010912	-0.039	0.0005658	0.004
5	499.5451389	2.7472776	13.0610793	2.7474505	13.0876331	0.0001729	0.006	0.0265538	0.203
6	520.2916667	2.6552219	12.70114141	2.6495696	12.697137	-0.0056523	-0.213	-0.0040044	-0.032
7	536.2868056	2.59763882	12.53168267	2.5969714	12.5218861	-0.0006674	-0.026	-0.0097966	-0.078
8	548.2993056	2.57764336	12.49048908	2.5754758	12.4834446	-0.0021676	-0.084	-0.0070445	-0.056
9	561.2951389	2.5850078	12.6694396	2.5717786	12.5393033	-0.0132292	-0.512	-0.1301363	-1.027

$a = 10.1061598$

$e = 0.2931770$

$i = 2.72492$

$\Omega = 107.34057$

$\omega = 25.29044$

TT = 2441581.49796

period = 11733.17630

ตาราง 4.31 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 6

## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด		ความคลาด	
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	เคลื่อน ของ $\alpha_t$		เคลื่อน ของ $\delta_t$	
1	456.5034722	2.95377794	14.05213027	2.9598129	14.0725086	0.00603496	0.204	0.0203783	0.145
2	471.4527778	2.90658085	13.69594077	2.894052	13.7492723	-0.01252885	-0.431	0.0533315	0.3894
3	479.3965278	2.84025353	13.61673167	2.8538421	13.560801	0.01358857	0.478	-0.0559307	-0.411
4	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.7685258	13.1765095	-0.00175419	-0.063	-0.0023753	-0.018
5	499.5451389	2.7472776	13.0610793	2.7468266	13.0820598	-0.000451	-0.016	0.0209805	0.1606
6	520.2916667	2.6552219	12.70114141	2.6499358	12.6826767	-0.0052861	-0.199	-0.0184647	-0.145
7	529.4145833	2.61328744	12.54798579	2.6177118	12.5648989	0.00442436	0.169	0.0169131	0.1348
8	548.2993056	2.57764336	12.49048908	2.5792035	12.468111	0.00156014	0.061	-0.0223781	-0.179
9	556.3020833	2.57497445	12.49854144	2.5757194	12.4917924	0.00074495	0.029	-0.006749	-0.054

$a = 9.6841629$

$e = 0.0743191$

$i = 2.43586$

$\Omega = 130.21516$

$\omega = 174.18629$

TT = 2440502.63257

period = 11005.99938

ตาราง 4.32 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 7

## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด	%	ความคลาด	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	เคลื่อน ของ $\alpha_t$		เคลื่อน ของ $\delta_t$	
1	456.5034722	2.95377794	14.05213027	2.8185261	15.9532417	-0.1352518	-4.579	1.9011114	13.53
2	471.4527778	2.90658085	13.69594077	2.7526017	15.628099	-0.1539792	-5.298	1.9321582	14.11
3	479.3965278	2.84025353	13.61673167	2.7127323	15.4318288	-0.1275212	-4.49	1.8150971	13.33
4	490.375	2.79590913	13.30505589	2.6553855	15.1482588	-0.1405236	-5.026	1.8432029	13.85
5	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.6291753	15.0178273	-0.1411047	-5.094	1.8389425	13.95
6	520.2916667	2.6552219	12.70114141	2.5162364	14.4472212	-0.1389855	-5.234	1.7460798	13.75
7	529.4145833	2.61328744	12.54798579	2.4868494	14.2950536	-0.126438	-4.838	1.7470678	13.92
8	536.2868056	2.59763882	12.53168267	2.4704949	14.2086969	-0.1271439	-4.895	1.6770142	13.38
9	570.3125	2.53473845	12.46328995	2.4732032	14.1951873	-0.0615352	-2.428	1.7318974	13.9

$a = 10.8147596$

$e = 0.1761214$

$i = 2.11039$

$\Omega = 213.90896$

$\omega = 195.16612$

TT = 2438669.99640

Period = 12,988.57964

ตาราง 4.33 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 8



## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด เคลื่อน ของ $\alpha_t$	%	ความคลาด เคลื่อน ของ $\delta_t$	%
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$				
1	440.5208333	3.00198873	14.3122311	3.0168007	14.2732694	0.01481197	0.4934	-0.0389617	-0.272
2	456.5034722	2.95377794	14.0521303	2.9645342	14.0180941	0.01075626	0.3642	-0.0340362	-0.242
3	471.4527778	2.90658085	13.6959408	2.8976958	13.7139223	-0.008885	-0.306	0.01798153	0.131
4	490.375	2.79590913	13.3050559	2.7988167	13.2856068	0.00290757	0.104	-0.0194491	-0.146
5	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.771678	13.1717974	0.00139801	0.0505	-0.0070874	-0.054
6	499.5451389	2.7472776	13.0610793	2.7496842	13.080901	0.0024066	0.0876	0.0198217	0.151
7	520.2916667	2.6552219	12.7011414	2.6488052	12.684321	-0.0064167	-0.242	-0.0168204	-0.132
8	529.4145833	2.61328744	12.5479858	2.6131336	12.5581676	-0.0001538	-0.006	0.01018181	0.081
9	556.3020833	2.57497445	12.4985414	2.5543375	12.4253154	-0.020637	-0.801	-0.073226	-0.586

$a = 9.72155$

$e = 0.6611301$

$i = 4.15796$

$\Omega = 80.55365$

$\omega = 98.98813$

TT = 2442221.09566

Period = 11,069.79623

ตาราง 4.33 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 9

## ดาวเสาร์

ชุดที่	เวลา 2541.0+	ตำแหน่งจากการ สังเกตการณ์		ตำแหน่งจากการ คำนวณย้อนกลับ		ความคลาด	%	ความคลาด	%	
		$\alpha_t$	$\delta_t$	$\alpha_t$	$\delta_t$	เคลื่อน ของ $\alpha_t$		เคลื่อน ของ $\delta_t$		
1	440.5208333	3.00198873	14.3122311	2.9558631	14.1689395	-0.0461256	-1.54	-0.1432916	-1.001	$a = 9.9466988$
2	456.5034722	2.95377794	14.0521303	2.9196461	13.9368619	-0.0341318	-1.16	-0.11526837	-0.82	$e = 0.6331460$
3	471.4527778	2.90658085	13.6959408	2.8691414	13.6591488	-0.0374394	-1.29	-0.03679197	-0.269	$i = 4.12268$
4	490.375	2.79590913	13.3050559	2.79258	13.2725933	-0.0033291	-0.12	-0.03246259	-0.244	$\Omega = 80.86365$
5	495.4166667	2.77027999	13.1788848	2.7716137	13.1713888	0.00133371	0.048	-0.007496	-0.057	$\omega = 94.34655$
6	499.5451389	2.7472776	13.0610793	2.7547171	13.0911978	0.0074395	0.271	0.0301185	0.231	TT = 2441839.94299
7	520.2916667	2.6552219	12.7011414	2.6795576	12.7516965	0.0243357	0.917	0.05055509	0.398	Period = 11,456.57507
8	529.4145833	2.61328744	12.5479858	2.654958	12.6509499	0.04167056	1.595	0.10296411	0.821	
9	548.2993056	2.57764336	12.4904891	2.6273987	12.5662723	0.04975534	1.93	0.07578322	0.607	

ตาราง 4.34 ตำแหน่งเชิงมุมของดาวเสาร์จากการสังเกตการณ์และ จากการคำนวณย้อนกลับจากหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นชุดที่ 10

#### 4.2.10 ผลเฉลยของโปรแกรม OU10.cpp

โปรแกรม OU10.cpp ปรับปรุงวงโคจรโดยพิจารณาตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ  $x_0, y_0, z_0, \mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0$  และพิจารณาความแตกต่างระหว่างตำแหน่งเชิงมุมที่ได้จากการสังเกตการณ์และวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม OU3.cpp เปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการคำนวณย้อนกลับของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นเป็น  $\Delta\alpha$  และ  $\Delta\delta$  ตามความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\alpha}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\alpha}{\partial z_0}\Delta z_0 + \dots + \frac{\partial\alpha}{\partial \mathfrak{x}_0}\Delta \mathfrak{x}_0 \\ \Delta\delta &= \frac{\partial\delta}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\delta}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\delta}{\partial z_0}\Delta z_0 + \dots + \frac{\partial\delta}{\partial \mathfrak{x}_0}\Delta \mathfrak{x}_0\end{aligned}$$

จากข้อมูลสังเกตการณ์อื่น ๆ นำมาสร้างสมการทั่วไป โดยอาศัยวิธีการการกำลังสองน้อยสุดของสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรจะทำให้เราสามารถและแก้สมการหาค่าของ  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \Delta \mathfrak{x}_0, \Delta \mathfrak{y}_0, \Delta \mathfrak{z}_0$  ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการคำนวณตำแหน่งและความเร็วของดาวเคราะห์ได้ตามสมการ

$$r_0 = \{x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0, z_0 + \Delta z_0\}$$

$$v_0 = \{\mathfrak{x}_0 + \Delta \mathfrak{x}_0, \mathfrak{y}_0 + \Delta \mathfrak{y}_0, \mathfrak{z}_0 + \Delta \mathfrak{z}_0\}$$

ก่อนที่จะนำตำแหน่งและความเร็วที่ได้มาคำนวณหาหลักมูลวงโคจรเช่นที่เคยทำในโปรแกรม OU7.cpp และ OU8.cpp จากนั้นตรวจสอบความถูกต้องของหลักมูลวงโคจรที่ได้รับการปรับปรุงแล้วด้วยการคำนวณย้อนกลับไปหาตำแหน่งเชิงมุมขณะทำการสังเกตการณ์ ตำแหน่งเชิงมุมที่ได้มีความคลาดเคลื่อนเทียบกับข้อมูลสังเกตการณ์น้อยเท่าใด หลักมูลวงโคจรที่ได้ยิ่งมีความน่าเชื่อถือมากขึ้นเท่านั้น ตาราง 4.31 แสดงตำแหน่งเชิงมุมที่ได้จากการคำนวณย้อนกลับของหลักมูลวงโคจรที่ได้รับการปรับปรุงแล้วเทียบกับตำแหน่งเชิงมุมที่ได้จากการสังเกตการณ์ของดาวอังคารซึ่งให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจ แต่ในกรณีของดาวเสาร์เมื่อเราทำการปรับปรุงวงโคจรหลักมูลวงโคจรที่ได้จากการปรับปรุงนำมาคำนวณย้อนกลับปรากฏว่าค่าที่ได้มีความคลาดเคลื่อนเพิ่มขึ้นนั้นแสดงว่าหลักมูลวงโคจรที่ได้ในการปรับปรุงวงโคจรในกรณีดาวเสาร์ไม่ใช่ค่าหลักมูลที่แท้จริง

## บทที่ 5

### สรุปและวิจารณ์

จากกระบวนการในบทที่ 3 และ 4 เมื่อนำข้อมูลสังเกตการณ์มาวิเคราะห์ด้วยวิธีลาปลาซ พบว่าหลักลมวงโคจรที่ได้จากโปรแกรม OU7.cpp ทั้ง 10 ชุดทั้งในกรณีดาวอังคารและดาวเสาร์ ให้ค่าหลักลมวงโคจรที่แตกต่างกันจึงจำเป็นต้องมีการวิเคราะห์ผล ปรับปรุง และตรวจสอบวงโคจร เพื่อความถูกต้อง

#### 5.1 การวิเคราะห์หลักลมวงโคจร

เราวิเคราะห์หลักลมวงโคจรก่อนการปรับปรุงเพื่อหาหลักลมวงโคจรเบื้องต้นที่มีค่าใกล้เคียงหลักลมวงโคจรที่แท้จริงของดาวเคราะห์เพื่อเป็นข้อมูลตั้งต้นในการปรับปรุงวงโคจรร่วมกับข้อมูลสังเกตการณ์อื่นๆ ที่ไม่ได้นำมาใช้ในการกำหนดวงโคจรของดาวเคราะห์ในครั้งแรก เพื่อความน่าเชื่อถือของหลักลมวงโคจรและ ใช้ข้อมูลสังเกตการณ์ที่มีอยู่ให้เกิดประโยชน์สูงสุด

##### 5.1.1 หลักลมวงโคจรของดาวอังคารก่อนการปรับปรุง

เมื่อทำการคำนวณด้วยโปรแกรม OU7.cpp เสร็จสิ้นลง เราพบว่าค่าที่ได้มีความแตกต่างกันไม่มากนัก โดยหลักลมวงโคจรทั้ง 10 ชุดมี

- ระยะครึ่งแกนเอก อยู่ในช่วง 1.413 -1.555 AU.
- มุมกวาดเฉลี่ย อยู่ในช่วง 200.02° – 280.4°
- ความรี อยู่ในช่วง 1.590° – 2.367°
- ความเอียง อยู่ในช่วง 1.829° – 2.367°
- ระยะแนวของจุดไต่ขึ้น อยู่ในช่วง 50.76° – 53.38°
- ระยะมุมของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ อยู่ในช่วง 291.9° – 353.3°
- คาบวงโคจร อยู่ในช่วง 611.1-708.4 วัน

และเมื่อใช้หลักมูลวงโคจรที่ได้คำนวณย้อนกลับไปหาตำแหน่งเชิงมุมขณะสังเกตการณ์พบว่าข้อมูลในชุดที่ 2 มีความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเชิงมุมน้อยที่สุด และเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับหลักมูลวงโคจรที่เผยแพร่ในวารสารรายปี เทมมอนไกโด (Temmongaido) ของสำนักพิมพ์ สิบันโดชินโคซา (Seibundooshinkosha) (Temmongaido,1999) พบว่าหลักมูลวงโคจรที่ได้มีความใกล้เคียงกันดังนี้

#### หลักมูลวงโคจรในวารสารเทมมอนไกโด

$$a = 1.5237$$

$$e = 0.0934$$

$$i = 1.850$$

$$\omega = 286.513$$

$$\Omega = 49.554$$

$$M = 305.750$$

$$Period = 686.984 \text{ วัน}$$

#### หลักมูลวงโคจรในตาราง 4.17 (หลักมูลวงโคจรที่ดีที่สุดเมื่อพิจารณาคำนวณย้อนกลับ)

$$a = 1.485$$

$$e = 0.08613$$

$$i = 1.829$$

$$\omega = 291.9$$

$$\Omega = 52.66$$

$$M = 271.5$$

$$Period = 681.2 \text{ วัน}$$

เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักมูลวงโคจรของดาวอังคารขณะเวลา 2541349.034722 แสดงในตาราง 5.1

หลักมูลวงโคจร	หลักมูลวงโคจรในวารสารเทมมอนไกโด	หลักมูลวงโคจรเบื้องต้นที่ดีที่สุดของดาวอังคาร	เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน
---------------	---------------------------------	---	----------------------------

<i>a</i>	1.5237	1.485	2.520
<i>e</i>	0.0934	0.08613	8.923
<i>i</i>	1.850	1.829	1.189
$\omega$	286.513	291.9	1.890
$\Omega$	49.554	52.66	6.263
<i>M</i>	298.704	271.5	9.091
<i>Period</i>	686.98405	661.2	3.756

ตาราง 5.1 เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของดาวอังคาร

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้กำหนดหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นจากข้อมูลสังเกตการณ์ 9 ครั้ง ด้วยวิธีการของลาปลาซ ก่อนจะคัดเลือกหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นที่ดีที่สุดมาทำการปรับปรุงวงโคจรด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข วิธีกำลังสองน้อยสุดของสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรโดยอาศัยข้อมูลสังเกตการณ์อื่น ๆ ที่มีอยู่ในการสร้างสมการ

### 5.1.2 หลักมูลวงโคจรของดาวอังคารหลังการปรับปรุง

เราทำการปรับปรุงวงโคจรของดาวอังคารโดยค่อยๆ เปลี่ยนแปลงค่าตำแหน่งและความเร็วในวงโคจรทีละ 3 เปอร์เซ็นต์ของผลต่าง ระหว่างตำแหน่งและความเร็วในการคำนวณค่าแต่ละครั้งเพื่อให้ได้ตำแหน่งและความเร็วในวงโคจรที่ดีที่สุด ซึ่งในกรณีดาวอังคารเมื่อเรานำหลักมูลวงโคจรที่ได้รับการปรับปรุงแล้วมาคำนวณย้อนกลับ ค่าที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าที่เราได้จากการสังเกตการณ์มากขึ้น ดังแสดงในตาราง 4.36 เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักมูลวงโคจรของดาวอังคารแสดงในตาราง 5.2

หลักมูลวงโคจร	หลักมูลวงโคจรในวารสารเทมมอนไกโด	หลักมูลวงโคจรของดาวอังคาร	เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน
<i>a</i>	1.524	1.507	1.115
<i>e</i>	0.0934	0.08732	6.452
<i>I</i>	1.850	1.873	-1.243
$\omega$	286.513	285.7	0.2991
$\Omega$	49.554	50.403	-1.713
<i>M</i>	298.704	278.9	6.632
<i>Period</i>	686.984	675.5	

			1.667
--	--	--	-------

ตาราง 5.2 เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักลมวงโคจรดาวอังคาร

### 5.1.3 หลักลมวงโคจรของดาวเสาร์ก่อนการปรับปรุง

เมื่อทำการคำนวณด้วยโปรแกรม OU7.cpp เสร็จสิ้นลง เราพบว่าค่าที่ได้มีความแตกต่างกันมากพอควร โดยหลักลมวงโคจรทั้ง 10 ชุดมี

- ระยะครึ่งแกนเอก อยู่ในช่วง 9.142 – 14.81 AU.
- มุมกวาดเฉลี่ย อยู่ในช่วง  $4.084^\circ - 359.7^\circ$
- ความรี อยู่ในช่วง  $0.07423^\circ - 0.6338^\circ$
- ความเอียง อยู่ในช่วง  $2.111^\circ - 4.158^\circ$
- ระยะแนวของจุดไต่ขึ้น อยู่ในช่วง  $80.55^\circ - 213.9^\circ$
- ระยะมุมของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ อยู่ในช่วง  $25.29^\circ - 256.8^\circ$
- คาบวงโคจร อยู่ในช่วง 10094 -17096 วัน

ทั้งนี้อาจเป็นเพราะดาวเสาร์มีคาบวงโคจรที่ยาวนาน ข้อมูลสังเกตการณ์ในช่วงเวลาเพียง 130 วัน น้อยเกินกว่าจะแยกแยะตำแหน่งต่างๆ ในวงโคจรที่ยาวนานถึงประมาณ 10,759 วัน ด้วยการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับวิธีการกำลังสองน้อยสุดของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว



ดังแสดงในรูปที่ 5.1

รูปที่ 5.1 แสดงตำแหน่งในการสังเกตการณ์ที่ใกล้เคียงกันเกินไป



แต่อย่างไรก็ตามเมื่อใช้หลักมูลวงโคจรที่ได้คำนวณย้อนกลับไปหาตำแหน่งเชิงมุมขณะสังเกตการณ์พบว่าข้อมูลในชุดที่ 7 มีความคลาดเคลื่อนของตำแหน่งเชิงมุมน้อยที่สุด และเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับหลักมูลวงโคจรที่เผยแพร่ในวารสารรายปี เทมมอนไกโด (Temmongaido) ของสำนักพิมพ์ สิบันโดชินโคซา (Seibundooshinkosha) (Temmongaido,1999) พบว่าหลักมูลวงโคจรที่ได้มีความใกล้เคียงกันดังนี้

### หลักมูลวงโคจรในวารสารเทมมอนไกโด

$$a = 9.5549$$

$$e = 0.0555$$

$$i = 2.489$$

$$\omega = 159.404$$

$$\Omega = 113.661$$

$$M = 335.298$$

$$Period = 10,759.73481 \text{ วัน}$$

### หลักมูลวงโคจรในตาราง 4.32

$$a = 9.684$$

$$e = 0.07432$$

$$i = 2.436$$

$$\omega = 274.2$$

$$\Omega = 130.2$$

$$M = 359.7$$

$$Period = 11,005.99 \text{ วัน}$$

เปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักมูลวงโคจรของดาวเสาร์ ขณะเวลา 2541349.034722 แสดงในตาราง 5.3

หลักมูลวงโคจร	หลักมูลวงโคจรในวารสารเทมมอนไกโด	หลักมูลวงโคจรเบื้องต้นที่ดีที่สุดของดาวเสาร์	เปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อน
$a$	9.5549	9.684	-1.352
$e$	0.0555	0.07432	-33.87
$i$	2.489	2.436	2.129
$\omega$	159.404	174.2	-9.273



$\Omega$	113.661	130.2	-14.56
$M$	334.960	359.7	-7.386
Period	10,759.735	11,005.99	-2.289

ตาราง 5.3 เปรอ์เซ็นต์ความแตกต่างของหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นของดาวเสาร์

เราทำการปรับปรุงวงโคจรของดาวเสาร์โดยใช้หลักการเช่นเดียวกับดาวอังคาร แต่ในกรณีดาวเสาร์เมื่อเรานำหลักมูลวงโคจรที่ได้รับการปรับปรุงแล้วมาคำนวณย้อนกลับ ค่าที่ได้มีค่าคลาดเคลื่อนกับค่าที่เราได้จากการสังเกตการณ์มากขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากข้อมูลสังเกตการณ์ของดาวเสาร์ที่นำมาใช้ในการกำหนดหลักมูลวงโคจรเป็นข้อมูลที่มีระยะห่างในการสังเกตการณ์แต่ละครั้งน้อยเกินไป วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดของสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรยังคงให้ผลการคำนวณที่คลาดเคลื่อน

จากกระบวนการต่างๆข้างต้นทำให้เห็นได้ว่า ระยะห่างของช่วงเวลาที่ใช้ในการสังเกตการณ์มีผลต่อความถูกต้องของการกำหนดหลักมูลวงโคจรด้วยวิธีการของลาปลาซ พิจารณาการกำหนดหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นเราพบว่า ค่าหลักมูลวงโคจรของดาวอังคารมีความคลาดเคลื่อนมากกว่าหลักมูลวงโคจรของดาวอังคารเช่นเดียวกับเมื่อทำการปรับปรุงวงโคจร นอกจากนั้นยังพบอีกว่าการเปลี่ยนแปลงข้อมูลที่ใช้ในการสุ่มค่าเพื่อปรับปรุงวงโคจรแม้เพียงข้อมูลเดียวมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของหลักมูลวงโคจรของดาวเสาร์มาก และยังพบว่าการกำหนดหลักมูลวงโคจรในบางครั้งให้ค่าคลาดเคลื่อนมาก ทั้งนี้อาจเป็นไปได้ที่มีข้อมูลบางค่าคลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริงส่งผลให้บางครั้งได้ค่าหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นที่เป็นวงโคจรรูปพาราโบลา หรือไฮเพอร์โบลา (ค่าหลักมูลวงโคจรเบื้องต้นที่แสดงในบทที่ 4 เป็นค่าหลักมูลที่ใกล้เคียงความจริงที่สุด 10 ชุด) และเมื่อพิจารณาช่วงเวลาในการเก็บข้อมูลของดาวอังคาร 171 วัน ต่อคาบวงโคจรประมาณ 678 วัน คิดเป็น 27 เปรอ์เซ็นต์ ในขณะที่เมื่อพิจารณาการสังเกตการณ์ดาวอังคารพบว่า ช่วงเวลาสังเกตการณ์ 130 วันเมื่อเทียบกับคาบวงโคจรประมาณ 1,1005 วัน คิดเป็น 1.22 เปรอ์เซ็นต์เท่านั้น จากผลการคำนวณทำให้เรารู้ว่าช่วงเวลาในการเก็บข้อมูลของดาวอังคารเพียงพอต่อการกำหนดวงโคจรด้วยวิธีลาปลาซ ในทำนองเดียวกันหากเรามีข้อมูลสังเกตการณ์ของดาวเสาร์ในช่วงที่กว้างขึ้นประมาณ 2,970 หรือประมาณ 3 ปี ก็น่าจะสามารถกำหนดหลักมูลวงโคจรที่น่าเชื่อถือได้เช่นในกรณีดาวอังคาร

ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้นแสดงให้เห็นว่า วิธีลาปลาซเป็นวิธีกำหนดวงโคจรที่ดีเมื่อมีข้อมูลในปริมาณมากๆ หรือ มีความแม่นยำของข้อมูลสังเกตการณ์สูงทั้งนี้จะต้องอาศัยเครื่องมือที่มี

ประสิทธิภาพมากขึ้น ในการปรับปรุงวงโคจรก็ต้องการข้อมูลที่มีระยะห่างที่เหมาะสมและแม่นยำ เพื่อประมาณค่าเส้นทางโคจรที่ได้ตามแนวโน้มของข้อมูลให้เหมาะสมและใกล้เคียงความเป็นจริงที่สุด ทั้งนี้ไม่เสมอไปที่หลักฐานที่ได้จากการปรับปรุงวงโคจรจะให้ค่าหลักฐานที่ดีขึ้น อาจเป็นเพราะความจำกัดของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในวิธีการกำลังสองน้อยสุดในกรณีที่กระบวนการคำนวณทำให้เกิดข้อมูลปริมาณที่ใหญ่หรือเล็กจนเกินไป อีกทั้งการปรับปรุงวงโคจรโดยอาศัยข้อมูลเพิ่มเติมจากการสังเกตการณ์อื่นๆ อาจรวมเอาข้อมูลที่มีความคลาดเคลื่อนเข้าไปอีกด้วย ทั้งนี้หลักฐานวงโคจรที่ได้จะมีความน่าเชื่อถือเพียงใด ต้องนำค่าหลักฐานที่ได้มาคำนวณย้อนกลับไปในอดีตขณะเวลาสังเกตการณ์ เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของตำแหน่งเชิงมุมที่ได้ขณะนั้นๆ เป็นสำคัญ

### รายการอ้างอิง

- [1] Danby, J.M.A. Fundamental of Celestial Mechanics. 2<sup>nd</sup> Edition. Verginia: Willmann-Bell Inc., 1992.
- [2] พีรพัฒน์ ศิริสมบุญรณาลภ. กลศาสตร์ท้องฟ้าเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2534.
- [3] พีรพัฒน์ ศิริสมบุญรณาลภ. กลศาสตร์ท้องฟ้าทั่วไป. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2533.
- [4] พีรพัฒน์ ศิริสมบุญรณาลภ. การกำหนดทางโคจรของดาวหางเฮล-บอปฟ์. 2541.
- [5] Arfken, G. B and Weber, H. J. Mathematical Methods for Physicists. San Diego: Academic Press, 1995.
- [6] Boulet, D.L. Method of Orbit Determination for the Microcomputer. Verginia: Willmann-Bell Inc., 1991.
- [7] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.
- [8] Chapra, S.C. and Canale, R.P. Numerical Methods for Engineers. 3<sup>rd</sup> Edition. U.S.A.: McGraw-Hill Book Co., 1998.

- [9] Escobal, P. R. Method of Orbit Determination. New York: Krieger Publishing, 1976.
- [10] Cunningham, J.C. Introduction to Asteroids. Virginia: Willmann-Bell Inc., 1988.
- [11] Herget, P. The Computation of Orbits. Cincinnati: Ann Arbor, 1948.
- [12] Chow, T. L. Classical Mechanics. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [13] Mitton, J. The Penguin Dictionary of Astronomy. 3<sup>rd</sup> Edition. Bristol: Penguin Group, 1998.
- [14] Dubyago, A. D. The Determination of Orbits. New York: Macmillan, 1961.
- [15] Kozai, Y. Secular Perturbation of Asteroids with High Inclination and Eccentricity Astronomical Journal. 67(1992): 591-598.
- [16] Mouton, F. R. An Introduction to Celestial Mechanics. New York: Dover, 1970.
- [17] Herrick, S. Orbit Determinations Astron 70 (1965): 309.
- [18] Illingworth, V. The Facts on File Dictionary of Astronomy. 3<sup>rd</sup> Edition. U.S.A.: Facts on File Inc, 1994.
- [19] Marsden, B. G. Initial Orbit Determination. Astron 90 (1985): 1541-1547.
- [20] Roy, A.E. Orbital Motion, Bristol: Adam Hilger Ltd., 1980.
- [21] Murray, C.D. and Dermott, S.F. Solar System Dynamics, 1<sup>st</sup> Edition. Cambridge: Cambridge University Press., (1999):535-536.
- [22] Seibundooshinkosha. Temmongaido. January(1999): 85-92.
- [23] Seibundooshinkosha. Temmongaido. March (1999): 83-90.
- [24] Seibundooshinkosha. Temmongaido. May (1999): 84-92.
- [25] Seibundooshinkosha. Temmongaido. August (1999): 81-89.
- [26] Seibundooshinkosha. Temmongaido. January(1999): 84-91.
- [27] Rika nempyo, Chronological Scientific Tables. Tokyo: National Astronomical Observatory, 1999.
- [28] Smart, W.M. Text Book on Spherical Astronomy. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.
- [29] Taff, L. G. On Initial Orbit Determination. Astron 89 (1984): 1426-1428.
- [30] Stumpff, K. Motion of Stars Astron 275 (1974): 108.
- [31] Woolard, E.W. and Clemence, G.M. Spherical Astronomy. New York: Academic Press, 1966

[32] Taff, L. G. Celestial Mechanics. New York: John Wiley & Sons, 1985.

[33] Temmonkansokunempyoo, Skaygazer's Tables 1999. Tokoy: Chijinshokan, 1999.

[34] Temmonkansokunempyoo, Skaygazer's Tables 2000. Tokoy: Chijinshokan, 1999.



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก

## ค่าคงที่ทางดาราศาสตร์

1 หน่วยดาราศาสตร์ (AU) =  $1.49597870 \times 10^{11}$  เมตร

1 หน่วยมวลของดวงอาทิตย์ =  $1.9891 \times 10^{30}$  กิโลกรัม

1 วันจูเลียน = 86,400 วินาที

1 ปีจูเลียน = 365.2425 วัน =  $3.155760 \times 10^9$  วินาที

ค่าคงที่แรงโน้มถ่วงของเกาส์ (k) = 0.01720209895

ความเร็วแสง c =  $2.99792458 \times 10^8$  เมตร/วินาที = 173.1446 หน่วยดาราศาสตร์/วัน

มุมระหว่างระนาบศูนย์สูตรและระนาบสุริยวิถี  $\epsilon = 23^{\circ}26'21''.448$

มวลของโลก = 0.000003003 หน่วยมวลของดวงอาทิตย์

มวลของดาวอังคาร = 0.000000323 หน่วยมวลของดวงอาทิตย์

มวลของดาวเสาร์ = 0.000285878 หน่วยมวลของดวงอาทิตย์

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ข

### ตำแหน่งเชิงมุมของดาวมาตรฐาน

- ตารางดาวมาตรฐานที่ใช้เป็นดาวอ้างอิงของดาวอังคาร

ชื่อดาว มาตรฐาน	ลองติจูดท้องฟ้า			ละติจูดท้องฟ้า		
	h	m	s	°	'	"
7 $\delta$ -Crv	12	29	51.9	-16	30	56
8 $\eta$ -Crv	12	32	4.2	-16	11	46
29 $\gamma$ -Vir	12	41	39.6	-1	26	58
51 $\theta$ -Hya	13	9	57.0	-5	32	20
46 $\gamma$ -Hya	13	18	55.3	-23	10	18
67 $\alpha$ -Vir	13	25	11.6	-11	9	41
79 $\zeta$ -Vir	13	34	41.6	-0	35	45
89 $\nu$ -Vir	13	49	52.3	-18	8	3
93 $\tau$ -Vir	14	1	38.8	+1	32	40
49 $\pi$ -Hya	14	6	22.3	-26	40	57
98 $K$ -Vir	14	12	53.8	-10	16	25
99 $\iota$ -Vir	14	16	0.9	-6	0	2
100 $\lambda$ -Vir	14	19	6.6	-13	22	16
107 $\mu$ -Vir	14	43	3.6	-5	39	30
9 $\alpha^2$ -Lib	14	50	52.7	-16	2	30
20 $\sigma$ -Lib	15	4	4.2	-25	16	55
27 $\beta$ -Lib	15	17	0.4	-9	22	59
38 $\gamma$ -Lib	15	35	31.6	-14	47	22
39 $\nu$ -Lib	15	37	1.5	-28	8	6
46 $\theta$ -Lib	15	53	49.5	-16	43	46

● ตารางดาวมาตรฐานที่ใช้เป็นดาวอ้างอิงของดาวเสาร์

ชื่อดาว มาตรฐาน	ลองติจูดท้องฟ้า			ละติจูดท้องฟ้า		
	h	m	s	°	'	"
98 $\mu$ -Psc	1	30	11.1	+6	8	38
99 $\eta$ -Psc	1	31	29.0	+15	20	45
106 $\nu$ -Psc	1	41	25.9	+5	29	15
6 $\beta$ -Ari	1	54	38.4	+20	48	29
113 $\alpha$ -Psc	2	2	2.8	+2	45	49
13 $\alpha$ -Ari	2	7	10.4	+23	27	45
65 $\xi^2$ -Cet	2	13	0.0	+8	50	48
72 $\rho$ -Cet	2	25	57.0	-12	17	26
73 $\xi^2$ -Cet	2	28	9.5	+8	27	36
76 $\sigma$ -Cet	2	32	5.2	-15	14	41
78 $\nu$ -Cet	2	35	52.5	+5	35	36
83 $\varepsilon$ -Cet	2	39	33.8	-11	52	20
86 $\gamma$ -Cet	2	43	18.0	+3	14	9
91 $\lambda$ -Cet	2	59	42.9	+8	54	27
58 $\zeta$ -Ari	3	14	54.1	+21	2	40
96 $K^2$ -Cet	3	19	21.7	+3	22	13

● ตารางตำแหน่งดวงอาทิตย์

วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
178.5	+0.1556677	-0.8908017	-0.3862157
179.5	+0.1729023	-0.8881035	-0.3850456
180.5	+0.1900831	-0.8851360	-0.3837563
181.5	+0.2072049	-0.8818839	-0.3823481
182.5	+0.2242629	-0.8783643	-0.3808215
183.5	+0.2412523	-0.8745725	-0.3791768

วันจตุเรี่ยน 2451000+	X	Y	Z
184.5	+0.2581678	-0.8705094	-0.3774146
185.5	+0.2750044	-0.8661761	-0.3755352
186.5	+0.2917570	-0.8615735	-0.3735391
187.5	+0.3084204	-0.8567027	-0.3714268
188.5	+0.3249892	-0.8515650	-0.3691989-
189.5	+0.3414587	-0.8461618	0.3668561
190.5	+0.3578225	-0.8404945	-0.3643988
191.5	+0.3740763	-0.8345647	-0.3618280
192.5	+0.3902145	-0.8283741	-0.3591442
193.5	+0.4062319	-0.8219245	-0.3563482
194.5	+0.4221231	-0.8152180	-0.3534410
195.5	+0.4378830	-0.8082566	-0.3504234
196.5	+0.4535062	-0.8010425	-0.3472964
197.5	+0.4689877	-0.7935783	-0.3440609
198.5	+0.4843224	-0.7858665	-0.3407181
199.5	+0.4995052	-0.7779097	-0.3372691
200.5	+0.5145313	-0.7697110	-0.3337152
201.5	+0.5293960	-0.7612732	-0.3300575
202.5	+0.5440946	-0.7525994	-0.3262973
203.5	+0.5586228	-0.7436929	-0.3224361
204.5	+0.5729763	-0.7345567	-0.3184752
205.5	+0.5871511	-0.7251941	-0.3144159
206.5	+0.6011432	-0.7156082	-0.3102596
207.5	+0.6149486	-0.7058022	-0.3060078
208.5	+0.6285637	-0.7957793	-0.3016617
209.5	+0.6419848	-0.7855425	-0.2972228
210.5	+0.6552080	-0.6750949	-0.2926925
211.5	+0.6682297	-0.6644394	-0.2880721
212.5	+0.6810462	-0.6535793	-0.2833629
213.5	+0.6936537	-0.6425176	-0.2785663
214.5	+0.7060485	-0.6312574	-0.2736839
215.5	+0.7182267	-0.6198020	-0.2687169
216.5	+0.7301847	-0.6081549	-0.2426669



วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
217.5	+0.7419186	-0.5963193	-0.2585353
218.5	+0.7534249	-0.5842988	-0.2533237
219.5	+0.7646998	-0.5720971	-0.2480337
220.5	+0.7757398	-0.5597179	-0.2426669
221.5	+0.7865412	-0.5471649	-0.2372249
222.5	+0.7971005	-0.5344421	-0.2317094
223.5	+0.8074144	-0.5215535	-0.2261220
224.5	+0.8174194	-0.5085032	-0.2204647
225.5	+0.8272923	-0.4952956	-0.2147392
226.5	+0.8368498	-0.4819350	-0.2089474
227.5	+0.8461491	-0.4684260	-0.2030912
228.5	+0.8551871	-0.4547731	-0.1971725
229.5	+0.8639614	-0.4409811	-0.1911933
230.5	+0.8724695	-0.4270546	-0.1851558
231.5	+0.8807091	-0.4129985	-0.1790618
232.5	+0.8886782	-0.3988173	-0.1729134
233.5	+0.8963748	-0.3845157	-0.1667127
234.5	+0.9037973	-0.3700983	-0.1604616
235.5	+0.9109440	-0.3555696	-0.1541620
236.5	+0.9178133	-0.3409340	-0.1478161
237.5	+0.9244036	-0.3261959	-0.1414256
238.5	+0.9307135	-0.3113596	-0.1349925
239.5	+0.9367414	-0.2964294	-0.1285187
240.5	+0.9424859	-0.2814096	-0.1220061
241.5	+0.9479456	-0.2663045	-0.1154566
242.5	+0.9531189	-0.2511184	-0.1088721
243.5	+0.9580045	-0.2358557	-0.1022545
244.5	+0.9626009	-0.2205207	-0.0856057
245.5	+0.9669069	-0.2051181	-0.0889277
246.5	+0.9709210	-0.1896522	-0.0822225
247.5	+0.9746422	-0.1741277	-0.0754920
248.5	+0.9780691	-0.1585492	-0.0687381
249.5	+0.9812007	-0.1429213	-0.0619631

วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
250.5	+0.9840360	-0.1272489	-0.0551688
251.5	+0.9865740	-0.1115367	-0.0483573
252.5	+0.9888138	-0.0957897	-0.0415308
253.5	+0.9907548	-0.0800128	-0.0346914
254.5	+0.9923962	-0.0642110	-0.0278411
255.5	+0.9937377	-0.0483896	-0.0209823
256.5	+0.9947790	-0.0325537	-0.0141170
257.5	+0.9955201	-0.0167085	-0.0072476
258.5	+0.9959612	-0.0008592	-0.0003762
259.5	+0.9961026	+0.0149892	+0.0064949
260.5	+0.9959450	+0.0308316	+0.0133636
261.5	+0.9954891	+0.0466631	+0.0202278
262.5	+0.9947356	+0.0624790	+0.0270854
263.5	+0.9936856	+0.0782748	+0.0339343
264.5	+0.9923398	+0.0940457	+0.0407725
265.5	+0.9906994	+0.1097874	+0.0475981
266.5	+0.9887652	+0.1254954	+0.0544091
267.5	+0.9865382	+0.1411655	+0.0612037
268.5	+0.9840195	+0.1567934	+0.0679798
269.5	+0.9812101	+0.1723746	+0.0747357
270.5	+0.9781110	+0.1879050	+0.0814693
271.5	+0.9747232	+0.2033804	+0.0881790
272.5	+0.97110479	+0.2187963	+0.0948628
273.5	+0.9670862	+0.2341485	+0.1015188
274.5	+0.9628392	+0.2494326	+0.1081452
275.5	+0.9583083	+0.2646445	+0.1147401
276.5	+0.9534945	+0.2797796	+0.1213015
277.5	+0.9483994	+0.2948336	+0.1278278
278.5	+0.9430244	+0.3098021	+0.1343168
279.5	+0.9373709	+0.3246806	+0.1407668
280.5	+0.9314405	+0.3394648	+0.1471759
281.5	+0.9252350	+0.3541501	+0.1535421
282.5	+0.9187561	+0.3687319	+0.1598635

วันจตุเรี่ยน 2451000+	X	Y	Z
283.5	+0.9120058	+0.3832056	+0.1661382
284.5	+0.9049864	+0.3975667	+0.1723642
285.5	+0.8977001	+0.4118107	+0.1785395
286.5	+0.8901496	+0.4259329	+0.1846622
287.5	+0.8823377	+0.4399292	+0.1907305
288.5	+0.8742673	+0.04537953	+0.1967425
289.5	+0.8659414	+0.4675272	+0.2026965
290.5	+0.8573631	+0.4811210	+0.2085908
291.5	+0.8485356	+0.4945731	+0.2144237
292.5	+0.8394618	+0.5078798	+0.2201936
293.5	+0.8301450	+0.5210378	+0.2258989
294.5	+0.8205881	+0.5340435	+0.2315383
295.5	+0.8107943	+0.5468936	+0.2371101
296.5	+0.8007667	+0.5595849	+0.2426130
297.5	+0.7905082	+0.5721141	+0.2480455
298.5	+0.7800219	+0.5844779	+0.2534062
299.5	+0.7693110	+0.5966732	+0.2586937
300.5	+0.7583784	+0.6086968	+0.2639065
301.5	+0.7472272	+0.6205454	+0.2690434
302.5	+0.7358607	+0.6322161	+0.2741030
303.5	+0.7242819	+0.6437055	+0.2790839
304.5	+0.7124940	+0.6550106	+0.2839848
305.5	+0.7005003	+0.6661282	+0.2888043
306.5	+0.6883040	+0.6770551	+0.2935411
307.5	+0.6759086	+0.6877882	+0.2981938
308.5	+0.6633174	+0.6983243	+0.3027612
309.5	+0.6505340	+0.7086603	+0.3072418
310.5	+0.6375619	+0.7187929	+0.3116343
311.5	+0.6244050	+0.7287191	+0.3159375
312.5	+0.6110672	+0.7384356	+0.3201499
313.5	+0.5975526	+0.7479395	+0.3242703
314.5	+0.5838654	+0.7572277	+0.3282973
315.5	+0.5700101	+0.7662974	+0.3322298

วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
316.5	+0.5559913	+0.7751461	+0.3360667
317.5	+0.5418136	+0.7837713	+0.3398068
318.5	+0.5274814	+0.7921709	+0.3434491
319.5	+0.5129995	+0.8003428	+0.3469927
320.5	+0.4983723	+0.8082850	+0.3504369
321.5	+0.4836042	+0.8159959	+0.3537806
322.5	+0.4686998	+0.8234735	+0.3570232
323.5	+0.4536633	+0.8307162	+0.3601638
324.5	+0.4384991	+0.8377225	+0.3632018
325.5	+0.4232115	+0.8444907	+0.3661365
326.5	+0.4078047	+0.8510193	+0.3689671
327.5	+0.3922830	+0.8573067	+0.3716931
328.5	+0.3766507	+0.8633516	+0.3743137
329.5	+0.3609120	+0.8691523	+0.3768284
330.5	+0.3450711	+0.8747076	+0.3792365
331.5	+0.3291323	+0.8800160	+0.3815375
332.5	+0.3130998	+0.8850760	+0.3837307
333.5	+0.2969778	+0.8898863	+0.3858156
334.5	+0.2807708	+0.8944455	+0.3877916
335.5	+0.2644831	+0.8987521	+0.3896581
336.5	+0.2481190	+0.9028050	+0.3914146
337.5	+0.2316830	+0.9066025	+0.3930605
338.5	+0.2151798	+0.9101436	+0.3945953
339.5	+0.1986139	+0.9134267	+0.3960185
340.5	+0.1819903	+0.9164508	+0.3973295
341.5	+0.1653138	+0.9192146	+0.3985278
342.5	+0.1485895	+0.9217171	+0.3996131
343.5	+0.1318225	+0.9239575	+0.4005848
344.5	+0.1150182	+0.9259352	+0.4014428
345.5	+0.0981818	+0.9276498	+0.4021868
346.5	+0.0813184	+0.9291009	+0.4028167
347.5	+0.0644332	+0.9302886	+0.4033324
348.5	+0.0475311	+0.9312129	+0.4037338

วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
349.5	+0.0306172	+0.9318739	+0.4040210
350.5	+0.0136962	+0.9322719	+0.4041941
351.5	-0.0032270	+0.9324071	+0.4042531
352.5	-0.0201479	+0.9322798	+0.4041982
353.5	-0.0370618	+0.9318904	+0.4040296
354.5	-0.0539640	+0.9312392	+0.4037473
355.5	-0.0708501	+0.9303267	+0.4033515
356.5	-0.0877155	+0.9291534	+0.4028425
357.5	-0.1045558	+0.9277196	+0.4022205
358.5	-0.1213666	+0.9260259	+0.4014857
359.5	-0.1381434	+0.9240728	+0.4006383
360.5	-0.1548817	+0.9218608	+0.3996787
361.5	-0.1715773	+0.9193904	+0.3986069
362.5	-0.1882257	+0.9166621	+0.3974234
363.5	-0.2048225	+0.9136764	+0.3961283
364.5	-0.2213631	+0.9104340	+0.3947219
365.5	-0.2378431	+0.9069353	+0.3932046
366.5	-0.2542577	+0.9031811	+0.3915766
367.5	-0.2706025	+0.8991719	+0.3898383
368.5	-0.2868724	+0.8949086	+0.3879899
369.5	-0.3030628	+0.8903919	+0.3860319
370.5	-0.3191687	+0.8856230	+0.3839647
371.5	-0.3351850	+0.8806029	+0.3817887
372.5	-0.3511068	+0.8753331	+0.3795046
373.5	-0.3669291	+0.8698152	+0.3771130
374.5	-0.3826471	+0.8640509	+0.3746146
375.5	-0.3982560	+0.8580421	+0.3720102
376.5	-0.4137511	+0.8517908	+0.3693006
377.5	-0.4291281	+0.8452991	+0.3664867
378.5	-0.4443825	+0.8385691	+0.3635693
379.5	-0.4595101	+0.8316030	+0.3605495
380.5	-0.4745068	+0.8244031	+0.3574281
381.5	-0.4893683	+0.8169714	+0.3542061

วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
382.5	-0.5040908	+0.8093104	+0.3508845
383.5	-0.5186703	+0.8014222	+0.3474643
384.5	-0.5331029	+0.7933091	+0.3439465
385.5	-0.5473848	+0.7849735	+0.3403320
386.5	-0.5615122	+0.7764176	+0.3366220
387.5	-0.5754314	+0.7676437	+0.3328174
388.5	-0.5892888	+0.7586542	+0.3289192
389.5	-0.6029306	+0.7494514	+0.3249286
390.5	-0.6164033	+0.7400374	+0.3208465
391.5	-0.6297031	+0.7304148	+0.3166739
392.5	-0.6428264	+0.7205856	+0.3124119
393.5	-0.6557694	+0.7105523	+0.3080616
394.5	-0.6685284	+0.7003173	+0.3036239
395.5	-0.6810995	+0.6898830	+0.2991001
396.5	-0.6934789	+0.6792520	+0.2944911
397.5	-0.7056625	+0.6684269	+0.2897981
398.5	-0.7176465	+0.6574107	+0.2850225
399.5	-0.7294269	+0.6462062	+0.2801653
400.5	-0.7409998	+0.6348166	+0.2752280
401.5	-0.7523615	+0.6232453	+0.2702119
402.5	-0.7635082	+0.6114957	+0.2651186
403.5	-0.7744365	+0.5995714	+0.2599495
404.5	-0.7851429	+0.5874760	+0.2547061
405.5	-0.7956243	+0.5752134	+0.2493901
406.5	-0.8058776	+0.5627871	+0.2440030
407.5	-0.8158999	+0.5502010	+0.2385465
408.5	-0.8256883	+0.5374589	+0.2330222
409.5	-0.8352401	+0.5245645	+0.2274318
410.5	-0.8445527	+0.5115216	+0.2217768
411.5	-0.8536236	+0.4983389	+0.2160589
412.5	-0.8624503	+0.4850053	+0.2102797
413.5	-0.8710304	+0.4716393	+0.2044409
414.5	-0.8793617	+0.4579399	+0.1985442

วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
415.5	-0.8874420	+0.4442108	+0.1925912
416.5	-0.8952690	+0.4303555	+0.1865835
417.5	-0.9028407	+0.4163779	+0.1805228
418.5	-0.9101550	+0.4022815	+0.1744106
419.5	-0.9172097	+0.3880699	+0.1682486
420.5	-0.9240027	+0.3737469	+0.1620384
421.5	-0.9305319	+0.3593159	+0.1557816
422.5	-0.9367950	+0.3447808	+0.1494797
423.5	-0.9427899	+0.3301454	+0.1431346
424.5	-0.9485142	+0.3154134	+0.1367478
425.5	-0.9539658	+0.3005890	+0.1303210
426.5	-0.9591425	+0.2856762	+0.1238561
427.5	-0.9640421	+0.2706793	+0.1173548
428.5	-0.9686626	+0.2556028	+0.1108190
429.5	-0.9730022	+0.2404511	+0.1042507
430.5	-0.9770590	+0.2252289	+0.0976518
431.5	-0.9808315	+0.2099408	+0.0910242
432.5	-0.9843184	+0.1945917	+0.0843701
433.5	-0.9875183	+0.1791862	+0.0776915
434.5	-0.9904303	+0.1637291	+0.0709903
435.5	-0.9930533	+0.1482252	+0.0642687
436.5	-0.9953865	+0.1326791	+0.0575286
437.5	-0.9974294	+0.1170955	+0.0507722
438.5	-0.9991814	+0.1014791	+0.0440014
439.5	-1.0006419	+0.0858346	+0.0372182
440.5	-1.0018106	+0.0701664	+0.0304247
441.5	-1.0026873	+0.0544791	+0.0236228
442.5	-1.0032717	+0.0387772	+0.0168146
443.5	-1.0035638	+0.0230653	+0.0100019
444.5	-1.0035635	+0.0073476	+0.0031868
445.5	-1.0032708	-0.0083715	-0.0036289
446.5	-1.0026858	-0.0240876	-0.0104432
447.5	-1.0018085	-0.0397967	-0.0172543



วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
448.5	-1.0006389	-0.0554943	-0.0240604
449.5	-0.9991771	-0.0710765	-0.0308595
450.5	-0.9974229	-0.0868388	-0.0376499
451.5	-0.9953763	-0.1024769	-0.0444296
452.5	-0.9930374	-0.1180864	-0.0511968
453.5	-0.9904060	-0.1336629	-0.0579495
454.5	-0.9874823	-0.1492015	-0.0646857
455.5	-0.9842665	-0.1646976	-0.0714034
456.5	-0.9807589	-0.1801464	-0.0781005
457.5	-0.9769600	-0.1955430	-0.0847751
458.5	-0.9728706	-0.2108824	-0.0914249
459.5	-0.9684914	-0.2261598	-0.0980479
460.5	-0.9638235	-0.2413701	-0.1046419
461.5	-0.9588681	-0.2565085	-0.1112049
462.5	-0.9536264	-0.2715702	-0.1177348
463.5	-0.9481001	-0.2865503	-0.1242294
464.5	-0.9422907	-0.3014442	-0.1306868
465.5	-0.9361999	-0.3162470	-0.1371049
466.5	-0.9298297	-0.3309543	-0.1434817
467.5	-0.9231819	-0.3455614	-0.1498152
468.5	-0.9162587	-0.3600641	-0.1561034
469.5	-0.9090621	-0.3744578	-0.1623444
470.5	-0.9015943	-0.3887382	-0.1685364
471.5	-0.8938578	-0.4029012	-0.1746775
472.5	-0.8858547	-0.4169427	-0.1807659
473.5	-0.8775876	-0.4308585	-0.1867997
474.5	-0.8690589	-0.4446448	-0.1927772
475.5	-0.8602708	-0.4582978	-0.1986968
476.5	-0.8512260	-0.4718135	-0.2045567
477.5	-0.8419265	-0.4851883	-0.2103554
478.5	-0.8323749	-0.4984183	-0.2160911
479.5	-0.8225733	-0.5114997	-0.2217622
480.5	-0.8125240	-0.5244286	-0.2273671



วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
481.5	-0.8022294	-0.5372009	-0.2329040
482.5	-0.7916920	-0.5498126	-0.2383711
483.5	-0.7809144	-0.5622594	-0.2437668
484.5	-0.7698994	-0.5745373	-0.2490892
485.5	-0.7586499	-0.5866420	-0.2543366
486.5	-0.7471690	-0.5985694	-0.2595073
487.5	-0.7354600	-0.6103155	-0.2645994
488.5	-0.7235263	-0.6218762	-0.2696112
489.5	-0.7113714	-0.6332475	-0.2745412
490.5	-0.6989991	-0.6444257	-0.2793875
491.5	-0.6864413	-0.6554069	-0.2841485
492.5	-0.6736173	-0.6661874	-0.2888227
493.5	-0.6606159	-0.6767638	-0.2934085
494.5	-0.6474128	-0.6871325	-0.2979044
495.5	-0.6340123	-0.6972903	-0.3023089
496.5	-0.6204187	-0.7072339	-0.3066207
497.5	-0.6066362	-0.7169603	-0.3108382
498.5	-0.5926692	-0.7264664	-0.3149603
499.5	-0.5785221	-0.7357493	-0.3189856
500.5	-0.5641994	-0.7448065	-0.3229129
501.5	-0.5497054	-0.7536351	-0.3267410
502.5	-0.5350448	-0.7622328	-0.3304689
503.5	-0.5202218	-0.7705971	-0.3340955
504.5	-0.5052407	-0.7787257	-0.3376197
505.5	-0.4901060	-0.7866164	-0.3410406
506.5	-0.4748218	-0.7942669	-0.3443571
507.5	-0.4593922	-0.8016750	-0.3475684
508.5	-0.4438214	-0.8088383	-0.3506735
509.5	-0.4281137	-0.8157544	-0.3536713
510.5	-0.4122734	-0.8224207	-0.3565608
511.5	-0.3963049	-0.8288350	-0.3593411
512.5	-0.3802128	-0.8349946	-0.3620110
513.5	-0.3640020	-0.8408974	-0.3645695

วันจูเลียน 2451000+	X	Y	Z
514.5	-0.3476773	-0.8465408	-0.3670159
515.5	-0.3312437	-0.8519228	-0.3693489
516.5	-0.3147063	-0.8570413	-0.3715679
517.5	-0.2980704	-0.8618943	-0.3736719
518.5	-0.2813412	-0.8664800	-0.3756602
519.5	-0.2645240	-0.8707965	-0.3775319
520.5	-0.2476245	-0.8748424	-0.3792864
521.5	-0.2306479	-0.8786162	-0.3809231
522.5	-0.2135999	-0.8821166	-0.3824413
523.5	-0.1964859	-0.8853424	-0.3838405
524.5	-0.1793117	-0.8882926	-0.3851202
525.5	-0.1620827	-0.8909663	-0.3862801
526.5	-0.1448045	-0.8933628	-0.3873198
527.5	-0.1274828	-0.8954815	-0.3882389
528.5	-0.1101230	-0.8973218	-0.3890373
529.5	-0.0927306	-0.8988835	-0.3897147
530.5	-0.0753112	-0.9001663	-0.3902711
531.5	-0.0578700	-0.9011702	-0.3907064
532.5	-0.0404123	-0.9018951	-0.3910206
533.5	-0.0229433	-0.9023412	-0.3912137
534.5	-0.0054679	-0.9025084	-0.3912858
535.5	+0.0120087	-0.9023968	-0.3912368
536.5	+0.0294818	-0.9020064	-0.3910669
537.5	+0.0469464	-0.9013371	-0.3907760
538.5	+0.0643973	-0.9003889	-0.3903642
539.5	+0.0818296	-0.8991617	-0.3898314
540.5	+0.0992380	-0.8976554	-0.3891778
541.5	+0.1166172	-0.8958702	-0.3884033
542.5	+0.1339616	-0.8938061	-0.3875081
543.5	+0.1512660	-0.8914636	-0.3864923
544.5	+0.1685246	-0.8888430	-0.3853561

## ภาคผนวก ค

### โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

- โปรแกรม OU1.cpp สำหรับหาอายุเฉลี่ย

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>
main()
{
    int D,M,Y;
    double J0,UT,JD,m,h;
    clrscr();
    printf(" Date = ");scanf("%d",&D);
    printf(" month = ");scanf("%d",&M);
    printf(" year = ");scanf("%d",&Y);
    J0 = 367.0*Yfloor(floor((7.0/4.0)*(Y+floor((M+9.0)/12.0))))+floor(275.0*M/9.0)+D+1721013.5;
    printf("\n J0 = %0.8lf\n",J0);
    printf(" hour = ");scanf("%lf",&h);
    printf(" minus : m = ");scanf("%lf",&m);
    UT = h+m/60;
    printf("\n UT = %0.8lf\n",UT);
    JD=J0+UT/24;
    printf(" \n JD = %0.8lf\n ",JD);
    getch();
    return(0);
}
```

- โปรแกรม OU2.cpp สำหรับหาดำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์กรณีดาวอังคาร 3 ดวง

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
```

```

main()
{
    double Right_a,Right_b,Right_c,Dec_a,Dec_b,Dec_c,error;
    double Right_s,Dec_s,Check,SP,AP,SQ,BQ,SR,CR,Da,Db,Dc;
    printf ("Please enter Right assension\n");
    scanf ("%lf %lf %lf",&Right_a,&Right_b,&Right_c);
    printf ("%f.%f %f.%f %f.%f\n",Right_a,Right_b,Right_c);
    printf ("Please enter Declination\n");
    scanf ("%lf %lf %lf1",&Dec_a,&Dec_b,&Dec_c);
    printf ("%f.%f %f.%f %f.%f\n",Dec_a,Dec_b,Dec_c);
    printf(" input SP : ");scanf("%lf",&SP);
    printf(" input AP : ");scanf("%lf",&AP);
    printf(" input SQ : ");scanf("%lf",&SQ);
    printf(" input BQ : ");scanf("%lf",&BQ);
    printf(" input SR : ");scanf("%lf",&SR);
    printf(" input CR : ");scanf("%lf",&CR);
    Da=SP/AP;
    Db=SQ/BQ;
    Dc=SR/CR;
    Check=Da+Db+Dc;
    error=(1-Check)*100;
    printf(" Da=%f Db=%f Dc=%f\n",Da,Db,Dc);
    printf(" Da + Dn + Dc = %f \n",Check);
    Right_s = (Right_a*Da) +(Right_b*Db) + (Right_c*Dc);
    Dec_s = (Dec_a*Da) +(Dec_b*Db) + (Dec_c*Dc);
    printf("error=%f\n",error);
    printf(" Right ascention =%f\n",Right_s);
    printf(" Declination =%f\n",Dec_s);
    getch();
    return(0);
}

```

- โปรแกรม OU3.cpp สำหรับหาดำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์กรณีดาวอ้างอิง 5 ดวง

```
# include<stdio.h>
```

```
# include<math.h>
```

```

main()
{
double          x1,x2,x3,x4,x5,y1,y2,y3,y4,y5,xs,ys,sumx,sumy,xr,yr,X1,X2,X3,X4,X5,
Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,XS,YS,SUMX,SUMY,SUMXY,SUMX2,SUMY2,D1,D2,D3,D4,D5,P,Q,R,SUMD,SUMDr,S
UMDx,SUMDd,SUMDy,d1,d2,d3,d4,d5,r1,r2,r3,r4,r5,ds,rs;
printf ("Please enter x1,x2,x3,x4,x5,xs\n");
scanf ("%f %f %f %f %f %f",&x1,&x2,&x3,&x4,&x5,&xs);
printf ("%f %f %f %f %f %f\n",x1,x2,x3,x4,x5,xs);
printf ("Please enter y1,y2,y3,y4,y5,ys\n");
scanf ("%f %f %f %f %f %f",&y1,&y2,&y3,&y4,&y5,&ys);
printf ("%f %f %f %f %f %f\n",y1,y2,y3,y4,y5,ys);
printf ("please enter right ascension r1,r2,r3,r4,r5\n");
scanf ("%f %f %f %f %f",&r1,&r2,&r3,&r4,&r5);
printf ("%f %f %f %f %f\n",r1,r2,r3,r4,r5);
printf ("please enter declination d1,d2,d3,d4,d5\n");
scanf ("%f %f %f %f %f",&d1,&d2,&d3,&d4,&d5);
printf ("%f %f %f %f %f\n",d1,d2,d3,d4,d5);
sumx=x1+x2+x3+x4+x5;
sumy=y1+y2+y3+y4+y5;
xr=sumx/5;      yr=sumy/5;
X1=x1-xr;      X2=x2-xr;      X3=x3-xr;      X4=x4-xr;      X5=x5-xr;      XS=xs-xr;
Y1=y1-yr;      Y2=y2-yr;      Y3=y3-yr;      Y4=y4-yr;      Y5=y5-yr;      YS=ys-yr;
SUMX=X1+X2+X3+X4+X5;
printf ("SUMX=%f\n",SUMX);
SUMY=Y1+Y2+Y3+Y4+Y5;
printf ("SUMY=%f\n",SUMY);
SUMX2=X1*X1 + X2*X2 + X3*X3 + X4*X4 + X5*X5;
SUMY2=Y1*Y1 + Y2*Y2 + Y3*Y3 + Y4*Y4 + Y5*Y5;
SUMXY=X1*Y1 + X2*Y2 + X3*Y3 + X4*Y4 + X5*Y5;
P=(XS*SUMY2-YS*SUMXY)/(SUMX2*SUMY2-SUMXY*SUMXY);
Q=(XS*SUMXY-YS*SUMX2)/(SUMXY*SUMXY-SUMY2*SUMX2);
R=0.2;
D1=P*X1 + Q*Y1 + R;
D2=P*X2 + Q*Y2 + R;

```

```

D3=P*X3 + Q*Y3 + R;
D4=P*X4 + Q*Y4 + R;
D5=P*X5 + Q*Y5 + R;
SUMD=D1+D2+D3+D4+D5;
printf ("SUMD=%lf\n",SUMD);
SUMDr=D1*r1 + D2*r2 + D3*r3 + D4*r4 + D5*r5;
SUMDx=D1*x1 + D2*x2 + D3*x3 + D4*x4 + D5*x5;
rs=SUMDr+(xs-SUMDx);
SUMDd=D1*d1 + D2*d2 + D3*d3 + D4*d4 + D5*d5;
SUMDy=D1*y1 + D2*y2 + D3*y3 + D4*y4 + D5*y5;
ds=SUMDd+(ys-SUMDy);
printf ("right ascension is%.4lf and declination is%.4lf \n",rs,ds);
}

```

- โปรแกรม OU4.cpp สำหรับหาดำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์ขณะเวลากลางของชุดข้อมูลสังเกตการณ์ 9 ครั้ง

```

#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
/* NP,M are integers */
#define NP 9
#define M 4
/* function defined */
main()
{
FILE *fp_out;
double ti,N,f[NP+1][3],tt[NP+1],tp[NP+1][M+M+1],t[NP+1];
double A[M+2][M+3],xu[M+2],c[M+1][3],k;
double jp,pe,ce,he,ss;
int i,j,p,kk,l;
clrscr();
fp_out=fopen("653a.dat","w");
/* initial values of Mars//
/* Epoch time */ ti=349.03472222;

```

```

t[1]= 262.27083333; f[1][1]= 14.68474172; f[1][2]= -13.37736843;
t[2]= 263.39583333; f[2][1]= 14.68248306; f[2][2]= -13.36655223;
t[3]= 314.20833333; f[3][1]= 13.68330792; f[3][2]= -9.93408355;
t[4]= 323.04166667; f[4][1]= 13.55816263; f[4][2]= -9.46897649;
t[5]= 349.03472222; f[5][1]= 13.58087533; f[5][2]= -10.50756510;
t[6]= 351.07291667; f[6][1]= 13.60621825; f[6][2]= -10.93958941;
t[7]= 368.03125000; f[7][1]= 13.90877206; f[7][2]= -12.89175150;
t[8]= 412.04861111; f[8][1]= 15.31457423; f[8][2]= -19.96497034;
t[9]= 430.04166667; f[9][1]= 16.08702599; f[9][2]= -22.59886977;
printf("\t\t Initial values \n");
fprintf(fp_out,"\t\t Initial values \n");
printf("\n epoch time \t %f\n\n",ti);
fprintf(fp_out,"\n epoch time \t %f\n\n",ti);
for(i=1;i<=NP;i++){
    printf("\t[%d] \t%f \t%f \t%f \t%f\n",i,t[i],i,f[i][1],i,f[i][2]);
    fprintf(fp_out,"\t[%d] \t%f \t%f \t%f \t%f\n",i,t[i],i,f[i][1],
    i,f[i][2]);
}
k=0.017202099;
// if (M<NP-1.0) printf("Order to high\n");
for (i=1;i<=NP;i=i+1)
{
    tt[i]=k*(t[i]-ti);
    tp[i][0]=1.0;
    for (p=1;p<=M+M;p=p+1)
    {
        tp[i][p]=tp[i][p-1]*tt[i];
// printf("tp[%d][%d]=%f\n",i,p,tp[i][p]);
    }
}
for (kk=1;kk<=2;kk=kk+1)
{
    for (j=1;j<=M+1;j=j+1)
    {
        for (i=1;i<=M+1;i=i+1)

```

```

{
    A[j][i]=0.0;
    for (l=1;l<=NP;l=l+1)
    {
        A[j][i]=A[j][i]+tp[l][j+i-2];
//      printf("a[%d][%d]=%f\n",j,i,A[j][i]);
    }
}
A[j][M+2]=0.0;
for (i=1;i<=NP;i=i+1)
{
    A[j][M+2]=A[j][M+2]+tp[i][j-1]*f[i][kk];
}
}
N=M+1;
for (i=1;i<=N-1;i=i+1)
{
    jp=i;
    pe=fabs(A[i][i]);
    for (j=i+1;j<=N;j=j+1)
    {
        ce=fabs(A[j][i]);
        if (ce-pe<0.0)
        {
            if (jp==i)
            {
                for (l=i+1;l<=N;l=l+1)
                {
                    for (p=i+1;p<=N+1;p=p+1)
                    {
                        A[l][p]=A[l][p]-(A[l][i]*A[l][p])/A[i][i];
                    }
                }
                A[i][i]=0.0;
            }
        }
    }
}

```



```

else
{
    for (p=i;p<=N+1;p=p+1)
    {
        he=A[i][p];
        A[i][p]=A[jp][p];
        A[jp][p]=he;
    }
    for (l=i+1;l<=N;l=l+1)
    {
        for (p=i+1;p<=N+1;p=p+1)
        {
            A[l][p]=A[l][p]-(A[l][i]*A[i][p])/A[i][i];
        }
        A[l][i]=0.0;
    }
}
else
{
    pe=ce;
    jp=j;
}
}

xu[N]=A[N][N+1]/A[N][N];
for (i=N-1;i>=1;i=i-1)
{
    ss=0.0;
    for (l=i+1;l<=N;l=l+1)
    {
        ss=ss+A[l][i]*xu[l];
    }
    xu[i]=(A[i][N+1]-ss)/A[i][i];
}

```

```

        for (p=0;p<=M;p=p+1)
        {
            c[p][kk]=xu[p+1];
        }
//        printf("kk=%d\n",kk);
    }
    printf("\n");
    fprintf(fp_out,"\n");
for(p=0;p<=M;p++)
{
    printf(" c[%d] %.7lf %.7lf\n",p,c[p][1],c[p][2]);
    fprintf(fp_out," c[%d] %.7lf %.7lf\n",p,c[p][1],c[p][2]);
}
printf("\n light_t =%.7lf dec_t =%.7lf\n",c[0][1],c[0][2]);
fprintf(fp_out,"\n light_t =%.7lf dec_t =%.7lf\n",c[0][1],c[0][2]);
printf(" light_t1=%.7lf dec_t1=%.7lf\n",c[1][1],c[1][2]);
fprintf(fp_out," light_t1=%.7lf dec_t1=%.7lf\n",c[1][1],c[1][2]);
printf(" light_t2=%.7lf dec_t2=%.7lf\n",c[2][1]*2.0,c[2][2]*2.0);
fprintf(fp_out," light_t2=%.7lf dec_t2=%.7lf\n",c[2][1]*2.0,c[2][2]*2.0);
fclose(fp_out);
getch();
return(0);
}

```

- โปรแกรม OU5.cpp สำหรับหาตำแหน่งของดวงอาทิตย์เทียบกับจุดสังเกตการณ์

```

#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#define np 3
main()
{
    FILE *fp_out;
    fp_out=fopen("365b.dat","w");
    double t[np+1],f[np+1][4],T,jp,K,b1,b2,b3,bb,w1,w2,w3,ac,wl,aj,g[np+1];

```

```

double gt[np+1],l0[np+1],l1[np+1],l2[np+1],f0[np+1],f1[np+1],f2[np+1];
double gg[np+1],gv[np+1],ga[np+1],jd,j0,dy,el,s0,sg,st,ss,Q1,r[np+1];
int i,j,k,p;
double jjd,ss0,sst;
clrscr();
/* Initial values
/*epoch time */ T=2451349.034722;
t[1] = 2451348.5; f[1][1] = +0.0475311; f[1][2] = +0.9312129; f[1][3] = +0.4037338;
t[2] = 2451349.5; f[2][1] = +0.0306172; f[2][2] = +0.9318739; f[2][3] = +0.4040210;
t[3] = 2451350.5; f[3][1] = +0.0136962; f[3][2] = +0.9322719; f[3][3] = +0.4041941;
printf("\t\t Initial values\n\n");
fprintf(fp_out,"\t\t Initial values\n\n");
printf("epoch time\t%f\n",T);
fprintf(fp_out,"epoch time\t%f\n",T);
for(i=1;i<=3;i++){
    printf("t[%d] %f\t %f\t %f\t %f\n",i,t[i],f[i][1],f[i][2],f[i][3]);
    fprintf(fp_out,"t[%d] %f\t %f\t %f\t %f\n",i,t[i],f[i][1],f[i][2],f[i][3]);
}
K=0.017202099;
Q1=0.0174532925;
w1=100.0; w2=22.0; w3=30.0;
b1=13.0; b2=47.0; b3=58.0;
ac=0.00004263523;
for (p=1;p<=np;p=p+1)
{
    gt[p]=1.0;
    l0[p]=1.0;
    l1[p]=0.0;
    l2[p]=0.0;
    for (j=1;j<=np;j=j+1)
    {
        if (j!=p)
        {
            gt[p]=gt[p]*(t[p]-t[j]);
            l2[p]=l2[p]*(T-t[j])+(2.0*l1[p]);

```

```

        I1[p]=I1[p]*(T-t[j])+I0[p];
        I0[p]=I0[p]*(T-t[j]);
    }
}
for (k=1;k<=3;k=k+1)
{
    f0[k]=0.0;
    f1[k]=0.0;
    f2[k]=0.0;
    for (p=1;p<=np;p=p+1)
    {
        f0[k]=f0[k]+(f[p][k]*I0[p])/gt[p];
        f1[k]=f1[k]+(f[p][k]*I1[p])/(gt[p]*K);
        f2[k]=f2[k]+(f[p][k]*I2[p])/(gt[p]*K*K);
    }
}
for (k=1;k<=3;k=k+1)
{
    gg[k]=f0[k];
    gv[k]=f1[k];
    ga[k]=f2[k];
}
wl=w1+(w2/60.0)+(w3/3600.0);
bb=(b1+(b2/60.0)+(b3/3600.0))*Q1;
jd=T;
jld=floor(jd);
j0=jld+0.5;
dy=jd-j0;
aj=(j0-2451545.0)/36525.0;
el=360.0-wl;
s0=100.4606184+36000.77004*aj+0.000387933*aj*aj;
ss0=floor(s0/360.0);
s0=s0-360.0*ss0;
sg=s0+360.98564724*dy;

```

```

st=sg+el;
sst=floor(st/360.0);
st=st-360.0*sst;
ss=st*Q1;
g[1]=-ac*cos(bb)*cos(ss);
g[2]=-ac*cos(bb)*sin(ss);
g[3]=-ac*sin(bb);
    for (k=1;k<=3;k=k+1)
    {
        r[k]=g[k]+gg[k];
    }
printf("\n wl = %lf\n bb = %lf\n ss = %lf\n\n",wl,bb/Q1,st);
fprintf(fp_out,"\n wl = %lf\n bb = %lf\n ss = %lf\n\n",wl,bb/Q1,st);
printf("G(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",f0[1],f0[2],f0[3]);
fprintf(fp_out,"G(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",f0[1],f0[2],f0[3]);
printf("g(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",g[1],g[2],g[3]);
fprintf(fp_out,"g(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",g[1],g[2],g[3]);
printf("R(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",r[1],r[2],r[3]);
fprintf(fp_out,"r(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",r[1],r[2],r[3]);
printf("V(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",gv[1],gv[2],gv[3]);
fprintf(fp_out,"v(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",gv[1],gv[2],gv[3]);
printf("A(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",ga[1],ga[2],ga[3]);
fprintf(fp_out,"a(k)\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",ga[1],ga[2],ga[3]);

getch();
return(0);
}

```

- โปรแกรม OU6.cpp สำหรับหาตำแหน่งและความเร็วของวัตถุที่ongฟ้าในวงโคจร

```

# include <stdio.h>
# include <conio.h>
# include <math.h>
# include <stdlib.h>

double FNVS(double x,double y,double z)
{

```

```

        return x*x+y*y+z*z;
    }
double FNMG(double x,double y,double z)
{
    return sqrt(x*x+y*y+z*z);
}
double FNDP(double x1,double y1,double z1,double x2,double y2,double z2)
{
    return x1*x2+y1*y2+z1*z2;
}
double FNDX(double x2,double y2,double z2,double x3,double y3,double z3,double LL1, double
LL2,double LL3)
{
    return LL1*(y2*z3-z2*y3)-LL2*(x2*z3-z2*x3)+LL3*(x2*y3-y2*x3);
}
double FNF(double x,double a,double b,double c)
{
    return c+x*x*x*(b+x*x*x*(a+x*x));
}
double FNDF(double x,double a,double b)
{
    return x*x*(3*b+x*x*x*(6*a+8*x*x));
}
double FNP(double x,double AA,double M,double BB)
{
    return AA+M*BB/(x*x*x);
}
double FNU(double x,double CC,double M,double DD)
{
    return CC+M*DD/(x*x*x);
}
main()
{
    FILE *fp_out;
    int K,N;

```

```

double RR[4],R1[4],R2[4],LL[4],L1[4],L2[4],R[4],V[4];
double TA,A,D,A1,D1,A2,D2,Q1,M,XX,YY,ZZ,D0,AA,BB,CC,DD,EE,FF,XL
    ,XH,DX,a,b,c,X,AB,r,T,p,u,X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2,X3,Y3,Z3,G,Rx,Ry,Rz,
    Vx,Vy,Vz,Ax,Ay,Az;

clrscr();
fp_out=fopen("365c.dat","w");
Q1 = 0.0174532925;
AB = 1/173.1446;
G = 0.017202099;
/*Mars */ M = 1.000000323;
/*Sat.  M = 1.000285878;
*/ printf(" MARS\n ");
fprintf(fp_out," MARS\n ");
    TA = 2451349.03472;
    A = 13.5930406;    D= -10.6734441;
    A1 = 0.5240726;    D1= -5.7518432;
    A2 = 2.2394380;    D2= -10.6607109;
    XL = 1; XH = 3;    X = 1.3;
    RR[1] = 0.0384463;    RR[2] = 0.9315995;    RR[3] = 0.4038914;
    R1[1] = -0.9832606;    R1[2] = 0.0378947;    R1[3] = 0.0164653;
    R2[1] = -0.0239936;    R2[2] = -0.8887771;    R2[3] = -0.3855873;
printf("\n epoch time \t %lf\n",TA);
fprintf(fp_out,"\n epoch time \t %lf\n",TA);
printf("\n angular position\t A = %lf\t D = %lf \n",A,D);
fprintf(fp_out,"angular position\t A = %lf\t D = %lf \n",A,D);
printf("\n angular velocity\t A1 = %lf\t D1 = %lf \n",A1,D1);
fprintf(fp_out,"angular velocity\t A1 = %lf\t D1 = %lf \n",A1,D1);
printf("\n angular acceleration\t A2 = %lf\t D2 = %lf \n",A2,D2);
fprintf(fp_out,"angular acceleration\t A2 = %lf\t D2 = %lf \n",A2,D2);
printf("\n\t Vector position\n");
fprintf(fp_out,"\n\t Vector position\n");
printf("Rx = %lf\t Ry = %lf\t Rz = %lf\n",RR[1],RR[2],RR[3]);
fprintf(fp_out,"Rx = %lf\t Ry = %lf\t Rz = %lf\n",RR[1],RR[2],RR[3]);
printf("Vx = %lf\t Vy = %lf\t Vz = %lf\n",R1[1],R1[2],R1[3]);
fprintf(fp_out,"Vx = %lf\t Vy = %lf\t Vz = %lf\n",R1[1],R1[2],R1[3]);

```

```

printf("Ax = %f\t Ay = %f\t Az = %f\n\n",R2[1],R2[2],R2[3]);
fprintf(fp_out,"Ax = %f\t Ay = %f\t Az = %f\n\n",R2[1],R2[2],R2[3]);
printf("gravitational conts = %f\n",G);
fprintf(fp_out,"gravitational conts = %f\n",G);
if(G>0.07) AB = 0;
A = A*15*Q1;
A1 = A1*15*Q1;
A2 = A2*15*Q1;
D = D*Q1;
D1 = D1*Q1;
D2 = D2*Q1;
LL[1] = cos(D)*cos(A);
LL[2] = cos(D)*sin(A);
LL[3] = sin(D);
printf("Lx = %f\t Ly = %f\t Lz = %f\n\n",LL[1],LL[2],LL[3]);
XX = sin(D)*cos(A);
YY = sin(D)*sin(A);
ZZ = cos(D);
L1[1] = -XX*D1-LL[2]*A1;
L1[2] = -YY*D1+LL[1]*A1;
L1[3] = +ZZ*D1;
printf("dLx/dt = %0.7f\t dLy/dt = %0.7f\t dLz/dt = %0.7f\n\n",L1[1],L1[2],L1[3]);
fprintf(fp_out,"dLx/dt = %0.7f\t dLy/dt = %0.7f\t dLz/dt = %0.7f\n\n",L1[1],L1[2],L1[3]);
X1 = +LL[1]*D1-YY*A1;
Y1 = +LL[2]*D1+XX*A1;
Z1 = -LL[3]*D1;
L2[1] = -X1*D1-XX*D2-L1[2]*A1-LL[2]*A2;
L2[2] = -Y1*D1-YY*D2+L1[1]*A1+LL[1]*A2;
L2[3] = +Z1*D1+ZZ*D2;
printf("d2Lx/dt2 = %0.7f\t d2Ly/dt2 = %0.7f\t d2Lz/dt2 = %0.7f\n\n",L2[1],L2[2],L2[3]);
fprintf(fp_out,"d2Lx/dt2 = %0.7f\t d2Ly/dt2 = %0.7f\t d2Lz/dt2 = %0.7f\n\n",
L2[1],L2[2],L2[3]);
D0 = FNDX(L1[1],L1[2],L1[3],L2[1],L2[2],L2[3],LL[1],LL[2],LL[3]);
AA = FNDX(L1[1],L1[2],L1[3],R2[1],R2[2],R2[3],LL[1],LL[2],LL[3])/D0;
BB = FNDX(L1[1],L1[2],L1[3],RR[1],RR[2],RR[3],LL[1],LL[2],LL[3])/D0;

```



```

CC = FNDX(R2[1],R2[2],R2[3],L2[1],L2[2],L2[3],LL[1],LL[2],LL[3])/(2*D0);
DD = FNDX(RR[1],RR[2],RR[3],L2[1],L2[2],L2[3],LL[1],LL[2],LL[3])/(2*D0);
EE = FNDP(LL[1],LL[2],LL[3],RR[1],RR[2],RR[3])*(-2);
FF = FNVS(RR[1],RR[2],RR[3]);

printf("D0 = %0.7f\n AA = %0.7f\t\t BB = %0.7f\n CC = %0.7f\t\t DD = %0.7f\n
EE=%0.7f\t\t FF = %0.7f\n\n",D0,AA,BB,CC,DD,EE,FF);

fprintf(fp_out,"D0 = %0.7f\n AA = %0.7f\t\t BB = %0.7f\n CC = %0.7f\t\t DD = %0.7f\n
EE=%0.7f\t\t FF = %0.7f\n\n",D0,AA,BB,CC,DD,EE,FF);

a = -(AA*AA+AA*EE+FF);
b = -(M)*(2*AA*BB+BB*EE);
c = -(M*M)*(BB*BB);

printf("a=%0.7f\t b=%0.7f\t c=%0.7f\n\n",a,b,c);
fprintf(fp_out,"a=%0.7f\t b=%0.7f\t c=%0.7f\n\n",a,b,c);

printf("rmin = %f\t\t rmax = %f\n",XL,XH);
fprintf(fp_out,"rmin = %f\t\t rmax = %f\n",XL,XH);

printf("approximate of r = %f\n",X);
fprintf(fp_out,"approximate of r = %f\n",X);

DX = (XH-XL)/10;
for(N=0;N<=10;N++){
    X = XL+N*DX;
    printf("%0.5f\t %0.5f\t %0.5f\n",X,FNP(X,AA,M,BB),FNF(X,a,b,c));
    fprintf(fp_out,"%0.5f\t %0.5f\t %0.5f\n",X,FNP(X,AA,M,BB),FNF(X,a,b,c));
    if(X==0) X=0.1;
}

while (fabs(FNF(X,a,b,c))>=0.0000001)
{
    X=X-FNF(X,a,b,c)/FNDF(X,a,b);
}
r = X;

printf("\nPRELIMINARY ORBITAL ELEMENTS\n");

p = FNP(X,AA,M,BB);
u = FNU(X,CC,M,DD);

for(K=1;K<=3;K++){
    R[K] = p*LL[K]-RR[K];
    V[K] = u*LL[K]+p*L1[K]-R1[K];
}

```

```

    }
    T = TA-AB*p;
    printf("T =%0.7f\t\t p=%0.7f\t\t r=%0.7f\n",T,p,r);
    fprintf(fp_out,"T =%0.7f\t\t p=%0.7f\t\t r=%0.7f\n",T,p,r);
    printf("position elements Rx=%0.7f\t\t Ry=%0.7f\t\t Rz=%0.7f\n",R[1],R[2],R[3]);
    fprintf(fp_out,"position elements Rx=%0.7f\t\t Ry=%0.7f\t\t Rz=%0.7f\n",R[1],R[2],R[3]);
    printf("velocity elements Vx=%0.7f\t\t Vy=%0.7f\t\t Vz=%0.7f\n",V[1],V[2],V[3]);
    fprintf(fp_out,"velocity elements Vx=%0.7f\t\t Vy=%0.7f\t\t Vz=%0.7f\n",V[1],V[2],V[3]);
    getch();
return(0);
}

```

- โปรแกรม OU7.cpp สำหรับหาหลักมูลวงโคจร

```

#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
double abs2(double x,double y,double z)
{
    return x*x+y*y+z*z;
}
double abs1(double x,double y,double z)
{
    return sqrt(x*x+y*y+z*z);
}
double dot(double x1,double y1,double z1,double x2,double y2,double z2)
{
    return x1*x2+y1*y2+z1*z2;
}
double arcsinh(double x)
{
    return (log(x+sqrt(x*x+1)));
}
main()

```

```

{
clrscr();

FILE *fp_out;

fp_out=fopen("356d.dat","w");

int k;

double R0[4],V0[4],NN[4],E[4],R[4],V[4],H[4];

double Q1,PI,TP,EC,CM,K,T0,v2,rv,e,AI,Q,q,SP,r,h,l,nn,OO,NE,W,XB,YB,PE,aq,
      a,MM,B,DD,CX,SX,X,MT,N,TT,AQ,ww,L;

Q1 = 0.0174532925;

PI = 3.1415926536;

/*Mars */

CM = 1.000000323;

printf("CM = 1.0000003230\n");

fprintf(fp_out,"CM = 1.0000003230\n");

/*Sat.

CM = 1.000285878;

printf("CM = 1.000285878\n");

fprintf(fp_out,"CM = 1.000285878\n");

*/

K = 0.017202099;

printf("K=%0.7lf\n",K);

fprintf(fp_out,"K=%0.7lf\n",K);

EC = 23.4392910;

printf("EC=%0.7lf\n",EC);

fprintf(fp_out,"EC=%0.7lf\n",EC);

printf("classical element of Mars\n\n",K);

fprintf(fp_out,"classical element of Mars\n\n",K);

T0 = 2451349.034720;

printf("T0 = %lf\n",T0);

fprintf(fp_out,"T0 = %0.5lf\n\n",T0);

printf("position(R) and velocity(V)\n\n");

fprintf(fp_out,"position(R) and velocity(V)\n\n");

R0[1] = -0.8092620;    R0[2] = -1.2731073;    R0[3] = -0.5627884;

printf("x = %0.7lft y = %0.7lft z = %0.7lfn",R0[1],R0[2],R0[3]);

fprintf(fp_out,"x = %0.7lft y = %0.7lft z = %0.7lfn",R0[1],R0[2],R0[3]);

```

```

V0[1] = 0.6693790;      V0[2] = -0.3034757;      V0[3] = -0.1632330;
printf("Vx = %0.7ift Vy = %0.7ift Vz = %0.7ifn\n",V0[1],V0[2],V0[3]);
fprintf(fp_out,"Vx = %0.7ift Vy = %0.7ift Vz = %0.7ifn\n",V0[1],V0[2],V0[3]);
EC = EC*Q1;
R[1] = R0[1];
R[2] = R0[2]*cos(EC)+R0[3]*sin(EC);
R[3] = R0[3]*cos(EC)-R0[2]*sin(EC);
printf("R[1] = %ift R[2] = %ift R[3] = %ifn",R[1],R[2],R[3]);
V[1] = V0[1];
V[2] = V0[2]*cos(EC)+V0[3]*sin(EC);
V[3] = V0[3]*cos(EC)-V0[2]*sin(EC);
printf("V[1] = %ift V[2] = %ift V[3] = %ifn",V[1],V[2],V[3]);
/*vectors E[k],H[k] and N[k] */
r = abs1(R[1],R[2],R[3]);
v2 = abs2(V[1],V[2],V[3]);
rv = dot(R[1],R[2],R[3],V[1],V[2],V[3]);
for(k=1;k<=3;k++){
    E[k] = ((v2/CM)-(1/r))*R[k]-(rv/CM)*V[k];
}
H[1] = (R[2]*V[3])-(R[3]*V[2]);
H[2] = (R[3]*V[1])-(R[1]*V[3]);
H[3] = (R[1]*V[2])-(R[2]*V[1]);
printf("H[1] = %ift\t H[2] = %ift H[3] = %ifn",H[1],H[2],H[3]);
NN[1] = -H[2];
NN[2] = +H[1];
NN[3] = 0;
/* elements A, E and Q */
AI = (2/r)-(v2/CM);
e = abs1(E[1],E[2],E[3]);
SP = abs2(H[1],H[2],H[3])/CM;
Q = SP/(1+e);
/* elements I, OO and W */
h = abs1(H[1],H[2],H[3]);
I = acos(H[3]/h)/Q1;
nn = abs1(NN[1],NN[2],NN[3]);

```

```

OO = acos(NN[1]/nn)/Q1;
if(NN[2]<0){
    OO = 360-OO;
}
NE = dot(NN[1],NN[2],NN[3],E[1],E[2],E[3]);
W = acos(NE/(nn*e))/Q1;
if(E[3]<0){
    W = 360-W;
}
/* elements MM and TT */
XB = (SP-r)/e;
YB = rv*sqrt(SP/CM)/e;
PE = 0;
/* determine conic section */
if(fabs(1-e)<0.001){
    /* for parabolic motion */
    AQ = Q;
    DD = rv/sqrt(CM);
    MM = Q*DD+DD*DD*DD/6;
    N = K*sqrt(CM);
    MT = T0-MM/N;
    printf("\nCLASSICAL ELEMENTS\n\n");
    fprintf(fp_out,"\nCLASSICAL ELEMENTS\n\n");
    printf("Q = %0.7lf\n",AQ);
    fprintf(fp_out,"Q = %0.7lf\n",AQ);
    printf("TT = %0.5lf\n",MT);
    fprintf(fp_out,"TT = %0.5lf\n",MT);
}else if(e > 1){
    /* for hyperbolic motion */
    AQ = 1/AI;
    B = (-1/AI)*sqrt(e*e-1);
    SX = YB/B;
    X = arcsinh(SX);
    MM = e*SX-X;
    N = K*(-AI)*sqrt(CM*(-AI));

```

```

MT = T0-MM/N;
printf("a = %0.7lf\n",AQ);
fprintf(fp_out,"a = %0.7lf\n",AQ);
printf("TT = %0.5lf\n",MT);
fprintf(fp_out,"TT = %0.5lf\n",MT);
}else if(e<1){
    /* for elliptic motion */
    AQ = 1/AI;
    B = (1/AI)*sqrt(1-e*e);
    CX = XB*AI+e;
    SX = YB/B;
    if(fabs(SX) <= 0.707107) X = asin(fabs(SX));
    if(fabs(CX) <= 0.707107) X = acos(fabs(CX));
    if((CX >= 0) && (SX >= 0)) X = X;
    if((CX < 0) && (SX >= 0)) X = 180*Q1-X;
    if((CX < 0) && (SX < 0)) X = 180*Q1+X;
    if((CX >= 0) && (SX < 0)) X = 360*Q1-X;
    MM = X-e*SX;
    MT = MM/Q1;
    N = K*AI*sqrt(CM*AI);
    TP = T0-MM/N;
    PE = (2*PI/K)*sqrt(1/(CM*AI*AI*AI));
    printf("a = %0.7lf\n",AQ);
    fprintf(fp_out,"a = %0.7lf\n",AQ);
    printf("MM = %0.5lf\n",MT);
    fprintf(fp_out,"MM = %0.5lf\n",MT);
}
printf("e = %0.7lf\n",e);
fprintf(fp_out,"e = %0.7lf\n",e);
printf("l = %0.5lf\n",l);
fprintf(fp_out,"l = %0.5lf\n",l);
printf("OO = %0.5lf\n",OO);
fprintf(fp_out,"OO = %0.5lf\n",OO);
printf("W = %0.5lf\n",W);
fprintf(fp_out,"W = %0.5lf\n",W);

```

```

        if(PE != 0){
            printf("TT = %0.5lf\n",TP);
            fprintf(fp_out,"TT = %0.5lf\n",TP);
            printf("period = %0.5lf",PE);
            fprintf(fp_out,"period = %0.5lf",PE);
        }
    getch();
    return(0);
}

```

- โปรแกรม OU8.cpp สำหรับคำนวณย้อนกลับหาตำแหน่งและความเร็วในวงโคจร

```

/* Orbital Element of Mars */
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
main()
{
    FILE *fp;
    double Q1,mu,rr,i,a,OO,W,MM,e,ee,f,df,E,b,dE,xb,yb,dxb,dyb;
    double PP[4],QQ[4],r[4],v[4],R[4],V[4];
    int k;
    clrscr();
    fp=fopen("a:out-mar","w");
    Q1=M_PI/180.0;
    ee = 23.439291;
    mu=1.000000323;;
    a=1.4739642;
    printf("a = %0.7lf\n",a);
    fprintf(fp,"a = %0.7lf\n",a);
    MM=211.97349;
    printf("MM = %0.7lf\n",MM);
    fprintf(fp,"MM = %0.7lf\n",MM);
    e=0.1041217;

```

```

printf("e = %.7lf\n",e);
fprintf(fp,"e = %.7lf\n",e);
i=2.26196;
printf("i = %.7lf\n",i);
fprintf(fp,"i = %.7lf\n",i);
OO=50.89053;
printf("OO = %.7lf\n",OO);
fprintf(fp,"OO = %.7lf\n",OO);
W=342.69451;
printf("W = %.7lf\n\n",W);
fprintf(fp,"W = %.7lf\n\n",W);
ee=ee*Q1;
i=i*Q1;
OO=OO*Q1;
W=W*Q1;
MM=MM*Q1;
E=MM;
do
{
f=E-e*sin(E)-MM;
df=1.0-e*cos(E);
E=E-(f/df);
}while(fabs(f)>=1.0e-6);
rr=a*(1.0-e*cos(E));
dE=sqrt(mu/a)/ rr;
b=a*sqrt(1.0-e*e);
xb=a*(cos(E)-e);
yb=b*sin(E);
dxb=-a*dE*sin(E);
dyb=+b*dE*cos(E);
PP[1]=+cos(W)*cos(OO)-sin(W)*sin(OO)*cos(i);
PP[2]=+cos(W)*sin(OO)+sin(W)*cos(OO)*cos(i);
PP[3]=+sin(W)*sin(i);
QQ[1]=-sin(W)*cos(OO)-cos(W)*sin(OO)*cos(i);
QQ[2]=-sin(W)*sin(OO)+cos(W)*cos(OO)*cos(i);

```



สถาบันวิทยบริการ  
 คุรุศาสตร์มหาวิทาลัย



```

QQ[3]=+cos(W)*sin(i);
for(k=1;k<=3;k++)
{
r[k]=xb*PP[k]+yb*QQ[k];
v[k]=dxb*PP[k]+dyb*QQ[k];
R[1]=r[1];
R[2]=r[2]*cos(ee)-r[3]*sin(ee);
R[3]=r[3]*cos(ee)+r[2]*sin(ee);
V[1]=v[1];
V[2]=v[2]*cos(ee)-v[3]*sin(ee);
V[3]=v[3]*cos(ee)+v[2]*sin(ee);
}
printf("To recompute the position and velocity elements from the classical elements.\n");
fprintf(fp,"To recompute the position and velocity elements from the classical elements.\n");
printf("x = %.7lf\t y = %.7lf\t z = %.7lf\n",R[1],R[2],R[3]);
printf("Vx= %.7lf\t Vy= %.7lf\t Vz= %.7lf\n\n",V[1],V[2],V[3]);
fprintf(fp,"x = %.7lf\t y = %.7lf\t z = %.7lf\n",R[1],R[2],R[3]);
fprintf(fp,"Vx= %.7lf\t Vy= %.7lf\t Vz= %.7lf\n\n",V[1],V[2],V[3]);
getch();
return(0);
fclose(fp);
}

```

- โปรแกรม OU9.cpp สำหรับคำนวณย้อนกลับหาตำแหน่งเชิงมุมของดาวเคราะห์

```

#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
double mag(double x[4][4],double y[4][4],int a,int b)
{
double s=0.0;
int i;
for (i=1;i<=3;i=i+1)
{
s=s+(x[a][i]*y[b][i]);
}
}

```

```

    }
    return sqrt(s);
}
double findfg(double *a,double *b,double dt,double m,double k,int choose)
{
    double r0,d0,ai,c0,ww,xx,x2,x3,xa,cc,uu,ss,B[20],fx,df;
    double f,g,r,fp,gp,result;
    int i;
    r0=sqrt((a[1]*a[1])+(a[2]*a[2])+(a[3]*a[3]));
    d0=((a[1]*b[1])+(a[2]*b[2])+(a[3]*b[3]))/sqrt(m);
    ai=(2.0/r0)-((b[1]*b[1])+(b[2]*b[2])+(b[3]*b[3]))/m;
    c0=1.0-(r0*ai);
    ww=k*sqrt(m)*dt;
    xx=ww/r0;
    B[1]=1.0;
    for (i=2;i<=19;i=i+1)
    {
        B[i]=B[i-1]/i;
    }
    do
    {
        x2=xx*xx;
        xa=x2*ai;
        x3=x2*xx;
        cc=x2*(B[2]-xa*(B[4]-xa*(B[6]-xa*(B[8]-xa*(B[10]-xa*(B[12]-xa*(B[14]-xa*(B[16]-
xa*(B[18]))))))));
        uu=x3*(B[3]-xa*(B[5]-xa*(B[7]-xa*(B[9]-xa*(B[11]-xa*(B[13]-xa*(B[15]-xa*(B[17]-
xa*(B[19]))))))));
        ss=xx-uu*ai;
        fx=r0*xx+c0*uu+d0*cc-ww;
        df=r0+c0*cc+d0*ss;
        xx=xx-(fx/df);
    }while(fabs(fx)>1e-8);
    f=1.0-(cc/r0);
    g=(r0*ss+d0*cc)/sqrt(m);

```

```

r=r0+c0*cc+d0*ss;
fp=-sqrt(m)*ss/(r*r0);
gp=1.0-(cc/r);
    if (choose ==1)
        result=f;
    else if (choose ==2)
        result=g;
    else if (choose ==3)
        result=fp;
    else if (choose ==4)
        result=gp;
return result;
}
main()
{
FILE *fp_out;
double t[101],r[101][4],v[101][4],R[4],R1[4],V1[4],pp[4],ll[4];
double dt,f,g,fg,gp,ab,n,e,k,m,tf,ns,ap,p,Q1,x,cd,cx,sx,a,d,am,ah,ac,dd,dm,dc;
int i,j,l;
clrscr();
fp_out=fopen("a:radec1.dat","w");
/* Initial values */
    ab=1.0/173.1446;
// epoch time
    t[0]=349.034722;
    //given time for Ra and Dec position
    tf=323.041667;//351.072917;
// position of the dynamical center for epoch time t
    R[1]=0.4605330;//0.0384463;
    R[2]=0.8274426;//0.9315995;
    R[3]=0.3587269;//0.4038914;
    Q1=M_PI/180.0;
    k=0.01720209895;
    m=1.000000323;
    ns=1.0;

```

```

dt=(tf-t[0])/ns;
// position element at epoch time
r[0][1]=-0.8071161;
r[0][2]=-1.2721274;
r[0][3]=-0.5623438;
// velocity element at epoch time
v[0][1]=0.6682083;
v[0][2]=-0.3035067;
v[0][3]=-0.1632338;
for (i=0;i<=ns;i=i+1)
{
    if (i==0)
    {
printf("t(l)\t\t x\t\t y\t\t z\t\t r0\n");
printf("%.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",t[i],r[0][1],r[0][2],r[0][3],mag(r,r,0,0));
fprintf(fp_out,"t(l)\t\t x\t\t y\t\t z\t\t r0\n");
fprintf(fp_out,"%.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",t[i],r[0][1],r[0][2],r[0][3],mag(r,r,0,0));
    }
    else
    {
t[i]=t[i-1]+dt;
/* send r[101][4],v[101][4] into findfg function */
R1[1]=r[i-1][1];R1[2]=r[i-1][2];R1[3]=r[i-1][3];
V1[1]=v[i-1][1];V1[2]=v[i-1][2];V1[3]=v[i-1][3];
f=findfg(R1,V1,dt,m,k,1);
g=findfg(R1,V1,dt,m,k,2);
fg=findfg(R1,V1,dt,m,k,3);
gp=findfg(R1,V1,dt,m,k,4);
for (j=1;j<=3;j=j+1)
{
r[i][j]=f*r[i-1][j]+g*v[i-1][j];
v[i][j]=fg*r[i-1][j]+gp*v[i-1][j];
}
printf("%.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",t[i],r[i][1],r[i][2],r[i][3],mag(r,r,i,i));
printf("\t\t Vx\t\t Vy\t\t Vz\t\t V\t\t");

```

```

printf("\t\t%.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",v[i][1],v[i][2],v[i][3],mag(v,v,i,i));
fprintf(fp_out,"%%.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n\n",t[i],r[i][1],r[i][2],r[i][3],mag(r,r,i,i));
fprintf(fp_out,"\t\t Vx\t\t Vy\t\t Vz\t\t V\t\t");
fprintf(fp_out,"\t\t%.7lf\t %.7lf\t %.7lf\t %.7lf\n",v[i][1],v[i][2],v[i][3],mag(v,v,i,i));
    }
}
for (l=i-1;l>=1;l=l-1)
{
    for (j=1;j<=3;j=j+1)
    {
        pp[j]=r[l][j]+R[j];
    }
    p=sqrt(pp[1]*pp[1]+pp[2]*pp[2]+pp[3]*pp[3]);
    ap=ab*p;
    while(t[l]-(tf-ap)>1e-5)
    {
        t[l]=tf-ap;
        dt=t[l]-t[l-1];
        R1[1]=r[l-1][1];R1[2]=r[l-1][2];R1[3]=r[l-1][3];
        V1[1]=v[l-1][1];V1[2]=v[l-1][2];V1[3]=v[l-1][3];
        f=findfg(R1,V1,dt,m,k,1);
        g=findfg(R1,V1,dt,m,k,2);
        for (j=1;j<=3;j=j+1)
        {
            r[l][j]=f*(r[l-1][j])+g*(v[l-1][j]);
        }
        for (j=1;j<=3;j=j+1)
        {
            pp[j]=r[l][j]+R[j];
        }
        p=sqrt(pp[1]*pp[1]+pp[2]*pp[2]+pp[3]*pp[3]);
        ap=ab*p;
    }
    for (j=1;j<=3;j=j+1)
    {

```

```

    ll[j]=pp[j]/p;
}
cd=sqrt(1.0-(ll[3]*ll[3]));
cx=ll[1]/cd;
sx=ll[2]/cd;
if (sx<=0.707107)
{
    x=asin(fabs(sx));
}
if (cx<=0.707107)
{
    x=acos(fabs(cx));
}
if (cx>=0.0 && sx>=0.0) x=x;
else if (cx<0.0 && sx>=0.0) x=180.0*Q1-x;
else if (cx<0.0 && sx<0.0) x=180.0*Q1+x;
else if (cx>=0.0 && sx<0.0) x=360.0*Q1-x;
a=x/(15.0*Q1);
d=(asin(ll[3])/Q1);
printf("\n light time %.7f\n\n",tf);
printf("r[1]=%.7f\tr[2]=%.7f\tr[3]=%.7f\tmag(r)=%.7f\n",r[1][1],r[1][2],r[1][3],mag(r,r,1,1));
printf("v[1]=%.7f\tv[2]=%.7f\tv[3]=%.7f\tmag(v)=%.7f\n\n",v[1][1],v[1][2],v[1][3],mag(v,v,1,1));
fprintf(fp_out,"\n light time %.7f\n\n",tf);
fprintf(fp_out,"r[1]=%.7f\tr[2]=%.7f\tr[3]=%.7f\tmag(r)=%.7f\n",r[1][1],r[1][2],r[1][3],mag(r,r,1,1));
fprintf(fp_out,"v[1]=%.7f\tv[2]=%.7f\tv[3]=%.7f\tmag(v)=%.7f\n\n",v[1][1],v[1][2],v[1][3],mag(v,v,1,1
));
    printf("a=%.7f\td=%.7f\tp=%.7f\n",a,d,p);
    fprintf(fp_out,"a=%.7f\td=%.7f\tp=%.7f\n",a,d,p);
}
getch();
return(0);
}

```

- โปรแกรม OU10.cpp สำหรับปรับปรุงวงโคจร

```

#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#define NP 9
#define PC 3.0
#define NM 6
double findfg(double *a,double *b,double dt,double m,double k,int choose)
{
    double r0,d0,ai,c0,ww,xx,x2,x3,xa,cc,uu,ss,B[20],fx,df;
    double f,g,r,fp,gp,result;
    int i;
    B[1]=1.0;
    for (i=2;i<=19;i=i+1){
        B[i]=B[i-1]/i;
    }
    r0=sqrt((a[1]*a[1])+(a[2]*a[2])+(a[3]*a[3]));
    d0=((a[1]*b[1])+(a[2]*b[2])+(a[3]*b[3]))/sqrt(m);
    ai=(2.0/r0)-((b[1]*b[1])+(b[2]*b[2])+(b[3]*b[3]))/m;
    c0=1.0-(r0*ai);
    ww=k*sqrt(m)*dt;
    xx=ww/r0;
    do{
        x2=xx*xx;
        xa=x2*ai;
        x3=x2*xx;
        cc=x2*(B[2]-xa*(B[4]-xa*(B[6]-xa*(B[8]-xa*(B[10]-xa*(B[12]
        -xa*(B[14]-xa*(B[16]-xa*(B[18]))))))));
        uu=x3*(B[3]-xa*(B[5]-xa*(B[7]-xa*(B[9]-xa*(B[11]-xa*(B[13]
        -xa*(B[15]-xa*(B[17]-xa*(B[19]))))))));
        ss=xx-uu*ai;
        fx=r0*xx+c0*uu+d0*cc-ww;
        df=r0+c0*cc+d0*ss;
        xx=xx-(fx/df);
    }while(fabs(fx)>1e-8);
}

```

```

f=1.0-(cc/r0);
g=(r0*ss+d0*cc)/sqrt(m);
r=r0+c0*cc+d0*ss;
fp=-sqrt(m)*ss/(r*r0);
gp=1.0-(cc/r);
if (choose ==1)
result=f;
else if (choose ==2)
result=g;
else if (choose ==3)
result=fp;
else if (choose ==4)
result=gp;
return result;
}
double findad(double *p,double q,int sel)
{
double sx,cx,l[4],pp,x,cd,result;
int k;
pp=sqrt((p[1]*p[1])+p[2]*p[2]+(p[3]*p[3]));
for (k=1;k<=3;k=k+1){
l[k]=p[k]/pp;
}
cd=sqrt(1.0-l[3]*l[3]);
cx=l[1]/cd;
sx=l[2]/cd;
if (sx<=0.707107){
x=asin(fabs(sx));
}
if (cx<=0.707107){
x=acos(fabs(cx));
}
if (cx>=0.0 && sx>=0.0) x=x;
else if (cx<0.0 && sx>=0.0) x=180.0*q-x;
else if (cx<0.0 && sx<0.0) x=180.0*q+x;

```

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



```

else if (cx>=0.0 && sx<0.0) x=360.0*q-x;
if (sel==1) result=x/(15.0*q);
else if (sel==2) result=(asin(l[3]))/q;
return result;
}

```

```

double finddc(double x[2*NP+1][NM+2],int sel,int nm,int np)
{
double a[2*NP+1][NM+2],pe,cd,he,ss,result,xu[NM+1],ce;
int j,i,k,l,ll,nn,ne,jp;
ne=2*np;
for (j=1;j<=nm;j=j+1){
for (k=1;k<=nm+1;k=k+1){
a[j][k]=0.0;
for (i=1;i<=ne;i=i+1){
a[j][k]=a[j][k]+(x[i][j]*x[i][k]);
}
}
}
nn=nm;
for (i=1;i<=nn-1;i=i+1){
jp=i;
pe=fabs(a[i][i]);
for (j=i+1;j<=nn;j=j+1){
ce=fabs(a[j][i]);
if (ce-pe < 0.0){
if (jp==i){
for (l=i+1;l<=nn;l=l+1){
for (ll=i+1;ll<=nn+1;ll=ll+1){
a[l][ll]=a[l][ll]-(a[l][i]*a[i][ll])/a[i][i];
}
}
a[l][i]=0.0;
}
}
}
}
}
for (k=i;k<=nn+1;k=k+1){

```



```

FILE *fp_out;
fp_out=fopen("a:result1.dat","w");
double ta[NP+1],a0[NP+1],d0[NP+1],t[NP+1],R[NP+1][4],V[NP+1][4];
double RR[NP+1][4],eo[NM+1],x[2*NP+1][NM+2],sm[2*NP+1],s[2*NP+1];
double dd[NP+1],da[NP+1],pe[NM+1],ac[NP+1][NM+1],pa[NP+1][NM+1];
double ll[4],p[4],xu[NM+1],A[NM][NM+2],pl[4],pd[NP+1][NM+1];
double dc[NP+1][NM+1],ce[NM+1],r[4],v[4],Rr[NP+1];
double ab,E,K,M,ne,PE,CE,jp,Q1,pp,ap,al,ba,dt,f,g,rr,fp,gp;
int i,j,k,l,m,z,zz;
char c;
clrscr();
ab=1.0/173.1446;
K=0.01720209895;
Q1=M_PI/180.0;
M=1.000000323;
t[0]=2451349.034722;
//ta[1]= 2451195.31597222;  a0[1]= 13.67801201;  d0[1]= -7.36931426;
//RR[1][1]=0.4349669;      RR[1][2]=-0.8095246;  RR[1][3]=-0.3509971;
ta[1]= 2451202.34375000;  a0[1]= 13.84286276;  d0[1]= -9.13251284;
RR[1][1]=0.5417748;      RR[1][2]=-0.7539469;  RR[1][3]=-0.3269017;
// ta[3]= 2451209.31250000;  a0[3]= 14.01560862;  d0[3]= -10.05597818;
// RR[3][1]=0.6394509;      RR[3][2]=-0.6874523;  RR[3][3]=-0.2980722;
ta[2]= 2451223.32291667;  a0[2]= 14.33969364;  d0[2]= -11.58187098;
RR[2][1]=0.8055674;      RR[2][2]=-0.5238330;  RR[2][3]=-0.2271267;
// ta[5]= 2451230.31250000;  a0[5]= 14.46349353;  d0[5]= -12.22654862;
// RR[5][1]=0.8708552;      RR[5][2]=-0.4296632;  RR[5][3]=-0.1863023;
ta[3]= 2451237.29166667;  a0[3]= 14.57136674;  d0[3]= -12.79517107;
RR[3][1]=0.9230144;      RR[3][2]=-0.3292615;  RR[3][3]=-0.1427706;
ta[4]= 2451251.29861111;  a0[4]= 14.69500933;  d0[4]= -13.32072846;
RR[4][1]=0.9860455;      RR[4][2]=-0.1147024;  RR[7][4]=-0.0497404;
// ta[8]= 2451259.21875000;  a0[8]= 14.69292719;  d0[8]= -13.45352043;
//RR[8][1]=0.9960549;      RR[8][2]=0.0105485;  RR[8][3]=0.0045525;
ta[5]= 2451262.27083333;  a0[5]= 14.68474172;  d0[5]= -13.37736843;
RR[5][1]=0.9948931;      RR[5][2]=0.0588571;  RR[5][3]=0.0255045;
// ta[10]= 2451263.39583333;  a0[10]= 14.68248306;  d0[10]= -13.36655223;

```

```

// RR[10][1]=0.9937795;      RR[10][2]=0.0766013;  RR[10][3]=0.0332112;
ta[6]= 2451290.16666667;  a0[6]= 14.22364284;    d0[6]= -11.70690724;
RR[6][1]=0.8602096;      RR[6][2]=0.4766134;  RR[6][3]=0.2066227;
// ta[12]=2451301.13541667;  a0[12]=13.54526569;    d0[12]=-10.75695714;
// RR[12][1]=0.7512771;      RR[12][2]=0.6162545;  RR[12][3]=0.2671693;
ta[7]=2451314.20833333;  a0[7]=13.68330792;    d0[7]=-9.93408355;
RR[7][1]=0.5878382;      RR[7][2]=0.7545220;  RR[7][3]=0.3271224;
// ta[14]=2451323.04166667;  a0[14]=13.55816263;    d0[14]=-9.46897649;
// RR[14][1]=0.4605330;      RR[14][2]=0.8274426;  RR[14][3]=0.3587269;
ta[8]= 2451344.13194444;  a0[8]= 13.48964433;    d0[8]= -10.23540606;
RR[8][1]=0.1211708;      RR[8][2]=0.9252174;  RR[8][3]=0.4011301;
// ta[16]= 2451351.07291667;  a0[16]= 13.60621825;    d0[16]= -10.93958941;
// RR[16][1]=0.0039604;      RR[16][2]=0.9323706;  RR[16][3]=0.4042317;
ta[9]= 2451412.04861111;  a0[9]= 15.31457423;    d0[9]= -19.96497034;
RR[9][1]=-0.8585130;  RR[9][2]=0.4910007;  RR[9][3]=0.2128856;
// ta[18]= 2451425.07291667;  a0[18]=15.86395426;    d0[18]=-21.97906186;
// RR[18][1]=-0.9516725;      RR[18][2]=0.3068897;  RR[18][3]=0.1330603;
// ta[19]=2451430.04166667;  a0[19]=16.08702599;    d0[19]=-22.59886977;
// RR[19][1]=-0.9752408;      RR[19][2]=0.2321729;  RR[19][3]=0.1006697;
//ta[20]= 2451462.00000000;  a0[20]= 17.52560729;    d0[20]= -25.95087608;
// RR[20][1]=-0.9562769;      RR[20][2]=-0.2640905;  RR[20][3]=-0.1144844;
eo[1]=-0.6919470;
eo[2]=-1.2192844;
eo[3]=-0.5376095;
eo[4]=0.7593082;
eo[5]=-0.2521905;
eo[6]=-0.1363780;
do{
  for (z=0;z<=NM;z=z+1){
    for (j=1;j<=NM;j=j+1){
      ce[j]=eo[j];
    }
    for (j=1;j<=NP;j=j+1){
      t[j]=ta[j];
    }
  }
}

```

```

if (z!=0){
    pe[z]=fabs(eo[z]*PC/100.0);
    ce[z]=eo[z]+pe[z];
}
for (k=1;k<=3;k=k+1){
    R[0][k]=ce[k];
    V[0][k]=ce[k+3];
}
for (i=1;i<=NP;i=i+1){
    al=t[i];
    r[1]=R[i-1][1];r[2]=R[i-1][2];r[3]=R[i-1][3];
    v[1]=V[i-1][1];v[2]=V[i-1][2];v[3]=V[i-1][3];
    for (k=1;k<=3;k=k+1) p[k]=0.0;
    do{
        for (k=1;k<=3;k=k+1) pl[k]=p[k];
        t[i]=al;
        dt=t[i]-t[i-1];
        f=findfg(r,v,dt,M,K,1);
        g=findfg(r,v,dt,M,K,2);
        fp=findfg(r,v,dt,M,K,3);
        gp=findfg(r,v,dt,M,K,4);
        for (j=1;j<=3;j=j+1){
            R[i][j]=(f*R[i-1][j])+(g*V[i-1][j]);
            V[i][j]=(fp*R[i-1][j])+(gp*V[i-1][j]);
            p[j]=R[i][j]+RR[i][j];
        }
        pp=sqrt((p[1]*p[1])+(p[2]*p[2])+(p[3]*p[3]));
        ap=ab*pp;
        al=ta[i]-ap;
    }while(t[i]-al>1e-5);
    ac[i][z]=finddad(pl,Q1,1);
    dc[i][z]=finddad(pl,Q1,2);
}
if (z==0){
    for (k=1;k<=NP;k=k+1){

```

```

        da[k]=a0[k]-ac[k][z];
        dd[k]=d0[k]-dc[k][z];
// printf("ta(%d)=%lf da(%d)=%.5lf dd(%d)=%.5lf\n",k,ta[k],k,da[k],k,dd[k]);
    }
    printf("Continue? ");
    scanf("%s",&c);
    printf("\n");
    if (c=='y')
        zz=1;
    else{
        zz=NM;
        z=NM;
    }
}
}
for (i=1;i<=NP;i=i+1){
    for (j=1;j<=NM;j=j+1){
        pa[i][j]=Q1*15.0*(ac[i][j]-ac[i][0])/pe[j];
        pd[i][j]=Q1*(dc[i][j]-dc[i][0])/pe[j];
//printf("pa(%d,%d)=%lf,pd(%d,%d)=%lf\n",i,j,pa[i][j],i,j,pd[i][j]);
    }
}
for (i=1;i<=NP;i=i+1){
    for (m=1;m<=NM;m=m+1){
        x[i][m]=pa[i][m];
        x[i+NP][m]=pd[i][m];
    }
    x[i][7]=Q1*15.0*da[i];
    x[i+NP][7]=Q1*dd[i];
}
for (i=1;i<=NM;i=i+1){
    xu[i]=finddc(x,i,NM,NP);
    eo[i]=eo[i]+xu[i];
    if (c=='y'){
        printf("de[%d]=%.7f\n",i,xu[i]);

```

```
        fprintf(fp_out,"de[%d]=%.7lf\n",i,xu[i]);
    }
}
printf("\n");
if (c=='y'){
    for (i=1;i<=NM;i=i+1){
        printf("eo(%d)=%.7lf\n",i,eo[i]);
        fprintf(fp_out,"eo(%d)=%.7lf\n",i,eo[i]);
    }
}
}
}while(zz<=NM-1);
return(0);
}
```



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาว อุไรวรรณ บัวคง เกิดเมื่อวันที่ 10 เดือนตุลาคม ปี พ.ศ. 2519 ที่อำเภอชะอวด จังหวัดนครศรีธรรมราช จบปริญญาตรีครุศาสตรบัณฑิต วิชาเอกคุวิทยาการและฟิสิกส์จาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ. 2541 ปัจจุบันเป็นนิสิตปริญญาโทคณะวิทยาศาสตร์(ดาราศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย