



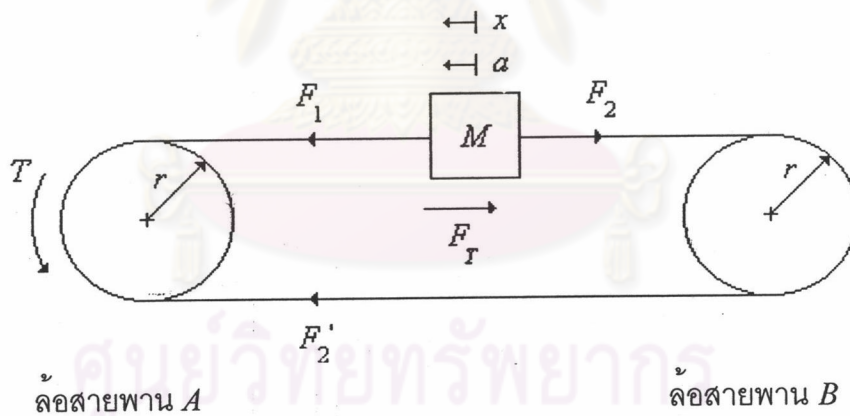
บทที่ 4

การออกแบบโปรแกรมชุดควบคุม

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโต๊ะเอ็กซ์วายแซด

ในการหาค่าเกน (gain) ของตัวควบคุม (controller) จะต้องทดสอบดูว่าค่าเกนที่หาได้ ให้ผลของการเคลื่อนที่เป็นอย่างไร ซึ่งเมื่อทำการทดสอบจริง ถ้าค่าเกนที่ใช้มีค่าไม่เหมาะสม อาจทำให้ระบบเกิดสภาวะไม่เสถียร (unstable) ซึ่งอาจจะนำความเสียหายมาสู่ระบบ ดังนั้นขั้นตอนแรกของการหาค่าเกน จะใช้วิธีการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ (mathematical simulation) ระบบทั้งหมดด้วยคอมพิวเตอร์

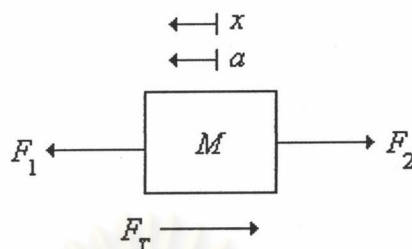
ในการออกแบบระบบควบคุมจะถือว่าการเคลื่อนที่ในแนวแกนหนึ่ง จะไม่มีผลกระทบต่อเคลื่อนที่ของอีกแกนหนึ่ง สำหรับสมการทางคณิตศาสตร์ที่แทนระบบสามารถหาได้ดังนี้ คือ



รูปที่ 4.1 รูปแสดงระบบขับเคลื่อนของแกนเอ็กซ์และแกนวาย

จากรูปที่ 4.1 แสดงถึงระบบการเคลื่อนที่ของทั้งแกนเอ็กซ์และแกนวาย โดยมีมอเตอร์และชุดเฟืองทดติดอยู่กับแกนของล้อสายพาน A ส่งกำลังผ่านลวดสลิง ทำให้ระบบแกนซึ่งมีมวล M เคลื่อนที่ มีแรงต้านการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ F_r ซึ่งเกิดจากแรงเสียดทานของตลับลูกปืนที่ใช้ทำลูกล้อของระบบแกน

พิจารณาผังวัตถุอิสระ (free body diagram) ที่มวล M



รูปที่ 4.2 รูปแสดงผังวัตถุอิสระของมวล M

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\sum F = ma$$

$$F_1 - F_2 - F_T = ma$$

$$F_1 - F_2 - \mu mg = ma \quad (4-1)$$

แทนค่า $a = r\ddot{\theta}$ ลงในสมการที่ (4-1)

$$F_1 - F_2 = M(r\ddot{\theta} + \mu g) \quad (4-2)$$

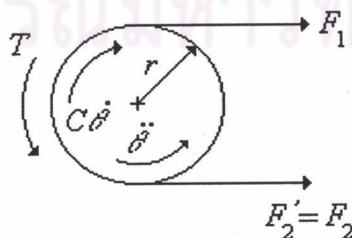
กำหนดให้

$$\mu = \text{ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานของตลับลูกปืน} = 0.015$$

$$g = \text{ค่าความเร่งของแรงดึงดูดโลก} = 9.81 \text{ เมตร/วินาที}^2$$

$$r = \text{รัศมีของล้อสายพาน} = 0.025 \text{ เมตร}$$

พิจารณาผังวัตถุอิสระ (free body diagram) ที่ล้อสายพาน A



รูปที่ 4.3 รูปแสดงผังวัตถุอิสระของล้อสายพาน A

ถ้าไม่คิดแรงเสียดทานที่แกนของล้อสายพาน B จะได้ว่า $F_2' = F_2$ และจากสมการ

$$\begin{aligned}\sum T &= J\ddot{\theta} \\ T - r(F_1 - F_2) - C\dot{\theta} &= J\ddot{\theta}\end{aligned}\quad (4-3)$$

กำหนดให้

T คือ ค่าแรงบิดที่ได้จากมอเตอร์

J คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อสายพานและมอเตอร์

C คือ ค่าสัมประสิทธิ์วิสคัสแดมป์ของมอเตอร์

จากสมการที่ (4-2) แทนค่าลงในสมการที่ (4-3) จะได้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ (4-4)

$$\begin{aligned}T - r^2 M\ddot{\theta} - \mu r Mg &= J\ddot{\theta} + C\dot{\theta} \\ (T - r^2 M)\ddot{\theta} + C\dot{\theta} &= T - \mu r Mg\end{aligned}\quad (4-4)$$

เนื่องจาก $\theta = \frac{x}{r}$ แทนค่าลงในสมการที่ (4-4) จะได้

$$(J + r^2 M)\left(\frac{\ddot{x}}{r}\right) + C\left(\frac{\dot{x}}{r}\right) = T - \mu r Mg$$

$$(J + r^2 M)\ddot{x} + C\dot{x} = Tr - \mu r^2 Mg$$

ดังนั้นจะได้สมการพลศาสตร์ (Dynamic Model) ของแกนเอ็กซ์และแกนวาย คือ

$$(J_x + r^2 M_x)\ddot{x} + C_x \dot{x} = T_x r - \mu r^2 M_x g \quad (4-5)$$

$$(J_y + r^2 M_y)\ddot{y} + C_y \dot{y} = T_y r - \mu r^2 M_y g \quad (4-6)$$

กำหนดให้

F_1, F_2, F_3 คือ แรงดึงในเส้นลวดสลิง

F_T คือ แรงต้านการเคลื่อนที่ ซึ่งเกิดจากแรงเสียดทานของลูกปืนที่ใช้ทำลูกล้อของระบบแกน

x คือ ระยะที่มวล M เคลื่อนที่ไป

a คือ ความเร่งของมวล M

r คือ คาบรัศมีของล้อสายพาน

T_x, T_y คือ ค่าแรงบิดที่ได้จากมอเตอร์ ในแนวแกนเอ็กซ์และแกนวาย

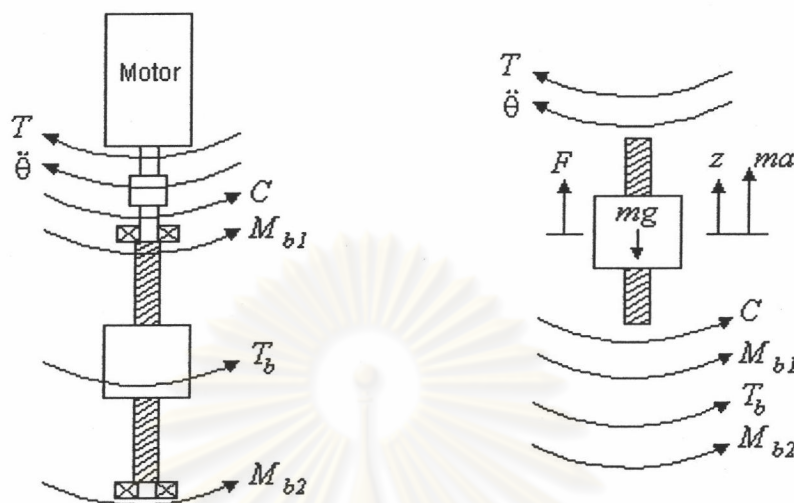
J_x, J_y คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของล้อสายพานและมอเตอร์ ในแกนเอ็กซ์และแกนวาย

M_x, M_y คือ มวลของระบบในเอ็กซ์และแกนวาย

C_x, C_y คือ ค่าสัมประสิทธิ์วิสคัสแดมป์ของมอเตอร์แกนเอ็กซ์และแกนวาย

μ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานของดัลบลูกปืน

พิจารณาผังวัตถุอิสระ (free body diagram) ของแกนแฮด กรณีเคลื่อนที่ขึ้น



รูปที่ 4.4 รูปแสดงผังวัตถุอิสระของระบบขับเคลื่อนของแกนแฮด กรณีเคลื่อนที่ขึ้น

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\sum F = ma$$

$$F - mg = m\ddot{z}$$

$$F = m(\ddot{z} + g) \quad (4-7)$$

$$\sum T = J\ddot{\theta}$$

$$T - C\dot{\theta} - T_b - M_{b1} - M_{b2} = (J_m + J_{screw} + J_{mass})\ddot{\theta} \quad (4-8)$$

จากคู่มือการคำนวณของลิเนียร์บอลสกรูจะได้ว่า

$$T_b = \frac{FL_e}{2\pi\eta} \quad (4-9)$$

แทนสมการที่ (4-7) ลงในสมการที่ (4-9) จะได้

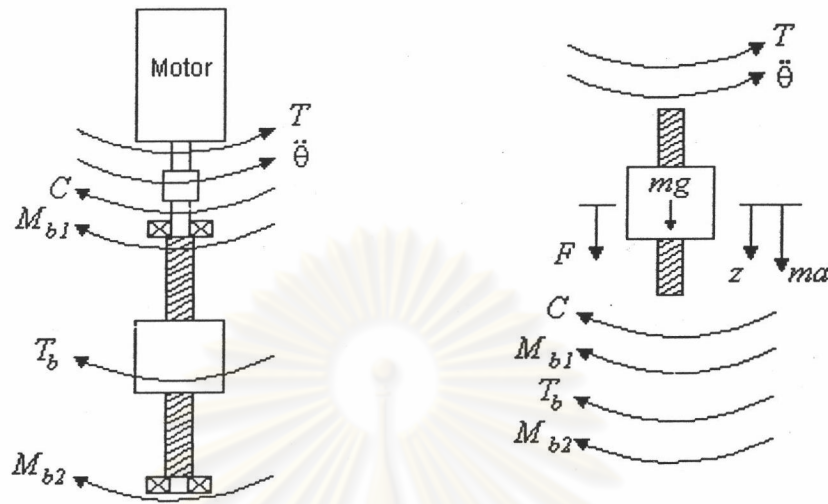
$$T_b = \frac{m(\ddot{z} + g)L_e}{2\pi\eta} \quad (4-10)$$

เนื่องจาก $\theta = \left(\frac{2\pi}{L_e}\right)z$ แทนค่าลงในสมการที่ (4-8) จะได้สมการพลศาสตร์ (Dynamic Model)

ของแกนแฮด กรณีเคลื่อนที่ขึ้น คือ

$$\left(J_m + \frac{m_{screw}a^2}{2} + \frac{mL_e^2}{4\pi^2} + \frac{mL_e^2}{4\pi^2\eta} \right) \frac{2\pi}{L_e} \ddot{z} + C \frac{2\pi}{L_e} \dot{z} = T - \frac{mgL_e}{2\pi\eta} - M_{b1} - M_{b2} \quad (4-11)$$

พิจารณาผังวัตถุอิสระ (free body diagram) กรณีเคลื่อนที่ลง



รูปที่ 4.5 รูปแสดงผังวัตถุอิสระของระบบขับเคลื่อนของแกนแฮด กรณีเคลื่อนที่ลง

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\sum F = ma$$

$$F + mg = m\ddot{z}$$

$$F = m(\ddot{z} - g) \quad (4-12)$$

$$\sum T = J\ddot{\theta}$$

$$T - C\dot{\theta} - T_b - M_{b1} - M_{b2} = (J_m + J_{screw} + J_{mass})\ddot{\theta} \quad (4-13)$$

แทนสมการที่ (4-12) ลงในสมการที่ (4-9) จะได้

$$T_b = \frac{m(\ddot{z} - g)L_e}{2\pi\eta} \quad (4-14)$$

เนื่องจาก $\theta = \left(\frac{2\pi}{L_e}\right)z$ แทนค่าลงในสมการที่ (4-13) จะได้สมการพลศาสตร์ (Dynamic Model)

ของแกนแฮด กรณีเคลื่อนที่ลง คือ

$$\left(J_m + \frac{m_{screw}a^2}{2} + \frac{mL_e^2}{4\pi^2} + \frac{mL_e^2}{4\pi^2\eta} \right) \frac{2\pi}{L_e} \ddot{z} + C \frac{2\pi}{L_e} \dot{z} = T + \frac{mgL_e}{2\pi\eta} - M_{b1} - M_{b2} \quad (4-15)$$

กำหนดให้

T คือ ค่าแรงบิดของมอเตอร์

T_b คือ ค่าแรงเสียดทานที่บอลล์สกรู

m คือ มวลภาระที่ต้องขับเคลื่อน

m_{screw} คือ มวลภาระของบอลล์สกรู

J_m คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์

J_{screw} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของเพลาบอลล์สกรู

J_{mass} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของภาระที่กระทำกับแกน z

a คือ รัศมีของเพลาบอลล์สกรู

M_{b1}, M_{b2} คือ แรงเสียดทานจากตลับลูกปืนที่ปลายสกรูทั้งสองข้าง

F คือ ภาระที่กระทำกับแกน z

C คือ ค่าสัมประสิทธิ์วิสคัสแดมป์ของมอเตอร์

L_e คือ ค่าระยะลีดของบอลล์สกรู

z คือ ระยะการเคลื่อนที่

η คือ ค่าประสิทธิภาพในการส่งกำลังของบอลล์สกรู

หลักการการควบคุม (Control Laws)

หลักการทางตรรกศาสตร์ของการควบคุม (control logic elements) คือ การออกแบบเพื่อที่จะจัดการกับสัญญาณคลาดเคลื่อน (error signal) เพื่อให้ได้สัญญาณควบคุม (control signal) ที่ถูกต้อง อัลกอริทึมที่ใช้แก้ปัญหาเพื่อที่จะให้ได้สัญญาณควบคุมที่ถูกต้องนั้น คือ หลักการการควบคุม (control law or control action) สัญญาณคลาดเคลื่อนที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ (non-zero error signal) นั้น จะมีผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของคำสั่งการ (command) หรือเกิดสิ่งรบกวน (disturbance) ขึ้นกับระบบ หน้าที่หลักของตัวควบคุม (controller) คือ การควบคุมระบบให้ได้ค่าสัญญาณควบคุมที่ถูกต้องหรือใกล้เคียงกับค่าที่ออกแบบไว้มากที่สุด จุดประสงค์ของการควบคุมสามารถกล่าวได้โดยสรุป คือ

1. เพื่อลดค่าความคลาดเคลื่อนที่สภาวะคงตัว (steady state error) ให้น้อยลงหรือหมดไป
2. เพื่อลดระยะเวลา (settling time) เข้าสู่สภาวะคงตัวให้สั้นลง
3. เพื่อลดค่าการแกว่งสูงสุด (maximum overshoot) ของระบบให้มีค่าน้อยลง

พื้นฐานของการควบคุม

พื้นฐานของการควบคุมโดยทั่วไปนั้น จะประกอบด้วย การควบคุมแบบพื้นฐานทั้ง 3 คือ

1. การควบคุมแบบ พี. (proportional control)
2. การควบคุมแบบ ไอ. (integral control)
3. การควบคุมแบบ ดี. (derivative control)

ซึ่งผลของการควบคุมแต่ละแบบนี้มีข้อดีแตกต่างกัน คือ การควบคุมแบบ พี. จะทำให้การตอบสนองของระบบรวดเร็วขึ้น การควบคุมแบบ ไอ. จะมีหน้าที่ลดค่าความคลาดเคลื่อนที่สถานะคงตัว (steady state error) ให้น้อยลง ส่วนการควบคุมแบบ ดี. นั้น เปรียบเสมือนเป็นการเพิ่มแดมปีงให้กับระบบ ซึ่งจะทำให้ระบบมีเสถียรภาพมากขึ้น เมื่อใช้ควบคู่กับการควบคุมแบบพี. และการควบคุมแบบ ไอ. ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ ได้มีการนำข้อดีของการควบคุมพื้นฐานทั้ง 3 แบบ มาประกอบกัน เป็นการควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. (proportional plus integral plus derivative control) ซึ่งจะกล่าวในลำดับต่อไป

การควบคุมแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Control)

แม้ว่าในกระบวนการต่างๆ โดยทั่วไป จะเป็นแบบต่อเนื่องของเวลา (continuous in time) แต่กระบวนการต่างๆ ในคอมพิวเตอร์จะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete) ของช่วงเวลา เนื่องจาก การประมวลผลและการแสดงค่าผลลัพธ์ต่างๆ นั้น ต้องอาศัยการสุ่มข้อมูล (sampling) ตามค่าสัญญาณความถี่นาฬิกาของเครื่องคอมพิวเตอร์นั้นๆ นั่นก็เป็นเหตุผลหลักที่จะใช้ในการออกแบบโปรแกรมชุดควบคุมให้มีลักษณะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องของเวลา (discrete controller) ซึ่งการควบคุมแบบต่างๆ นั้นมีดังนี้คือ

1. การควบคุมแบบ พี. (Proportional Control)

การควบคุมแบบ พี. นั้น ค่าการควบคุม จะเป็นสัดส่วนกับค่าความคลาดเคลื่อนตามสมการ

$$m(t) = K_p e(t) \quad (4-16)$$

ซึ่ง $m(t)$ คือ ค่าการควบคุม (manipulation value)

K_p คือ ค่าเกนควบคุมแบบ พี. (the controller proportionality constant or gain)

$e(t)$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (error value)

ซึ่งเมื่อเขียนสมการที่ (4-16) ให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete form) จะได้เป็น

$$m_n = K_p e_n \quad (4-17)$$

ถ้าคิดสมการถอยไป 1 คาบการสุ่ม (sampling period) จะได้

$$m_{n-1} = K_p e_{n-1} \quad (4-18)$$

การเปลี่ยนค่าการควบคุมเกิดจากการนำสมการที่ (4-17) มาลบกับสมการที่ (4-18) จะได้

$$\Delta m_n = m_n - m_{n-1} = K_p (e_n - e_{n-1}) \quad (4-19)$$

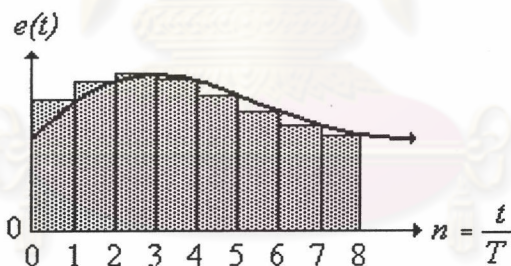
2. การควบคุมแบบ ไอ. (Integral Proportional Control)

การควบคุมแบบไอ. นั้น ค่าการควบคุมจะเป็นสัดส่วนกับค่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนเทียบกับเวลา ตามสมการ

$$m(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4-20)$$

ซึ่ง K_i คือค่าเกนควบคุมแบบไอ. (the integral controller gain)

$$\int_0^{t=nT} e(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^n e_j T$$



รูปที่ 4.6 การอินทิเกรตแบบไม่ต่อเนื่องโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า

(Discrete integration using backward rectangular rule.)

จากรูปที่ 4.6 พื้นที่ของความคลาดเคลื่อนใต้กราฟเทียบกับเวลานั้น สามารถประมาณค่าได้ โดยนับผลรวมพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าใต้เส้นโค้ง (rectangular area under the continuous error curve) ซึ่งเป็นค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนจุดหนึ่งๆกับช่วงเวลาในการสุ่มค่า ซึ่งผลที่ได้ จะเป็นไปตามสมการ

$$m_n = K_i \sum_{j=1}^n T e_j \quad (4-21)$$

เขียนสมการใหม่จะได้

$$m_n = K_i \sum_{j=1}^{n-1} Te_j + K_i Te_n \quad (4-22)$$

และจากสมการที่ (4-21) จะได้ว่า

$$m_{n-1} = K_i \sum_{j=1}^{n-1} Te_j \quad (4-23)$$

นำสมการที่ (4-22) มาลบกับสมการที่ (4-23) จะได้

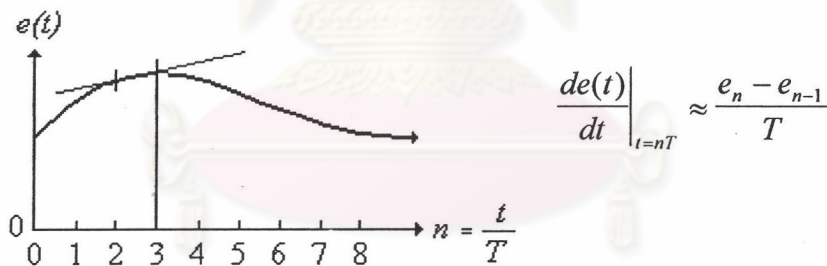
$$\Delta m_n = m_n - m_{n-1} = K_i Te_n \quad (4-24)$$

ซึ่งสมการที่ได้ก็คือค่าประมาณค่าการเพิ่มขึ้นของค่าควบคุมแบบไม่ต่อเนื่องของการควบคุมแบบอินทิกรัล (the incremental discrete approximation of integral control action)

3. การควบคุมแบบ ดี. (Derivative Control)

การควบคุมแบบ ดี. นั้น ค่าการควบคุม จะเป็นสัดส่วนกับค่าดิฟเฟอเรนเชียลของความคลาดเคลื่อนเทียบกับเวลา ตามสมการ

$$m(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4-25)$$



รูปที่ 4.7 การดิฟเฟอเรนเชียลแบบไม่ต่อเนื่องโดยใช้กฎผลต่าง

(Discrete differentiation using backward difference rule.)

จากรูปที่ 4.7 การประมาณค่าผลต่างย้อนกลับ (backward difference approximation) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่องได้ตามสมการ

$$m_n = K_d \left(\frac{e_n - e_{n-1}}{T} \right) \quad (4-26)$$

ดังนั้นจะได้

$$\Delta m_n = m_n - m_{n-1} = \frac{K_d}{T} (e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2}) \quad (4-27)$$

4. การควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. (PID Control)

การควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. นั้น นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย เนื่องจากเป็นการผสมผสาน การควบคุมแบบต่างๆ เข้าไว้ด้วยกัน ซึ่งสมการการควบคุมเป็นดังสมการ

$$\Delta m_n = (\Delta m_n)_p + (\Delta m_n)_i + (\Delta m_n)_d \quad (4-28)$$

นำสมการที่ (4-19), (4-24) และ (4-27) มารวมกัน จะได้

$$\Delta m_n = m_n - m_{n-1} = K_0 e_n + K_1 e_{n-1} + K_2 e_{n-2} \quad (4-29)$$

โดยที่

$$K_0 = K_p + K_i T + \frac{K_d}{T} \quad (4-30)$$

$$K_1 = -K_p - \frac{2K_d}{T} \quad (4-31)$$

$$K_2 = \frac{K_d}{T} \quad (4-32)$$

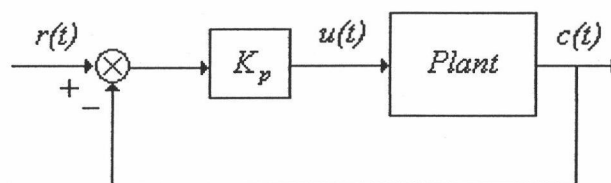
จากสมการที่ (4-30), (4-31) และ (4-32) เราจะนำมาเขียนโปรแกรมชุดควบคุมต่อไป

การออกแบบค่าเกนของตัวควบคุมแบบ พี. ไอ. ดี. (Tuning rules for PID controllers)

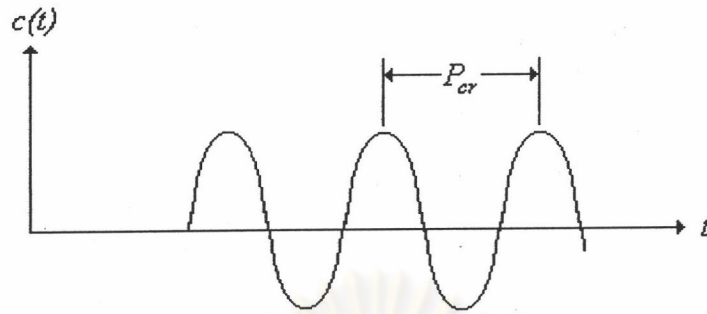
ในการออกแบบหาค่าเกนของตัวควบคุมนั้น จะใช้การออกแบบตามวิธีของ Ziegler-Nichols เนื่องจากขั้นตอนการหาค่าเกนไม่ยุ่งยากซับซ้อน มีความรวดเร็ว แม่นยำ และให้ค่า สัญญาณตอบสนองที่ดี คือ มีค่าเปอร์เซ็นต์การแกว่งสูงสุด (maximum overshoot) ของสัญญาณ ตอบสนอง (step response) ไม่เกิน 25 % ซึ่งหลักการออกแบบค่าเกนของตัวควบคุมตามหลักการ ของ Ziegler-Nichols วิธี Ultimate cycle method ซึ่งมีรายละเอียด คือ

Ultimate cycle method

วิธีการนี้ ขั้นตอนแรก ให้เรากำหนด $T_i = \infty$ และ $T_d = 0$ ใช้การควบคุมแบบ พี. เพียง อย่างเดียว ดังรูปที่ 4.8 ต่อไปก็ค่อยๆ เพิ่มค่า K_p จาก 0 จนถึงค่าวิกฤติ K_{cr} ค่าหนึ่ง ซึ่งจะทำให้ ระบบเกิดการสั่นเป็นครั้งแรก (the output first exhibits sustained oscillations) ซึ่งค่าเกนวิกฤติ K_{cr} และค่าคาบวิกฤติ P_{cr} นั้นสามารถหาได้จากการทดลองดังเช่นรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.8 การควบคุมลูปปิดของระบบควบคุมแบบ พี.



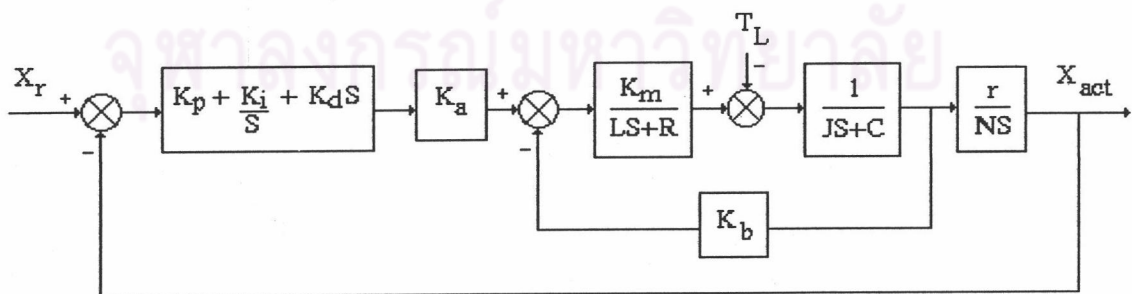
รูปที่ 4.9 การคงสภาวะการสั่นที่คงที่ (sustained oscillation) ที่คาบเวลา P_{cr}

Ziegler และ Nichols แนะนำให้เลือกค่า $K_p = 0.6K_{cr}$, $T_i = 0.5P_{cr}$ และ $T_d = 0.125P_{cr}$ ซึ่งเมื่อสังเกตว่าการปรับค่าตัวควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ด้วยวิธีนี้จะได้ว่า

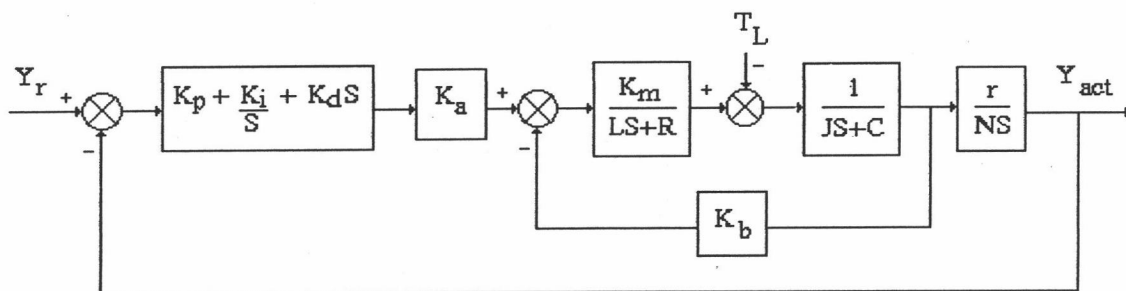
$$\begin{aligned} G_c(s) &= 0.6K_{cr} \left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125P_{cr}s \right) \\ &= 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s} \end{aligned} \quad (4-33)$$

ดังนั้นจะพบว่าตัวควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. นี้ จะมีโพล (pole) ที่จุดเริ่มกำเนิด (origin) อยู่ 1 ค่า และซีโร อยู่ 2 ค่า ที่ตำแหน่ง $s = -4/P_{cr}$

การออกแบบค่าเกินของตัวควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนเอ็กซ์และแกนวาย



รูปที่ 4.10 แผนภาพการควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนเอ็กซ์



รูปที่ 4.11 แผนภาพการควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนวาง

ซึ่งฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ (Plant's Transfer Function) ของทั้ง 2 แกนจะเหมือนกัน คือ

$$G_p(s) = \frac{K_a K_m (r / N)}{LJs^3 + (LC + RJ)s^2 + (RC + K_b K_m)s} \quad (4-34)$$

ซึ่งค่าพารามิเตอร์ของทั้ง 2 แกนจะเหมือนกันทุกตัว ยกเว้นค่าโมเมนต์ความเฉื่อยเพียงค่าเดียวที่แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย ซึ่งค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ มีค่าดังนี้ คือ

$$C = 0.1 \text{ oz-in/krpm} = 6.7446 \times 10^{-6} \text{ N-m/(rad/s)}$$

$$K_a = 4$$

$$K_b = 5.8 \text{ V/krpm} = 5.54 \times 10^{-2} \text{ V/(rad/s)}$$

$$K_m = 7.8 \text{ oz-in/A} = 0.055 \text{ N-m/A}$$

$$L = 2.3 \text{ mH}$$

$$N = 100$$

$$r = 0.025 \text{ m}$$

$$R = 1.1 \text{ ohm}$$

$$M_x = 20.0 \text{ kg}$$

$$M_y = 12.0 \text{ kg}$$

$$J_x = M_x r^2 / N^2 = 20.0 \times 0.025^2 / 100^2 = 1.25 \times 10^{-6} \text{ kg-m}^2$$

$$J_y = M_y r^2 / N^2 = 12.0 \times 0.025^2 / 100^2 = 0.75 \times 10^{-6} \text{ kg-m}^2$$

$$J_m = 5.5 \times 10^{-3} \text{ oz-in-s}^2 = 3.89 \times 10^{-5} \text{ kg-m}^2$$

$$J_{Tx} = J_x + J_m = 4.015 \times 10^{-5} \text{ kg-m}^2$$

$$J_{Ty} = J_y + J_m = 3.965 \times 10^{-5} \text{ kg-m}^2$$



เนื่องจากค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแกนเอ็กซ์และแกนวายมีค่าต่างกันน้อยมาก ดังนั้นในการออกแบบ จึงใช้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อย $J \approx 4 \times 10^{-5} \text{ kg-m}^2$ แทนค่าทั้งหมดลงในสมการที่ (4-34) จะได้

$$G_p(s) = \frac{1}{(1.67 \cdot 10^{-3})s^3 + 0.80s^2 + 0.1347s} \quad (4-35)$$

ใช้วิธี Ultimate Cycle Method โดยการเซตค่า $T_i = \infty$ และ $T_d = 0$ ดังนั้นฟังก์ชันโอนถ่ายแบบปิดคือ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{1.67 \cdot 10^{-3}s^3 + 0.80s^2 + 0.1347s + K_p} \quad (4-36)$$

จากสมการ (4-36) จะได้สมการค่าแบริคเตอร์สติก คือ

$$1.67 \cdot 10^{-3}s^3 + 0.80s^2 + 0.1347s + K_p = 0 \quad (4-37)$$

ค่าของ K_p ที่จะทำให้ระบบเริ่มเกิดการสั่นคงตัว (sustained oscillation) นั้น สามารถหาได้จากวิธีของ Routh's stability criterion. ซึ่งจากสมการ (4-37) จะได้

s^3	$1.67 \cdot 10^{-3}$	0.1347
s^2	0.80	K_p
s^1	$0.10776 - 1.67 \cdot 10^{-3} K_p$	
s^0	0.80	K_p

การวิเคราะห์คือ สังเกตค่าสัมประสิทธิ์ของคอลัมน์ที่ 2 จะพบว่าการสั่นคงตัว จะเกิดขึ้นเมื่อ

$K_p = 0.10776 / 1.67 \cdot 10^{-3} = 64.527$ ดังนั้นค่าเกณฑ์วิกฤต K_{cr} คือ

$$K_{cr} = 64.527$$

เซตค่าเกณฑ์ K_p ให้มีค่าเท่ากับ K_{cr} แทนค่าลงในสมการ (4-37) จะได้

$$1.67 \cdot 10^{-3}s^3 + 0.80s^2 + 0.1347s + 64.527 = 0 \quad (4-38)$$

การหาค่าความถี่ของการสั่นคงตัว หาโดยการแทนค่า $s = j\omega$ ลงในสมการที่ (4-38) จะได้

$$1.67 \cdot 10^{-3}(j\omega)^3 + 0.80(j\omega)^2 + 0.1347(j\omega) + 64.527 = 0$$

$$(0.1347 - 1.67 \cdot 10^{-3}\omega^2)j\omega + (64.527 - 0.80\omega^2) = 0$$

จะได้ $\omega = 8.98$ เราจะหาค่าของคาบเวลาในการสั่นได้จากสมการ

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8.98} = 0.70$$

เราสามารถหาค่า K_p, T_i , และ T_d ได้ดังนี้

$$K_p = 0.6K_{cr} = 38.72$$

$$T_i = 0.5P_{cr} = 0.35$$

$$T_d = 0.125P_{cr} = 0.0875$$

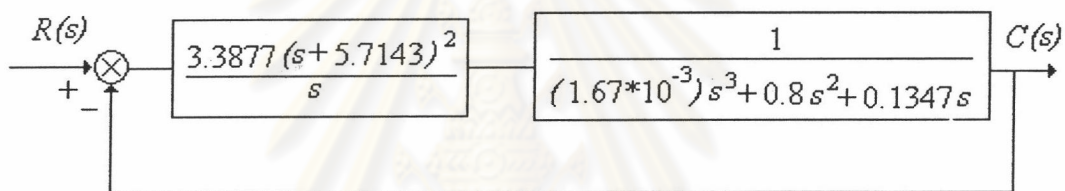
$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = 110.63$$

$$K_d = K_p T_d = 3.39$$

ดังนั้นเราหาฟังก์ชันถ่ายโอนของชุดควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนเอ็กส์และแกนวาย ได้จากสมการที่ (4-33) คือ

$$G_c(s) = \frac{3.3877(s+5.7143)^2}{s} \quad (4-39)$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของชุดควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนเอ็กส์และแกนวายที่ได้ จะพบว่า ชุดควบคุมจะมีโพล (pole) ที่จุดกำเนิด (origin) อยู่ 1 ค่า และซีโร อยู่ 2 ค่า ที่ตำแหน่ง $s = -5.7143$ ดังนั้นแผนภาพการควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนเอ็กส์และแกนวาย จะเป็นดังรูป



รูปที่ 4.12 แผนภาพการควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนเอ็กส์และแกนวาย

จากรูปที่ 4.12 จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบทั้งหมดของแกนเอ็กส์และแกนวาย คือ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3.3877s^2 + 38.7167s + 110.6193}{(1.67 \cdot 10^{-3})s^4 + 0.8s^3 + 3.5224s^2 + 38.7167s + 110.6193} \quad (4-40)$$

โดยที่

C คือ ค่าวิสคัสแดมป์บิ่งของมอเตอร์

K_a คือ ค่าเกนขยายโวลต์เตจของแอมพลิฟายเออร์

K_b คือ ค่าโวลต์เตจย้อนกลับของมอเตอร์

K_m คือ ค่าเกนคั้งที่ของมอเตอร์

L คือ ค่าความเหนี่ยวนำในขดลวดอาร์เมเจอร์

N คือ อัตราทดของชุดเฟืองทด

r คือ รัศมีของมูเลย์

R คือ ค่าความต้านทานในขดลวดอาร์เมเจอร์

M_x คือ มวลของแกนเอ็กส์

M_y คือ มวลของแกนวาย

J_x คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของแกนเอ็กซ์

J_y คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของแกนวาย

J_m คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์

J_{Tx} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรวมของแกนเอ็กซ์

J_{Ty} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรวมของแกนวาย

J คือ โมเมนต์ความเฉื่อยสูงสุดของแกนเอ็กซ์เทียบกับแกนวาย

K_{cr} คือ ค่าเกณฑ์วิกฤต

P_{cr} คือ ค่าคาบเวลาวิกฤต

ω คือ ค่าความถี่ในการสั่นของระบบ

T_d คือ ค่าเวลาแบบดิวเฟอเรนเชียล

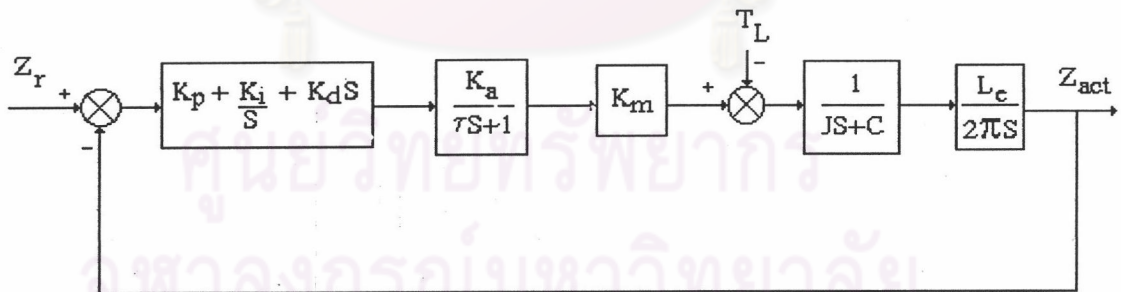
T_i คือ ค่าเวลาแบบอินทิกรัล

K_p คือ ค่าเกนแบบ พี.

K_i คือ ค่าเกนแบบ ไอ.

K_d คือ ค่าเกนแบบ ดี.

การออกแบบค่าเกนของตัวควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนแซด



รูปที่ 4.13 แผนภาพการควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนแซด

ซึ่งฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ (Plant's Transfer Function) ของแกนแซด คือ

$$G_p(s) = \frac{K_a K_m (L_c / 2\pi)}{\tau J s^3 + (\tau C + J) s^2 + C s} \quad (4-41)$$

ซึ่งค่าพารามิเตอร์ของแกนแฮดเป็นดังนี้

$$C = 0.3 \text{ oz-in/krpm} = 2.0234 \times 10^{-5} \text{ N-m/(rad/s)}$$

$$K_a = 7.68$$

$$K_m = 11.8 \text{ oz-in/A} = 0.0833 \text{ N-m/A}$$

$$L_e = 0.005 \text{ m}$$

$$\tau = 0.0015 \text{ s}$$

$$J_{screw} = Mr^2 = 0.7 \times 0.008^2 = 4.48 \times 10^{-5} \text{ kg-m}^2$$

$$J_{nut} = m \left(\frac{L_e}{2\pi} \right)^2 = 0.5 \times (0.005/2\pi)^2 = 3.1663 \times 10^{-7} \text{ kg-m}^2$$

$$J_m = 0.0078 \text{ oz-in-s}^2 = 5.51 \times 10^{-5} \text{ kg-m}^2$$

$$J = J_{screw} + J_{nut} + J_m = 1.0022 \times 10^{-4} \text{ kg-m}^2$$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการที่ (4-41) จะได้

$$G_p(s) = \frac{1}{(2.95 \times 10^{-4})s^3 + 0.20s^2 + 0.04s} \quad (4-42)$$

ใช้วิธี Ultimate Cycle Method โดยการเซตค่า $T_i = \infty$ และ $T_d = 0$ ดังนั้นฟังก์ชันโอนถ่ายแบบปิดคือ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{2.95 \times 10^{-4} s^3 + 0.20s^2 + 0.04s + K_p} \quad (4-43)$$

จากสมการ (4-43) จะได้สมการค่าแบริคเตอร์สติก คือ

$$2.95 \times 10^{-4} s^3 + 0.20s^2 + 0.04s + K_p = 0 \quad (4-44)$$

ค่าของ K_p ที่จะทำให้ระบบเริ่มเกิดการสั่นคงตัว (sustained oscillation) นั้น สามารถหาได้จากวิธีของ Routh's stability criterion. ซึ่งจากสมการ (4-44) จะได้

s^3	2.95×10^{-4}	0.04
s^2	0.20	K_p
s^1	$\frac{0.008 - 2.95 \times 10^{-4} K_p}{0.20}$	
s^0	K_p	

การวิเคราะห์คือ สังเกตค่าสัมประสิทธิ์ของคอลัมน์ที่ 2 จะพบว่า การสั่นคงตัว จะเกิดขึ้นเมื่อ

$$K_p = 0.008 / 2.95 \times 10^{-4} = 27.12 \text{ ดังนั้นค่าเกณฑ์วิกฤต } K_{cr} \text{ คือ}$$

$$K_{cr} = 27.12$$

เซตค่าเกณฑ์ K_p ให้มีค่าเท่ากับ K_{cr} แทนค่าลงในสมการ (4-44) จะได้

$$2.95 \cdot 10^{-4} s^3 + 0.20 s^2 + 0.04 s + 27.12 = 0 \quad (4-45)$$

การหาค่าความถี่ของการสั่นคงตัว หาโดยการแทนค่า $s = j\omega$ ลงในสมการที่ (4-45) จะได้

$$2.95 \cdot 10^{-4} (j\omega)^3 + 0.20 (j\omega)^2 + 0.04 (j\omega) + 27.12 = 0$$

$$(0.04 - 2.95 \cdot 10^{-4} \omega^2) j\omega + (27.12 - 0.20 \omega^2) = 0$$

จะได้ $\omega = 11.64$ เราจะหาค่าของคาบเวลาในการสั่นได้จากสมการ

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{11.64} = 0.54$$

เราสามารถหาค่า K_p, T_i , และ T_d ได้ดังนี้

$$K_p = 0.6 K_{cr} = 16.27$$

$$T_i = 0.5 P_{cr} = 0.27$$

$$T_d = 0.125 P_{cr} = 0.0675$$

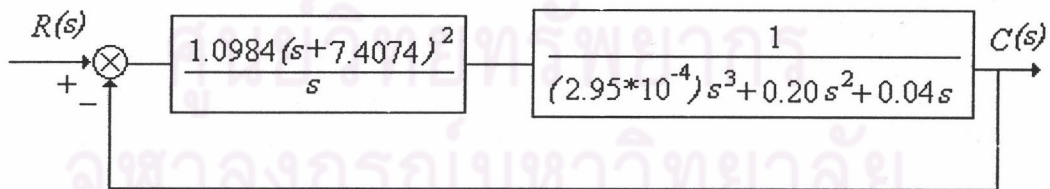
$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = 60.26$$

$$K_d = K_p T_d = 1.10$$

ดังนั้นเราหาฟังก์ชันถ่ายโอนของชุดควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนแซด ได้จากสมการที่ (4-33) คือ

$$G_c(s) = \frac{1.0984(s + 7.4074)^2}{s} \quad (4-46)$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของชุดควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนเอ็กซ์และแกนวายที่ได้ จะพบว่า ชุดควบคุมจะมีโพล (pole) ที่จุดกำเนิด (origin) อยู่ 1 ค่า และซีโร อยู่ 2 ค่า ที่ตำแหน่ง $s = -7.4074$ ดังนั้นแผนภาพการควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนแซด จะเป็นดังรูป



รูปที่ 4.14 แผนภาพการควบคุมแบบ พี.ไอ.ดี. ของแกนแซด

จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบทั้งหมดของแกนแซด คือ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.0984s^2 + 16.2726s + 60.2622}{(2.95 \cdot 10^{-4})s^4 + 0.20s^3 + 1.1384s^2 + 16.2726s + 60.2622} \quad (4-47)$$

โดยที่

- C คือ ค่าวิสคัสแดมปีงของมอเตอร์
 K_a คือ ค่าเกณฑ์ขยายโวลต์เตจของแอมพลิฟายเออร์
 K_m คือ ค่าเกณฑ์คั้งของมอเตอร์
 L_e คือ ค่าระยะหนืดของบอลล์สกรู
 τ คือ ค่าคั้งที่ของคาบเวลาของแอมพลิฟายเออร์
 R คือ ค่าความต้านทานในชุดลวดอาร์เมเจอร์
 J_{screw} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของบอลล์สกรู
 J_{nut} คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของเพลาสวมบอลล์สกรู
 J_m คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์
 J คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรวมของแกนแฮด
 K_{cr} คือ ค่าเกณฑ์วิกฤต
 P_{cr} คือ ค่าคาบเวลาวิกฤต
 ω คือ ค่าความถี่ในการสั่นของระบบ
 T_d คือ ค่าเวลาแบบดรีเฟอเรนซิเอท
 T_i คือ ค่าเวลาแบบอินทิกรัล
 K_p คือ ค่าเกณฑ์แบบ พี.
 K_i คือ ค่าเกณฑ์แบบ ไอ.
 K_d คือ ค่าเกณฑ์แบบ ดี.

การออกแบบโปรแกรมชุดควบคุม

การออกแบบโปรแกรมมีขั้นตอนโดยสรุป คือ

1. เปิดแฟ้มข้อมูลตำแหน่งพิกัดทางเดิน อ่านค่าอ้างอิงเข้ามาทีละ 1 คำสั่ง
2. รับรู้ค่าตำแหน่งจริง เพื่อกำหนดหาค่าความคลาดเคลื่อน ตามค่าคาบเวลาที่กำหนด
3. กำหนดค่าการควบคุม ตามสมการที่ (4-30), (4-31), (4-32) และ (4-29) ตามลำดับ
4. ส่งคำสั่งสัญญาณควบคุมออกไป
5. อัปเดตค่าพารามิเตอร์ต่างๆ
6. ตรวจสอบการสิ้นสุดของแฟ้มข้อมูล ถ้าสิ้นสุดให้หยุดการทำงาน ถ้ายังไม่สิ้นสุด ให้ทำตามขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ 6 ไปจนสิ้นสุดแฟ้มข้อมูลนั้นๆ

การทดลองเปลี่ยนความเร็วตามแนวทางเดิน

การทดลองจะทำการทดลองที่ความเร็วตามแนวทางเดินต่างๆ กัน 3 ค่า คือที่ความเร็ว 5, 10 และ 15 mm./sec. โดยการกำหนดลักษณะของแนวทางเดินเป็นลักษณะ การเคลื่อนที่เป็นวงกลมและการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงที่มีการหักมุมต่างๆกันที่ความเร็ว 5 mm./sec. ซึ่งรายละเอียดจะกล่าวในลำดับต่อไป

1. การทดลองการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

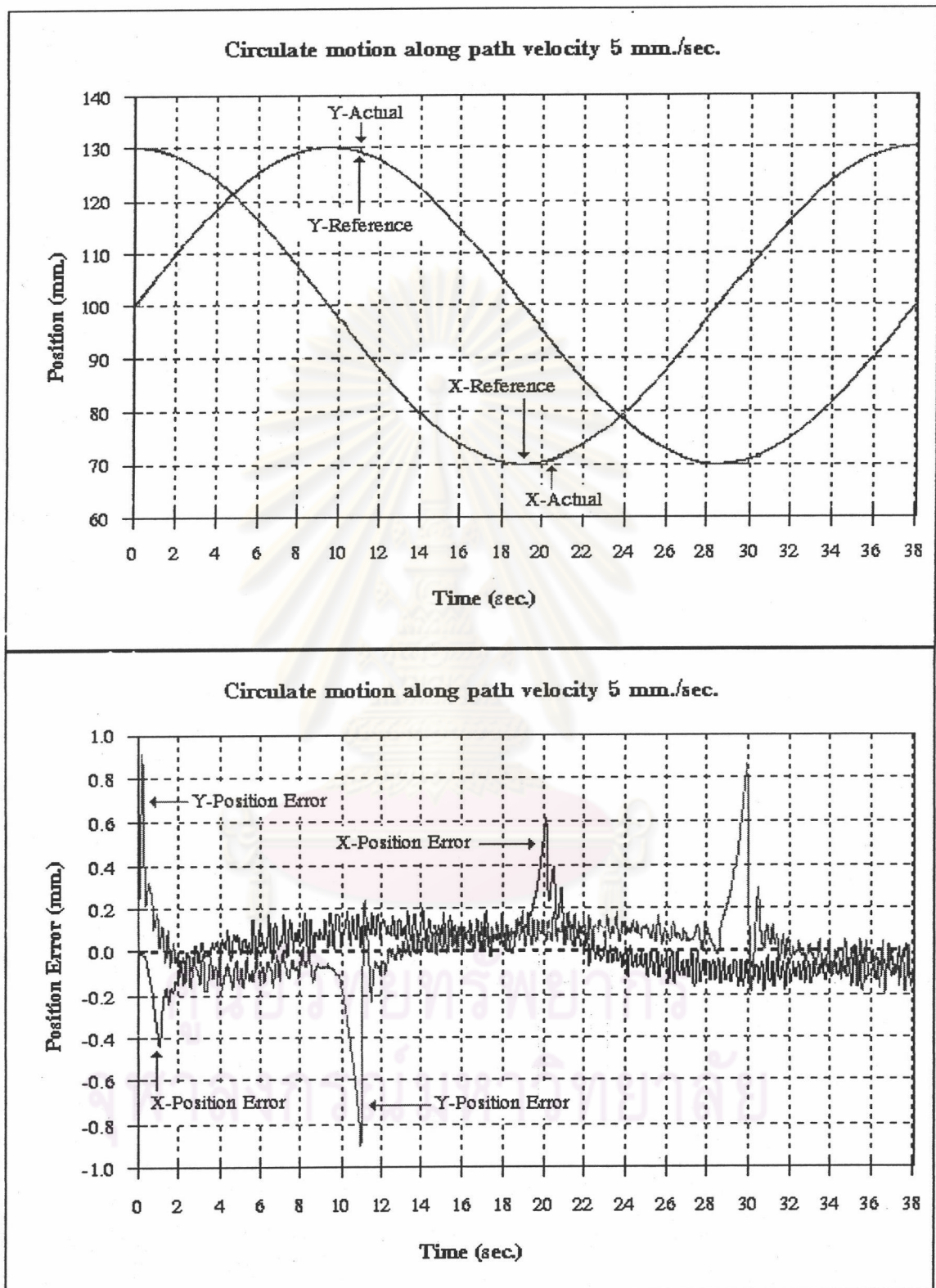
ในการทดลองนี้ กำหนดให้วงกลมมีขนาดรัศมี 30 มม. จุดศูนย์กลางอยู่ที่พิกัดตำแหน่ง (100,100) มม. โดยกำหนดความเร็วตามแนวทางเดินต่างๆ กัน 3 ค่า คือที่ความเร็ว 5, 10 และ 15 mm./sec. ซึ่งผลของการทดลองที่ได้ แสดงดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ตารางแสดงผลการทดสอบความแม่นยำในการเคลื่อนที่เป็นวงกลม ที่ความเร็วตามแนวทางเดินต่างๆ กัน

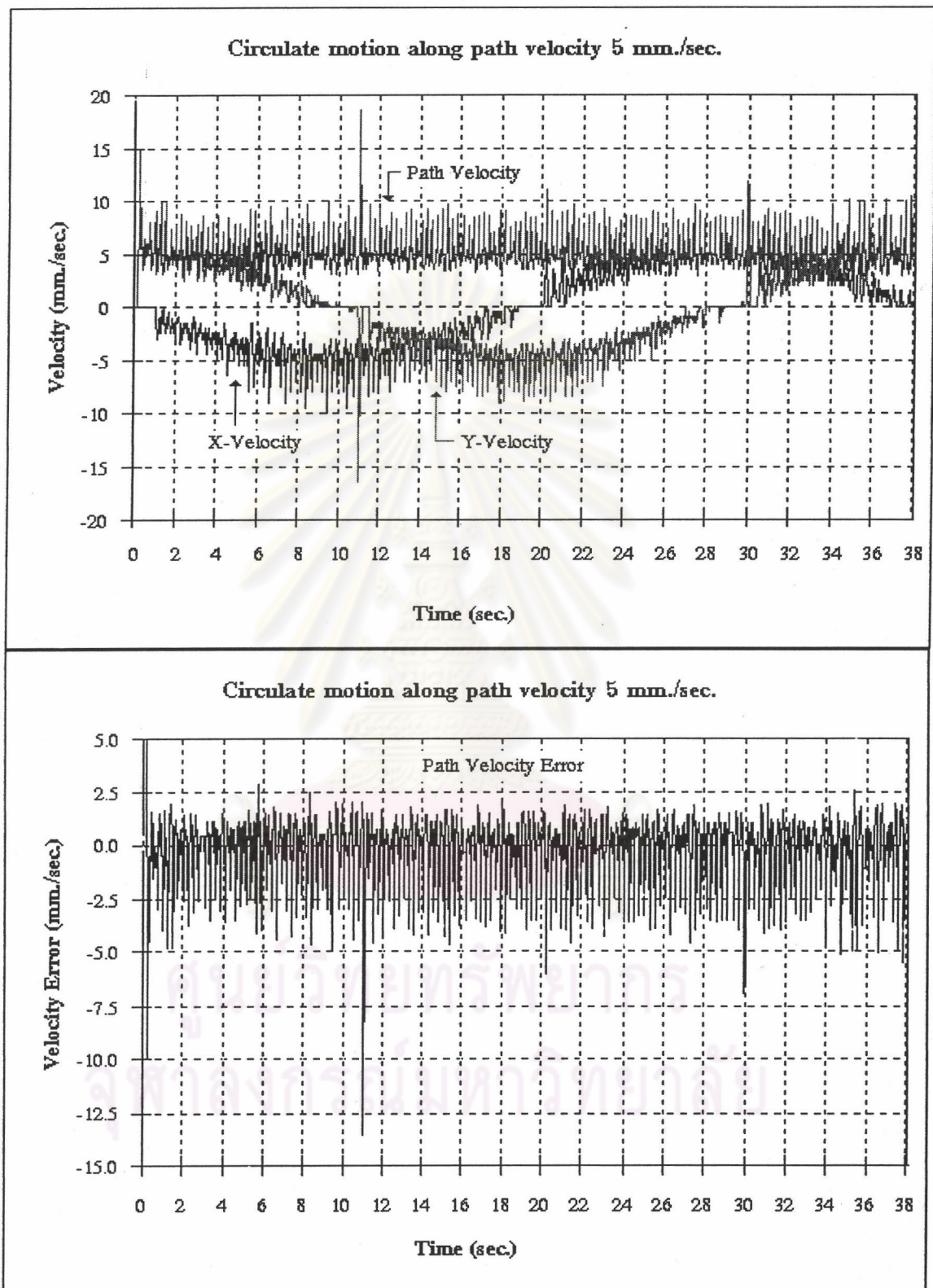
ความเร็วตามแนวทางเดิน (มม./วินาที)	ค่าความผิดพลาดสูงสุด ของตำแหน่ง (มม.)		ค่าความผิดพลาดสูงสุดของ ความเร็วตามแนวทางเดิน (มม./วินาที)
	แกนเอ็กซ์	แกนวาย	
5	0.61	0.92	7.38
10	0.91	1.43	20.07
15	1.19	1.76	31.38

จากตารางที่ 4.1 จะเห็นได้ว่าที่ความเร็วตามแนวทางเดินค่าต่างๆ จะมีค่าความผิดพลาดของตำแหน่งและความเร็วที่น้อยกว่าที่ความเร็วตามแนวทางเดินที่มีค่าสูงกว่า ทั้งนี้เพราะระบบควบคุมที่ใช้ในการควบคุมมีลักษณะเป็นแบบจุดต่อจุด (point to point) ดังนั้นค่าเกินของค่าของสัญญาณควบคุมที่หาได้จะใช้ได้ดีที่ความเร็วช่วงหนึ่งเท่านั้น

จากรูปที่ 4.15 และ 4.16 เป็นกราฟแสดงผลการทดสอบการเคลื่อนที่เป็นรูปวงกลมที่มีความเร็วตามแนวทางเดิน 5 mm./sec. จะเห็นได้ว่าค่าความผิดพลาดของตำแหน่งจะเกิดขึ้นในช่วงแรกของการเคลื่อนที่และช่วงที่มีการกลับทิศทาง โดยเฉพาะในช่วงที่มีการเคลื่อนที่กลับทิศทาง จะมีค่าความผิดพลาดสูงสุด ซึ่งสาเหตุมาจากในช่วงที่มีการกลับทิศทาง ระบบจะผ่านช่วง



รูปที่ 4.15 กราฟแสดงตำแหน่งที่ได้จากการเคลื่อนที่เป็นวงกลม
ที่ความเร็ว 5 mm./sec.



รูปที่ 4.16 กราฟแสดงความเร็วที่ได้จากการเคลื่อนที่เป็นวงกลม
ที่ความเร็ว 5 mm./sec.

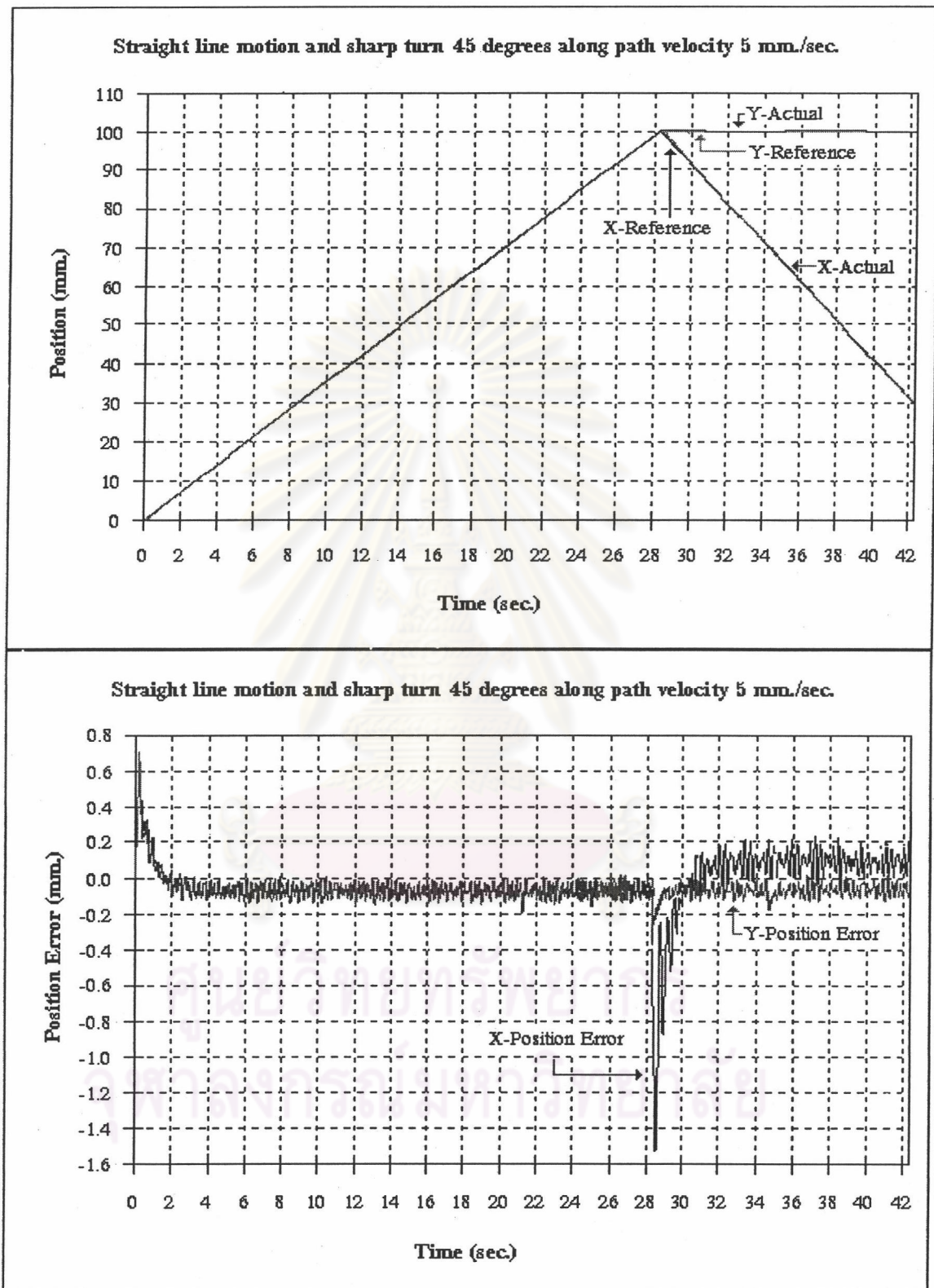
backlash ของชุดเฟืองทด ซึ่งเป็นช่วง non-linear โดยที่ชุดเฟืองทดของมอเตอร์ ที่ใช้ในระบบขับเคลื่อนแนวแกนเอ็กซ์ มีช่วงของ backlash 0.32 มิลลิเมตร ส่วนแกนวายมีช่วงของ backlash 0.45 มิลลิเมตร ซึ่งสังเกตได้จากกราฟในรูปที่ 4.15 จะเห็นได้ว่า จุดที่มีการเปลี่ยนโค้งของจุดอ้างอิง ค่าตำแหน่งของระบบที่เกิดขึ้นจริง จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงขนานกับแกนเวลา ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ในช่วงดังกล่าวระบบไม่มีการเคลื่อนที่ เพราะผ่านช่วง backlash ของชุดเฟืองทด ส่วนรูปที่ 4.16 เป็นกราฟแสดงผลของความเร็วของแต่ละแกน และผลของความเร็วตามแนวทางเดิน และค่าความผิดพลาดของความเร็วตามแนวทางเดิน ซึ่งจะเห็นได้ว่า จุดที่ความเร็วมีค่าผิดพลาดมากคือ จุดที่มีการเปลี่ยนทิศทางในการเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นผลมาจากความผิดพลาดของตำแหน่ง ทั้งนี้เพราะในการออกแบบระบบควบคุมความเร็วนั้น ความถูกต้องของความเร็วจะขึ้นอยู่กับความถูกต้องของตำแหน่ง

2. การทดลองการเคลื่อนที่เส้นตรงที่มีการหักมุม

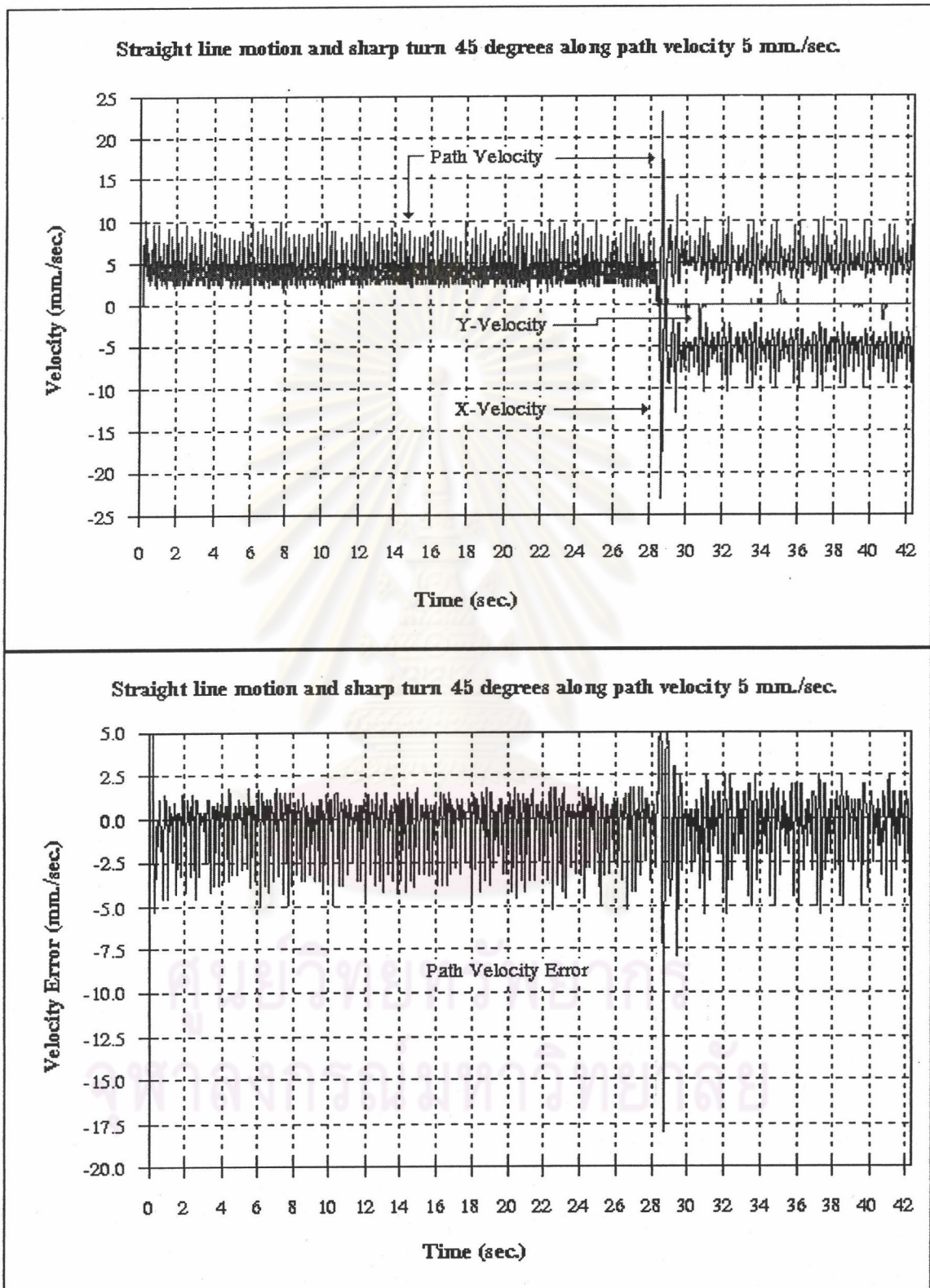
ในการทดลองนี้ กำหนดให้การเคลื่อนที่ที่มีการหักมุมต่างๆ กัน คือ 45 องศา, 75 องศา และ 90 องศา โดยกำหนดความเร็วตามแนวทางเดินที่ความเร็ว 5 mm./sec. ซึ่งผลของการทดลองที่ได้ แสดงดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 ตารางแสดงผลการทดสอบความแม่นยำในการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง ที่มีการหักมุมต่างๆ กัน ที่ความเร็วตามแนวทางเดิน 5 มม./วินาที

มุมหัก (องศา)	ค่าความผิดพลาดสูงสุด ของตำแหน่ง (มม.)		ค่าความผิดพลาดสูงสุดของ ความเร็วตามแนวทางเดิน (มม./วินาที)
	แกนเอ็กซ์	แกนวาย	
45	1.53	0.71	18.00
75	1.41	0.69	15.65
90	1.32	0.65	13.20



รูปที่ 4.17 กราฟแสดงตำแหน่งที่ได้จากการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง
ที่มีการหักมุม 45 องศา ที่ความเร็ว 5 mm./sec.



รูปที่ 4.18 กราฟแสดงความเร็วที่ได้จากการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง
ที่มีการหักมุม 45 องศา ที่ความเร็ว 5 mm./sec.

จากตารางที่ 4.2 จะพบว่าทางเดินของเส้นตรงที่มีการหักมุม 45 องศา จะมีค่าความผิดพลาดของตำแหน่งและความเร็วมากกว่าทางเดินของเส้นตรงที่มีการหักมุม 75 และ 90 องศา เนื่องจากการหักมุมที่แหลมมากๆ นั้น จะทำให้เกิดการกลับทิศทางการเคลื่อนที่อย่างรวดเร็ว ซึ่งจะมีผลกับระบบโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบโดยตรง และยังมีผลมาจากชุดเฟืองทดในลักษณะของ backlash

จากรูปที่ 4.17 และ 4.18 เป็นกราฟแสดงการทดสอบผลความแม่นยำ เมื่อแนวทางเดินเป็นเส้นตรงที่มีการหักมุม 45 องศา โดยมีความเร็วตามแนวทางเดิน 5 mm./sec. จะเห็นได้ว่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้น จะมีค่ามากที่สุดเมื่อมีการเคลื่อนที่กลับทิศทาง ซึ่งในกรณีการเคลื่อนที่ของเส้นตรงที่มีการหักมุม ค่าความผิดพลาดของตำแหน่งที่เกิดขึ้นจะมีทั้งผลจากค่า backlash ของชุดเฟืองทด และผลของโมเมนต์ของระบบแกน



ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย